Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University
Ser A, Vol. 44, No. 1, 1990, pp. 61–66

SUR UN THÉORÈME DE TYPE D'AKIO KODAMA

Par

Tatsuhiro HONDA et Joji KAJIWARA

Dédié au professeur Tosihusa KIMURA à l'occasion de son soixantième anniversaire

(Reçu le 21 octobre, 1989)

§ 1. Introduction

A. Kodama [4] a considéré le domaine faiblement pseudoconvexe

$$E(p_1, p_2,\dots, p_n) = \{(z_1, z_2,\dots, z_n)\in \mathbf{C}^n; |z_1|^{2p_1} + |z_2|^{2p_2} + \cdots + |z_n|^{2p_n} < 1\}$$

pour entiers positifs et non nuls $p_1, p_2,\dots, p_n$ et obtenu les resultats suivants:

THÉORÈME DE KODAMA. *Soit D un domaine borné dans $\mathbf{C}^n$l'espace de n variables complexes $z_1, z_2,\dots, z_n (n > 1)$ tel que sa frontière ∂D ait au moins un point $z^0 = (z_1^0, z_2^0,\dots, z_n^0)$. Ajoutons l'hypothèse suivante*:

(1) *Il existe un entier positif $k \geqq 0$, $n - k$ entiers $p_\alpha > 1 (k + 1 \leqq \alpha < n + 1)$ et un voisinage V^0 de z^0 dans $\mathbf{C}^n$* tels que

(i) $z^0 \in \partial E(1, 1,\dots, 1, p_{k+1}, p_{k+2},\dots, p_n)$, et

(ii) $D \cap V^0 = E(1, 1,\dots, 1, p_{k+1}, p_{k+2},\dots, p_n) \cap V^0$,

où, si $k = n$, $E(1, 1,\dots, 1, p_{k+1}, p_{k+2},\dots, p_n)$ désignera le boule d'unité B dans $\mathbf{C}^n$.

(2) *Le nombre $\#\{i; z_i^0 \neq 0, 1 \leqq i \leqq n\} = j$.*

(3) *Le point z^0 est un point frontière de D au sens de Greene-Krantz* [2], *c'est-à-dire qu'il existe un point $\zeta^0 \in D$ et une suite $\{\psi_\nu\}$ de* Aut(D), *le groupe des automorphismes biholomorphes de D sur D, tel que l'on ait $\lim_{\nu\to\infty} \psi_\nu(\zeta^0) = z^0$.*

Alors on a $1 \leqq j \leqq k$ et $D = E(1, 1,\dots, 1, p_{k+1}, p_{k+2},\dots, p_n)$.

Le principe de prolongation analytique nous enseigne que les data locaux d'un sujet analytique décident ceux sur tous points du domaine de définition partout. Le théorème ci-dessus soutient ce principe qui est un de plus beaux principes dans la théorie des founctions.

Le but de ce mémoir est d'établir un théorème de type d'Akio Kodama dans le cas de dimension infinie.

1. L'espace l^{2p} des suites sommable à la puissance 2p.

Soit p un entier avec $p > 1$. Soit l^{2p} l'ensemble des suites $z = \{z_i;\ i = 1, 2,\dots, n,\dots\}$ de nombres complexes z_i telles que

$$\| z \| = \sqrt[2p]{\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^{2p}} < +\infty .$$

L'ensemble l^{2p} muni naturellenment de la structure d'espace de Banach avec le norme ci-dessus. Soit D un ouvert de l^{2p}. Un point frontière z^0 de D sera dit finiment bon s'il existe un entier n plus grand que 2 et, pour trois points a, b et c de l^{2p}, s'il existe un sous-espace **C**-linéaire H à dimension n de l^{2p} contenant a, b et c tel que z^0 soit un point frontière bon de $D \cap H$ au sens de Greene- Krantz [2] dans H. Soit $Q(z, \zeta)$ une forme bilinéaire continue dans $l^{2p} \times l^{2p}$, (z, ζ) parcourant dans $l^{2p} \times l^{2p}$. On substitue $\bar{z}$ à ζ dans $Q(z, \zeta)$ et on appelle $Q(z) = Q(z, \bar{z})$ d'une forme hermitienne continue où $\bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2,\dots, \bar{z}_n,\dots) \in l^{2p}$ est l'élément conjugué complexe de $z = (z_1, z_2,\dots, z_n,\dots) \in l^{2p}$. Alors, il existe un nombre positif M tel que l'on ait $|Q(z)| \leqq M \| z \|^2$ pour tout $z \in l^{2p}$.

2. Ellipsoïdes dans l^2.

THÉORÈM 1. *Soient $Q(z, \bar{z})$ une forme hermitienne continue strictement positive dans l^2 et D un domaine borné dans l^2 ayant au moins un point frontière $b = (b_1, b_2,\dots, b_n\dots)$ finiment bon de D et ayant un voisinage V de b dans l^2 tels que b soit un point frontière de l'ellipsoïde*

$$E = \{z \in l^2;\ Q(z, \bar{z}) < 1\}$$

à la fois et que l'on ait

$$D \cap V = E \cap V.$$

Alors, on a $D = E$.

DÉMONSTRATION. Soit F l'ensemble des points z de ∂E, bord de E, dont certains voisinages V existe tel que l'on ait $D \cap V = E \cap V$ et que tout segment joignant tout point de $F \cap V$ et b soit contenu dans D sauf deux bouts. D'après l'hypothèse, b est un point de F. Soit a un point frontière de F dans ∂E. Soit V un voisinage de a satisfait à la condition dans la definition de F. Soit c un point de $V \cap F$. Puisque b est un point frontière de D finiment bon, il existe un entier $n > 2$ et un sous-espace $\mathbf{C}$-linéaire H à dimension n de l^2 contenant a, b et c tel que b soit un point frontière de $D \cap H$ bon au sens de Greene-Krantz [2]. Puisque la forme hermitienne Q est strictment positive dans H, il existe une transformation unitaire U dans H telle que l'on ait

$$Q \circ U^{-1}(w_1, w_2, \dots, w_n) = \lambda_1 |w_1|^2 + \lambda_2 |w_2|^2 + \cdots + \lambda_n |w_n|^2$$

pour $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in H$ où $\lambda_1, \lambda_2, \dots,$ et λ_n sont les valeurs propres associés à U. Puisque Q est strictement positive, $\lambda_1, \lambda_2, \dots,$ et λ_n sont positives et non nulles. Nous utilisons les coordonnées holomorphes

$$\zeta_j = w_j \sqrt{\lambda_j} \; (j = 1, 2, \dots, n).$$

Alors l'application ψ définie par $H \ni w \to \zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \in \mathbf{C}^n$ est biholomophe. Puisque

$$Q \circ \psi^{-1}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) = |\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + \cdots + |\zeta_n|^2$$

et que a est un point adhérent de F, chaque composant connexe de l'ouvert $\psi(D \cap H)$ dans $\mathbf{C}^n$ satisfait aux conditions du théorème de Kodama. On a donc $D \cap H = E \cap H$. Puisque c est arbitraire, a est un point de F. L'ensemble F est, donc, ouvert et fermé dans l'espace connexe ∂E et coïncide avec ∂E. C'est pourquoi, on a $D = E$.

3. Boules dans l^{2p} pour $p > 1$.

THÉORÈM 2. *Soit p un nombre positif plus grand que* 1. *Soient*

$$D = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_n, \dots); \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{2p} < 1\}$$

la boule d'unité dans l^{2p}, Aut(D) *le groupe des automorphismes biholomorphes de D sur D et ψ un élément de* Aut(D). *Alors, il existe une application bijetive ρ de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n, \dots\}$ sur lui-même et une siute $\{\theta_i\}$ de nombres réels θ_i tels que* l'on ait

$$w_i = z_{\rho(i)} \exp(\theta_i \sqrt{-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n, \dots),$$

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_n, \dots) = \psi(z),$$

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_n, \dots) \in D.$$

DÉMONSTRATION. D'après le corollaire 8.11 à la page 147 d'Ishidro-Stachó [1], ψ est isométrique et **C**-linéaire. Puisque ψ est une biholomorphisme de D sur D, il existe une suite $\{a_i;\ i = 1, 2, 3, \dots\}$ de l^{2q} telles que l'on ait

$$w_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} z_j \text{ pour } z = (z_1, z_2, \dots, z_j, \dots) \in l^{2q}$$

où

$$a_i = (a_{ij}) \quad (j = 1, 2, \dots) \in l^{2q}$$

et q est le nombre positif non nul vérifiant

$$\frac{1}{2p} + \frac{1}{2q} = 1.$$

On condidère le norme de l'élément $w = \psi(z)$ à la puissance 2p:

$$\|w\|^{2p} = \sum_{i=1}^{\infty} |w_i|^{2p} = \sum_{i=1}^{\infty} w_i \bar{w}_i w_i \bar{w}_i \cdots w_i \bar{w}_i \text{ (produit de } p\ w_i \text{ et } p\ \bar{w}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\sum_{j_1=1}^{\infty} a_{ij_1} z_{j_1} \Big) \Big(\overline{\sum_{k_1=1}^{\infty} a_{ik_1} z_{k_1}} \Big) \Big(\sum_{j_2=1}^{\infty} a_{ij_2} z_{j_2} \Big) \Big(\overline{\sum_{k_2=1}^{\infty} a_{ik_2} z_{k_2}} \Big)$$

$$\cdots \Big(\sum_{j_p=1}^{\infty} a_{ij_p} z_{j_p} \Big) \Big(\overline{\sum_{k_p=1}^{\infty} a_{ik_p} z_{k_p}} \Big).$$

On considère la somme S_1 pour $j_1, j_2, \dots, j_p$ et $k_1, k_2, \dots, k_p$ les quels sont égaux à la même j et on a

$$S_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^{2p} |z_j|^{2p} \Big)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|^{2p} \Big) |z_j|^{2p}.$$

La somme S_2 pour $j_1, j_2, \dots, j_p$ et $k_1, k_2, \dots, k_p$ parmi lesquels au moins deux élément sont differents est notée par

$$S_2 = \sum{}' a_{ij_1} \overline{a_{ik_1}}\, a_{ij_2} \overline{a_{ik_2}} \cdots a_{ij_p} \overline{a_{ik_p}}\, z_{j_1} \overline{z_{k_1}}\, z_{j_2} \overline{z_{k_2}} \cdots z_{j_p} \overline{z_{k_p}}.$$

Puisque on a

$$\|w\|^{2p} = \|z\|^{2p} = \sum_{j=1}^{\infty} |z_j|^{2p}$$

identiquement pour deux polynômes au dégré $2p$, tous coéfficients de deux polymômes ci-dessus sont égaux. On a donc

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^{2p} = 1$$

pour les coéfficients de $|z_j|^{2p}$. En outre, on a

$$S_2 = \sum{}' a_{ij_1} \overline{a_{ik_1}} a_{ij_2} \overline{a_{ik_2}} \cdots a_{ij_p} \overline{a_{ik_p}} z_{j_1} \overline{z_{k_1}} z_{j_2} \overline{z_{k_2}} \cdots z_{j_p} \overline{z_{k_p}} = 0.$$

On considère les coéfficients de $|z_j|^{2(p-1)}|z_k|^2$ $(j \neq k)$ qui sont égaux aux

$z_{j_1} \overline{z_{k_1}} z_{j_2} \overline{z_{k_2}} \cdots z_{j_p} \overline{z_{k_p}}$ lorsque

un des $j_1, j_2,\dots, j_p$ est egal à k, les autres sont egaux à j, et

un des $k_1, k_2,\dots, k_p$ est egal à k, les autres sont egaux à j,

et on a

$$p^2 \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|^{2(p-1)}|a_{ik}|^2 = 0 \ (j \neq k).$$

C'est pourquoi, on a

$$a_{ij} a_{ik} = 0 \text{ pour tout } i \text{ et pour tout } j \neq k.$$

Ceci signifie que chaque w_i est un monôme de $z_1, z_2,\dots, z_n,\dots$. Puisque ψ est isométrique, il existe une application bijective ρ de $\{1, 2,\dots, n,\dots\}$ sur lui-même et une suite $\{\theta_i\}$ de nombres reels tels que l'on ait

$$w_i = \exp(\theta_i \sqrt{-1}) z_{\rho(i)} \ (i = 1, 2,\dots, n,\dots).$$

Ainsi, nous venons de démontrer que une application biholomorphique de D sur D est une composition de rotations dans toutes plaines complexes et une permutation de coordonnées.

C'est pourquoi, la situation est similaire au cas de dimension finie et nous avons le théorème suivant:

THÉORÈM 3. *Soit p un nombre réel avec $p \geqq 1$. Soient*

$$D = \{z = (z_1, z_2,\dots, z_n,\dots); \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{2p} < 1\}$$

la boule d'unité dans l^{2p} *et* Aut(D) *le group des automorphismes biholomorphes de* D *sur* D. *S'il existe un point frontière* z^0 *de* D, *un point* z^1 *de* D *et une suite* $\{\psi_\nu\}$ *de* Aut(D) *tels que l'on ait* $\psi_\nu(z^1) \to z^0 (\nu \to \infty)$, *alors* $p = 1$.

DÉMONSTRATION. Bien que p ne soit pas un entier, d' après le corollaire 8.11 d' Ishidro-Stachó [1], chaque automorphisme de Aut(D) est isométrique et **C**-linéaire. Au cas ou $p > 1$, aucun point frontière de D n'est pas bon au sens de Greene-Krantz [2].

Bibliographie

[1] J. M. ISIDRO and L. L. STACHÓ, *Holomorphic Automorphism Groups in Banach spaces*, North-Holland Mathematics Studies **105** (1984).

[2] R. E. GREENE and S. G. KRANTZ, *Biholomorphic self-maps of domains*, Lecture Notes in Math. **1286**, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-London Paris-Tokyo (1987), 136–207.

[3] A. KODAMA, *Characterizations of certain weakly pseudoconvex domains* $E(k, \alpha)$ *in* $\mathbf{C}^n$, Tôhoku Math. J. **40**-3 (1988), 343–365.

[4] A. KODAMA, *A characterization of certain domains with good boundary points in the sense of Greene-Krantz* (to appear).

Département de Mathématiques
Université de Kyushu 33,
Fukuoka 812 *Japan*