Литература

1. **Волконский В. А., Розанов Ю. А.** Некоторые предельные теоремы для случайных функций. I // Теория вероятн. и ее примен. 1959. Т. IV, вып. 2. С. 186–207.
2. **Волконский В. А., Розанов Ю. А.** Некоторые предельные теоремы для случайных функций. II // Теория вероятн. и ее примен. 1961. Т. VI, вып. 2. С. 202–215.
3. **Yoshihara K.** Convergence rates of the invariance principle for absolutely regular sequences // Yokohama Math. J. 1979. V. 27. P. 49–55.
4. **Iosifescu M., Theodorescu R.** Stochastic processes and learning // Berlin: Springer-Verlag, 1969.
5. **Зупаров Т. М.** Оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для абсолютно регулярных случайных величин со значениями в некоторых банаховых пространствах // ДАН СССР. 1983. Т. 272, № 5. С. 1042–1045. ISSN 0002–3264.
6. **Гудинас П. П.** Об аппроксимации распределений сумм зависимых случайных величин со значениями из банахова пространства // Liet. matem. rink. 1983. T. XXIII, № 3. C. 3–21. ISSN 0132–2818.
7. **Зупаров Т. М.** Об оценках скорости сходимости в принципе инвариантности для слабо зависимых случайных величин // Предельные теоремы для вероятностных распределений. Ташкент, Фан, 1985.
8. **Хейер Х.** Вероятностные меры на локально компактных группах. М.: Мир, 1981.
9. **Гренандер У.** Вероятности на алгебраических структурах. М.: Мир, 1965.
10. **Невё Ж.** Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969.
11. **Бурбаки Н.** Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. М.: Наука, 1975.
12. **Гихман И. И., Скороход А. В.** Теория случайных процессов. Т. I. М.: Наука, 1971.

Поступило в редакцию
6.01.1988

Институт математики и кибернетики
Академии наук Литовской ССР

VIENOS APROKSIMACINĖS NELYGYBĖS APIBENDRINIMAI

P. Gudynas

(*Reziumė*)

Nagrinėjamas atsitiktinių topologinės pusgrupės elementų sandaugos pasiskirstymas. Įvertinamas šio pasiskirstymo atsilenkimas pagal variaciją nuo atitinkamų nepriklausomų atsitiktinių elementų sandaugos pasiskirstymo. Naudojantis gautais įvertinimais, įrodomos dvi ribinės teoremos silpnai priklausomiems atsitiktiniams kompaktinės grupės elementams.

GENERALISATIONS OF ONE APPROXIMATIONAL INEGUALITY

P. Gudynas

(*Summary*)

Some estimations of the accuracy in approximation of the distributions of products of dependent random elements of a topological semi-group by the distributions of the products of corresponding independent random elements are received. By means of these estimations two limit theorems for weakly dependent random elements of a compact group are proved.

29 LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1989

УДК 519.21

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИСТИКИ АНДЕРСОНА–ДАРЛИНГА

Р. Э. Зитикис

§1. Введение и основные обозначения

Пусть $X_1, \dots, X_n$ – независимые равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$ случайные величины, $1(A)$ – индикатор множества A, $F_n(x) := n^{-1} \sum_{i=1}^{n} 1(X_i < x)$ – эмпирическая функция распределения.

Рассмотрим статистику „омега-квадрат“

$$\omega_n^2(q) := n \int_0^1 \{F_n(x) - x\}^2 q(x)\, dx$$

с неотрицательной весовой функцией $q(x)$, $x \in [0, 1]$. В частности, при $q \equiv 1$ получим статистику Крамера – Мизеса – Смирнова, а при $q(t) = t^{-1}(1-t)^{-1}$ – статистику Андерсона – Дарлинга (см., например, [1], с. 21).

Обозначим через $U_n(q; x)$ функцию распределения статистики $\omega_n(q)$. Известно [2], что предел $U(q; x) := \lim_{n\to\infty} U_n(q; x)$ существует, если

$$\int_0^1 x(1-x)\, q(x)\, dx < \infty. \tag{1.1}$$

Заметим (см. [1], с. 21), что $U(q; x)$ является распределением случайной величины $\omega^2(q) := \int_0^1 G^2(x)\, dx$, где $G(x)$ – гауссовский центрированный случайный процесс с ковариационной функцией $K(t, s) := \{\min(t, s) - ts\} \sqrt{q(t)\, q(s)}$.

В настоящей работе построены асимптотические разложения для функции распределения $U_n(q; x)$ и ее производных. Доказывается также, что с ростом n степень гладкости функции $U_n(q; x)$ неограниченно возрастает. Наши результаты можно применить к статистикам Крамера – Мизеса – Смирнова и Андерсона – Дарлинга, к статистикам „омега-квадрат“ с кусочно-выпуклым весом q, при этом вес q может иметь конечное число степенных особенностей.

Замечание. Функцию h, заданную на интервале $[0, 1]$, будем называть кусочно-выпуклой, если существует разбиение интервала $[0, 1]$ на конечное число подынтервалов, внутри которых функция h выпукла вверх или вниз.

В ранее появившихся работах [3–15] в случае статистик Крамера – Мизеса – Смирнова и Андерсона – Дарлинга исследовалась сходимость и скорость в случае $q\equiv 1$. В [16, 17] впервые получены асимптотические разложения для производных $U_n^{(d)}(q;x)$ $(d=0, 1,\dots)$. В [16] исследована статистика Крамера–Мизеса–Смирнова; результаты [17] охватывают случай кусочно-гладкого с ограниченной производной и непрерывного на [0, 1] веса q. К сожалению, эти работы не охватывали статистики Андерсона–Дарлинга и статистики „омега-квадрат“ с разрывным весом q. Устранению этого пробела и посвящается настоящая работа.

В работе будем пользоваться следующими обозначениями: $x\vee y=\max(x, y)$, $x\wedge y=\min(x, y)$, $[x]$ – целая часть числа x, $f_n(q;\ t)$ – характеристическая функция статистики $\omega_n^2(q)$. Окончание доказательства обозначим через □.

§2. Формулировка основных результатов

На протяжении всей работы будем предполагать выполнение условия (1.1). Кроме того, будем рассматривать только „нецензурованные“ статистики, т.е. статистики, для которых выполнено условие

$$\inf\{q(x): x\in[0,\ 1]\}=:R>0.$$

Рассмотрим условие: для некоторого целого $M\geqq 0$ существуют интегралы

$$\int_0^1\Big\{\int_0^x tq(t)\,dt\Big\}^M dx,\quad \int_0^1\Big\{\int_x^1(1-t)\,q(t)\,dt\Big\}^M dx. \tag{2.1}$$

Замечание. Ниже доказывается (см. лемму 3.1.2), что (2.1) эквивалентно существованию $E\{\omega_n^2(q)\}^M$.

На q будем накладывать следующее условие: функция q – кусочно-выпуклая, т.е. существует конечное число точек $y_0:=0, y_1,\dots, y_T, y_{T+1}:=1\in[0, 1]$ таких, что на каждом из интервалов $(y_{j-1},\ y_j)$ функция q выпукла вверх или вниз и монотонна. Кроме того, предположим, что существует число $\alpha\geqq 0$ такое, что

$$q(y_j-\varepsilon)\vee q(y_{j-1}+\varepsilon)\leqq c(\alpha)\,\varepsilon^{-\alpha} \tag{2.2}$$

для всех $\varepsilon\in\big(0,\ (y_j-y_{j-1})/2\big)$.

Теорема 2.1. 1. *Пусть* $n=1,\ 2,\dots$ *и выполнены условия* (2.2), (2.1) *с* $M=2$. *Тогда справедлива равномерная оценка*

$$\sup_{x>0}|U_n(q;\ x)-U(q;\ x)|\leqq c(q)/n. \tag{2.3}$$

2. *Пусть* $n=1,\ 2,\dots,\ \mu=1,\ 2,\dots$, *выполнено условие* (2.2) *и для некоторого* $\varepsilon>0$ *выполняется условие* (2.1) *с* $M=\mu(1+\varepsilon)\vee 2$. *Тогда справедлива неравномерная оценка*

$$\sup_{x>0}x^{\mu}|U_n(q;\ x)-U(q;\ x)|\leqq c(q,\ \varepsilon,\ \mu)/n. \tag{2.4}$$

Рассмотрим следующее условие: выполняется условие (2.2); кроме того, функция q непрерывно дифференцируема на интервалах $(y_{j-1},\ y_j)$ и (2.5)

Теорема 2.2. *Пусть* $n=1,\ 2,\dots,\ \mu=0,\ 1,\dots,\ r=1,\ 2,\dots$, *выполнено условие* (2.5) *и для некоторого* $\varepsilon>0$ *выполняется условие* (2.1) *с* $M=\mu(1+\varepsilon)\vee(r+1)$. *Тогда*

$$\sup_{x>0}x^{\mu}\Big|U_n(q;\ x)-U(q;\ x)-\sum_{k=1}^{r-1}n^{-k}A_{2k}U(q;\ x)\Big|\leqslant c(q,\ \varepsilon,\ \mu,\ r)\,n^{-r}. \tag{2.6}$$

Замечание. О членах $A_{2k}\,U(q;\ x)$ вышеприведенного асимптотического разложения смотрите § 6 настоящей работы.

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия* (2.5) *и* (2.1) *с* $M=1$. *Тогда для всех* $n\geqq 4$ *функция* $x\mapsto U_n(q;\ x)$ *имеет* $[n/4]-1$ *ограниченных непрерывных производных.*

Теорема 2.4. *Пусть* $\mu=0,\ 1,\dots,\ \sigma=1,\ 2,\dots,\ r=1,\ 2,\dots$, *выполнено условие* (2.5) *и для некоторого* $\varepsilon>0$ *выполняется условие* (2.1) *с* $M=\mu(1+\varepsilon)\vee(r+1)$. *Тогда для всех* $n\geqq 4(\sigma+2)$

$$\sup_{x>0}x^{\mu}\Big|\Big(\frac{d}{dx}\Big)^{\sigma}\Big\{U_n(q;\ x)-U(q;\ x)-\sum_{k=1}^{r-1}n^{-k}A_{2k}U(q;\ x)\Big\}\Big|\leqq$$
$$\leqq c(q,\ \varepsilon,\ \mu,\ \sigma,\ r)\,n^{-r}. \tag{2.7}$$

§3. Вспомогательные результаты

3.1. Статистика $\omega_n^2(q)$ *и гильбертово пространство* $L_2[0,\ 1]$

Пусть $(\cdot,\ \cdot)$ обозначает скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L_2[0,\ 1]$, $\|\cdot\|:=\sqrt{(\cdot,\ \cdot)}$. Тогда справедлива

Лемма 3.1.1.

$$\omega_n^2(q)=\|S_n\|^2, \tag{3.1.1}$$

где $S_n:=n^{-1/2}\sum_{i=1}^n Y_i$, *а* Y_i *есть* $L_2[0, 1]$-*значные случайные величины, определенные равенством* $Y_i(x):=\{1(X_i<x)-x\}\sqrt{q(x)}$ $\forall x\in[0,\ 1]$. *В частности,* Y_i – *центрированные независимые одинаково распределенные случайные величины с ковариацией* $\operatorname{cov} Y_i=K$, *где*

$$K(x,\ y):=\{x\wedge y-xy\}\sqrt{q(x)\,q(y)}\ \forall\, x\in[0,\ 1].$$

Кроме того, $E\|Y_i\|^2=\int_0^1 x(1-x)\,q(x)\,dx$ *и* $\operatorname{cov} Y_i\geqq RK_0$, *где* K_0 *есть ковариационный оператор броуновского моста, т.е.*

$$K_0(x,\ y)=x\wedge y-xy.$$

Доказательство. Очевидное. □

Лемма 3.1.1, в частности, утверждает, что условие (1.1) эквивалентно существованию математического ожидания статистики $\omega_1^2(q)$. В дальнейшем

Лемма 3.1.2. *$E\{\omega_1^2(q)\}^M$ существует тогда и только тогда, когда существуют интегралы*

$$I_0 := \int_0^1 \left\{ \int_0^x tq(t)\,dt \right\}^M dx, \quad I_1 := \int_0^1 \left\{ \int_x^1 (1-t)\,q(t)\,dt \right\}^M dx.$$

Доказательство. Так как $\|Y_1\|^2 = \int_0^{X_1} t^2 q(t)\,dt + \int_{X_1}^1 (1-t)^2 q(t)\,dt$, а случайная величина X_1 распределена равномерно на интервале $[0, 1]$, то

$$E\|Y_1\|^{2M} = \int_0^1 \left\{ \int_0^x t^2 q(t)\,dt + \int_x^1 (1-t)^2 q(t)\,dt \right\}^M dx =$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^x tq(t)\,dt + \int_x^1 (1-t)\,q(t)\,dt - \int_0^1 t(1-t)\,q(t)\,dt \right\}^M dx.$$

Отсюда уже нетрудно убедиться в эквивалентности существования $E\|Y_1\|^{2M}$ и I_0, I_1. □

Применив представление (3.1.1) для статистики $\omega_n^2(q)$ можно доказать (доказательство смотрите в § 4) следующие утверждения.

Теорема 3.1.3. *Пусть $n=1, 2, \ldots, s=0, 1, \ldots$, выполнено условие (2.5) и для некоторого $\varepsilon>0$ выполняется условие (2.1) с $M=s(1+\varepsilon)\vee 1$. Тогда для любого $k=1, 2, \ldots, n-1$ в области $|t| \geqq n^{3/4}$*

$$|f_n^{(s)}(q;\ t)| \leqq c(q,\ \varepsilon,\ s,\ k)\, n^{-k/\{8\,(8\alpha+3)\}}. \tag{3.1.2}$$

Теорема 3.1.4. *Пусть $n=1, 2, \ldots, s=0, 1, \ldots$, выполнено условие (2.2) и для некоторого $\varepsilon>0$ выполняется условие (2.1) с $M=s(1+\varepsilon)\vee 1$. Тогда для любого $k=1, \ldots, n-1$ в области $n^{3/4} \leqq |t| \leqq n$*

$$|f_n^{(s)}(q;\ t)| \leqq c(q,\ \varepsilon,\ s,\ k)\, n^{-k/\{8\,(4\alpha+3)\}}. \tag{3.1.3}$$

Из теорем 3.1.3 и 3.1.4 немедленно вытекает

Следствие 3.1.5. *Пусть $s=0, 1, \ldots, n=1, 2, \ldots$ и для некоторого $\varepsilon>0$ выполнено условие (2.1) с $M=s(1+\varepsilon)\vee 1$. Пусть, кроме того, выполняется одно из следующих условий:*

a) *условие (2.2) и $n^{3/4} \leqq |t| \leqq n^{\Delta}$ $(\Delta := 1)$;*

b) *условие (2.5) и $n^{3/4} \leqq |t| \leqq n^{\Delta}$ для некоторого $\Delta \geqq 1$. Тогда для любого $k=1, 2, \ldots, n-1$*

$$|f_n^{(s)}(q;\ t)| \leqq c(q,\ \varepsilon,\ s,\ k)\, |t|^{-k/\{8\Delta\,(8\alpha+3)\}}. \tag{3.1.4}$$

3.2. *Еще одно представление статистики $\omega_n^2(q)$*

Лемма 3.2.1. *Пусть для любого $x \in (0, 1)$ существуют интегралы*

Тогда

$$\omega_n^2(q) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{2\,(n-2i+1)}{n} \int_0^{X_i^*} tq(t)\,dt + \right.$$

$$\left. + \frac{2i-1}{n} \int_0^{X_i^*} t^2 q(t)\,dt + \frac{2i-1}{n} \int_{X_i^*}^1 (1-t)^2 q(t)\,dt \right\}, \tag{3.2.1}$$

где $X_1^*, \ldots, X_n^*$ — упорядочение случайных величин $X_1, \ldots, X_n$.

Доказательство. Пусть имеем выборку $x_1, \ldots, x_n$. Упорядочим ее по возрастанию. Получим последовательность $x_1^*, \ldots, x_n^*$, которую для краткости тоже будем обозначать через $x_1, \ldots, x_n$. Тогда неслучайное выражение

$$\omega_n^2(q) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} =$$

$$\left(\text{здесь обозначено}\quad A_{ij} := \int_0^1 \{1(x_i<t)-t\}\{1(x_j<t)-t\}\,q(t)\,dt\right)$$

$$= n^{-1}(2A_1 + A_2), \tag{3.2.2}$$

где $A_1 := \sum_{i<j} A_{ij}$, $A_2 := \sum_i A_{ii}$.

Ясно, что

$$A_1 = \sum_{i<j} \left\{ \int_0^{x_i} t^2 q(t)\,dt - \int_{x_i}^{x_j} t(1-t)\,q(t)\,dt + \int_{x_j}^1 (1-t)^2 q(t)\,dt \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left\{ (n-2i+1) \int_0^{x_i} tq(t)\,dt + (i-1) \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^{x_i} t^2 q(t)\,dt + (i-1) \int_{x_i}^1 (1-t)^2 q(t)\,dt \right\}. \tag{3.2.3}$$

Выражение A_2, как нетрудно убедиться, равно

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^{x_i} t^2 q(t)\,dt + \int_{x_i}^1 (1-t)^2 q(t)\,dt \right\}. \tag{3.2.4}$$

Подставив (3.2.3) и (3.2.4) в (3.2.2), получим утверждение леммы. □

Следствие 3.2.2. *Пусть для любого* $x\in(0,1)$ *существуют интегралы* $\int_0^x tq(t)\,dt$, $\int_x^1 (1-t)\,q(t)\,dt$ *(что эквивалентно выполнению условия* 1.1). *Тогда*

$$\omega_n^2(q)=\sum_{i=1}^n\left\{\frac{2n-2i+1}{n}\int_0^{X_i^*} tq(t)\,dt+\frac{2i-1}{n}\int_{X_i^*}^1 (1-t)\,q(t)\,dt\right\}-$$

$$-n\int_0^1 t(1-t)\,q(t)\,dt. \tag{3.2.5}$$

Следствие 3.2.3. (Представление Андерсона-Дарлинга [4], [1].) *Пусть для любого* $x\in(0,1)$ *существуют интегралы* $\int_0^x q(t)\,dt$, $\int_x^1 (1-t)^2\,q(t)\,dt$. *Тогда*

$$\omega_n^2(q)=\sum_{i=1}^n\left\{2\int_0^{X_i^*} tq(t)\,dt-\frac{2i-1}{n}\int_0^{X_i^*} q(t)\,dt\right\}+$$

$$+n\int_0^1 (1-t)^2\,q(t)\,dt. \tag{3.2.6}$$

Применив представление (3.2.5) к статистике $\omega_n^2(q)$, доказываются (см. § 5) следующие утверждения.

Теорема 3.2.4. *Пусть* $n=1, 2, \ldots, s=0, 1, \ldots$, *выполнено условие* (2.5) *и для некоторого* $\varepsilon>0$ *выполняется условие* (2.1) *с* $M=s(1+\varepsilon)\vee 1$. *Тогда для всех* $t\in R^1$

$$|f_n^{(s)}(q;\ t)|\leqq c(q,\ \varepsilon,\ s)^n(n+1)^{2s}\,n!\,|t|^{-\{[(n+1)/2]-s\}/2}. \tag{3.2.7}$$

Из теоремы 3.2.4 и следствия 3.1.5 (b) немедленно вытекает

Следствие 3.2.5. *Пусть* $n=1, 2, \ldots, s=0, 1, \ldots$, *выполнено условие* (2.5) *и для некоторого* $\varepsilon>0$ *выполняется условие* (2.1) *с* $M=s(1+\varepsilon)\vee 1$. *Тогда для любого* $A>0$ *в области* $|t|\geqq n^{3/4}$

$$|f_n^{(s)}(q;\ t)|=O(|t|^{-A}). \tag{3.2.8}$$

§4. Доказательство теорем 3.1.3 и 3.1.4

4.1. Лемма о симметризации

Лемма 4.1.1. *Пусть* $D\geqq 1$ — *целое число,* Z — $L_2[0,\ 1]$*-значная случайная величина, имеющая* $2s(1+1/(2D-1))$ *абсолютных моментов. Обозначим*

$$U:=n^{-1/2}\sum_{i=1}^r Z_i,\quad V:=n^{-1/2}\sum_{i=r+1}^n Z_i,$$

где $Z_1,\ldots,\ Z_n$ — *независимые копии случайной величины* Z. *Тогда*

$$|E\|U+V\|^{2s}\exp\{it\|U+V\|^2\}|\leqq$$

где $Z_1^1,\ \ldots,\ Z_{rD}^1,\ Z_1^2,\ \ldots,\ Z_{rD}^2$ — *независимые копии случайной величины* Z; $\tau:=t/n$, *а постоянная* c *зависит только от* s, D *и* $E\|Z\|^{2s(1+1/(2D-1))}$.

Доказательство. Так как $\|U+V\|^2=\|U\|^2+\|V\|^2+2(U,\ V)$, то

$$\Delta:=E\|U+V\|^{2s}\exp\{it\|U+V\|^2\}=$$

$$=E\{\|U\|^2+\|V\|^2+2(U,\ V)\}^s\exp\{it(\|U\|^2+\|V\|^2+2(U,\ V))\}.$$

Применив разложение в степенной ряд

$$(a+b+c)^s=\sum\nolimits^* C_s(k,\ l,\ m)\,a^k b^l c^m,$$

где $\sum^*$ обозначает суммирование по всем наборам $(k,\ l,\ m)$, $k,\ l,\ m\geqq 0$, $k+l+m=s$, а затем представив скалярное произведение $(U,\ V)$ в координатной форме $\sum_p (U,\ e_p)(V,\ e_p)$, где $\{e_p\}_{p=1}^\infty$ — полный ортонормированный базис в пространстве $L_2[0,\ 1]$, получим

$$\Delta=\sum\nolimits^* C_s(k,\ l,\ m)\,2^m E\|U\|^{2k}\|V\|^{2l}\times$$

$$\times\sum_{p_{(m)}}\prod_{j=1}^m (U,\ e_{p_j})(V,\ e_{p_j})\exp\{it(\|U\|^2+\|V\|^2+2(U,\ V))\}, \tag{4.1.2}$$

где $p_{(m)}:=(p_1,\ldots,\ p_m)$ — мультииндекс.

Докажем оценку

$$\Delta\leqq\sum\nolimits^* C_s(k,\ l,\ m)\,2^m\{E\|V\|^{(2l+m)(1+(2D-1)^{-1})}\}^{(2D-1)/(2D)}I^{1/(2D)}, \tag{4.1.3}$$

где

$$I:=E\left\{\sum_{p_{(m)}}\left|E_U\|U\|^{2k}\prod_{j=1}^m (U,\ e_{p_j})\exp\{it(\|U\|^2+2(U,\ V))\}\right|^2\right\}^D.$$

Ясно, что

$$a:=\Bigl|E\|U\|^{2k}\|V\|^{2l}\sum_{p_{(m)}}\prod_{j=1}^m (U,\ e_{p_j})(V,\ e_{p_j})\times$$

$$\times\exp\{it(\|U\|^2+\|V\|^2+2(U,\ V))\}\Bigr|\leqq E\|V\|^{2l}\sum_{p_{(m)}}\prod_{j=1}^m |(V,\ e_{p_j})|\times$$

$$\times\left|E_U\|U\|^{2k}\prod_{j=1}^m (U,\ e_{p_j})\exp\{it(\|U\|^2+2(U,\ V))\}\right|. \tag{4.1.4}$$

Применив к (4.1.4) неравенство

$$\sum a_{p_1\ldots p_m}b_{p_1\ldots p_m}\leqslant\Bigl\{\sum a^2_{p_1\ldots p_m}\sum b^2_{p_1\ldots p_m}\Bigr\}^{1/2} \tag{4.1.5}$$

Перейдем к оцениванию выражения I.

Пусть $U^1,\ldots,U^D$ — независимые копии случайной величины U. Тогда

$$I=E_V\prod_{d=1}^{D}\sum_{p^d_{(m)}}\Big|E_{U^d}\|U^d\|^{2k}\prod_{j=1}^{m}(U^d,\ e_{p^d_j})\exp\{it\left(\|U^d\|^2+2(U^d,\ V)\right)\}\Big|^2=$$

по определению модуля комплексного числа

$$=E_V\prod_{d=1}^{D}E_{\overline{U}^d}E_{\overline{\overline{U}}^d}\|\overline{U}^d\|^{2k}\|\overline{\overline{U}}^d\|^{2k}\sum_{p^d_{(m)}}\prod_{j=1}^{m}(\overline{U}^d,\ e_{p^d_j})(\overline{\overline{U}}^d,\ e_{p^d_j})\times$$

$$\times\exp\{it\left(\|\overline{U}^d\|^2-\|\overline{\overline{U}}^d\|^2+2\left(\overline{U}^d-\overline{\overline{U}}^d,\ V\right)\right)\}\leqq$$

(здесь $\overline{U}^d$ и $\overline{\overline{U}}^d$ — независимые копии случайной величины U^d)

$$\leqq E\prod_{d=1}^{D}\Big\{\|\overline{U}^d\|^{2k}\|\overline{\overline{U}}^d\|^{2k}\sum_{p^d_{(m)}}\prod_{j=1}^{m}|(\overline{U}^d,\ e_{p^d_j})(\overline{\overline{U}}^d,\ e_{p^d_j})|\Big\}\times$$

$$\times\Big|E_V\exp\Big\{i2t\sum_{d=1}^{D}(\overline{U}^d-\overline{\overline{U}}^d,\ V)\Big\}\Big|. \tag{4.1.6}$$

Применив к (4.1.6) неравенство (4.1.5), а затем — неравенство Гёльдера, получим

$$I\leqq\{E\|U\|^{(2k+m)(1+1/(2D-1))}\}^{2D-1}\times$$

$$\times\Big\{E\Big|E_V\exp\Big\{i2t\sum_{d=1}^{D}(\overline{U}^d-\overline{\overline{U}}^d,\ V)\Big\}\Big|^{2D}\Big\}^{1/(2D)}. \tag{4.1.7}$$

Подставив (4.1.7) в (4.1.3), вспомнив определения случайных величин U и V, применив хорошо известное неравенство Зигмунда—Марцинкевича (см., например [18]), из которого немедленно следуют оценки $E\|U\|^L$, $E\|V\|^L\leqq$ $\leqq c(L)E\|Z\|^L$, получим утверждение леммы. □

Вернемся к статистикам $\omega_n^2(q)$.

Лемма 4.1.2. *Справедлива оценка*

$$I:=\Big|E_Y\exp\Big\{i2\tau\sum_{j=1}^{k}(Y_j^1-Y_j^2,\ Y)\Big\}\Big|\leqq$$

$$\leqq\sum_{m=1}^{2k+1}\Big|\int_{z_{m-1}}^{z_m}\exp\{i2\tau c_m H(x)\}\,dx\Big|, \tag{4.1.8}$$

где $c_m:=\sum^{k}\{1(X_j^1<x)-1(X_j^2<x)\}$, $H(x):=\int^1(1-t)q(t)\,dt-\int_0^x tq(t)\,dt$, а

Доказательство. Нетрудно убедиться, что

$$I\leqq\sum_{m=1}^{2k+1}\Big|\int_{z_{m-1}}^{z_m}\exp\Big\{i2\tau\int_0^1\left(Y_j^1(t)-Y_j^2(t)\right)\left(1(x<t)-t\right)q(t)\,dt\Big\}\Big|\,dx. \tag{4.1.9}$$

После небольших преобразований получим, что для всех $x\in(z_{m-1},\ z_m)$ имеет место равенство

$$\int_0^1 Y_j^1(t)\{1(x<t)-t\}q(t)\,dt=$$

$$=1(x_j^1<x)\Big\{\int_x^1(1-t)q(t)\,dt-\int_0^x tq(t)\,dt\Big\}+d_m(X_j^1)+d(x), \tag{4.1.10}$$

где постоянная $d_m(X_j^1)$ зависит только от m и X_j^1, а $d(x)$ зависит только от x.

Подставив (4.1.10) и аналогичное равенство со случайной величиной Y_j^2 в (4.1.9), получим (4.1.8). □

4.2. Оценка интеграла $\int\exp\{i2\tau c_m H(x)\}dx$

В течение этого параграфа будем предполагать, что $(a,\ b)\subseteq(z_{m-1},\ z_m)$, $m\in\{1,\ \ldots,\ 2k+1\}$, где $z_0,\ldots,\ z_{2k+1}$ определены в лемме 4.1.2, и пользоваться следующими обозначениями: $h_\tau(a,\ b):=\Big|\int_a^b\exp\{i2\tau c_m H(x)\}\,dx\Big|$, $\delta(x)$ — функция, равная 0 в точке 0, а в других точках прямой равна 1.

Лемма 4.2.1. *Пусть функция q непрерывна на интервале $[a,\ b]$, $R\leqq q(x)\leqq$ $\leqq H+1$ $\forall x\in[a,\ b]$. Тогда в области $|\tau c_m|(1+H)(b-a)\leqq\pi/24$*

$$h_\tau(a,\ b)\leqslant(b-a)-\tau^2c_m^2(1/6)R^2(b-a)^3. \tag{4.2.1}$$

В частности, при $|\tau|\geqq\theta\geqq0$

$$h_\tau(a,\ b)\leqq(b-a)-\theta^2\delta(c_m)\{(1/6)R^2\wedge1\}(b-a)^3. \tag{4.2.2}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.3 из [17]. □

Лемма 4.2.2. *Пусть функция q непрерывно дифференцируема на интервале $[a,\ b]$, $q(x)\geqq H\geqq R$ и $|q'(x)|\leqq l$ $\forall x\in[a,\ b]$. Тогда в области $|\tau c_m|H(b-a)\geqq2+$ $+l/H$*

$$h_\tau(a,\ b)\leqq(1/2)(b-a). \tag{4.2.3}$$

В частности, для любого $0\leqq\theta\leqq1/2$

$$h_\tau(a,\ b)\leqq(b-a)-\theta^2\delta(c_m)\{(1/6)R^2\wedge1\}(b-a)^3. \tag{4.2.4}$$

Доказательство. Повторяем доказательство леммы 2.4 из [17]. □

Лемма 4.2.3. *Пусть выполнены условия леммы 4.2.2. Тогда в области $|\tau c_m|H(b-a)\leqq3+l/H$, $|\tau c_m|\geqq2(2+l)(3H+l)^2H^{-4}$ справедлива оценка*

$$h_\tau(a,\ b)\leqq(b-a)-|\tau c_m|(b-a)^3. \tag{4.2.5}$$

В частности, при условии $|\tau|\geqq\theta\leqq1$

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.5. из [17]. □

Из оценок (4.2.2), (4.2.4), (4.2.6) немедленно вытекает

Следствие 4.2.4. *Пусть функция q непрерывно дифференцируема на интервале $[a, b]$, $R \leqq H \leqq q(x) \leqq H+1$ и $|q'(x)| \leqq l$ $\forall x \in [a, b]$. Тогда при условии $b-a \leqq \pi H^4/\{48(1+H)(2+l)(3H+l)^2\}$ в области $|\tau| \geqq \theta \leqq 1/2$ справедлива оценка*

$$h_\tau(a, b) \leqq (b-a) - \theta^2 \delta(c_m) \{(1/6) R^2 \wedge 1\} (b-a)^3. \tag{4.2.7}$$

Теорема 4.2.5. *Пусть выполнено условие* (2.5). *Тогда для любых $u \leqq v$, $(u, v) \subseteqq (z_{m-1}, z_m)$, $m \in \{1, \dots, 2k+1\}$ в области $|\tau| \geqq \theta \leqq 1/2$*

$$h_\tau(u, v) \leqq (v-u) - c\theta^2 \delta(c_m)(v-u)^{8\alpha+3} \tag{4.2.8}$$

с конечной постоянной $c = c(R, T, \alpha)$.

Доказательство. Ясно, что

$$h_\tau(u, v) = \left| \int_u^v \exp\{i2\tau c_m H(x)\}\, dx \right| \leqq \sum_{d=1}^{T+1} \left| \int_{I_d} \exp\{i2\tau c_m H(x)\}\, dx \right|, \tag{4.2.9}$$

где $I_d := (u, v) \cap (y_{d-1}, y_d)$, а точки $\{y_d\}_{d=0}^{T+1}$ определены в (2.5).

Так как множество I_d пустое или связное, то существуют числа $\bar{y}_{d-1} \leqq \bar{y}_d$ такие, что $I_d = (\bar{y}_{d-1}, \bar{y}_d)$. Ясно, что

$$h_\tau(I_d) \leqq 2\varepsilon_d + h_\tau(\bar{I}_d), \tag{4.2.10}$$

где $\bar{I}_d := [\bar{y}_{d-1} + \varepsilon_d, \bar{y}_d - \varepsilon_d]$; $\varepsilon_d := (\bar{y}_d - \bar{y}_{d-1})/3$.

Из монотонности функции q на интервале $(\bar{y}_{d-1}, \bar{y}_d)$ следует

$$\bar{I}_d = \{x : Q_d^\wedge \leqq q(x) \leqq Q_d^\vee\},$$

где

$$Q_d^\wedge := q(\bar{y}_{d-1} + \varepsilon_d) \wedge q(\bar{y}_d - \varepsilon_d), \quad Q_d^\vee := q(\bar{y}_{d-1} + \varepsilon_d) \vee q(\bar{y}_d - \varepsilon_d).$$

Разделим интервал $\bar{I}_d$ на подынтервалы I_{ds}, $s = 1, \dots, S_d$:

$$I_{ds} := \{x : Q_d^\wedge + s \leqq q(x) < Q_d^\wedge + s + 1\}, \quad s = 0, 1, \dots, S_d - 1,$$

где $S_d := [Q_d^\vee - Q_d^\wedge]$, а интервал $I_{dS_d} := \{x : Q_d^\wedge + S_d \leqq q(x) \leqq Q_d^\vee\}$.

Докажем, что

$$S_d \leqq c(\alpha)\varepsilon_d^{-\alpha}. \tag{4.2.11}$$

Из определения числа S_d следует оценка

$$S_d \leqq Q_d^\vee = q(\bar{y}_{d-1} + \varepsilon_d) \vee q(\bar{y}_d - \varepsilon_d). \tag{4.2.12}$$

Вспомним, что на интервале (y_{d-1}, y_d) функция q монотонная, а $(\bar{y}_{d-1}, \bar{y}_d) \subseteqq (y_{d-1}, y_d)$; из (4.2.12) вытекает оценка

$$S_d \leqq q(y_{d-1} + \varepsilon_d) \vee q(y_d - \varepsilon_d),$$

которая совместно с оценками (2.5) доказывает (4.2.11).

Теперь каждый интервал I_{ds} ($s = 0, 1, \dots, S_d$) разделим на подынтервалы I_{dsk}, $k = 1, 2, \dots, K_{ds}$:

где

$$K_{ds} := [\varepsilon_d/\varepsilon],$$

$$\varepsilon := \varepsilon_d \wedge \left(\pi H_{ds}^4 / \{48(1+H_{ds})(1+l_{ds})(3H_{ds}+l_{ds})^2\}\right),$$

а конечные величины H_{ds} и l_{ds} определены следующим образом:

$$H_{ds} := Q_d^\wedge + s, \quad l_{ds} := \sup\{|q'(x)| : x \in I_{ds}\}.$$

Следует отметить, что из выпуклости q вытекает монотонность производной q'. Поэтому $l_{ds} = |q'(x_1)| \vee |q'(x_2)|$, где x_1, x_2 — граничные точки интервала I_{ds}, что, в свою очередь, влечет оценку

$$l_{ds} \leqq |q'(\bar{y}_{d-1} + \varepsilon_d)| \vee |q'(\bar{y}_d - \varepsilon_d)| \leqq c(\alpha)\varepsilon_d^{-\alpha} \tag{4.2.13}$$

(здесь мы воспользовались оценками (2.5)).

Применив вышесказанное (в частности, оценку (4.2.13)), докажем оценку

$$K_{ds} \leqq c\varepsilon_d^{-3\alpha} \tag{4.2.14}$$

с некоторой конечной постоянной $c = c(R, \alpha) > 0$.

В случае $\varepsilon = \varepsilon_d$ оценка (4.2.14) очевидна. Поэтому допустим, что $\varepsilon < \varepsilon_d$. Тогда

$$K_{ds} \leqq \varepsilon_d 48(1+H_{ds})(1+l_{ds})(3H_{ds}+l_{ds})^2/(\pi H_{ds}^4) \leqq c\varepsilon_d^{-3\alpha}.$$

Оценка (4.2.14) полностью доказана.

Теперь перейдем к оценке выражения $\Delta := \left| \int_{\bar{I}_d} \exp\{i2\tau c_m H(x)\}\, dx \right|$.

Так как $\Delta \leqq \sum_{s=1}^{S_d} \sum_{k=1}^{K_{ds}} h_\tau(I_{dsk})$, а по определению множеств I_{dsk} для интегралов $h_\tau(I_{dsk})$ справедлива оценка (4.2.7) с $H = H_{ds}$, $l = l_{ds}$, то

$$\Delta \leqq \sum_{s=1}^{S_d} \sum_{k=1}^{K_{ds}} \{(A_k^s - A_{k-1}^s) - \theta^2 \delta(c_m) c(R) (A_k^s - A_{k-1}^s)^3\} \leqq$$

(здесь $A_{k-1}^s \leqq A_k^s$ — граничные точки множества I_{dsk})

$$\leqq \sum_{s=1}^{S_d} \{(B_s - B_{s-1}) - \theta^2 \delta(c_m) c(R) K_{ds}^{-2} (B_s - B_{s-1})^3\} \leqq$$

(здесь $B_{s-1} \leqq B_s$ — граничные точки множества I_{ds})

$$\leqq \sum_{s=1}^{S_d} \{(B_s - B_{s-1}) - \theta^2 \delta(c_m) c(R, \alpha) \varepsilon_d^{-6\alpha} (B_s - B_{s-1})^3\} \tag{4.2.15}$$

(здесь мы применили оценку (4.2.14)).

Аналогично поступим с суммой по s, применим оценку (4.2.11) и вспомнив, что $\varepsilon_d = (\bar{y}_d - \bar{y}_{d-1})/3$, получим

Подставив (4.2.16) в (4.2.10), а затем следуя уже хорошо известным путем из (4.2.9), получим утверждение теоремы. □

Аналогично, но более просто, доказывается следующая

Теорема 4.2.6. *Пусть выполнено условие* (2.2). *Тогда для любых* $u\leqq v$, $(u,\ v)\subseteq\subseteq(z_{m-1},\ z_m)$, $m\in\{1,\ldots,\ 2k+1\}$ *в области* $1/2\geqq\theta\leqq\tau\leqq 1$

$$h_\tau(u,\ v)\leqq(v-u)-\theta^2\,\delta(c_m)\,c\,(v-u)^{4\alpha+3} \tag{4.2.17}$$

с конечной постоянной $c=c\,(R,\,T,\,k)$ (*число* k *то же самое, что и в лемме* 4.1.2).

Доказательство. Если при доказательстве теоремы 4.2.5 мы пользовались следствием 4.2.4, то при доказательстве оценки (4.2.17) надо воспользоваться леммой 4.2.1. Поэтому несколько изменится определение числа ε, фигурирующего в доказательстве теоремы 4.2.5, но конструкция доказательства останется такой же, как и при доказательстве теоремы 4.2.5. □

4.3. *Доказательство теорем 3.1.3 и 3.1.4*

Лемма 4.3.1. *Для любых* $A,\ B>0$

$$E\exp\left\{-A\sum_{m=1}^{2k+1}\delta\,(c_m)\,(z_m-z_{m-1})^B\right\}\leqq c\,(k,\ B)\,A^{-k/B}, \tag{4.3.1}$$

где $\delta\,(x)$ *и* $z_0,\ldots,\ z_{2k+1}$ *определены в предыдущих пунктах этого параграфа.*

(По поводу доказательства леммы 4.3.1 смотрите лемму 2.7 из [17], или лемму 3.1 из [15].)

Доказательство теоремы 3.1.3. Так как

$$f_n^{(s)}(q;\ t):=\left(\frac{d}{dt}\right)^s E\exp\{it\,\omega_n^2(q)\}=i^s E\{\omega_n^2(q)\}^s\exp\{it\,\omega_n^2(q)\},$$

то применив представление (3.1.1) для статистики $\omega_n^2(q)$, получим

$$|f_n^{(s)}(q;\ t)|=|E\,\|S_n\|^{2s}\exp\{it\,\|S_n\|^2\}|. \tag{4.3.2}$$

К (4.3.2) применим лемму 4.1.1 с числом $D:=1+[(1+\varepsilon^{-1})/2]$. Затем полученное выражение оценим с помощью (4.1.8) и (4.2.8). Получим

$$|f_n^{(s)}(q;\ t)|\leqq c\,(s,\ \varepsilon)\left\{E\left(\sum_{m=1}^{2kD+1}\{z_m-z_{m-1}-\theta^2\,\delta\,(c_m)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\,c\,(R,\ T,\ \alpha)\,(z_m-z_{m-1})^{8\alpha+3}\}\right)^{2D\,(n-k)}\right\}^{1/(4D)}. \tag{4.3.3}$$

Вспомнив, что $\sum\limits_{m=1}^{2kD+1}(z_m-z_{m-1})=1$ и применив неравенство $1-x\leqq\exp\{-x\}$, из (4.3.3) получим оценку

$$|f_n^{(s)}(q;\ t)|\leqq c\,(s,\ \varepsilon)\left\{E\exp\left(-\theta^2\,(n-k)\,c\,(R,\ T,\ \varepsilon,\ \alpha)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\sum_{m=1}^{2kD+1}\delta\,(c_m)\,(z_m-z_{m-1})^{8\alpha+3}\right)\right\}^{1/(4D)},$$

из которой (с применением леммы 4.3.1) вытекает (4.3.4)

Доказательство теоремы 3.1.4 аналогично доказательству теоремы 3.1.3, только в ходе его нужно воспользоваться не оценкой (4.2.8), а оценкой (4.2.17). □

§5. Доказательство теоремы 3.2.4

Ясно, что $f_n^{(s)}(q;\ t)=i^s E\{\omega_n^2(q)\}^s\exp\{it\,\omega_n^2(q)\}$. Так как

$$\omega_n^2(q)=\sum_{i=1}^n Q_i\,(X_i^*)+\Omega,$$

где $\Omega:=-n\int\limits_0^1 v\,(1-v)\,q\,(v)\,dv$,

$$Q_i\,(x):=\frac{2n-2i+1}{n}\int_0^x vq\,(v)\,dv+\frac{2i-1}{n}\int_x^1(1-v)\,q\,(v)\,dv,$$

то применив формулу разложения в степенной ряд

$$(x_0+x_1+\ldots+x_n)^s=\sum\nolimits^* C_s\,(k_0,\ k_1,\ \ldots,\ k_n)\,x_0^{k_0}x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}$$

и заметив, что n чисел имеет $n!$ перестановок, получим

$$f_n^{(s)}(q;\ t)=e^{it\Omega}n!\sum\nolimits^* C_s\,(k_0,\ k_1,\ \ldots,\ k_n)\,\Omega^{k_0}\varphi_{k_1,\ \ldots,\ k_{n+1}}(0), \tag{5.1}$$

где $\varphi_{k_{n+1}}(z)\equiv 1$,

$$\varphi_{k_j,\ \ldots,\ k_{n+1}}(z):=\int_z^1 Q_j^{k_j}(x)\,e^{itQ_j(x)}\,\varphi_{k_{j+1},\ \ldots,\ k_{n+1}}(x)\,dx,\quad j=n,\ n-1,\ \ldots,\ 2,\ 1.$$

(Для краткости записи, в дальнейшем вместо $\varphi_{k_j,\ \ldots,\ k_{n+1}}(z)$ будем писать $\varphi_{j-1}(z)$.)

Из (5.1) следует, что для оценки $f_n^{(s)}(q;\ t)$ достаточно оценить $\varphi_0(0)$. Для этой цели оценим функцию

$$\varphi_{j-1}(z):=\int_z^1 Q_j(x)^{k_j}\,e^{itQ_j(x)}\,\varphi_j(x)\,dx$$

равномерно по всем $z\in[0,\ 1]$. В частности, докажем, что

$$\sup|\varphi_{j-1}(z)|\leqq c\,(q,\ s,\ \varepsilon)\,|t|^{-1/2}\times$$

$$\times\{|t|^{k_j/2}\sup|\varphi_j(z)|+|t|^{(k_j+k_{j+1})/2}\sup|\varphi_{j+1}(z)|\},\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{5.2}$$

Пусть нам уже известны оценки выражений $\varphi_j,\ \varphi_{j+1},\ldots,\ \varphi_n$, которые обозначим соответственно через $\|\varphi_j\|,\ \|\varphi_{j+1}\|,\ldots,\ \|\varphi_n\|$. Ясно, что

$$|\varphi_{j-1}(z)|\leqq\sum^{M_j+1}\left|\int Q_j^{k_j}(x)\,e^{itQ_j(x)}\,\varphi_j(x)\,dx\right|, \tag{5.3}$$

где $V_k := (z,\ 1) \cap (y_{k-1},\ y_k)$, а точки $0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_{M_j} < y_{M_j+1} = 1$ определены следующим образом:

$$\{y_0,\ \ldots,\ y_{M_j+1}\} = \{w_0,\ \ldots,\ w_{T+1}\} \cup \{a_j\} \cup \{b_1,\ \ldots,\ b_{N_j}\},$$

где точки w_i, $i=0,\ldots,T+1$, определены в (2.5), $a_j := (j-1/2)/n$, а b_i, $i=1,\ldots,N_j$, такие точки, что в интервалах $(0,\ b_1)$, $(b_i,\ b_{i+1})$, $(b_{N_j},\ 1)$, $i=1,\ldots,N_j-1$, функция $h_j(x) := (x-a_j)\, q(x)$ была монотонной.

Прежде чем перейти к оцениванию интеграла

$$\Phi_k := \int_{V_k} Q_j^{k_j}(x) \exp\{itQ_j(x)\}\, \varphi_j(x)\, dx,$$

докажем, что существует N такое, что $N_j \leq N$ для всех $j=1,\ldots,n$. Возьмем ин-
тервал $(w_{i-1},\ w_i)$, $i\in\{1,\ldots,\ T+1\}$. В этом интервале функция q выпуклая.
Значит, для любого $a\in[0,\ 1]$ существует разбиение интервала $(w_{i-1},\ w_i)$ на
$N_i(a)$ подынтервалов таких, чтобы функция $h_a(x) := (x-a)\, q(x)$ на каждом
подынтервале была монотонной. Ясно, что $N_i(a) \leq N_i$, для некоторой посто-
янной N_i, не зависящей от a. Тогда за число N можно взять $N_1 + \ldots + N_{T+1}$.

Перейдем к оцениванию Φ_k. Для этой цели разделим множество V_k на два непересекающихся множества Γ_1 и Γ_2

$$\Gamma_1 := V_k \cap \{(y_{k-1},\ y_{k-1} + |t|^{-1/2}) \cup (y_k - |t|^{-1/2},\ y_k)\},$$

$$\Gamma_2 := V_k \backslash \Gamma_1.$$

Отсюда следует разложение

$$\Phi_k = \int_{\Gamma_1} + K, \tag{5.4}$$

где $K := \int_{\Gamma_2}$.

Так как Γ_2 – пустое или связное множество, то существуют числа $A \leq B$ такие, что $\Gamma_2 = [A,\ B]$. Из определения чисел y_i, $i=0,\ldots,\ M_j+1$ вытекает, что на интервале $[A,\ B]$ функция q непрерывно дифференцируема. Значит, в каждой точке этого интервала существуют две производные функции $Q_j(x)$. Поэтому, интегрируя K по частям, получим

$$K = \{Q_j^{k_j}(x)\, \varphi_j(x)\, e^{itQ_j(x)}/Q_j'(x)\, |_A^B - I\}/(it), \tag{5.5}$$

где

$$I := k_j \int_A^B e^{itQ_j(x)} Q_j(x)^{k_j-1} \varphi_j(x)\, dx + \int_A^B e^{itQ_j(x)} Q_j(x)^{k_j} \varphi_j'(x)/Q_j'(x)\, dx -$$

$$- \int_A^B e^{itQ_j(x)} Q_j(x)^{k_j} \varphi_j(x)\, Q_j''(x)/Q_j'(x)^2\, dx.$$

Отметим, что из (2.1) с $M=s$ следует дифференцируемость функции $\varphi_j(x)$.

Оценим $Q_j(x)$ на интервале $[A,\ B]$.

Так как $[A,\ B] \subseteq [|t|^{-1/2},\ 1-|t|^{-1/2}]$, то

$$|Q_j(x)| \leq 2 \int_0^{1-|t|^{-1/2}} vq(v)\, dv + 2 \int_{|t|^{-1/2}}^1 (1-v)\, q(v)\, dv \leq c_1 |t|^{1/2}, \tag{5.7}$$

где $c_1 := 4 \int_0^1 v(1-v)\, q(v)\, dv$.

Теперь докажем оценку

$$\inf\{|Q_j'(x)| : x\in[A,\ B]\} \geq 2R|t|^{-1/2}. \tag{5.8}$$

Так как $Q_j'(x) = 2(x-a_j)\, q(x)$, $a_j \in \{y_i\}_{i=0}^{M_j}$, то из оценок $q(x) \geq R$ и $|x-a_j| \geq$ $\geq |t|^{-1/2}$ $\forall x\in[A,\ B]$ следует (5.8).

Из оценки (5.8) и определения чисел $A \leq B$ немедленно следует оценка

$$\int_A^B |Q_j''(x)|/Q_j'(x)^2\, dx \leq |t|^{1/2}/R \tag{5.9}$$

(здесь нужно заметить, что на интервале $[A,\ B]$ функция $Q_j'(x)$ монотонная).

Воспользовавшись оценками (5.7)–(5.9), оценим выражение K:

$$K \leq c(q,\ s)\, |t|^{-1/2} \{|t|^{k_j/2} \|\varphi_j\| + |t|^{(k_j+k_{j+1})/2} \|\varphi_{j+1}\|\} \tag{5.10}$$

(без ограничения общности можно считать $|t| \geq 1 \vee R^2$).

Оценим интеграл $J_1 := \int_{\Gamma_1} Q_j^{k_j}(x)\, \varphi_j(x) \exp\{itQ_j(x)\}\, dx$.

Нетрудно убедиться, что

$$|J_1| \leq 2^{s+1} \|\varphi_j\| (U_0 + U_1), \tag{5.11}$$

где $U_0 := \int_{\Gamma_1} \left\{\int_0^x vq(v)\, dv\right\}^{k_j} dx$, $U_1 := \int_{\Gamma_1} \left\{\int_x^1 (1-v)\, q(v)\, dv\right\}^{k_j} dx$.

Докажем, что

$$U_0,\ U_1 \leq c(q,\ s,\ \varepsilon)\, |t|^{k_j/2-1/2}. \tag{5.12}$$

Разделим доказательство на два случая:

1) $y_k - y_{k-1} \leq 2|t|^{-1/2}$;

2) $y_k - y_{k-1} > 2|t|^{-1/2}$.

Рассмотрим случай 1). Так как в этом случае $U_0 \leq \int_{y_{k-1}}^{y_k} \left\{\int_0^x vq(v)\, dv\right\}^{k_j} dx$, то при $k_j = 0$ оценка (5.12) тривиальна. Поэтому пусть $k_j \neq 0$ (без ограничения общности можно считать $s \neq 0$). Тогда

$$U_0 \leq \left(\int^{y_k} \left\{\int^x vq(v)\, dv\right\}^s dx\right)^{k_j/s} (y_k - y_{k-1})^{1-k_j/s} \leq$$

$$\leqq (y_k - y_{k-1})^{1-k_j/\{s(1+\varepsilon)\}} \left(\int_0^1 \left\{ \int_0^x vq(v)\,dv \right\}^{s(1+\varepsilon)} dx \right)^{k_j/\{s(1+\varepsilon)\}}, \tag{5.13}$$

что доказывает оценку (5.12) для U_0 в случае 1).

Аналогично доказывается оценка

$$U_1 \leqq (y_k - y_{k-1})^{1-k_j/\{s(1+\varepsilon)\}} \left(\int_0^1 \left\{ \int_x^1 (1-v)\,q(v)\,dv \right\}^{s(1+\varepsilon)} dx \right)^{k_j/\{s(1+\varepsilon)\}} \tag{5.14}$$

в случае 1).

Оценка (5.12) для U_0 и U_1 в случае 2) доказывается аналогично.

Таким образом, доказали оценку

$$|J_1| \leqq c(q,\ s,\ \varepsilon)\,|t|^{k_j/2-1/2}\,\|\varphi_j\|. \tag{5.15}$$

Подставив (5.15) и (5.10) в (5.4), получим

$$|\Phi_k| \leqq c(q,\ s,\ \varepsilon)\,|t|^{-1/2}\{|t|^{k_j/2}\|\varphi_j\| + |t|^{(k_j+k_{j+1})/2}\|\varphi_{j+1}\|\}, \quad j=1,\ \ldots,\ n,$$

что вместе с (5.3) доказывает оценку (5.2) (без ограничения общности можно считать $\|\varphi_{n+1}\|=0$).

По индукции из (5.2) немедленно следует оценка

$$\|\varphi_{n-l}\| \leqq c(q,\ s,\ \varepsilon)^l \{\sqrt{|t|}\}^{-[(l+1)/2]+(k_{n-l+1}+\ldots+k_n)}, \tag{5.16}$$

$l=1,\ldots,n$ из которой, как частный случай, вытекает оценка

$$\|\varphi_0\| \leqq c(q,\ s,\ \varepsilon)^n \{\sqrt{|t|}\}^{-[(n+1)/2]+s}, \tag{5.17}$$

которая совместно с (5.1) доказывает утверждение теоремы. □

§6. Теорема В. Ю. Бенткуса и доказательство основных результатов

Пусть H – вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\ \cdot)$ и нормой $\|\cdot\| := \sqrt{(\cdot,\ \cdot)}$; $C: H\to H$ – симметрич- ный ограниченный оператор; $u: H\to R^1$ – линейный непрерывный функцио- нал. Обозначим $w(x) := (Cx,\ x) + u(x)$, $A_{a,\,x} := \{y : w(y+a) < x\}$, $a\in H$. Пусть да- лее $Z, Z_1, \ldots, Z_n$ – независимые одинаково распределенные случайные вели- чины пространства H, $EZ=0$, $E\|Z\|^2=1$, G – гауссовская H-значная случайная величина, $EG=0$, $\operatorname{cov} G = \operatorname{cov} Z$. Через S_n обозначим $(Z_1+\ldots+Z_n)/\sqrt{n}$.

Пусть имеем некоторое выражение A, в которое входят случайные величины Z_λ, $\lambda\in\Lambda$. Тогда символом $A^{\sqrt{n}}$ будем обозначать то же самое выражение A, только в этом случае вместо случайных величин Z_λ, $\lambda\in\Lambda$, будут входить уре- занные случайные величины $Z_\lambda\, 1(\|Z_\lambda\| \leqq \sqrt{n})$, $\lambda\in\Lambda$.

Теорема 6.1. (В. Ю. Бенткус. Одинаково распределенный случай.) *Пусть* $\mu\geqq 0$, $\sigma\geqq 1$, $p\geqq 2$ – *целые числа, число* $q>2$, $E\|Z\|^2=1$, $E\|Z\|^{q\vee(2\mu)}<\infty$, $A>0$ – *любое число. Пусть существует неотрицательный оператор* D_0 $: H\to H$ *такой, что* $\operatorname{cov} Z \geqq D_0$ *и оператор* $(CD_0)^2$ *имеет не менее* k *собственных* [значений (с учетом их кратностей)], *превышающих число* $\beta>0$, *а интеграл*

где max *берется по всем* $1\leqq\gamma\leqq\sigma-1$, $0\leqq\theta\leqq\mu$, *а интегрируется в области* $\{t : |t| \geqq \{n/(E\|Z\|^q)^{2/(q-2)}\}^{3/4}\}$, *конечен. Тогда существует постоянная* $c = c(\mu,\ \sigma,\ p,\ A)$ *такая, что если* $k\geqq c$, *то*

$$x^\mu \left| \left(\frac{d}{dx}\right)^\sigma \left\{ P(S_n\in A_{a,\,x}) - P(G\in A_{a,\,x}) - \sum_{k=1}^{p-2} n^{-k/2} A_k^{\sqrt{n}} P(G\in A_{a,\,x}) \right\} \right| \leqq$$

$$\leqq c_1 J_{\mu,\,\sigma} + c_2(1+|a|^{3p-3+2\mu})\{E\|Z\|^{2\mu} n^{1-\mu} E\|Z\|^{2\mu}\, 1(\|Z\|\geqq\sqrt{n}) +$$

$$+ \{(E\|Z\|^q)^{2/(q-2)} n^{-1}\}^A + E\|Z\|^2\, 1(\|Z\|\geqq\sqrt{n}) +$$

$$+ n^{-(p-1)/2} E\|Z\|^{p+1}\, 1(\|Z\|\leqq\sqrt{n})\}, \tag{6.1}$$

где $c_1 = c_1(\mu,\ \sigma)$, $c_2 = c_2(A,\ \sigma,\ p,\ \beta,\ \|u\|,\ \|C\|)$.

Если $E\|Z\|^p<\infty$, *то для всех* $k=1,\ldots,\ p-2$

$$x^\mu \left| \left(\frac{d}{dx}\right)^\sigma A_k P(G\in A_{a,\,x}) \right| \leqq c(1+|a|^{3k+2\mu}) E\|Z\|^{k+2}, \tag{6.2}$$

$$x^\mu \left| \left(\frac{d}{dx}\right)^\sigma \{A_k^{\sqrt{n}} P(G\in A_{a,\,x}) - A_k P(G\in A_{a,\,x})\} \right| \leqq$$

$$\leqq c(1+|a|^{3k+2\mu}) E\|Z\|^{k+2}\, 1(\|Z\|\geqq\sqrt{n}), \tag{6.3}$$

где $c = c(\mu,\ \sigma,\ p,\ \beta,\ \|u\|,\ \|C\|)$.

Замечание. Определение членов $A_k^{\sqrt{n}}$, A_k асимптотического разложения (6.1) и их свойства описаны в работах [19–13]. Доказательство теоремы 6.1 можно найти в [22, §4, пункт 3, теоремы 4.15 и 4.16] или в [21] (см. доказательство теоремы 3.1, а также теорему 3.2). Нужно отметить, что в упомянутых работах теорема 6.1 формулируется и доказывается как в одинаково распределенном, так и в разнораспределенном случае.

Теперь сформулируем теорему 6.1 в более приспособленном для наших целей варианте.

Следствие 6.2. *Пусть* $\mu=0,\ 1,\ldots,\ \sigma=1,\ 2,\ldots,\ r=1,\ 2,\ldots,\ E\|Z\|^2=1$, $E\|Z\|^{(2\mu)\vee(2r+2)}<\infty$. *Пусть существует неотрицательный оператор* $D_0: H\to H$ *такой, что* $\operatorname{cov} Z\geqq D_0$ *и оператор* D_0 *имеет не менее* k *собственных значений (с учетом их кратностей), превышающих число* $\beta>0$, *а интеграл*

$$J_{\mu,\,\sigma} := \max \int |t|^\gamma \left| \left(\frac{d}{dt}\right)^\theta E e^{it\|S_n\|^2} \right| dt,$$

где max *берется по всем* $1\leqq\gamma\leqq\sigma-1$, $0\leqq\theta\leqq\mu$, *а интегрируется в области* $\{t : |t|\geqq(n/E\|Z\|^4)^{3/4}\}$, *конечен. Тогда существует постоянная* $c=c(\mu,\ \sigma,\ r)$ *такая, что если* $k\geqq c$, *то*

$$x^\mu \left| \left(\frac{d}{dx}\right)^\sigma \left\{ P(\|S_n\|^2<x) - P(\|G\|^2<x) - \sum_{k=1}^{r-1} n^{-k} A_{2k} P(\|G\|^2<x) \right\} \right| \leqq$$

$$\leqq c_1 J_{\mu,\,\sigma} + c_2 n^{-r}, \tag{6.4}$$

где $c_1 = c_1(\mu,\ \sigma)$, $c_2 = c_2(\sigma,\ r,\ \beta,\ E\|Z\|^{(2\mu)\vee(2r+2)})$.

Доказательство теоремы 2.4 немедленно следует из следствий 6.2, 3.1.5 (b) и теоремы 3.2.4. При этом полезно заметить, что $\operatorname{cov} Y^q \geqq R \operatorname{cov} Y^1$, где $Y^q(x) := \{1(X<x)-x\}/\sqrt{q(x)}$, а $Y^1 := Y^q$ при $q \equiv 1$. Так как $\operatorname{cov} Y^1$ — ковариационная функция броуновского моста, то $\lambda_k := (\pi k)^{-2}$ — собственные числа оператора $\operatorname{cov} Y^1 =: D_0$ (см., например, [1], с. 22). □

Доказательство теоремы 2.2. Если $\mu=0$, то оценка (2.6) следует из следствия 3.1.5 и результатов В. Ю. Бенткуса (см., например, [20], теоремы 1.8 и 1.9 или [22], глава III, §3, теоремы 3.6 и 3.8). Если $\mu \geqq 1$, то оценка (2.6) следует из теоремы 1.7 работы [24] В. Ю. Бенткуса и Б. А. Залесского. □

Доказательство теоремы 2.1 следует из тех же работ, что и доказательство теоремы 2.2, только вместо части b) следствия 3.1.5 нужно воспользоваться частью a) этого следствия. □

Доказательство теоремы 2.3 немедленно следует из того факта, что $U_n(q;\, x)$ имеет σ ограниченных непрерывных производных, если интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |t|^{\gamma} |f_n(q;\, t)|\, dt$ сходится для каждого $\gamma=1,\ldots,\sigma-1$. □

В заключение автор благодарит В. Ю. Бенткуса и В. И. Паулаускаса за постановку задачи и полезные советы.

Литература

1. **Мартынов Г. В.** Критерии омега-квадрат. М.: Наука, 1978. 80 с.
2. **Чибисов Д. М.** К исследованию асимптотической мощности критериев согласия при близких альтернативах // Теория вероятн. и ее примен. 1965. Т. X, вып. 3. С. 460–478.
3. **Смирнов Н. В.** Теория вероятностей и математическая статистика. Избранные труды. М.: Наука, 1970. С. 60–78.
4. **Anderson T. W., Darling D. A.** Asymptotic theory of certain "goodnes of fit" criteria based on stochastic processes // Ann. Math. Statistics. 1952. V. 23, No 2. P. 193–212.
5. **Канделаки Н. П.** Об одной предельной теореме в пространстве Гильберта // Труды ВЦ АН ГССР. 1965. Т. 5, № 1. С. 46–55.
6. **Sazonov V. V.** On ω^2 criterion // Sankhya Ser. A. 1968. V. 30, No 2. P. 205–210.
7. **Сазонов В. В.** Улучшение одной оценки скорости сходимости // Теория вероятн. и ее примен. 1969. Т. XIV, вып. 4. С. 667–678.
8. **Rosenkrantz W. A.** A rate of convergence for the von Mises statistics // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 139. P. 329–337.
9. **Kiefer J.** Skorohod embending of multivariate RV's and the sample DF // Z. Wahr. verw. Gebiete. 1972. B. 24, H. 1. S. 1–35.
10. **Никитин Я. Ю.** Оценки скорости сходимости в некоторых предельных теоремах и статистических критериях // ДАН СССР. 1972. Т. 202, № 4. С. 758–760.
11. **Орлов А. И.** Скорость сходимости распределения статистики Мизеса–Смирнова // Теория вероятн. и ее примен. 1974. Т. XIX, вып. 4. С. 766–786.
12. **Csörgő S.** On an asymptotic expansion for the von Mises statistic // Acta Sci. Math. 1976. V. 38. P. 45–67.
13. **Csörgő S., Stachó L.** A step toward asymptotic expansion for the Cramer–von Mises statistic // Analytic Function Methods in Probab. Theory. Amsterdam–Oxford–New York, North-Holland. 1980. P. 53–65.
14. **Götze F.** Asymptotic expansions for bivariate von Mises functionals // Z. Wahr. verw. Gebiete. 1979. B. 50, H. 3. S. 333–355. ISSN 0044–3719.
15. **Королюк В. С., Боровских Ю. В.** Асимптотический анализ распределений статистик. Киев: Наукова думка, 1984. 302 с.
16. **Бенткус В. Ю., Зитикис Р. Э.** Замечание о критерии Крамера–Мизеса–Смирнова // Liet. matem. rink. 1988. Т. 28, № 1. С. 14–22. ISSN 0132–2818.

19. **Бенткус В. Ю.** Асимптотические разложения в центральной предельной теореме в гильбертовом пространстве // Liet. matem. rink. 1984. Т. XXIV, № 3. С. 29–50. ISSN 0132–2818.
20. **Бенткус В. Ю.** Асимптотические разложения для распределения сумм независимых случайных элементов пространства Гильберта // Liet. matem. rink. 1984. Т. XXIV, № 4. С. 29–48. ISSN 0132–2818.
21. **Бенткус В. Ю.** Асимптотические разложения в локальной предельной теореме в гильбертовом пространстве // Liet. matem. rink. 1985. Т. XXV, № 1. С. 9–22. ISSN 0132–2818.
22. **Бенткус В. Ю.** Асимптотический анализ сумм независимых случайных элементов пространства Банаха: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Вильнюс, 1984.
23. **Бенткус В. Ю.** Асимптотические разложения для сумм независимых случайных элементов пространства Гильберта // ДАН СССР. 1984. Т. 278, № 5. С. 1033–1036. ISSN 0002–3264.
24. **Бенткус В. Ю., Залесский Б. А.** Асимптотические разложения с неравномерными остатками в центральной предельной теореме в гильбертовом пространстве // Liet. matem. rink. 1985. Т. XXV, № 3. С. 3–16. ISSN 0132–2818.

Институт математики и кибернетики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
01.12.1987

ASIMPTOTINIAI SKLEIDINIAI ANDERSONO IR DARLINGO STATISTIKOS PASISKIRSTYMO FUNKCIJOS IŠVESTINĖMS

R. Zitikis

(Reziumė)

Sakykime, $x_1,\ldots,x_n$ yra tolygiai intervale $[0, 1]$ pasiskirsčiusio atsitiktinio dydžio X stebiniai, o $F_n(t)$ – empirinė pasiskirstymo funkcija, sukonstruota pagal $x_1,\ldots,x_n$. Statistikos

$$\omega_n^2(q) := n \int_0^1 \{F_n(t)-t\}^2 q(t)\, dt \quad (q \geqq 0)$$

pasiskirstymo funkcijos išvestinėms sukonstruoti asimptotiniai skleidiniai. Rezultatai pritaikomi Kramero (Cramer), Mizeso (Mises) ir Smirnovo ($q=1$), Anderseno (Andersen) ir Darlingo (Darling) ($q(t)=t^{-1}(1-t)^{-1}$) statistikoms, taip pat omegos kvadrato statistikoms su gabalais iškilu svoriu, galinčiu turėti baigtinį skaičių laipsninės eilės ypatumų.

ASYMPTOTIC EXPANSIONS FOR THE DERIVATIVES OF THE ANDERSON–DARLING STATISTIC'S DISTRIBUTION FUNCTION

R. Zitikis

(Summary)

Let $x_1,\ldots,x_n$ be independent observations, coming from a random variable X, uniformly distributed on $[0, 1]$, $F_n(t)$ is the empirical distribution function of the data. Let $U_n(q, x)$ be the distribution function of the

$$\omega_n^2(q) := n \int_0^1 \{F_n(t)-t\}^2 q(t)\, dt.$$

For the some class of the weight functions q the asymptotic expansions of the derivatives $U_n^{(k)}(q, x)$ $(k=0, 1, \ldots)$ are received.