Пусть, кроме того, выполнены следующие условия для указанных значений r, q:

$$a(r) \geqslant a_0 > 0, \quad a'(r) \geqslant 0, \quad \exists\, c > 0: \quad (c + r)\, a'(r) \leqslant \nu a(r),$$

$$K(q) > 0, \quad K'(q) \geqslant 0, \quad K''(q) \geqslant 0, \quad qK'(q) \leqslant \kappa K(q).$$

Т е о р е м а 5. *Если при перечисленных выше условиях выполняется неравенство* $4\nu\kappa\sqrt{n} \leqslant 1$, *функция* $u_0 \in C^{2+\alpha}(\bar{G})$, $\alpha \in (0, 1)$, *причем* $\Delta u_0 \mid_{\partial G} = 0$, *то задача* (4) *имеет и притом единственное классическое решение.*

В основе доказательства лежит априорная оценка для функции $v = \int\limits_0^t K(|\nabla u|^2)ds$. Для ее получения рассматриваемое уравнение дифференцируется по пространственным переменным, после чего преобразуется в уравнение относительно v. Возникающие интегральные слагаемые удается оценить при перечисленных выше условиях.

При меньших ограничениях решаются уравнения, коэффициенты которых содержат интегралы от неизвестной функции, именно, рассмотрим задачу

$$(5) \qquad u_t = a\left(\int\limits_0^t u^2 ds\right)\Delta u, \quad u\mid_{\partial G} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x).$$

Здесь $a(r)$ — непрерывная функция, определенная для $r \geqslant 0$ и положительная: $a(r) > 0$. Область G ограничена и имеет достаточно гладкую границу ∂G.

Т е о р е м а 6. *Пусть функция* $u_0(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G) \cap L^\infty(G)$. *Тогда существует решение задачи* (5) *из класса*

$$u \in L^\infty(0, T;\ \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)) \cap L^2(0, T;\ W_2^2(G)) \cap L^\infty(Q).$$

Если размерность $n \leqslant 3$, *функция* $a(r)$ *непрерывно дифференцируемая и функция* $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}_q^2(G)$, *где* $q > n/2 + 1$, *то решение в указанном классе функций является единственным.*

В качестве примера, где естественно возникают интегральные коэффициенты, рассмотрим уравнение третьего порядка

$$w_{tt} = a(w, w_x)\, w_{txx}, \quad 0 < x < l,$$

дополнив его начально-краевыми условиями

$$w(0, x) = 0, \quad w_t(0, x) = u_0(x), \quad w_t(t, 0) = w_t(t, l) = 0.$$

Если ввести замену $u = w_t$, то получится такая задача:

$$(6) \qquad u_t = a\left(\int\limits_0^t u(s, x)\, ds;\ \int\limits_0^t u_x(s, x)\, ds\right) u_{xx},$$

$$(7) \qquad u(0, x) = u_0(x), \quad u(t, 0) = u(t, l) = 0.$$

Функция $a(p, q)$ предполагается непрерывно дифференцируемой по своим аргументам и положительной: $a > 0$.

Т е о р е м а 7. *Пусть функция* $u_0(x)$ *имеет ограниченную производную и обращается в нуль на концах отрезка* $[0, l]$.

Тогда задача (6), (7) *имеет решение в классе функций, у которых* $u, u_x \in L^\infty(Q)$; $u_{xx}, u_t \in L^2(Q)$, *где* $Q = (0, l) \times (0, T)$.

Эту задачу можно решать в классе гладких функций.

Т е о р е м а 8. *Пусть функция* $u_0 \in C^{2+\alpha}(0, l)$, $0 < \alpha < 1$, *и обращается в нуль на концах отрезка* $[0, l]$ *вместе со своей второй производной. Тогда задача* (6), (7) *имеет единственное классическое решение для* $t \geqslant 0$.

Нетрудно переформулировать эти утверждения в терминах исходной функции w.

Автор благодарит чл.-корр. АН СССР С.И. Похожаева за полезное обсуждение результатов.

Тульский политехнический институт

Поступило 31 X 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бернштейн С.Н.* Собр. соч. Изд-во АН СССР, 1960, т. 3, с. 323–331. 2. *Похожаев С.И.* – Мат. сб., 1975, т. 96 (138), № 1, с. 152–166. 3. *Redlinger R.* – Nonlinear Anal. Theory, Meth. and Appl., 1984, vol. 8, № 6, p. 667–682. 4. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336 с. 5. *Slodička M.* – Math. slov., 1984, vol. 34, № 1, p. 3–23.

УДК 517.946

М А Т Е М А Т И К А

А.А. ЛАРИН

О СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ, ОТВЕЧАЮЩИХ САМОСОПРЯЖЕННЫМ РАСШИРЕНИЯМ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 21 X 1985)

Вопросы локализации и сходимости спектральных разложений, отвечающих самосопряженным расширениям регулярных эллиптических операторов, к настоящему времени подробно изучены (см., например, [1, 3]). Аналогичные вопросы для сингулярных эллиптических операторов в частных производных исследованы менее полно. Тем не менее исследования в этом направлении несомненно актуальны и в последнее время интенсивно развиваются (см. по этому поводу [2, 4, 11]).

В настоящей статье изучаются свойства средних Рисса спектральных разложений, отвечающих сингулярным эллиптическим операторам, в которых по одной из переменных действует дифференциальный оператор Бесселя

$$B_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{k}{y}\frac{\partial}{\partial y}, \quad k > 0.$$

Полученные нами результаты непосредственно примыкают к результатам Ш.А. Алимова и И. Йо [2].

1. Обозначим через E_{n+1}^+ полупространство евклидова $(n + 1)$-мерного пространства E_{n+1}, состоящее из точек $x = (x', y) = (x_1, \ldots, x_n, y)$ таких, что $y > 0$. Пусть Ω^+ — ограниченная область в E_{n+1}^+, прилегающая к гиперплоскости $y = 0$, граница которой состоит из двух частей Γ^0 и Γ^+, где Γ^0 — часть границы, лежащая на гиперплоскости $y = 0$, а Γ^+ — ее оставшаяся часть, расположенная в полупространстве $y > 0$. Пусть Γ^- обозначает зеркальное отражение Γ^+ относительно гиперплоскости $y = 0$. Будем предполагать, что $\Gamma^+ \cup \Gamma^-$ является C^∞-многообразием и что область, ограниченная данной поверхностью, выпукла в направлении

оси Oy. Через $C^{\infty}_{0,+}(\Omega^+ \cup \Gamma^0)$ обозначим множество всех бесконечно дифференцируемых функций, четных по переменной y, носители которых сосредоточены в $\Omega^+ \cup \Gamma^0$.

В дальнейшем будем предполагать, что точка 0 является внутренней точкой множества Γ^0.

Пусть оператор L задается дифференциальным выражением

$$(1)\qquad L = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{k}{y}\frac{\partial}{\partial y} + q(x)\cdot = -\Delta_B + q(x),$$

$$k > 0, \quad n \geqslant 2,$$

на области определения $D(L) = C^{\infty}_{0,+}(\Omega^+ \cup \Gamma^0)$.

На потенциал $q(x)$ накладываются следующие ограничения:

$$(2)\qquad q(x) = q(r) = a(r)/\sqrt{r},$$

причем функция $a(r) \in C^{\infty}(0, \infty)$, $a(r) \geqslant 0$ и $|a^{(m)}(r)| \leqslant Cr^{\tau - 1 - m}$, $r > 0$, $m = 0, 1, \ldots, [(n+k+1)/2] + 1$, где

$$a^{(m)}(r) = \frac{d^m a(r)}{dr^m}, \quad r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + y^2$$

и символом $[a]$ обозначена целая часть числа a.

Предполагается, что $\tau > 0$ при $n > 2$ и что $\tau > 1/2$ в случае $n = 2$.

Легко видеть, что оператор L является симметрическим и формально положительным относительно скалярного произведения гильбертова пространства $L_{2,k}(\Omega^+)$ (определения всех используемых в работе функциональных пространств см. в [5, 8, 9]). Обозначим через $\hat{L}$ произвольное положительное самосопряженное расширение оператора L с дискретным спектром. В силу классической теоремы К.О. Фридрихса такое самосопряженное расширение существует. Пусть $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ обозначает последовательность собственных значений оператора $\hat{L}$, а $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ – полную ортонормированную систему соответствующих собственных функций из $L_{2,k}(\Omega^+)$. Среднее Рисса порядка $s \geqslant 0$ спектрального разложения произвольной функции $f \in L_{2,k}(\Omega^+)$ определим обычным образом:

$$(3)\qquad E^s_{\lambda} f(x) = \sum_{\lambda_i < \lambda} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda}\right)^s (f, u_i) u_i(x)$$

(скобки $(\cdot, \cdot)$ обозначают скалярное произведение в $L_{2,k}(\Omega^+)$).

Для изучения поточечного поведения средних Рисса спектральных разложений нам потребуется следующая

Л е м м а 1. *Пусть потенциал $q(x)$ является регулярной функцией на множестве $\Omega^+ \cup \Gamma^0 \cup \Gamma^+ \setminus \{0\}$ и при $x \to 0$ имеет особенность вида $O(r^{\sigma - 2})$, $\sigma > 0$. Тогда собственные функции оператора $\hat{L}$ принадлежат некоторому классу Гёльдера $C^{\alpha, \mathrm{loc}}(\Omega^+ \cup \Gamma^0)$, где показатель $\alpha > 0$ определяется величиной параметра σ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится по следующей схеме. Сначала, используя результаты работы [6], показывается, что объемный потенциал [9], построенный по плотности $f(x) \in L_{p,k}(\Omega^+)$, $1 < p < \infty$, является элементом весового соболевского пространства $W^2_{p,k}(\Omega^+)$. Отсюда и из свойств регулярности решений B-гипоэллиптических уравнений [7] вытекает, что любое решение в смысле распределений уравнения

$$\Delta_B u(x) = f(x), \quad f(x) \in L_{p,k}(\Omega^+)$$

принадлежит пространству $W^{2,\mathrm{loc}}_{p,k}(\Omega^+)$. Далее, учитывая, что все $u_i(x) \in L_{2,k}(\Omega^+)$, устанавливается, что на самом деле $u_i(x) \in W^{2,\mathrm{loc}}_{p,k}(\Omega^+)$ с некоторым $p > (n+k+1)/2$. Теперь требуемый результат следует из соответствующей теоремы вложения [8].

2. В этом пункте будет получена оценка для суммы квадратов собственных функций $u_i(x)$. При этом мы следуем методике работ [2, 10], основанной на использовании формулы среднего значения.

Пусть $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$, $c_{n,k} = \pi^{n/2}\Gamma((k+1)/2) \cdot 2^{(n+k-1)/2}$, $\omega(t) = \min(1, t^{-(n+k)/2})$. Символом $J_{\nu}(z)$ обозначим функцию Бесселя порядка ν.

Справедлива следующая

Л е м м а 2. *Для всякой полусферы радиуса r с центром в точке 0, целиком лежащей в области Ω^+, и для любой собственной функции $u_i(x)$ при $\mu_i \geqslant \mu_0$ имеет место формула среднего значения*

$$(4)\qquad \int_{S_1^+} u_i(r, \theta)\theta^k_{n+1} dS_1^+ =$$

$$= u_i(0)\{c_{n,k}(r\mu_i)^{(1-n-k)/2} J_{(n+k-1)/2}(r\mu_i) + \alpha(r, \mu_i)\},$$

где $|\alpha(r, \mu_i)| \leqslant C\mu_i^{-\tau}\omega(r\mu_i)$.

С л е д с т в и е. *Для собственных функций $u_i(x)$ имеет место оценка*

$$(5)\qquad \sum_i |u_i(0)|^2 \leqslant C\mu^{n+k}, \quad \mu \geqslant 1, \quad |\mu_i - \mu| \leqslant 1,$$

причем постоянная C не зависит от μ.

З а м е ч а н и е. Формула среднего значения вида (4) и неравенство (5) остаются справедливыми и в случае потенциала $q(x) = q(r) = a(r)/r$.

3. В этом пункте изучается действие целых неотрицательных степеней оператора $\hat{L}$ в весовых соболевских пространствах $\mathring{H}^s_k(\Omega^+)$ и устанавливаются некоторые свойства резольвенты $R(\lambda, \hat{L}) = (\hat{L} - \lambda J)^{-1}$.

Имеет место

Л е м м а 3.1. *Пусть m – четное неотрицательное число, причем $0 \leqslant m < (n+k+1)/2$. Пусть положительный параметр $k \geqslant (n-3)/3$ и не является нечетным числом из интервала $(0, n-1)$. Тогда оператор $\hat{L}^{m/2}$ как оператор, действующий из $\mathring{H}^m_k(\Omega^+)$ в $L_{2,k}(\Omega^+)$, является ограниченным, т.е. для любой функции $f \in \mathring{H}^m_k(\Omega^+)$ имеет место оценка*

$$(6)\qquad \|\hat{L}^{m/2} f\|_{L_{2,k}(\Omega^+)} \leqslant C\|f\|_{\mathring{H}^m_k(\Omega^+)}.$$

Доказательство леммы проводится с использованием неравенства Харди и теорем вложения для пространства $W^s_{p,k}(\Omega^+)$.

З а м е ч а н и е. В случае $m = 2$ неравенство (6) остается верным для любого $k > 0$, $k \neq 1$.

Пусть $\hat{G}_{\mu} = R(\mu^2, \hat{L}) = (\hat{L} - \mu^2 J)^{-1}$. Пусть, далее, $0 < \epsilon_0 < \pi/2$ есть произвольное малое действительное число. Определим на комплексной плоскости множество

$$(7)\qquad Z_0 = \{z \in C\colon \epsilon_0 \leqslant \arg z \leqslant \pi - \epsilon_0\}.$$

Справедлива следующая

Л е м м а 3.2. *Пусть $0 \leqslant l < (n+k+1)/2$ и $0 < \epsilon < \min\{1, (n+k+1)/2 - l\}$.*

Тогда для любой функции $f \in \mathring{H}^l_k(\Omega^+)$ такой, что $f(x) = 0$ при $|x| \leqslant r$, имеет место оценка

$$
(8) \qquad |\hat{G}_\mu f(0)| \leqslant C \frac{r^{l-(n+k+1)/2}}{|\mu|^2} (r|\mu|)^\epsilon \times \\
\times \exp(-\alpha r|\mu|) \|f\|_{\mathring{H}^l_k(\Omega^+)},
$$

где α – некоторое положительное число и $\mu \in Z_0$.

Доказательство леммы проводится методом, развитым в работах [2, 3], с использованием соответствующих теорем вложения.

4. В заключительном пункте мы установим справедливость основного утверждения настоящей статьи.

Из следствия к лемме 2 и леммы 3.1 непосредственно вытекает

Л е м м а 4. *Пусть показатель m и параметр k те же, что и в лемме 3.1. Тогда для любых $h > 0$, $t > 0$ имеет место оценка*

$$
(9) \qquad \begin{aligned} &|\varphi[(t+h)^2] - \varphi[t^2]| \leqslant C\|f\|_{\mathring{H}^m_k(\Omega^+)}(1+\sqrt{h})(t+h)^{(n+k)/2-m}, \\ &\varphi(t) = E_t f(0) = \sum_{\lambda_i < t} (f, u_i)u_i(0), \quad f \in \mathring{H}^m_k(\Omega^+). \end{aligned}
$$

Т е о р е м а 1. *Пусть показатель m и параметр k удовлетворяют всем условиям леммы 3.1. Предположим, что $f \in \mathring{H}^m_k(\Omega^+)$ и $f(x) = 0$ при $|x| \leqslant r < 1$.*

Тогда для средних Рисса порядка $s \geqslant 0$ спектрального разложения $E_{\lambda f}$ справедлива оценка

$$
(10) \qquad |E^s_\lambda f(0)| \leqslant C\|f\|_{\mathring{H}^m_k(\Omega^+)} \lambda^{\frac{1}{2}((n+k+1)/2-m)} (1 + r\sqrt{\lambda})^{-1/2-s}.
$$

Доказательство теоремы опирается на тауберову теорему Хёрмандера [3, 12] и использует утверждения лемм 3.2 и 4.

Полученная оценка (10) позволяет утверждать, что средние Рисса порядка $s = (n+k)/2 - m$ ограничены в точке 0, в которой сосредоточена особенность потенциала. Если же $s > (n+k)/2 - m$, то $E^s_\lambda f(0) \to 0$ при $\lambda \to \infty$.

Выше предполагалось, что потенциал $q(r)$ имеет особенность в точке 0. Разумеется, все утверждения работы остаются в силе и в этом случае, когда особенность сферически-симметричного потенциала (2) расположена в любой другой внутренней точке множества Γ^0.

Автор выражает глубокую благодарность проф. И.А. Киприянову за внимание, проявленное к работе. Кроме того, автор весьма признателен проф. Ш.А. Алимову за ряд полезных советов и замечаний.

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
19 XI 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алимов Ш.А., Ильин В.А., Никишин Е.М.* – УМН, 1976, т. 21, № 6, с. 28–83. 2. *Alimov S.A., Joo I.* – Acta Sci. Math., 1983, vol. 45, № 1/4, p. 5–18. 3. *Алимов Ш.А.* Докт. дис. М.: МГУ, 1973. 4. *Stacho L.L.* – Acta Math. Hung., 1984, vol. 44, № 3/4, p. 407–408. 5. *Киприянов И.А.* Тр. МИАН, 1967, т. 89, с. 130–213. 6. *Киприянов И.А., Ключанцев М.И.* – Сиб. матем. журн., 1970, т. 11, № 5, с. 1060–1083. 7. *Куликов А.А.* Канд. дис. Воронеж: ВГУ, 1983. 8. *Лейзин М.А.* В кн.: Теоремы вложения и их приложения. Алма-Ата: Наука, 1976, с. 75–78. 9. *Сазонов А.Ю.* Канд. дис. Воронеж: ВГУ, 1979. 10. *Титчмарш Э.Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. М.: ИЛ, 1961. Т. 2. 555 с. 11. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980. 664 с. 12. *Хермандер Л.* – Сб. пер. Математика, 1968, т. 12, № 5, с. 91–130.

УДК 510.64

В.П. ОРЕВКОВ

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПО ЕГО СХЕМЕ

(Представлено академиком А.П. Ершовым 30 X 1985)

В работе [1] решена задача восстановления логического вывода по его схеме, т.е. последовательности анализов применений правил и аксиом, для варианта арифметики, в языке которого нет функциональных знаков, отличных от 0 и $'$, а сложение и умножение выражаются трехместными предикатами. В настоящей заметке рассмотрена задача восстановления вывода по его схеме для языка с любым числом многоместных функциональных знаков. Схему доказательства можно рассматривать как экономный и достаточно удобный код доказательства. Очень многие операции над выводами можно выполнять, используя только схему вывода, например, для извлечения программы можно пользоваться только схемой доказательства утверждения вычислимости [2], а не записью самого доказательства. Все полученные в этой заметке результаты одновременно верны для следующих вариантов исчисления предикатов: а) классическое исчисление, б) конструктивное (интуиционистское) исчисление, в) минимальное исчисление.

1. Будем рассматривать следующие варианты оформления средств логического вывода исчисления предикатов с равенством: 1) гильбертовский вариант, 2) исчисление натуральных выводов, 3) генценовский секвенциальный вариант с сечением. Выводы в указанных вариантах исчисления будем записывать в линейной форме с а н а л и з а м и п р и м е н е н и й п р а в и л. В случае гильбертовского варианта исчисления предикатов в анализах аксиом будем указывать только номер аксиомы, в анализах применений правил вывода вместе с номером правила будем указывать номера посылок. В случае исчисления натуральных выводов в анализах допущений будем указывать порядковый номер допущения, в анализах специфических аксиом – номер аксиомы, а в анализах применений правил – номер правила, номера посылок и номера используемых в этом применении допущений. В случае генценовского секвенциального варианта в анализах логических аксиом будем указывать номера вхождений в сукцедент и в антецедент главной формулы аксиомы, в анализах применений правил – номер правила, номера посылок и номера вхождений всех формул, активно участвующих в применении правила (в обычных формулировках таких исчислений достаточно указывать в анализах применений правил только номер главного вхождения, т.е. номер вхождения формулы, получающейся в результате применения правила). В дальнейшем аксиомы будем рассматривать как 0-посылочные правила.

С х е м о й л о г и ч е с к о г о в ы в о д а будем называть конечную последовательность анализов применений правил. Пусть U – схема логического вывода. Р е ш е н и е м схемы U будем называть любой вывод D, у которого список анализов применений правил совпадает с U. Схему U будем называть д о п у с т и м о й, если можно построить ее решение. Будем говорить, что формула или секвенция S в ы в о д и м а п о с х е м е U, если можно построить такое решение U, которое является выводом S. Будем говорить, что формула A выводима по схеме U вывода в секвенциальном варианте исчисления предикатов, если по схеме U выводима секвенция $\to A$.

Пусть D – вывод. Д л и н о й в ы в о д а D будем называть число вхождений в D формул или секвенций, в ы с о т о й D – число вхождений формул или секвенций в самую длинную ветвь D. Д л и н о й с х е м ы U будем называть число вхождений анализов в U; очевидно, что длина U равна длине произвольного решения U.