5. Булота К. О вычислении ближайшего целого числа // Liet. matem. rink. 1988. Т.28, № 2. С. 269—284. ISSN 0132–2818.
6. Виноградов И.М. Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1952.

Институт математики и кибернетики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
16.04.1987

VIENOS DIOFANTO NELYGYBĖS SPRENDINIAI

K. Bulota

(*Reziumė*)

Pateiktos formulės, iš kurių galima rasti Diofanto (Diophantine) nelygybės

$$\eta<\| tx \|<\varepsilon$$

natūrinius sprendinius t, kai yra žinomas iracionaliojo skaičiaus x skleidinys grandinine trupmena. Skaičiai η ir ε yra teigiamos konstantos, $\|y\|$ reiškia atstumą nuo skaičiaus y iki jam artimiausio sveikojo racionaliojo skaičiaus.

SOLUTIONS OF ONE DIOPHANTINE INEQUALITY

K. Bulota

(*Summary*)

Some formulas are presented here, which allow to find natural solutions t of the Diophantine inequality

$$\eta<\| tx \|<\varepsilon,$$

when the expansion of an irrational x into a continued fraction is known. The numbers η and ε are some positive constants, $\|y\|$ means the distance between the number y and the integer rational number nearest to y.

28 LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 3
1988

УДК 519.214

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В ЛОКАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ СТАТИСТИК $\omega^2{}_n$

Р. Э. Зитикис

§1. Введение, основные результаты и обозначения

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимые, равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$ случайные величины. Рассмотрим статистику

$$\omega_n^2(q)=n\int_0^1\{F_n(t)-t\}^2 q(t)\,dt,$$

где $F_n(t)=(1/n)\sum_{i=1}^{n} 1\{X_i<x\}$ – эмпирическая функция распределения, $1\{A\}$ – индикатор множества A, $q(t)\geqq 0$ – некоторая весовая функция. Обозначим

$$U_n(q;\ x)=P\{\omega_n^2(q)<x\},\quad f_n(q;\ t)=E\exp\{it\omega_n^2(q)\}.$$

Заметим [1], что предел

$$U(q;\ x)=\lim U_n(q;\ x)\quad (n\to\infty)$$

существует, если $\int_0^1 s(1-s)q(s)\,ds<\infty$.

В настоящей работе для некоторого класса весовых функций q исследуется дифференцируемость функции распределения $U_n(q;\ x)$, строятся асимптотические разложения для производных этой функции. Ранее появившиеся работы [3–7] об асимптотических разложениях для функции распределения $U_n(q;\ x)$ и ее производных были посвящены случаю $q\equiv 1$ (т.е. для статистики Крамера–Мизеса–Смирнова). Насколько известно автору, первые попытки получить асимптотические разложения для функции распределения $U_n(q; x)$ $(q\equiv 1)$ появились в работах Чёрге [3], Чёрге и Стахо [4]. К сожалению, в этих работах асимптотические разложения строились при предположении, что в некоторой области числовой прямой характеристическая функция статистики $\omega_n^2(q)$ $(q\equiv 1)$ ведет себя хорошо. Наконец, в работах Гётце и Боровских (см. [5, 6]) появились асимптотические разложения для функции распределения статистики Крамера–Мизеса–Смирнова без каких-либо предположений. Асимптотические разложения в локальной предельной теореме и для производных функций распределения $U_n(q;\ x)$ $(q\equiv 1)$ были получены в [7].

Перейдем к точным формулировкам основных результатов.

В дальнейшем будем предполагать, что выполняется следующее усло-

Теорема 1.1. *Имеет место равномерная оценка*

$$\sup_{x>0} |U_n(q;\ x)-U(q;\ x)| \leqq c(q)/n.$$

Более того, для любого $m>0$ справедлива неравномерная оценка

$$\sup_{x>0} (1+x^m)\,|U_n(q;\ x)-U(q;\ x)| \leqq c(q,\ m)/n.$$

Теперь предположим, что в дальнейшем весовая функция $q(s)$, кроме условия (A), везде удовлетворяет еще и следующее условие:

(B) $q(s)$ кусочно гладкая и $\sup|q'(s)|<\infty$, где sup берется по всем точкам гладкости функции q. Более подробно: существуют точки $0=x_0<x_1<\ldots<x_{N+1}=1$ такие, что на каждом интервале $(x_i,\ x_{i+1})$ $i=0,\ \ldots,\ N$ функция $q(s)$ непрерывно дифференцируема и существует l такая, что

$$|q'(s)| \leqq l \ \ \forall s\in[0,\ 1]\setminus\{x_i : i=0,\ 1,\ \ldots,\ N+1\}.$$

Теорема 1.2. *Для всех $n\geqq 8$ функция $x\mapsto U_n^2(q;\ x)$ имеет $[n/4]-2$ ограниченных непрерывных производных.*

Теорема 1.3. *Функцию $x\mapsto U_n^s(q;\ x)$ можно разложить в асимптотический ряд по степеням n^{-k} $(k=0,\ 1,\ \ldots)$. Более точно для любых $m=0,\ 1,\ \ldots,$ $s=0,\ 1,\ \ldots,$ $p=1,\ 2,\ \ldots,$ $n\geqq 4(s+2)$,*

$$\sup_{x>0}(1+x^m)\left|\left(\frac{d}{dx}\right)^s\left\{U_n(q;\ x)-U(q;\ x)-\sum_{k=1}^{p-1} n^{-k}A_k U(q;\ x)\right\}\right| \leqq$$

$$\leqq c(q,\ m,\ s,\ p)\,n^{-p}.$$

О членах $A_kU(q;\ x)$ вышеприведенного асимптотического ряда известно следующее. Для статистики $\omega_n^2(q)$ $(q\equiv 1)$ явные формулы преобразования Фурье–Стилтьеса функции $x\mapsto A_kU(q;\ x)$ приведены в [11]. В общем случае $\omega_n^2(q)$ можно представить как некоторую сумму S_n $L_2[0,\ 1]$-значных независимых одинаково распределенных случайных величин (см., например [2]). Поэтому при построении функции $A_kU(q;\ x)$ можно применить результаты работ Бентккуса [8–10].

Доказательство теоремы 1.3 существенно опирается на работу Бенткуса [10]. Из результатов и доказательств этой работы (см. § 3 и доказательство теоремы 3.1) следует, что для доказательства теоремы 1.3 достаточно проверить условие

$$\int_{|t|\geqq n^{3/4}} |t|^v\,|f_n^{(w)}(q;\ t)|\,dt<\infty \tag{1.1}$$

для достаточно больших $v=v(m,\ s,\ p)$ и $w=w(m,\ s,\ p)$.

Анализ характеристической функции $f_n(q;\ t)$ проводится в § 2,3. Результаты иллюстрируют следующие утверждения.

Лемма 1.4. *В области $|t|\geqq n^{3/4}$ для любого $A>0$ и для достаточно больших n*

$$|f_n^{(s)}(q;\ t)| \leqq c(q,\ s,\ A)/n^A.$$

Лемма 1.5. *Существует такая постоянная $a=a(q,\ s)$, что для любого*

Из лемм 1.4, 1.5 и результатов работы [5] немедленно следует

Следствие 1.6. *Пусть $s=0,\ 1,\ \ldots,\ n=1,\ 2,\ \ldots,\ t\in R^1$. Тогда для любого $A>0$ и достаточно больших n*

$$|f_n^{(s)}(q;\ t)| \leqq n^s\,c(q,\ s,\ A)/(1+|t|^A).$$

Введем еще несколько обозначений: $H(x)=\int_x^1 q(s)\,ds$, $x\vee y=\max(x,\ y)$, $x\wedge y=\min(x,\ y)$, $Q=\max\{q(s) : s\in[0,1]\}$.

§2. Оценка производных характеристической функции $f_n(q;\ t)$. Первый способ

В настоящем параграфе мы докажем, что производные характеристической функции $f_n(q;\ t)$ на бесконечности убывают быстрее n^{-A} для сколь угодно большого $A>0$. Применяемый метод можно считать обобщением одного метода (см. [6, леммы 3.1, 3.2]) для оценки производных характеристической функции статистики Крамера–Мизеса–Смирнова (случай $q\equiv 1$).

Пусть $\|\cdot\|$ и $(\cdot,\cdot)$ обозначает норму и скалярное произведение в пространстве $L_2[0,\ 1]$, а $\tilde{Z}$ – симметризацию случайной величины Z со значениями из пространства $L_2[0,\ 1]$.

Лемма 2.1. *Пусть W и U – $L_2[0,\ 1]$-значные независимые случайные величины, $P\{\|U\|\leqq A\}=P\{\|W\|\leqq B\}=1$. Тогда*

$$|E\|U+W\|^{2s}\exp\{it\|U+W\|^2\}| \leqq$$

$$\leqq (A+B)^{2s}\{E\,|E_W\exp\{i2t(\tilde{U},\ W)\}|\}^{1/2}.$$

Доказательство леммы основано на применении метода симметризации (см. [5], а также, например, [6], [8–10], [12]). Мы опустим это доказательство, отметим лишь, что в ходе доказательства скалярное произведение $(U,\ W)$ полезно записать в координатной форме.

Лемма 2.2. *Для каждого $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$ существуют случайные величины $0=z_0<z_1<\ldots<z_{2k}<z_{2k+1}=1$, а также случайные величины c_m, $0\leqq|c_m|\leqq k$, $1\leqq m\leqq 2k+1$ такие, что*

$$|f_n^{(s)}(q;\ t)| \leqq$$

$$\leqq \{H(0)\,n\}^s\left\{E\left(\sum_{m=1}^{2k+1}\left|\int_{z_{m-1}}^{z_m}\exp\left(i2\tau c_m H(x)\right)dx\right|\right)^{n-k}\right\}^{1/2},$$

где $\tau=t/n$, $H(x)=\int_x^1 q(s)\,ds$.

Доказательство. Обозначим $Y_i(t)=(1\{X_i<t\}-t)\sqrt{q(t)}$. Ясно, что

$$\omega_n^2(q)=\int_0^1\left\{n^{-1/2}\sum_{i=1}^n Y_i(t)\right\}^2 dt=\left\|n^{-1/2}\sum_{i=1}^n Y_i\right\|^2. \tag{2.1}$$

Так как $|Y_i(t)|^2\leqq q(t)$, то $\|Y_i\|^2\leqq H(0)$, и поэтому случайные величины допускают следующие неравенства:

$$\| U \| \leqq k \sqrt{H(0)/n}, \quad \| W \| \leqq (n-k) \sqrt{H(0)/n}. \tag{2.2}$$

Из равенства 2.1, оценок 2.2 и леммы 2.1 получим

$$|f_n^{(s)}(q;\ t)| = | E \{ \omega_n^2(q) \}^s \exp \{ it\, \omega_n^2(q) \} | =$$

$$= | E \| U+W \|^{2s} \exp \{ it \| U+W \|^2 \} | \leqq$$

$$= \{ nH(0) \}^s \{ E \,| E_W \exp \{ i2t (\tilde{U},\ W) \} | \}^{1/2} =$$

$$= \{ nH(0) \}^s \{ E \,| E_Y \exp \{ i2t (\tilde{U},\ Y/\sqrt{n}) \} |^{n-k} \}^{1/2} =$$

(здесь через Y обозначена случайная величина Y_{k+1})

$$= \{ nH(0) \}^s \{ E \,| I |^{n-k} \}^{1/2}, \tag{2.3}$$

где обозначено

$$I = E_Y \exp \left\{ i2\tau \left(\sum_{j=1}^{k} \tilde{Y}_j,\ Y \right) \right\}.$$

Пусть Z^1 и Z^2 обозначают независимые копии случайной величины Z. По определению симметризации случайной величины имеем

$$I = E_Y \exp \left\{ i2\tau \sum_{j=1}^{k} (Y_j^1 - Y_j^2,\ Y) \right\} =$$

$$= E_X \exp \left\{ i2\tau \sum_{j=1}^{k} \int_0^1 (1\{ X_j^1 < s \} - 1 \{ X_j^2 < s \})(1 \{ X < s \} - s)\, q(s)\, ds \right\} =$$

$$= \int_0^1 \exp \left\{ i2\tau \sum_{j=1}^{k} \int_0^1 (1\{ X_j^1 < s \} - 1 \{ X_j^2 < s \}) \times \right.$$

$$\left. \times (1 \{ x < s \} - s)\, q(s)\, ds \right\} dx \tag{2.4}$$

(так как случайная величина X имеет равномерное в интервале $(0,\ 1)$ распределение).

Нетрудно убедиться, что внутренний интеграл в (2.4) равен

$$\int_{x \vee X_j^1}^{1} q(s)\, ds - \int_{X_j^1}^{1} sq(s)\, ds - \int_{x \vee X_j^2}^{1} q(s)\, ds + \int_{X_j^2}^{1} sq(s)\, ds. \tag{2.5}$$

Применив к (2.5) элементарное тождество

$$H(x \vee y) = H(x)\, 1 \{ y \leqq x \} + H(y)\, 1 \{ y > x \}$$

и воспользовавшись (2.4), получим

где обозначено

$$c(x) = \sum_{j=1}^{k} (1 \{ X_j^1 \leqq x \} - 1 \{ X_j^2 \leqq x \}),$$

$$d(x) = \sum_{j=1}^{k} \big(H(X_j^1)\, 1 \{ X_j^1 \leqq x \} - H(X_j^2)\, 1 \{ X_j^2 \leqq x \} \big).$$

Упорядочим случайные величины $X_1^1, \ldots, X_k^1, X_1^2, \ldots, X_k^2$ по возрастанию. Получим вариационную последовательность $0 = z_0 < z_1 < \ldots < z_{2k} < z_{2k+1} = 1$. Нетрудно видеть, что для $x \in (z_{m-1},\ z_m)$ случайные величины $c_m := c(x)$, $d_m := d(x)$ не зависят от x. Значит, из равенства (2.6) вытекает оценка

$$|I| \leqq \sum_{m=1}^{2k+1} \left| \int_{z_{m-1}}^{z_m} \exp \{ i2\tau c_m H(x) \}\, dx \right|,$$

которая совместно с оценкой (2.3) доказывает лемму.

Лемма 2.3. *Пусть* $0 \leqq a < b \leqq 1$, $| \tau c_m | \leqq \pi / \big(24Q\,(b-a) \big)$. *Тогда*

$$I := \left| \int_a^b \exp \{ i2\tau c_m H(x) \}\, dx \right| \leqq (b-a) - \tau^2 c_m^2 (R^2/6)(b-a)^3.$$

Доказательство. Обозначим $\overline{H}(x) = H(x) - \int_a^b H(s)\, ds/(b-a)$. Ясно, что

$$I^2 = \left| \int_a^b \exp \{ i2\tau c_m \overline{H}(x) \}\, dx \right|^2 =$$

$$= \left\{ \int_a^b \cos 2\tau c_m \overline{H}(x)\, dx \right\}^2 + \left\{ \int_a^b \sin 2\tau c_m \overline{H}(x)\, dx \right\}^2. \tag{2.7}$$

Разложив функции cos и sin в ряд Тейлора в точке 0, заметив, что $\int_a^b \overline{H}(x)\, dx = 0$, из (2.7) получим

$$I^2 \leqq \left\{ (b-a) - 4\tau^2 c_m^2 \int_a^b \overline{H}^2(x) \int_0^1 (1-\theta) \cos \big(2\tau c_m \overline{H}(x)\, \theta \big)\, d\theta\, dx \right\}^2 +$$

$$+ \left\{ 4\tau^2 c_m^2 \int_a^b \overline{H}^2(x) \int_0^1 (1-\theta)\, | \sin \big(2\tau c_m \overline{H}(x)\, \theta \big) |\, d\theta\, dx \right\}^2. \tag{2.8}$$

Заметим, что $| \overline{H}(x) | \leqq Q\,(b-a)$, $| 2\tau c_m \overline{H}(x) | \leqq \pi/12$, и применим элементарное неравенство $g^2 + f^2 \leqq (g+f)^2$. Получим

$$I \leqq (b-a) - 4\tau^2 c_m^2 \int_a^b \overline{H}^2(x) \times$$

(применим равенство $\cos x-\sin x=\sqrt{2}\sin(\pi/4-x)$ и заметим, что $\sin(\pi/4-|2\tau c_m\overline{H}(x)\theta|)\geqq\sin(\pi/6)=\sqrt{2}/2$)

$$\leqq(b-a)-\tau^2 c_m^2\, 2\int_a^b \overline{H}^2(x)\,dx. \tag{2.9}$$

Ясно, что оценка

$$\int_a^b \overline{H}^2(x)\,dx\geqq(R^2/12)(b-a)^3 \tag{2.10}$$

совместно с оценкой (2.9) влечет утверждение леммы. Итак, нам осталось доказать (2.10). Применив дважды теорему о среднем, получим

$$\overline{H}(x)=H(x)-H(u)=(u-x)\,q(v), \tag{2.11}$$

где $u=u(a,b)\in[a,b]$, $v=v(x,u)$. Возведем (2.11) в квадрат, оценим $q(s)\geqq R$ и заметим, что

$$\inf\left\{\int_a^b (x-u)^2\,dx: u\in[a,b]\right\}=(1/12)(b-a)^3.$$

Получим (2.10). Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Пусть* $0\leqq a<b\leqq 1$. *Тогда*

$$I:=\left|\int_a^b \exp\{i2\tau c_m H(x)\}\,dx\right|\leqq\{1+l/(2R)\}(N+1)/\{R\,|\tau c_m|\}.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $c_m\neq 0$. Пусть $\{x_0, x_1, \ldots, x_{N+1}\}\cap(a,b)=\{a_1,\ldots,a_T\}$, где $x_0,\ldots,x_{N+1}$ — точки из условия (B). Обозначим еще $a_0=a$, $a_{T+1}=b$. Тогда

$$|I|\leqq|I_0|+\ldots+|I_T|, \tag{2.12}$$

где обозначено $I_j=\int_{a_j}^{a_{j+1}}\exp\{i2\tau c_m H(x)\}\,dx$. Проинтегрировав I_j по частям, оценив полученное выражение по модулю, получим

$$|I_j|\leqq\{1+l/(2R)\}/\{R\,|\tau c_m|\}.$$

Теперь (2.12) и неравенство $T\leqq N$ завершает доказательство леммы.

Лемма 2.5. *Пусть* $c_m\neq 0$, $r\geqq 0$ *— любое фиксированное число*, $0\leqq a<b\leqq 1$. *Если*

$$2(1+l)(6+r)/R^2\leqq|\tau c_m|\leqq\sqrt{6+r}/\{R(b-a)\},$$

то

$$I:=\left|\int_a^b \exp\{i2\tau c_m H(x)\}\,dx\right|\leqq(b-a)-|\tau c_m|(b-a)^3.$$

Доказательство. Докажем, что

$$I\leqq(b-a)\,|J|+l\,|\tau c_m|\,(b-a)^3, \tag{2.13}$$

где обозначено $J=\int_0^1 \exp\{i2\tau c_m H'(a)(b-a)x\}\,dx$.

Очевидно

$$I=(b-a)\left|\int_0^1 \exp\{i2\tau c_m H\big(a+(b-a)x\big)\}\,dx\right|=$$

(разложим функцию H в ряд Тейлора в точке a)

$$=(b-a)\left|\int_0^1 AB\,dx\right|, \tag{2.14}$$

где

$$A=\exp\{i2\tau c_m H'(a)(b-a)x\},$$

$$B=\exp\left\{i2\tau c_m(b-a)^2\int_0^1(1-\theta)H''\big(a+x(b-a)\theta\big)\,d\theta\cdot x^2\right\}.$$

Применив очевидное равенство $e^z=1+z\int_0^1 e^{\eta z}\,d\eta$ к выражению B, получим

$$B=1+CD, \tag{2.15}$$

где обозначено

$$C=i2\tau c_m(b-a)^2x^2\int_0^1(1-\theta)H''\big(a+x(b-a)\theta\big)\,d\theta,$$

$$D=\int_0^1 \exp\{\eta C\}\,d\eta.$$

Из (2.14) и (2.15) следует оценка $I\leqq(b-a)\left\{|J|+\int_0^1|C|\,dx\right\}$, которая совместно с оценкой $|C|\leqq 2|\tau c_m|(b-a)^2\,lx$ доказывает (2.13).

Нетрудно убедиться, что $|J|=|(\sin x)/x|$, где обозначено

$$x=\tau c_m H'(a)(b-a).$$

Учитывая неравенство

$$|(\sin x)/x|\leqq(1/\pi)\vee\exp\{-x^2/6\}\quad\forall x\in R^1,$$

получим

$$|J|\leqq(1/\pi)\vee\exp\{-\tau^2c_m^2q^2(a)(b-a)^2/6\}\leqq$$
$$\leqq(1/\pi)\vee\exp\{-\tau^2c_m^2R^2(b-a)^2/(6+r)\}. \tag{2.16}$$

Так как $\tau^2 c_m^2 R^2 (b-a)^2 /(6+r) \leqq 1$, то, применив неравенства

$$1/\pi \leqq \exp\{-s\} \leqq 1-s/2 \quad \forall s \in [0,\ 1]$$

к оценке (2.16), получим оценку

$$|J| \leqq 1-\tau^2 c_m^2 R^2 (b-a)^2 / \{2(6+r)\},$$

которая совместно с (2.13) и оценкой

$$|\tau c_m| \geqq 2(1+l)(6+r)/R^2$$

доказывает утверждение леммы.

Следствие 2.6. *Пусть* $0 \leqq a < b \leqq 1$,

$$b-a \leqq \pi R^4 / \{Q(2R+l)^2 48(1+l)(2+N)^2\}. \tag{2.17}$$

Тогда в области $|\tau| \geqq d \leqq 1/2$

$$I := \left| \int\limits_a^b \exp\{i2\tau c_m H(x)\}\, dx \right| \leqq$$

$$\leqq (b-a) - \delta(c_m)\{(R^2/6) \wedge 1\} d^2 (b-a)^3, \tag{2.18}$$

где $\delta(c_m)=1$, *если* $c_m \neq 0$, *и* $\delta(c_m)=0$, *если* $c_m=0$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $c_m \neq 0$. Подберем число $r=(2+l/R)^2 (N+2)^2 - 6$. Тогда из условия следствия получим неравенство

$$2(1+l)(6+r)/R^2 \leqq \pi / \{24Q(b-a)\}.$$

Разделим доказательство на два случая:

a) $|\tau c_m| \leqq \pi/\{24Q(b-a)\}$;

b) $|\tau c_m| \geqq 2(1+l)(6+r)/R^2$.

Случай *a*). Оценка (2.18) немедленно следует из оценки леммы 2.3.
Случай *b*). Выделим два подслучая:

1) $|\tau c_m (b-a)| \leqq (2+l/R)(2+N)/R$,

2) $|\tau c_m (b-a)| \geqq (2+l/R)(2+N)/R$.

Подслучай 1). Оценка (2.18) немедленно следует из оценки леммы 2.5.
Подслучай 2). Из оценки леммы 2.4 следует неравенство

$$I \leqq \left\{ \big(1+l/(2R)\big)(N+2) / \big(R\, |\tau c_m|\, (b-a)\big) \right\} (b-a) \leqq (1/2)(b-a). \tag{2.19}$$

Из очевидного неравенства $1/2 \leqq 1 - d^2 \delta(c_m) \{(R^2/6) \wedge 1\} (b-a)^2$ (так как $d \leqq 1/2$) и из (2.19) вытекает оценка (2.18).

Следствие полностью доказано.

Лемма 2.7. *В обозначениях леммы 2.2 справедливо утверждение*

$$E \exp\left\{ -A \sum_{m=1}^{2k+1} \delta(c_m)(z_m - z_{m-1})^B \right\} \leqq \{(2k)!/k!\} A^{-k/B} \{\Gamma(1/B)/B$$

Доказательство леммы аналогично части доказательства леммы 3.1 из [6] и поэтому проводить его не будем.

Теорема 2.8. *Для любого* $k=1,\ 2, \ldots,\ n-1$ *в области* $|\tau| \geqq d \leqq 1/2$

$$|f_n^{(s)}(q;\ t)| \leqq \{H(0)\, n\}^s \{(2k)!/k!\}^{1/2} \{\Gamma(1/3)/3\}^{k/2} \{c(q)\, d^2 (n-k)\}^{-k/6}.$$

Доказательство. К интегралу в правой части неравенства леммы 2.2 применим неравенство следствия 2.6. Затем вспомнив, что $\sum_{m=1}^{2k+1} (z_m - z_{m-1}) = 1$ и применив неравенство $1-s \leqq \exp\{-s\}$, получим оценку

$$|f_n^{(s)}(q;\ t)|^2 \leqq \{H(0)\, n\}^{2s} \times$$

$$\times E \exp\left\{ -c(q)\, d^2 (n-k) \sum_{m=1}^{2k+1} \delta(c_m)(z_m - z_{m-1})^3 \right\}. \tag{2.20}$$

К математическому ожиданию в (2.20) применим лемму 2.7. Получим утверждение теоремы.

Доказательство леммы 1.4 немедленно следует из теоремы 2.8, если взять $d = n^{-1/4}$.

§3. Оценка производных характеристической функции $f_n(q; t)$. Второй способ

В работе [7] был предложен метод для оценки производных характеристической функции статистики Крамера–Мизеса–Смирнова (случай $q \equiv 1$). Было доказано, что производные этой характеристической функции на бесконечности убывают быстрее $|t|^{-A}$ для сколь угодно большого $A > 0$. Метод этого параграфа является обобщением вышеуказанного метода для более широкого класса весовых функции q.

Теорема 3.1. *Пусть* $s=0,\ 1, \ldots,\ n=1,\ 2, \ldots,\ t \in R^1$. *Тогда*

$$|f_n^{(s)}(q;\ t)| \leqq n!\, c^n (n+1)^{2s} |t|^{-(1 \vee [n/2])/2},$$

где $c=c(q,\ s) < \infty$; $[v]$ — *означает целую часть числа* v.

Доказательство. Известно [13, 14], что статистику $\omega_n^2(q)$ можно представить следующим образом:

$$\omega_n^2(q) = \Omega + 2 \sum_{j=1}^{n} Q_j(X_j^*),$$

где обозначено

$$\Omega = n \int\limits_0^1 (1-t)^2 q(t)\, dt, \quad a_j = (j-1/2)/n,$$

$X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*$ — упорядоченные случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Тогда

$$f_n^{(s)}(q;\ t)=i^s E\left\{\Omega+2\sum_{j=1}^{n} Q_j(X_j^*)\right\}^s \exp\left\{it\Omega+i2t\sum_{j=1}^{n} Q_j(X_j^*)\right\}=$$

(применим формулу $(z_0+\ldots+z_n)^s=\Sigma' C_s(k_0, \ldots, k_n) z_0^{k_0}\ldots z_u^{k_n}$, где Σ' обозначает суммирование по всем индексам $k_0\geqq 0, \ldots, k_n\geqq 0, k_0+\ldots+k_n=s$)

$$=i^s\exp\{it\Omega\}\sum{}' C_s(k_0, \ldots, k_n)\Omega^{k_0}\times$$

$$\times E\{2Q_1(X_1^*)\}^{k_1}\ldots\{2Q_n(X_n^*)\}^{k_n}\exp\left\{i2t\sum_{j=1}^{n} Q_j(X_j^*)\right\}=$$

(так как n чисел имеет $n!$ перестановок)

$$=i^s\exp\{it\Omega\}n!\sum{}' C_s(k_0, \ldots, k_n)\Omega^{k_0}2^{s-k_0}\times$$

$$\times\int_0^1 \{Q_1(x_1)\}^{k_1}\exp\{i2tQ_1(x_1)\}\int_{x_1}^1 \{Q_2(x_2)\}^{k_2}\exp\{i2tQ_2(x_2)\}\ldots$$

$$\ldots\int_{x_{n-1}}^1 \{Q_n(x_n)\}^{k_n}\exp\{i2tQ_n(x_n)\}\,dx_n\ldots dx_2\,dx_1. \tag{3.1}$$

Определим

$$\varphi_n(x)\equiv 1,$$

$$\varphi_{j-1}(z)=\int_z^1 \exp\{i2tQ_j(x)\}\{Q_j(x)\}^{k_j}\varphi_j(x)\,dx, \quad j=1, 2, \ldots, n. \tag{3.2}$$

Из (3.1) и (3.2) следует

$$|f_n^{(s)}(q;\ t)|\leqq n!\sum{}' C_s(k_0, \ldots, k_n)\Omega^{k_0}2^{s-k_0}|\varphi_0(0)|. \tag{3.3}$$

Таким образом, получили, что для оценки функции $f_n^{(s)}(q;t)$ достаточно оценить $\varphi_0(0)$. Это будем делать по индукции. Не ограничивая общности, можно считать $|t|\geqq 1\vee R^2$.

Пусть $\sup|\varphi_j(z)|=\|\varphi_j\|$, $\sup|\varphi_{j+1}(z)|=\|\varphi_{j+1}\|$, где sup берется по всем z из соответствующих областей определения функции φ_j и φ_{j+1}. Без потери общности можно считать $\|\varphi_{n+1}\|=0$.

Приступим к оценке выражения $\varphi_{j-1}(z)$.

Пусть $\{x_0, \ldots, x_{N+1}\}\cup\{a_j\}=\{y_0, \ldots, y_T\}$, где точки $x_0, \ldots, x_{N+1}$ определены в условии (B). Тогда

$$|\varphi_{j-1}(z)|=\left|\int_z^1 \exp\{i2tQ_j(x)\}\{Q_j(x)\}^{k_j}\varphi_j(x)\,dx\right|\leqq\sum_{k=0}^{T-1}|T_k|, \tag{3.4}$$

где $T_k=\int\exp\{i2tQ_j(x)\}\{Q_j(x)\}^{k_j}\varphi_j(x)\,dx$, а интегрирование ведется по всем x из области $\Theta=(y_k, y_{k+1})\cap(z, 1)$. Разделив область интегрирования Θ на два непересекающихся множества

$$\Gamma_1=\{(y_k, y_{k+1})\cap(z, 1)\}\cap\{(y_k, y_k+\sqrt{1/|t|})\cup(y_{k+1}-\sqrt{1/|t|}, y_{k+1})\}$$

и

$$\Gamma_2=\{(y_k, y_{k+1})\cap(z, 1)\}\backslash\Gamma_1,$$

получим $T_k=\int\limits_\Theta=\int\limits_{\Gamma_1}+\int\limits_{\Gamma_2}$. Оценив интеграл по области Γ_1, получим

$$|T_k|\leqq\|\varphi_j\|H^{k_j}(0)\,2/\sqrt{|t|}+|J_{j-1}(\Gamma_2)|, \tag{3.5}$$

где

$$J_{j-1}(\Gamma_2)=\int_{\Gamma_2}\exp\{i2tQ_j(x)\}\{Q_j(x)\}^{k_j}\varphi_j(x)\,dx.$$

Так как множество Γ_2 пусто или связно, то существуют числа $A_k\leqq B_k$ (в случае $\Gamma_2=\varnothing$, $A_k=B_k$) такие, что $\delta\Gamma_2=\{A_k, B_k\}$, где $\delta\Gamma_2$ обозначает границу множества Γ_2. Обозначим для краткости через A и B числа A_k и B_k соответственно. Тогда

$$K_{j-1}:=J_{j-1}(\Gamma_2)=\int_A^B\exp\{i2tQ_J(x)\}\{Q_i(x)\}^{k_j}\varphi_j(x)\,dx.$$

Так как в интервале $(A, B)\subset(y_k, y_{k+1})$ функция $q(s)$ гладкая, то в этом интервале функция $Q_j(x)$ дважды непрерывно дифференцируема. Значит,

$$K_{j-1}=\left\{\exp\{i2tQ_J(x)\}\{Q_j(x)\}^{k_J}\varphi_j(x)/Q_j'(x)|_A^B-I\right\}/(i2t), \tag{3.6}$$

где

$$I=\int_A^B\exp\{i2tQ_j(x)\}\{Q_j^{k_j}(x)\varphi_j(x)\,dx=$$

$$=k_j\int_A^B\exp\{i2tQ_j(x)\}Q_j^{k_j-1}(x)\varphi_j(x)/Q_j'(x)\,dx+$$

$$+\int_A^B\exp\{i2tQ_j(x)\}Q_j^{k_j}(x)\varphi_j'(x)/Q_j'(x)\,dx-$$

$$-\int_A^B\exp\{i2tQ_j(x)\}Q_j^{k_j}(x)\varphi_j(x)Q_j''(x)/\{Q_j'(x)\}^2\,dx.$$

Заметим, что интегрируемости веса q следует дифференцируемость функции $\varphi_j(z)$. Нетрудно убедиться, что

$$\varphi_j'(z)=-\exp\{i2tQ_{J+1}(z)\}\{Q_j(z)\}^{k_{J+1}}\varphi_{j+1}(z). \tag{3.7}$$

Подставив (3.7) в (3.6), оценив полученное выражение по модулю и применив элементарные оценки $|Q_j'(x)| \geqq R/\sqrt{|t|}$, $k_j \leqq s$, $B-A \leqq 1$, получим

$$|K_{j-1}| \leqq \{2\|\varphi_j\| H^{k_j}(0)\sqrt{|t|}/R + s\|\varphi_j\| H^{k_j-1}(0)\times$$

$$\times\sqrt{|t|}/R + \|\varphi_{j+1}\| H^{k_j+k_{j+1}}(0)\sqrt{|t|}/R + \|\varphi_j\| H^{k_j}(0)L\}/(2|t|), \tag{3.8}$$

где $L := \int_A^B |Q_j''(x)|/\{Q_j'(x)\}^2\,dx$. Нетрудно убедиться, что выражение L допускает оценку $(2+l/R)\sqrt{|t|}/R$, которая совместно с (3.8) дает

$$|K_{j-1}| \leqq \|\varphi_j\|\{1 \vee H(0)\}^{k_j}(4+s+l/R)/\{2R\sqrt{|t|}\}+$$

$$+\|\varphi_{j+1}\|\{1 \vee H(0)\}^{k_j+k_{j+1}}/\{2R\sqrt{|t|}\}. \tag{3.9}$$

Подставив (3.9) в (3.5), получим

$$|T_k| \leqq c_1\{\|\varphi_j\|\{1 \vee H(0)\}^{k_j} + \|\varphi_{j+1}\|\{1 \vee H(0)\}^{k_j+k_{j+1}}\}/\sqrt{|t|},$$

где обозначено $c_1 = \{2+(4+s+l/R)/(2R)\} \vee \{1/(2R)\}$. Просуммировав полученную оценку по всем $k=0, 1, \ldots, T-1$ и воспользовавшись (3.4), получим

$$\|\varphi_{j-1}\| \leqq$$

$$\leqq c_1 T\{\|\varphi_j\|\{1 \vee H(0)\}^{k_j} + \|\varphi_{j+1}\|\{1 \vee H(0)\}^{k_j+k_{j+1}}\}/\sqrt{|t|}. \tag{3.10}$$

Ясно, что $\|\varphi_{n-1}\| \leqq c_1 T\{1 \vee H(0)\}^{k_n}/\sqrt{|t|}$. По индукции из (3.10) нетрудно получить

$$\|\varphi_m\| \leqq 2^{n-m-1} c_1^{n-m} T^{n-m}\{1 \vee H(0)\}^{k_{m+1}+\ldots+k_n}|t|^{-(1\vee[(n-m)/2])/2} \tag{3.11}$$

для всех $m=0, 1, \ldots, n-1$. При $m=0$ оценка (3.11) будет принимать следующий вид:

$$\|\varphi_0\| \leqq (1/2)(2c_1 T)^n\{1 \vee H(0)\}^{k_1+\ldots+k_n}|t|^{-(1\vee[n/2])/2}. \tag{3.12}$$

Из (3.12), (3.3), оценки $\Omega \leqq nH(0)$ и $T \leqq N+2$ следует

$$|f_n^{(s)}(q;\ t)| \leqq n!(1/2)\{2c_1(N+2)\}^n|t|^{-(1\vee[n/2])/2}\times$$

$$\times\sum{}' C_s(k_0, \ldots, k_n)n^{k_0}\{1 \vee H(0)\}^{k_0}2^{s-k_0}\{1 \vee H(0)\}^{k_1+\ldots+k_n}. \tag{3.13}$$

Заметив, что $\Sigma' C_s(k_0, \ldots, k_n) = (n+1)^s$, из (3.13) получим утверждение теоремы.

Доказательство леммы 1.5 немедленно следует из теоремы 3.1.

§4. Доказательство теорем 1.1—1.3

Утверждение теоремы 1.1 следует из хорошо известных равномерных и неравномерных оценок близости функций распределения по близости соответствующих преобразований Фурье—Стилтьеса, результатов Гётце [5] и модифицированной теоремы 2.8, которая получается таким же образом, что и теорема 2.8, только вместо следствия 2.6 надо воспользоваться леммой 2.3. Что касается доказательства теоремы 1.3, то оно, как уже отмечалось в первом параграфе, следует из условия (1.1), выполнение которого гарантируют теоремы 2.8 и 3.1.

Теорема 1.2 немедленно следует из теоремы 3.1 и хорошо известных свойств преобразований Фурье.

В заключение автор благодарит В. Ю. Бенткуса за постановку задачи и полезные советы.

Литература

1. **Чибисов Д.М.** К исследованию асимптотической мощности критериев согласия при близких альтернативах // Теория вероятн. и ее примен. 1965.Т.X, вып.3. С.460—478.
2. **Sazonov V.V.** On ω^2 criterion // Sankhya Ser. A. 1968. V. 30, No 2. P. 205—210.
3. **Csorgo S.** On an asymptotic expansion for the von Mises statistic // Acta Sci. Math. 1976. V. 38. P. 45—67.
4. **Csorgo S., Stacho L.** A step toward an asymptotic expansion for the Cramer—von Mises statistic // Analytic Function Methods in Probab. Theory. Amsterdam—Oxford—New York. North-Holland. 1980. P. 53—65.
5. **Gotze F.** Asymptotic expansions for bivariate von Mises functionals // Z. Wahr. verw. Gebiete. 1979. B. 50, H. 3. S. 333—355. ISSN 0044—3719.
6. **Королюк В. С., Боровских Ю. В.** Асимптотический анализ распределений статистик. Киев: Наукова думка, 1984. 302 с.
7. **Бенткус В. Ю., Зитикис Р.Э.** Замечание о критерии Крамера—Мизеса—Смирнова // Liet. matem. rink. 1988. Т.28, № 1. С. 14—21. ISSN 0132—2818.
8. **Бенткус В. Ю.** Асимптотические разложения в центральной предельной теореме в гильбертовом пространстве // Liet. matem. rink. 1984. T.XXIV, № 3. С. 29—50. ISSN 0132—2818.
9. **Бенткус В. Ю.** Асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных элементов пространства Гильберта // Liet. matem. rink. 1984. T.XXIV, № 4. С.29—48.
10. **Бенткус В. Ю.** Асимптотические разложения в локальной предельной теореме в гильбертовом пространстве // Liet. matem. rink. 1985. T.XXV, № 1. С.9—22. ISSN 0132—2818.
11. **Черге Ш.** Асимптотическое разложение для преобразования Лапласа ω^2-критерия фон Мизеса // Теория вероятн. и ее примен. 1975. T.XX, вып.1. С.158—162.
12. **Юринский В. В.** О погрешности нормального приближения // Сиб. матем. журнал. 1983. T.XXI, № 6. С. 188—199. ISSN 0037—4474.
13. **Anderson T. W., Darling D. A.** Asymptotic theory of certain "goodnes of fit" criteria based on stochastic processes // Ann. Math. Statistics. 1952. V. 23, No 2, P. 193—212.
14. **Мартынов Г. В.** Критерии омега-квадрат. М.: Наука, 1978. 80 с.

Институт математики и кибернетики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
21.07.1987

ASIMPTOTINIAI SKLEIDINIAI LOKALIOJOJE RIBINĖJE TEOREMOJE STATISTIKOMS ω_n^2

R. Zitikis

(*Reziumė*)

Sakykime, $x_1, \ldots, x_n$ yra nepriklausomi intervale [0, 1] tolygiai pasiskirsčiusio atsitiktinio dydžio X stebėjimai. Nagrinėkime statistiką

$$\omega_n^2(q) = n\int_0^1 \{F_n(t)-t\}^2 q(t)\,dt.$$

Čia $F_n(t)$ yra empirinė pasiskirstymo funkcija, sudaryta pagal stebėjimus $x_1, \ldots, x_n$, o $q(t)$ yra funkcija, tenkinanti šias sąlygas:

i) $q(t) > 0\ \forall t \in [0, 1]$;

ii) $q(t)$ tolydi ir gabalais tolydžiai diferencijuojama intervale $[0, 1]$.
Rasti $P\{\omega_n^2(q)<x\}$ pasiskirstymo funkcijos išvestinių asimptotiniai skleidiniai. Gauti tolygieji ir netolygieji liekamojo nario įverčiai.

ASYMPTOTIC EXPANSIONS IN THE LOCAL LIMIT THEOREM FOR ω_n^2 STATISTICS

R. Zitikis

(*Summary*)

Let $x_1, \ldots, x_n$ be independent observations coming from a random variable X, uniformly distributed on $[0, 1]$. Let $F_n(x)$ be the empirical distribution function of the data. Consider the statistic

$$\omega_n^2(q)=n\int_0^1\{F_n(t)-t\}^2 q(t)\,dt.$$

Suppose that the weight function q fulfills the conditions:
i) $q(t)>0$ $\forall t\in[0, 1]$;
ii) $q(t)$ is continuous on $[0, 1]$;
iii) $q(t)$ is continuously differentiable on $[0, 1]$ except finite number of points.
Then the asymptotic expansion of the derivative $(d/dx)^s P\{\omega_n^2(q)<x\}$ are received. The estimates of the remainder term are non-uniform.

28 LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 3
1988

УДК 517.977

МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ МНОГОМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПО УПРАВЛЕНИЯМ И ПАРАМЕТРАМ, СТЕСНЕННЫМ ПОЛИЭДРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ. I

Э. Ивонис

1. Критерий оптимальности

1.1. *Постановка задачи.* Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} J(w)=c'x(t^*)\to\max,\\ \dot{x}=Ax+Bu+Mv,\quad x(0)=x_0,\\ w(t)=\big(u(t),\ v\big)\in W,\quad t\in T=[0,\ t^*]. \end{gathered}\tag{1.1}$$

Здесь $x=x(t)=(x_i(t),\ i\in I)$ – n-вектор состояния системы в момент времени t; $u=u(t)=(u_j(t),\ j\in J)$, $t\in T$, – кусочно-постоянная r-вектор-функция; $v=(v_l,\ l\in L)$ – s-вектор параметров;

$$W=\{w=(u,\ v): Du+Gv=f,\ d_*\leqslant u\leqslant d^*,\ g_*\leqslant v\leqslant g^*\}$$

– многогранное множество; $A=A(I,\ I)$ – $n\times n$-матрица, характеризующак собственную динамику системы;

$D=D(K,\ J)$, $G=G(K,\ L)$ – $p\times r$- и $p\times s$-матрицы, rank $D=p$; $B=B(I,\ J)$, $M=M(I,\ L)$ – $n\times r$- и $n\times s$-матрицы, описывающие входные устройства по u и v;

$$I=\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\},\quad J=\{1,\ 2,\ \ldots,\ r\},\quad K=\{1,\ 2,\ \ldots,\ p\},$$

$L=\{1, 2, \ldots, s\}$; c, d_*, d^*, g_*, g^*, x_0, f – заданные векторы соответствующих размеров. Совокупность $w=(w(t),\ t\in T)=\big(u(t),\ t\in T;\ v\big)$ назовем управлением (1.1) задачи. Управление w будем называть допустимым, если $w(t)\in W$, $t\in T$. Решение (1.1) задачи w^0 называется оптимальным управлением. Допустимое управление w^ε, для которого выполняется неравенство $J(w^0)-J(w)\leqslant\varepsilon$ $(\varepsilon\geqslant 0)$, назовем ε-оптимальным управлением.

1.2. *Опорное управление.* При помощи формулы Коши задачу (1.1) запишем в эквивалентной функциональной форме

$$\begin{gathered} \int_0^{t^*} c'\mathscr{F}(t^*,\ \tau)Bu(\tau)\,d\tau+\int_0^{t^*} c'\mathscr{F}(t^*,\ \tau)M\,d\tau\,v\to\max,\\ Du(t)+Gv=f,\\ d_*\leqslant u(t)\leqslant d^*,\quad g_*\leqslant v\leqslant g^*,\quad t\in T. \end{gathered}\tag{1.2}$$

Здесь $\mathscr{F}(t^*, \tau)=F(t^*)F^{-1}(\tau)$, $\dot{F}=AF$, $F(0)=E$. Нетрудно заметить, что вектор-функция $\psi(t)=c'\mathscr{F}(t^*,\ t)$, $t\in T$, есть решение (котраектория) сопряженной системы

$$\dot{\psi}=-A'\psi,\quad \psi(t^*)=c.\tag{1.3}$$