28 LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1988

УДК 519.21

ЗАМЕЧАНИЕ О КРИТЕРИИ КРАМЕРА—МИЗЕСА—СМИРНОВА

В. Ю. Бенткус, Р. Э. Зитикис

§ 1. Введение и основные результаты

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимые равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$ случайные величины,

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\{X_i<x\},$$

где $1\{A\}$ – индикатор события A,

$$\omega_n^2=n\int_0^1 \{F_n(x)-x\}^2\,dx,$$

$$U_n(x)=P\{\omega_n^2<x\},$$

$$U(x)=\lim_{n\to\infty} U_n(x).$$

Пусть $\alpha=n/2-1$, если n четное, и $\alpha=(n-1)/2$, если n нечетное. Доказывается, что функция распределения $U_n(x)$ дифференцируема по x α раз, но не дифференцируема непрерывно $\alpha+1$ раз. Кроме того, производные функций распределения $U_n(x)$ при $n\to\infty$ равномерно по x сходятся к соответствующим производным предельной функции распределения $U(x)$. В частности, имеет место равномерная сходимость плотностей $U_n'(x)$.

В статье также приведены асимптотические разложения производных функций распределения $U_n(x)$. Оценки остатков правильно зависят от n.

Результаты работы обобщают и уточняют результаты работ Смирнова [1], Андерсона и Дарлинга [2], Канделаки [3], Сазонова [4, 5], Розенкранца [6], Кифера [7], Никитина [8], Орлова [9], Черге [10], Черге и Стахо [11], Гетце [12], Боровских [13], в которых исследовалась сходимость и скорость сходимости функций распределения $U_n(x)$ к $U(x)$, а также были получены асимптотические разложения для $U_n(x)$.

Перейдем к точным формулировкам.

Обозначим через C^α класс функций $f: R^1\to R^1$, имеющих α ограниченных производных.

Теорема 1.1. *Функция распределения $U_n(x)$ принадлежит классу C^α, но не принадлежит классу $C^{\alpha+1}$, где $\alpha=n/2-1$, если n четное, и $\alpha=(n-1)/2$, если n нечетное. Более того, для любых $m\geqq 0$, $s=0, 1, \ldots, n\geqq 2(s+1)$*

$$\sup (1+x^m)\,|U_n^{(s)}(x)-U^{(s)}(x)|\leqq c(s,m)/n. \tag{1.1}$$

руемости функции распределения $U_n(x)$ несколько уточняет результат работы Черге и Стахо [11]. Следует отметить, что в [11] вопрос о дифференцируемости функции распределения $U_n(x)$ исследовался с помощью представления $U_n(x)$ как меры Лебега некоторого множества в пространстве R^n с использованием хорошо известного неравенства Бруно–Минковского. В настоящей работе этот вопрос изучается с помощью детального анализа характеристической функции $E\exp\{it\omega_n^2\}$.

Теорема 1.2. *Для любых $m\geqq 0$, $s=0, 1, \ldots, p=1, 2, \ldots, n\geqq 2(s+1)$*

$$\sup_{x>0}(1+x^m)\left|\left(\frac{d}{dx}\right)^s\left\{U_n(x)-U(x)-\sum_{k=1}^{p-1} n^{-k}A_k U(x)\right\}\right|\leqq$$
$$\leqq c(m, s, p)/n^p. \tag{1.2}$$

Явные формулы для преобразований Фурье–Стилтьеса функций $x\mapsto A_k(x)$ приведены на с. 150 в [18]. Известно [4], что $U_n(x)$ можно представить в виде вероятности $P\{\|S_n\|^2<x\}$, где S_n – некоторая сумма независимых $L_2[0, 1]$-значных случайных элементов. Асимптотические разложения для производных $\left(\frac{d}{dx}\right)^k P\{\|S_n\|^2<x\}$, $k=0, 1, \ldots$, построены в [14–16]. Там же можно найти правила построения коэффициентов разложения. В частности, функции $A_k U(x)$ бесконечное число раз дифференцируемы, а их производные убывают на бесконечности быстрее любой степени x.

Теорема 1.2 обобщает результаты работ [10–13], где исследовались асимптотические разложения функции распределения $U_n(x)$. Доказательство теорем существенно опирается на результаты [16] об асимптотических разложениях в локальной предельной теореме в гильбертовом пространстве. Из результатов и доказательств этой работы (см. § 3 и доказательство теоремы 3.1 в [16]) следует, что для доказательства теоремы 1.2 достаточно проверить условие

$$\int_{|t|\leqq\sqrt{n}} |t|^r\left|\left(\frac{d}{dt}\right)^q E\exp\{it\omega_n^2\}\right|dt<\infty \tag{1.3}$$

для некоторых достаточно больших $r=r(m, s, p)$ и $q=q(m, s, p)$. Анализ характеристической функции $E\exp\{it\omega_n^2\}$ и доказательство условия (1.3) проведены в § 2. Результаты этого параграфа иллюстрирует следующая

Лемма 1.3. *Пусть $s=0, 1, \ldots, n=1, 2, \ldots, t\in R^1$. Тогда для любого $A>0$ и для достаточно больших n имеет место оценка*

$$\left|\left(\frac{d}{dt}\right)^s E\exp\{it\omega_n^2\}\right|\leqq c(s, A)\,n^s/(1+|t|^A). \tag{1.4}$$

Общий метод для оценки характеристических функций в зоне $|t|\leqq n^{1-\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$ был предложен Гетце [12]. Боровских [13] в зоне $|t|\geqq n^{1/2+\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$ для любого $A>0$ и для достаточно больших n получил оценку

$$\left|\left(\frac{d}{dt}\right)^s E\exp\{it\omega_n^2\}\right|\leqq c(s, A)/n^A. \tag{1.5}$$

§ 2. Оценка характеристической функции $E\exp\{it\omega_n^2\}$

Теорема 2.1. *Существует абсолютная постоянная a такая, что для $s=0, 1, \ldots, n=1, 2, \ldots$ в зоне $|t|\geqq n^2$ справедлива оценка*

$$\left|\left(\frac{d}{dt}\right)^s E\exp\{it\omega_n^2\}\right| \leqq |t|^{-n/2}\, n!\,(9n)^s\{a(s+1)\}^n. \tag{2.1}$$

Доказательство теоремы 2.1 будет дано ниже.

Применив представление Андерсона и Дарлинга для статистики ω_n^2 (см. [2], [17])

$$\omega_n^2=\sum_{j=1}^{n}(X_j^*-a_j)^2+1/(12n),$$

где $a_j=(j-1/2)/n$, а $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*$ – упорядоченные случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$, получаем

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^s E\exp\{it\omega_n^2\}=$$

$$=i^sE\left\{\sum_{j=1}^{n}(X_j^*-a_j)^2+\frac{1}{12n}\right\}^s\exp\left\{it\sum_{j=1}^{n}(X_j^*-a_j)^2+\frac{it}{12n}\right\}=$$

$$=i^s n!\exp\left\{\frac{it}{12n}\right\}\int\ldots\int\left\{\sum_{j=1}^{n}(x_j-a_j)^2+\frac{1}{12n}\right\}^s\times$$

$$\times\exp\left\{it\sum_{j=1}^{n}(x_j-a_j)^2\right\}dx_n\ldots dx_1,$$

где интегрирование ведется по всем $x_1\in[0, 1]$, $x_j\in[x_{j-1}, 1]$, $j=2, \ldots, n$. Совершим замену переменных $y_k=|t|^{1/2}(x_k-a_k)$, $k=1, \ldots, n$, и заметим, что

$$(x_1+\ldots+x_r)^s=\sum\nolimits^{*}C_s(k_1, \ldots, k_r)\,x_1^{k_1}\ldots x_r^{k_r},$$

где знак Σ^* означает суммирование по всем $(k_1, \ldots, k_r)$, $k_1\geqq 0, \ldots, k_r\geqq 0$, $k_1+\ldots+k_r=s$. Получим

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^s E\exp\{it\omega_n^2\}=i^s n!\,|t|^{-n/2-s}\exp\{it/(12n)\}\sum\nolimits^{*}C_s(k_0, \ldots, k_n)\times$$

$$\times|t|^{k_n}(12n)^{-k_n}\int\ldots\int y_0^{2k_0}\exp\{i\Theta y_0^2\}\ldots y_{n-1}^{2k_{n-1}}\times$$

$$\times\exp\{i\Theta y_{n-1}^2\}\,dy_{n-1}\ldots dy_0, \tag{2.2}$$

где обозначено $\Theta=\operatorname{sgn} t$, а интегрирование ведется по всем

$$y_{n-1}\in[-|t|^{1/2}(2n)^{-1}, (n-1/2)|t|^{1/2}n^{-1}]$$

Обозначим $\varphi(0, x)\equiv 1$,

$$\varphi(p, y)=\int x^{2k_{p-1}}\varphi(p-1, x)\exp\{i\Theta x^2\}\,dx, \quad p=1, \ldots, n, \tag{2.3}$$

где интегрирование ведется в области $[y-|t|^{1/2}/n, (p-1/2)|t|^{1/2}/n]$. Так как $\varphi(p, y)$ зависит и от $k_0, \ldots, k_{p-1}$, то иногда будем писать $\varphi_{k_0, \ldots, k_{p-1}}(p, y)$.

Из равенства (2.2) и определения $\varphi(p, y)$ немедленно следует, что

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^s E\exp\{it\omega_n^2\}=i^s n!\,|t|^{-n/2-s}\exp\{it/(12n)\}\times$$

$$\times\sum\nolimits^{*}C_s(k_0, \ldots, k_n)\,|t|^{k_n}(12n)^{-k_n}\varphi_{k_0, \ldots, k_{n-1}}\bigl(n, |t|^{1/2}/(2n)\bigr). \tag{2.4}$$

При оценке суммы в (2.4) будет применяться следующая

Лемма 2.2. *Пусть $|t|\geqq n^2$. Тогда существует абсолютная постоянная a такая, что для всех $y\in(-\infty, (n+1/2)|t|^{1/2}n^{-1}]$ имеет место оценка*

$$|\varphi_{k_0, \ldots, k_{n-1}}(n, y)|\leqq(s+1)^n(9|t|)^{k_{n-1}+\ldots+k_0}a^n.$$

Доказательство. Пусть $\tau=|t|^{1/2}n^{-1}$. Тогда

$$\varphi(p, y)=\int_{y-\tau}^{(p-1/2)\tau}x^{2k_{p-1}}\varphi(p-1, x)\exp\{i\Theta x^2\}\,dx; \quad p\geqq 1.$$

Обозначим

$$T_p(A, B)=\int_A^B x^{2k_{p-1}}\varphi(p-1, x)\exp\{i\Theta x^2\}\,dx \tag{2.5}$$

и положим $\varphi(0, x)\equiv 1$, $\varphi(-1, x)\equiv 0$, $\varphi(-2, x)\equiv 0$.

Сначала докажем рекуррентную оценку

$$|T_p(A, B)|\leqq(s+1)(9|t|)^{k_{p-1}}\left\{\frac{|\varphi(p-1, A)|}{|A|}+\frac{|\varphi(p-1, B)|}{|B|}+\right.$$

$$\left.+\int_A^B\frac{|\varphi(p-1, x)|}{x^2}\,dx\right\}+(s+1)(9|t|)^{k_{p-1}+k_{p-2}}\left\{\frac{|\varphi(p-2, A-\tau)|}{|A|\,|A-\tau/2|}+\right.$$

$$+\frac{|\varphi(p-2, B-\tau)|}{|B|\,|B-\tau/2|}+\int_A^B|\varphi(p-2, x-\tau)|\left(\frac{1}{x^2|x-\tau/2|}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{|x|(x-\tau/2)^2}+\frac{1}{|x|\,|x-\tau/2|\,|x-\tau|}\right)dx\right\}+$$

$$+(s+1)(9|t|)^{k_{p-1}+k_{p-2}+k_{p-3}}\int_A^B\frac{|\varphi(p-3, x-2\tau)|}{|x|\,|x-\tau/2|}\,dx. \tag{2.6}$$

Обозначим

$$F(p-1, x)=|x|^{2k_{p-1}}|\varphi(p-1, x)|,$$

$$G(p-2, x)=|x|^{2k_{p-1}}|x-\tau|^{2k_{p-2}}|\varphi(p-2, x-\tau)|,$$

Интегрируя в (2.5) по частям и применяя элементарные неравенства, получаем

$$|T_p(A,\ B)| \leqq \frac{F(p-1,\ A)}{|A|} + \frac{F(p-1\ B)}{|B|} + \left| k_{p-1} - \frac{1}{2} \right| \int_A^B \frac{F(p-1,\ x)}{x^2}\, dx +$$

$$+ \frac{G(p-2,\ A)}{|A|\,|A-\tau/2|} + \frac{G(p-2,\ B)}{|B|\,|B-\tau/2|} + \left| k_{p-1} - \frac{1}{2} \right| \int_A^B \frac{G(p-2,\ x)}{x^2\,|x-\tau/2|}\, dx +$$

$$+ k_{p-2} \int_A^B \frac{G(p-2,\ x)}{|x|\,|x-\tau/2|\,|x|-\tau|}\, dx + \int_A^B \frac{G(p-2,\ x)}{|x|\,(x-\tau/2)^2}\, dx +$$

$$+ \int_A^B \frac{H(p-3,\ x)}{|x|\,|x-\tau/2|}\, dx. \tag{2.8}$$

Так как $y_{p-1} \in [y_p - \tau,\ (p-1/2)\,\tau]$, $p=1, \ldots, n$, $y_n = \tau/2$, то нетрудно проверить, что $y_p \in [-(n-1/2)\,\tau,\ (n-1/2)\,\tau]$ для всех $p=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$. Поэтому

$$|A|,\ |B|,\ |x|,\ |x-\tau|,\ |x-2\tau| \leqq 3\,|t|^{1/2}. \tag{2.9}$$

Кроме того, справедлива оценка

$$0 \leqq k_p \leqq s \quad \forall\, p=0,\ 1,\ \ldots,\ n. \tag{2.10}$$

Оценив выражения (2.7) при помощи (2.9) и (2.10), из оценки (2.8) выводим (2.6).

Оценку величины $\varphi(p,\ y)$ будем проводить при помощи индукции по p. Сначала рассмотрим случай $p=1$. Тогда

$$\varphi(1,\ y) = \int_{y-\tau}^{\tau/2} x^{2k_0} \exp\{i\Theta x^2\}\, dx.$$

Выделим три подслучая:

а) $y-\tau \in [1/2,\ \tau/2]$;

б) $y-\tau \in [-1/2,\ 1/2]$;

в) $y-\tau \in (-\infty,\ -1/2]$.

а) Применив оценку (2.6) при $p=1$, получаем

$$|\varphi(1,\ y)| = \left| \int_{y-\tau}^{\tau/2} x^{2k_0} \exp\{i\Theta x^2\}\, dx \right| \leqq$$

$$\leqq (s+1)\,(9\,|t|)^{k_0} \left\{ \frac{1}{|y-\tau|} + \frac{1}{\tau/2} + \int_{y-\tau}^{\tau/2} \frac{1}{x^2}\, dx \right\} \leqq (s+1)\,(9\,|t|)^{k_0}\, 4.$$

б) Аналогично

$$|\varphi(1,\ y)| = \left| \int_{y-\tau}^{\tau/2} x^{2k_0} \exp\{i\Theta x^2\}\, dx \right| \leqq \left| \int_{y-\tau}^{1/2} y^{2k_0} \exp\{i\Theta x^2\}\, dx \right| +$$

$$+ \left| \int^{\tau/2} x^{2k_0} \exp\{i\Theta x^2\}\, dx \right| \leqq 4\,(s+1)\,(9\,|t|)^{k_0} +$$

в) Похожим образом

$$|\varphi(1,\ y)| \leqq \int_{y-\tau}^{-1/2} x^{2k_0} \exp\{i\Theta x^2\}\, dx \left| + \right| \int_{-1/2}^{\tau/2} x^{2k_0} \exp\{i\Theta x^2\}\, dx \,\Big| \leqq$$

$$\leqq \left| \int_{y-\tau}^{-1/2} x^{2k_0} \exp\{i\Theta x^2\}\, dx \right| + (s+1)\,(9\,|t|)^{k_0}\, 5 \leqq$$

$$\leqq (s+1)\,(9\,|t|)^{k_0} \left\{ 5 + \frac{1}{|y-\tau|} + 2 + \int_{y-\tau}^{-1/2} \frac{1}{x^2}\, dx \right\} = (s+1)\,(9\,|t|)^{k_0}\, 9.$$

Видно, что в случае в) оценка получается наихудшей. Значит при $p=1$ для всех $y \in (-\infty,\ 3\tau/2]$ имеет место оценка из условия леммы с $a=9$.

Перейдем к оценке $\varphi(p, y)$ в случае $p \geqq 2$. Предположим, что для $l=1, \ldots, p-1$ и всех $y \in (-\infty,\ (l+1/2)\,\tau]$ справедлива оценка

$$|\varphi(l,\ y)| \leqq (s+1)^l\,(9\,|t|)^{k_{l-1}+\ldots+k_0}\, \Phi(l,\ t,\ n) \tag{2.11}$$

с некоторыми конечными $\Phi(l,\ t,\ n)$, $l \geqq 2$, и $\Phi(1,\ t,\ n) \equiv 9$. Без ограничения общности, можно считать, что $\Phi(0,\ t,\ n) \equiv 1$, $\Phi(-1,\ t,\ n) = \Phi(-2,\ t,\ n) \equiv 0$. Сначала докажем, что тогда (2.11) имеет место и при $l=p$. Оценку $\Phi(p, t, n) \leqq a^p$ докажем несколько позже.

Из формул (2.5) и (2.3) видно, что

$$\varphi(p,\ y) = T_p\big(y-\tau,\ (p-1/2)\,\tau\big).$$

Точки $-1/4$, $1/4$, $\tau/2-1/4$, $\tau/2+1/4$, $\tau-1/4$, $\tau+1/4$, $(p-1/2)\,\tau$ разбивают полупрямую на семь интервалов $I_1=(-\infty,\ -1/4)$, $\ldots$, $I_7=(\tau+1/4,\ (p-1/2)\,\tau)$. Оценка $\varphi(p,\ y)$ во многом повторяет оценку $\varphi(1,\ y)$. Поэтому мы рассмотрим лишь наиболее трудоемкий случай $y-\tau \in I_1$. Итак, пусть $y-\tau \in I_1$. Тогда

$$|\varphi(p,\ y)| = |T_p\big(y-\tau,\ (p-1/2)\,\tau\big)| \leqq$$

$$\leqq |T_p(y-\tau,\ -1/4)| + \sum_{i=2}^{7} |T_p(I_i)| \leqq$$

(применяем оценки (2.9), (2.10) и предположение (2.11))

$$\leqq |T_p(y-\tau,\ -1/4)| + (s+1)^p\,(9\,|t|)^{k_{p-1}+\ldots+k_0}\, \Phi(p-1,\ t,\ n)\, 3/2 +$$

$$+ \sum_{i \in \{3,\ 5,\ 7\}} |T_p(I_i)|. \tag{2.12}$$

Интервалам $(y-\tau,\ -1/4)$, I_i, $i=3,\ 5,\ 7$, не принадлежат точки 0, $\tau/2$, τ. Поэтому к интегралам $T_p(y-\tau,\ -1/4)$, $T_p(I_i)$, $i=3,\ 5,\ 7$, можем применить рекуррентную оценку (2.6). Приняв во внимание (2.12), получим где

$$\Phi(p,\ t,\ n)=\Phi(p-1,\ t,\ n)\left\{3/2+U(y-\tau,\ -1/4)+\sum{}' U(I_i)\right\}+$$

$$+\Phi(p-2,\ t,\ n)\left\{V(y-\tau,\ -1/4)+\sum{}' V(I_i)\right\}+$$

$$+\Phi(p-3,\ t,\ n)\left\{W(y-\tau,\ -1/4)+\sum{}' W(I_i)\right\}, \tag{2.13}$$

знак Σ' означает суммирование по $i=3,\ 5,\ 7,$

$$U(A,\ B)=\frac{1}{|A|}+\frac{1}{|B|}+\int_A^B \frac{1}{x^2}\,dx,$$

$$V(A,\ B)=\frac{1}{|A|\,|A-\tau/2|}+\frac{1}{|B|\,|B-\tau/2|}+$$

$$+\int_A^B\left\{\frac{1}{x^2|x-\tau/2|}+\frac{1}{|x|\,|x-\tau/2|\,|x-\tau|}+\frac{1}{|x|\,(x-\tau/2)^2}\right\}dx,$$

$$W(A,\ B)=\int_A^B\frac{1}{|x|\,|x-\tau/2|}\,dx.$$

Ясно, что существует абсолютная постоянная $b\geqq 9$ такая, что каждое из выражений в фигурных скобках в (2.13) не превышает b. Поэтому из (2.13) для $p=1,\ 2,\ \ldots$ получаем

$$\Phi(p,\ t,\ n)\leqq\{\Phi(p-1,\ t,\ n)+\Phi(p-2,\ t,\ n)+\Phi(p-3,\ t,\ n)\}\,b.$$

Следовательно, существует такая абсолютная постоянная a, что $\Phi(p,t,n)\leqq a^p$ (например, можно взять $a=2b$).

Доказательство теоремы 2.1. Оценив по модулю каждое слагаемое в (2.4) и применив оценку леммы 2.2, получаем

$$\left|\left(\frac{d}{dt}\right)^s E\exp\{it\omega_n^2\}\right|\leqq n!\,|t|^{-n/2-s}(s+1)^n a^n\times$$

$$\times\sum{}^* C_s(k_0,\ \ldots,\ k_n)\,|t|^{k_n}(12n)^{-k_n}(9|t|)^{k_{n-1}+\ldots+k_0}\leqq$$

$$\leqq n!\,|t|^{-n/2-s}(s+1)^n a^n(9|t|)^s n^s.$$

Теорема доказана.

Доказательство леммы 1.3. Теорема 2.1 и оценка (1.5) в зоне $|t|\geqq n^{1/2+\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$ для достаточно больших n влекут

$$\left|\left(\frac{d}{dt}\right)^s E\exp\{it\omega_n^2\}\right|\leqq c(s,\ A)/(1+|t|^A).$$

§ 3. Доказательства теорем 1.1 и 1.2

Как уже отмечалось, теорема 1.2 вытекает из условия (1.3). Выполнение этого условия гарантирует оценка теоремы 2.1 и вышеупомянутые результаты об оценках характеристических функций из [12–16]. Теорема 1.1 является частным случаем (при $p=1$) теоремы 1.2. Дифференцируемость функций $U_n(x)$ вытекает из оценки теоремы 2.1 и хорошо известных свойств преобразования Фурье. Известно [19, 20], что $U_n(x)=0$ при $x\leqq 1/(12n)$ и $U_n(x)=c_n(x-1/12)^{(n-1)/2}$ при $1/(12n)\leqq x\leqq 1/(12n)+1/(2n^2)$, где $c_n>0$ — некоторая постоянная. Поэтому $U_n\notin C^{\alpha+1}$.

Литература

1. **Смирнов Н. В.** Теория вероятностей и математическая статистика. Избранные труды. М.: Наука, 1970. С. 60–78.
2. **Anderson T. W., Darling D. A.** Asymptotic theory of certain "goodness of fit" criteria based on stochastic processes // Ann. Math. Statistics. 1952. V. 23, No 2. P. 193–212.
3. **Канделаки Н. П.** Об одной предельной теореме в пространстве Гильберта // Труды ВЦ АН ГССР. 1965. Т. 5, № 1. С. 46–55.
4. **Sazonov V. V.** On ω^2 criterion // Sankhya. Ser, A. 1968. V. 30, No 2. P. 205–210.
5. **Сазонов В. В.** Улучшение одной оценки скорости сходимости // Теор. вероятн. и ее примен. 1969. Т. XIV, вып. 4. С. 667–678. ISSN 0040–361X.
6. **Rosenkrantz W. A.** A rate of convergence for the von Mises statistic // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 139. P. 329–337.
7. **Kiefer J.** Skorohod embedding of multivariate RV's and the sample DF // Z. Wahr. verb. Gebiete. 1972. B. 24, H. 1. S. 1–35.
8. **Никитин Я. Ю.** Оценки скорости сходимости в некоторых предельных теоремах и статистических критериях // ДАН СССР. 1972. Т. 202, № 4. С. 758–760.
9. **Орлов А. И.** Скорость сходимости распределения статистики Мизеса–Смирнова // Теория вероятн. и ее примен. 1974. Т. XIX, вып. 4. С. 766–786.
10. **Czorgo S.** On an asymptotic expansion for the von Mises ω^2 statistic // Acta Sci. Math. 1976. V. 38. P. 45–67.
11. **Csorgo S., Stacho L.** A step toward an asymptotic expansion for the Cramer–von Mises statistic // Analytic Function Methods in Probab. Theory. Amsterdam–Oxford–New York: North-Holland, 1980. P. 53–65.
12. **Gotze F.** Asymptotic expansions for bivariate von Mises functionals // Z. Wahr. verb. Gebiete. 1979. B. 50, H. 3. S. 333–355. ISSN 0044–3719.
13. **Королюк В. С., Боровских Ю. В.** Асимптотический анализ распределений статистик. Киев: Наукова думка, 1984. 302 с.
14. **Бенткус В. Ю.** Асимптотические разложения в центральной предельной теореме в гильбертовом пространстве // Liet. matem. rink. 1984. Т. XXIV, № 3. С. 29–50. ISSN 0132–2818.
15. **Бенткус В. Ю.** Асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных элементов пространства Гильберта // Liet. matem. rink. 1984. Т. XXIV, № 4. С. 29–48. ISSN 0132–2818.
16. **Бенткус В. Ю.** Асимптотические разложения в локальной предельной теореме в гильбертовом пространстве // Liet. matem. rink. 1985. Т. XXV, № 1. С. 9–22. ISSN 0132–2818.
17. **Мартынов Г. В.** Критерии омега-квадрат. М.: Наука, 1978. 80 с.
18. **Черге Ш.** Асимптотическое разложение для преобразования Лапласа ω^2-критерия фон Мизеса // Теория вероятн. и ее примен. 1975. Т. XX, вып. 1. С. 158–162.
19. **Marshall A. W.** The small sample distribution of $n\omega_n^2$ // Ann. Math. Stat. 1958. V. 29, No 1, P. 307–309.
20. **Stephens M. A.** The distribution of the goodness-of-fit statistics U_n^2. I. // Biometrika. 1963. V. 50, No 3–4. P. 303–313.

PASTABA APIE KRAMERIO, MIZESO IR SMIRNOVO KRITERIJŲ

V. Bentkus, R. Zitikis

(*Reziumė*)

Sakykime, $U_n(x)$ yra Kramero (Cramer), Mizeso (Mises) ir Smirnovo statistikos ω_n^2 pasiskirstymo funkcija. Darbe gauti šios pasiskirstymo funkcijos išvestinių asimptotiniai skleidiniai. Atskiru atveju turime lokaliąją ribinę teoremą statistikai ω_n^2.

A REMARK ON THE CRAMER–VON MISES–SMIRNOV CRITERION

V. Bentkus, R. Zitikis

(*Summary*)

Let $U_n(x)$ be the distribution function of the Cramer–von Mises–Smirnov statistic. The asymptotic expansions of the derivatives $U_n^{(k)}(x)$ are received, $k=0,1,2,\ldots$

28 LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1988

УДК 519.3:62-50

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ДИСКРЕТНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В. Бистрицкас

Задача оптимизации дискретного управления аппроксимируется задачей с дополнительным шагом. Для задачи управления с дополнительным шагом решается задача Коши принципа максимума. Получена оценка приближенного решения задачи оптимизации дискретного управления. Данный метод приближенного решения задачи управления, как и метод последовательных приближений [1], содержит монотонность в итерациях. Он сходится при более слабых условиях, чем метод последовательных приближений.

§ 1. Алгоритм дополнительного шага

Дадим алгоритм и оценку приближенного решения задачи оптимизации дискретного управления

$$I(\{u_k\}_0^{N-1})=\sum_{k=0}^{N-1} f_0(k,\ x_k,\ u_k)\to\sup_{u_k}, \tag{1}$$

$$x_{k+1}=f(k,\ x_k,\ u_k),\quad x_0=a, \tag{2}$$

$$u_k\in U\subset R^r,\quad k=0,\ \ldots,\ N-1. \tag{3}$$

Здесь x_k – n-вектор состояния дискретной системы в момент времени k $(k=0,\ \ldots,\ N-1)$, u_k – вектор управления в момент времени k $(k=0,\ \ldots,\ N-1)$, a – заданный n-вектор, $f_0(k,\ x,\ u)$, $f(k,\ x,\ u)=\big(f_1(k,x,u),\ \ldots,\ f_n(k,x,u)\big)$ $(k=0,\ \ldots,\ N-1,\ x\in R^n,\ u\in R^r)$ – функции, непрерывные по $(x,\ u)$ и гладкие по x. Задачу с дополнительным шагом для задачи (1)–(3) запишем в виде

$$I_1(u_{-1},\ \{u_k\}_0^{N-1})=\bar f_0(-1,\ u_{-1})+\sum_{k=0}^{N-1} f_0(k,\ y_k,\ u_k)\to\sup_{u_{-1},\ u_k}, \tag{4}$$

$$y_{k+1}=f(k,\ y_k,\ u_k),\quad y_0=a+\bar f(-1,\ u_{-1}),\quad k=0,\ \ldots,\ N-1, \tag{5}$$

$$u_k\in U\,(k=0,\ \ldots,\ N-1),\quad u_{-1}=(u_{-1}^1,\ \ldots,\ u_{-1}^n)\in V(\varepsilon), \tag{6}$$

где $N\geqslant 1$, $\bar f_0(-1,\ u_{-1})$, $\bar f(-1,\ u_{-1})=(\bar f_1(-1,\ u_{-1}),\ldots,\ f_n(-1,\ u_{-1}))$ – непрерывные и гладкие функции, $V(\varepsilon)$ – заданное множество управления на -1 шаге, зависящее от параметра ε. Рассмотрим оценку аппроксимации по функционалу задачи (1)–(3) задачей (4)–(6). Обозначим

$$L_0=\sup \|\partial f_0(j,\ y,\ u)/\partial y\|, \tag{7}$$