Projektív geometria

matematika tanár szakos
előadás és gyakorlat

Nagy Gábor Péter

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet, Geometria Tanszék

2016/2017-os tanév II. féléve

Tagolás

Vektorok, vektorterek

- Skalár = valós szám
- Vektor = vektortér eleme
- Vektorok összege, skalárszorosa

Alappéldák

- Szám n-esek: $V = \{(x_1, x_2)\}, \{(x_1, x_2, x_3)\}, \ldots$.
  Műveletek komponensenként.
- Vektorértékű leképezések: $V = \{f : X \to \mathbb{R}^n\}$.
  Műveletek pontonként: $\begin{cases} (f+g)(x) = f(x) + g(x), \\ (cf)(x) = cf(x). \end{cases}$
  Végtelen dimenziós, ha $|X| = \infty$!

Lineáris függetlenség, bázis, dimenzió

- Lineáris kombináció: $c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$
- Lineáris altér: zárt a lineáris kombinációra
- Lineáris függőség:
  - Egyik kikombinálható a többiből.
  - A nullvektor nem-triviálisan kikombinálható.

Definíció: Bázis

A maximális lineárisan független vektorrendszert bázisnak nevezzük.

Kicserélési tétel

A V vektortér minden bázisa egyforma számosságú.

Definíció: Dimenzió

A V vektortér dimenziója a V bázisának számossága.

Lineáris leképezések

Definíció: Lineáris leképezés

Az $f : V \to W$ vektorterek közti leképezés lineáris, ha

- Additív: $f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2)$, és
- Homogén: $f(c\boldsymbol{v}) = cf(\boldsymbol{v})$.

Speciális eset: $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris. Ekkor valamely $A = (a_{ij})$ $n \times m$-es mátrixra

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Mátrixszorzás

Definíció: Mátrixok szorzata

Az $A = (a_{ij})$ $m \times n$-es és a $B = (b_{ij})$ $n \times k$-s mátrixok szorzata a $C = (c_{ij})$ $m \times k$-s mátrix, ahol $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$.

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{pmatrix} & b_{1j} & \\ & b_{2j} & \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ & b_{nj} & \end{pmatrix}_{n\times k} \\
\hline
\begin{pmatrix} & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & & \vdots & \end{pmatrix}_{m\times n} & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}_{m\times k}
\end{array}
$$

Megj. A definíció természetesen adódik lineáris leképezések szorzásából.

A determináns definíciója

Definíció: Determináns

Az $A = (a_{ij})$ $n \times n$-es mátrix determinánsa

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \in \mathbb{R},$$

ahol S_n az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz permutációinak halmaza, és $\operatorname{sign}(\sigma) = \pm 1$ attól függően, hogy a σ páros vagy páratlan.

Példa: Az $n = 3$ eset.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

A determináns alaptulajdonságai

A determináns kiszámítása sor vagy oszlop szerinti kifejtéssel történik.

Állítás: A determináns alaptulajdonságai

Az alábbiak ekvivalensek:

- $\det(A) \neq 0$.
- Az A mátrix sorai lineárisan függetlenek.
- Az A mátrix oszlopai lineárisan függetlenek.
- Az A által meghatározott lineáris transzformáció bijektív.
- Az A mátrix invertálható, azaz létezik olyan A^{-1} mátrix, melyre $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Tétel: A determinánsok szorzástétele

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Lineáris egyenletrendszer megoldása

Definíció: Lineáris egyenletrendszer

Az n ismeretlenes, m egyenletből álló, inhomogén lineáris egyenletrendszer:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Az egyetletrendszer megoldása Gauss-eliminációval történik. Ha $n < m$, akkor “várhatóan” nincs megoldás, ha $n = m$ akkor “várhatóan” egy megoldás van, ha $n > m$, akkor végtelen sok megoldás van.

Megjegyzés. A fenti egyenletrendszer mátrixalakja $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

Cramer-szabály

Tétel: Cramer-szabály

Az n ismeretlenes, m egyenletből álló

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van egyértelmű megoldása, ha $n = m$ és az együtthatókból alkotott $A = (a_{ij})$ mátrix determinánsa nem nulla.

Bizonyítás. Ha $\det(A) \neq 0$, akkor a megoldás $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$. Ha $\det(A) = 0$, akkor A sorai lineárisan függők, azaz az egyik egyenlet $0 = b_i'$ alakra hozható. Ha $b_i' \neq 0$, akkor nincs megoldás. Ha $b_i' = 0$, akkor pedig csökkentettük az egyenletek számát, azaz végtelen sok megoldást kapunk.

Homogén lineáris egyenletrendszer

Definíció: Homogén lineáris egyenletrendszer

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right\} \tag{2}$$

n ismeretlenes, m egyenletből álló, homogén lineáris egyenletrendszer. Mátrix alakja $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Figyelem! Az egyenletrendszer homogentitása azt jelenti, hogy a konstans tagok mind nullák.

- A nullvektor a triviális megoldás.
- Megoldás skalárszorosa és megoldások összege szintén megoldás. (A megoldások vektorteret alkotnak.)
- Akkor és csak akkor van nem-triviális megoldás, ha $\det(A) = 0$.

Vektorok skalárszorzata (belső szorzata)

Két vektorból számot: $\boldsymbol{ab}$

Geometriai definíció: Skalárszorzat

$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos \gamma$

Analitikus definíció: Skalárszorzat

$(a_1, a_2, a_3)(b_1, b_2, b_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Alaptulajdonságok

Bilineáris, szimmetrikus, pozitív definit. 0 ha merőlegesek.

Vektorok vektoriális szorzata

Két vektorból vektort (3-dimenzióban): $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$

Geometriai definíció: Vektoriális szorzat

Hossza: $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin \gamma$, iránya merőleges $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$-re és jobb sodrású rendszert alkotnak.

Analitikus definíció: Vektoriális szorzat

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

Alaptulajdonságok

Bilineáris, antiszimmetrikus, $\perp$ a tényezőkre. $\mathbf{0}$ ha párhuzamosak.

Vegyes szorzat

Definíció: Vegyes szorzat

$\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ (3 db 3-dimenziós vektorból számot)

Analitikus jelentés (kiszámítás)

$$\boldsymbol{abc} = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Geometriai jelentés

A három vektor által kifeszített paralelepipedon térfogata.

Alaptulajdonságok

Tényezők felcserélésekor előjelet vált (alternál). Minden tényezőjében lineáris (trilineáris). 0 ha a tényezők lineárisan függők.

Illeszkedés a közönséges síkon

Definíció: Kollineáris pontok

A $P_1, \cdots, P_n$ pontokat kollineárisak, ha közös egyenesre illeszkednek. Egy síkbeli ponthalmaz általános helyzetű, ha semmelyik három pontja nem kollineáris.

Állítás: A közönséges sík illeszkedési tulajdonságai

1. Két különböző pontra pontosan egy egyenes illeszkedik.
2. Két különböző egyenesnek legfeljebb egy közös pontja van.
3. Adott P ponthoz és e egyeneshez pontosan egy f egyenes létezik, mely illeszkedik P-re és párhuzamos e-vel.
4. Létezik három általános helyzetű pont.

Végtelen távoli pontok és egyenes

Két egyenes párhuzamos, ha nincs közös pontjuk vagy egybeesnek. A párhuzamosság ekvivalenciareláció, az osztályokat párhuzamossági osztályoknak nevezzük.

Definíció: Végtelen távoli pontok

A közönséges sík párhuzamossági osztályait végtelen távoli pontoknak nevezzük. Azt mondjuk, hogy az egyenes illeszkedik a végtelen távoli pontra, ha benne van a párhuzamossági osztályban.

Definíció: Végtelen távoli egyenes

A végtelen távoli pontok összességét végtelen távoli egyenesnek nevezzük. Azt is mondjuk, hogy a végtelen távoli pontok illeszkednek a végtelen távoli egyenesre. Közönséges pont nem illeszkedik a végtelen távoli egyenesre.

A projektív sík illeszkedési tulajdonságai

Definíció: Projektív sík

A közönséges és a végtelen távoli pontok és egyenesek összességét végtelen távoli elemekkel kibővített síknak, vagy projektív síknak nevezzük.

Tétel: A projektív sík illeszkedési tulajdonságai

A projektív sík pontjai és elemei között imént definiált illeszkedési fogalomra teljesülnek az alábbiak.

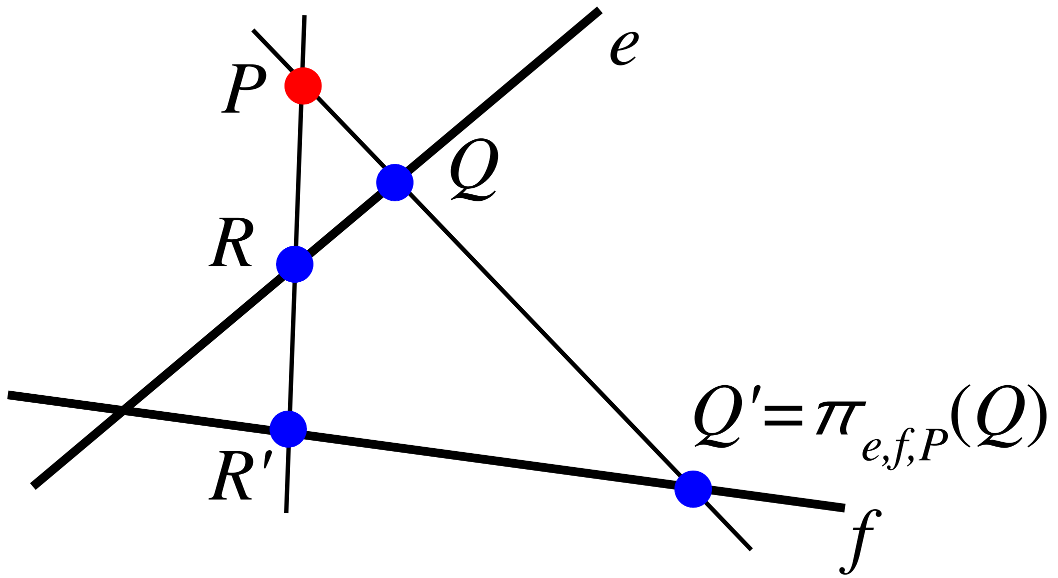
1. Két különböző pontra pontosan egy egyenes illeszkedik.
2. Két különböző egyenesnek pontosan egy közös pontja van.
3. Létezik négy általános helyzetű pont.

Biz. Két nehéz eset: a) P közönséges, Q végtelen távoli; ekkor PQ a P-n átmenő, Q párh. osztályba eső egyenes. b) e közönséges, f végtelen távoli; ekkor $e \cap f$ az e párh. osztálya.

A projektív sík és a vetítések

Állítás: Középpontos vetítés a projektív síkon

Tekintsük az e, f egyeneseket és a P pontot úgy, hogy P ne illeszkedjék sem e-re, sem f-re. Definiáljuk az $\pi_{e,f,P} : e \to f$ vetítést: a $Q \in e$ pontra legyen $\pi_{e,f,P}(Q) = f \cap PQ$. Ekkor $\pi_{e,f,P}$ bijekciót határoz meg e és f ponthalmazai között.



Ferdeszögű koordinátarendszer a közönséges síkon

A koordinátarendszerek arra valók, hogy a geometriát átfordítsák a számok nyelvére. A közönséges sík ferdeszögű koordinátarendszerében:

$$
\begin{aligned}
\text{Pontok} &\equiv \text{számpárok } (x, y) \\
\text{Egyenesek} &\equiv \text{2-ismeretlenes, lineáris egyenletek} \\
&\quad aX + bY + c = 0 \\
\text{Illeszkedés} &\equiv \text{behelyettesítés}
\end{aligned}
$$

Az $e : aX + bY + c = 0$ egyenes egyenlete akkor értelmes, ha $(a, b) \neq (0, 0)$. Az egyenes normálvektora (a, b). Az egyenlet $Y = mX + d$ illetve $X = d$ alakra hozható, attól függően, hogy $b \neq 0$ vagy $b = 0$.

Homogén számhármasok

Definíció: Homogén számhármasok

Definiáljuk számhármasokra az alábbi ekvivalenciarelációt:

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3) \iff \exists \lambda \neq 0 : (y_1, y_2, y_3) = \lambda(x_1, x_2, x_3).$$

Az $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbf{0}$ halmaz ekvivalenciaosztályait homogén számhármasoknak nevezzük.

Más szóval, a homogén számhármas nem lehet csupa nulla, és két homogén számhármast nem tekintünk különbözőnek, ha egymás skalárszorosai.

Például az $aX + bY + cZ = 0$ három ismeretlenes homogén lineáris egyenletek együtthatói homogén számhármast alkotnak, hiszen nem lehet mind nulla, és két egyenletet nem tekintünk különbözőnek, ha csak skalárszorzóban különböznek.

Homogén koordinátarendszer

Definíció: Homogén koordinátarendszer

$$\begin{aligned} \text{Pontok} &\equiv \text{homogén számhármasok } (x, y, z) \\ \text{Egyenesek} &\equiv \text{3-ismeretlenes, homogén lineáris egyenletek} \\ & \quad aX + bY + cZ = 0 \\ \text{Illeszkedés} &\equiv \text{behelyettesítés} \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy homogén számhármasokat homogén lineáris egyenletbe behelyettesíteni értelmes, míg inhomogénba nem az.

Állítás: A homogén koordinátarendszer illeszkedési tulajdonásai

A most definiált "pontokra" és "egyenesekre" teljesülnek a projektív sík illeszkedési tulajdonságai.

A projektív sík homogén koordinátázása

Definíció: Projektív elemek homogén koordinátás alakja

Projektív síkbeli elemek	**Homogén koordináta**
$P(x,y)$ közönséges pont	$(x,y,1)$
$aX+bY+c=0$ közönséges egyenes	$aX+bY+cZ=0$
$aX+bY+c=0$ egyenes v.t. pontja	$(b,-a,0)$
végtelen távoli egyenes	$Z=0$

Tétel: A projektív sík homogén koordinátázása

A fenti megfeleltetés illeszkedéstartó bijekció a végtelen távoli elemekkel kibővített köznséges sík és a homogén koordinátarendszer elemei között.

Biz. Invertálható: Ha $z \neq 0$, akkor a $P(x,y,z) = P(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1)$ homogén koordinátás pontnak a $P(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$ felel meg. Stb.

Projektív pontok kollinearitása

Lemma: Projektív pontok kollinearitása

Legyenek $P(x_1, x_2, x_3)$, $Q(y_1, y_2, y_3)$, $R(z_1, z_2, z_3)$ különböző projektív pontok. Az alábbiak ekvivalensek:

1. P, Q, R kollineárisak.
2. A három pont homogén koordinátáiból alkotott mátrix determinánsa nulla:
$$\det\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{pmatrix} = 0.$$
3. $z = \lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{y}$ valamely $\lambda, \mu \neq 0$ skalárokra.

Projektív pontok kollinearitása: Bizonyítás

Bizonyítás. Az ált. egyenes egyenlete $u_1X_1 + u_2X_2 + u_3X_3 = 0$.

$$\exists \ell : P, Q, R \in \ell \quad \Leftrightarrow \quad \exists (u_1, u_2, u_3) \neq \mathbf{0} : \begin{cases} x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0 \\ y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3 = 0 \\ z_1u_1 + z_2u_2 + z_3u_3 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ az egyenletrendszernek van nem-tiviális megoldása

$$\Leftrightarrow \quad \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{pmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow$ együtthatómátrix sorai lineárisan függők

$$\Leftrightarrow \quad \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} + \gamma \mathbf{z} = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{z} = \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}$$

Az utolsó lépésben felhasználtuk, hogy $P \neq Q$, így $\gamma \neq 0$.

Dualitási elv

Észrevétel: A projektív síkon a pontok és az egyenesek hasonlóan viselkednek: hasonló illeszkedési tulajdonságok, homogén koordinátázás.

Definíció: Dualitás

Két projektív síkkal kapcsolatos fogalmat, állítást vagy bizonyítást duálisnak nevezünk, ha az egyik a másikból megkapható a pontok és egyenesek szerepének felcserélésével. A dualitási elv az, hogy egy állítás duálisának a bizonyítása az állítás bizonyításának dualizálásával megkapható.

Figyelem! Következetesség a pontok és egyenesek szerepének felcserélésében.

Desargues-tétel

Definíció: Perspektív háromszögek

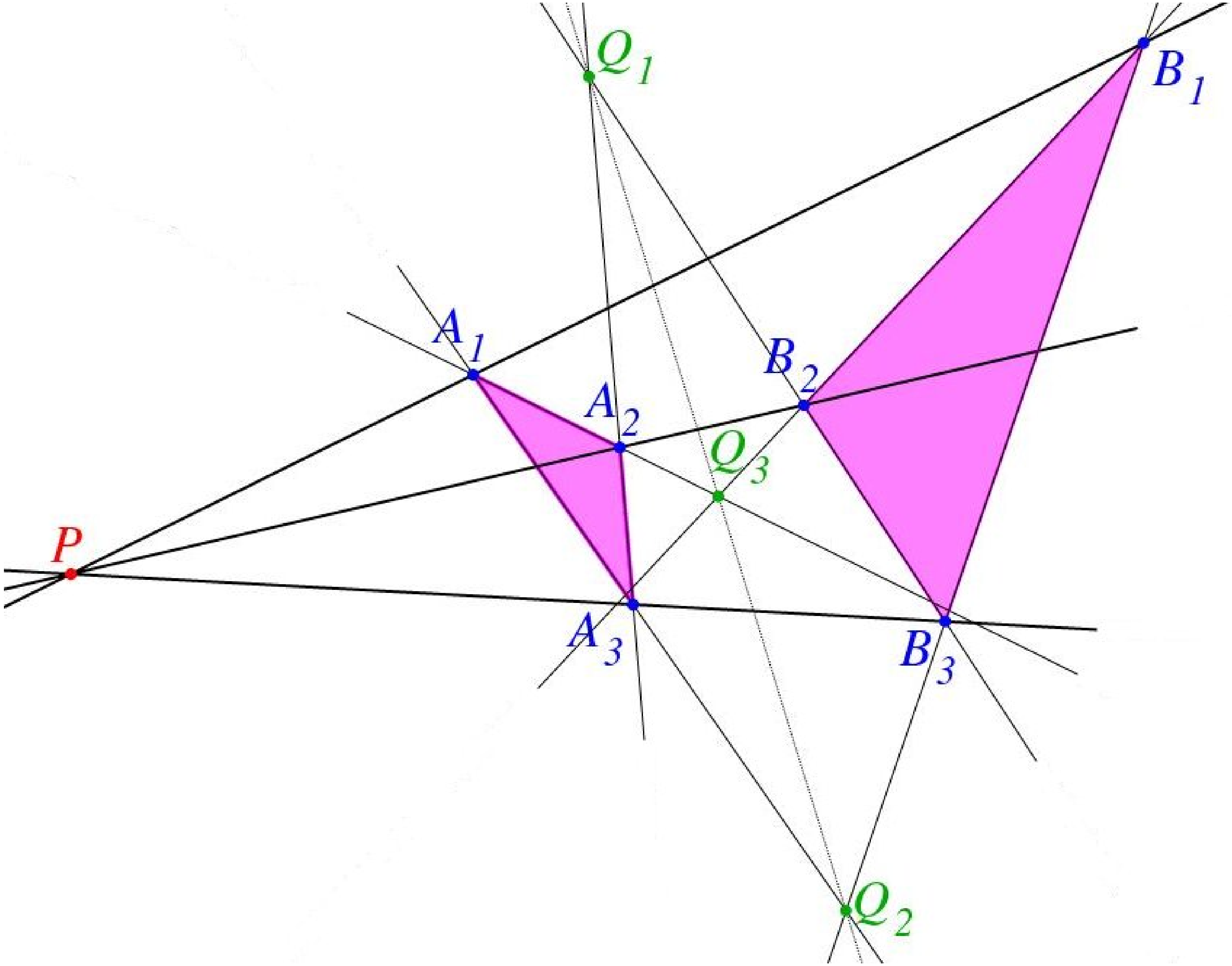
Azt mondjuk, hogy az $A_1A_2A_3$ és $B_1B_2B_3$ háromszögek pontra nézve perspektívek, ha az A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 egyenesek közös ponton mennek át. Duálisan, a két háromszög egyenesre nézve perspektív, ha az $A_1A_2 \cap B_1B_2$, $A_1A_3 \cap B_1B_3$, $A_2A_3 \cap B_2B_3$ pontok kollineárisak.

Tétel: Desargues-tétel

A projektív síkon két háromszög akkor és csak akkor perspektív pontra nézve, ha egyenesre nézve is az.

Vegyük észre, hogy elegendő az egyik irányt megmutatni, mert a megfordítása a duálisa.

Desargues-tétel szemléltetése



Desargues-tétel bizonyítása

Jelölés: $P(\boldsymbol{p}), A_1(\boldsymbol{a}_1), \ldots$. Tfh. a két háromszög pontra nézve perspektív. Ekkor $\boldsymbol{p} = \alpha_i \boldsymbol{a}_i + \beta \boldsymbol{b}_i$. Legyen

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{q}_1 &= \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 - \alpha_3 \boldsymbol{a}_3 = \beta_3 \boldsymbol{b}_3 - \beta_2 \boldsymbol{b}_2, \\
\boldsymbol{q}_2 &= \alpha_3 \boldsymbol{a}_3 - \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 = \beta_1 \boldsymbol{b}_1 - \beta_3 \boldsymbol{b}_3, \\
\boldsymbol{q}_3 &= \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 - \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 = \beta_2 \boldsymbol{b}_2 - \beta_1 \boldsymbol{b}_1.
\end{aligned}$$

A $Q_1(\boldsymbol{q}_1)$ projektív pont illeszkedik az A_2A_3, B_2B_3 egyenesekre, azaz $Q_1 = A_2A_3 \cap B_2B_3$. Hasonlóan, $Q_2 = A_1A_3 \cap B_1B_3, A_1A_2 \cap B_1B_2$. Másrészt

$$\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2 + \boldsymbol{q}_3 = \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 - \alpha_3 \boldsymbol{a}_3 + \alpha_3 \boldsymbol{a}_3 - \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 - \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0},$$

tehát a $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3$ vektorok lin. függők, így Q_1, Q_2, Q_3 kollineárisak.

Egyenestartó leképezések

Definíció: Egyenestartó leképezés

Két ponthalmaz közötti leképezéseket egyenestartóknak vagy illeszkedéstartóknak nevezzük, ha kollineáris ponthármasokat kollineáris ponthármasokba visznek.

Megjegyzés. A szóhasználat kissé megtévesztő, mert nem biztos, hogy egyenestartó leképezésnél egyenes képe egyenes, mert lehet egyetlen pont is, pl. a síkra vett merőleges vetítésnél. Ilyen probléma nem lép fel, ha a leképezés injektív.

Definíció: Fixpont, fixegyenes

A P pontot az α kollineáció fixpontjának nevezzük, ha $\alpha(P) = P$. Az e egyenes fixegyenes, ha képe saját maga. Amennyiben e minden pontja fix, akkor e-t pontonként fix egyenesnek nevezzük.

Kollineációk

Definíció: Kollineáció

A sík önmagára vett bijektív egyenestartó leképezéseit kollineációknak nevezzük.

Állítás: Alaptulajdonságok

1. Egy kollineáció mindig meghatározza az egyenesek halmazának egy bijekcióját.
2. A $e = PQ$ egyenes képe a P és Q képeit összekötő egyenes: $e' = P'Q'$. Hasonlóan, ha $P = e \cap f$, akkor $P' = e' \cap f'$.
3. Két fixpontot összekötő egyenes fixegyenes. Két fixegyenes metszéspontja fixpont.
4. Adott sík kollineációinak halmaza csoportot alkot.

Példák kollineációkra

Kollineációk az euklideszi síkon

- Minden egybevágóság: tengelyes tükrözések, eltolások, forgatások, csúsztatva tükrözések.
- Minden hasonlósági transzformáció, pl. középpontos nyújtás.
- Egyéb, pl. merőleges nyújtás, nyírás.

Állítás

A közönséges sík kollineációi párhuzamosság-tartók, így megőrzik a párhuzamossági osztályokat. Következésképpen minden ilyen meghatározza a projektív sík olyan kollineációját, mely fixen hagyja a végtelen távoli egyenest.

Biz. A bijektivitás miatt ha $e \cap f = \emptyset$, akkor $e' \cap f' = \emptyset$.

Kollineáció négy fixponttal

Lemma: A valós számtest automorfizmusáról

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan leképezés, amely minden $x, y \in R$ esetén teljesíti a

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{és} \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

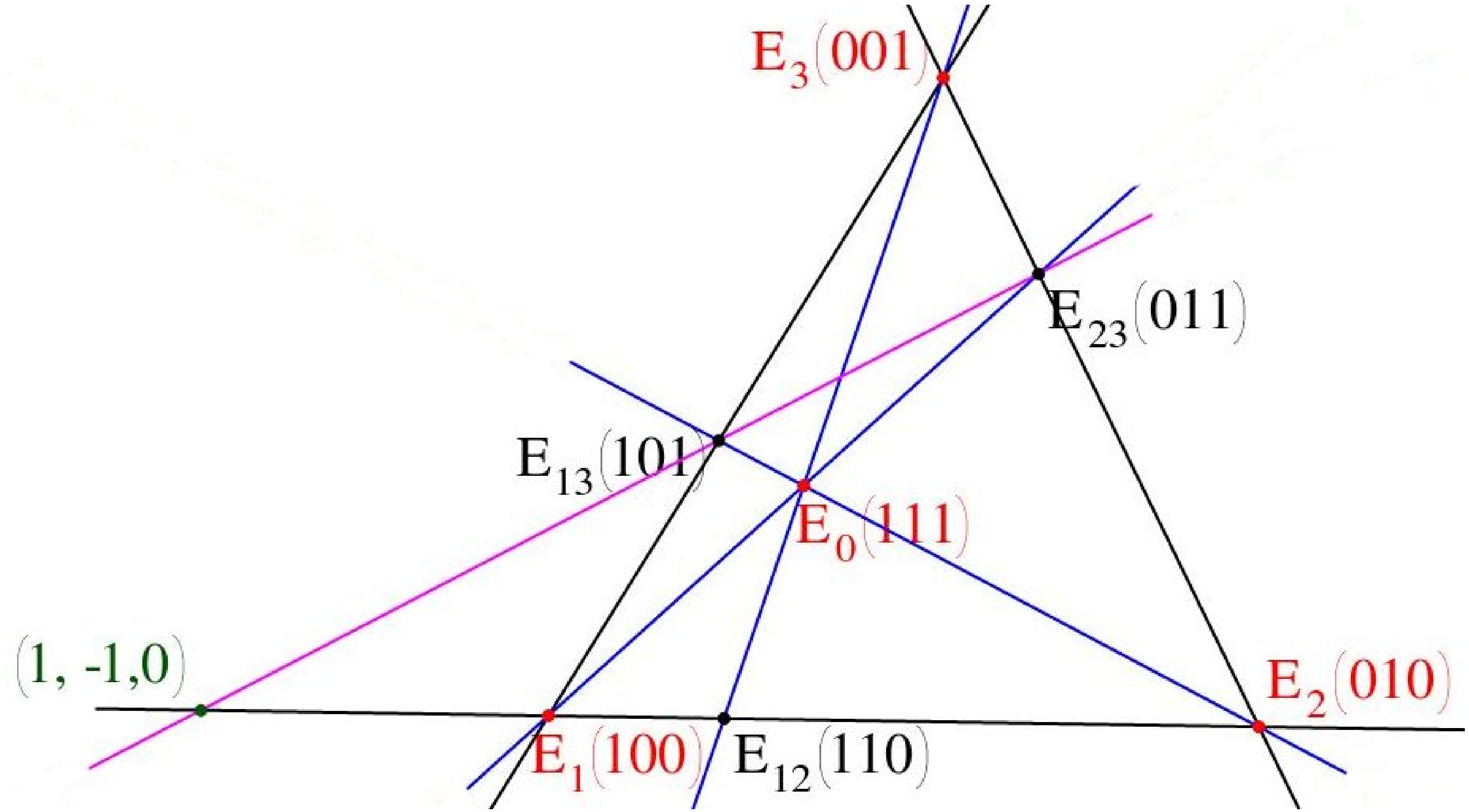
azonosságokat. Ekkor f vagy az azonosan 0 leképezés vagy az identitás $\mathbb{R}$-en.

Lemma: Kollineáció négy fixponttal

Ha a φ kollineáció fixen hagyja a homogén koordinátarendszer $E_0(1,1,1)$, $E_1(1,0,0)$, $E_2(0,1,0)$, $E_3(0,0,1)$ alappontjait, akkor φ az identitás.

A lemma bizonyítása: I. lépés

Ez mind fixpont és fixegyenes:



A lemma bizonyítása: II. lépés

Legyen $P(x, 0, 1)$ képe $P'(f(x), 0, 1)$. Megmutatjuk, hogy ekkor $P(x, y, 1) \mapsto P'(f(x), f(y), 1)$.

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f(x) & 0 & 1 \\ 0 & x' & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -x' + f(x) = 0$$

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x' & y' & 1 \\ f(x) & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x' - f(x) = 0$$

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 0 & y & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f(x) & y' & 1 \\ 0 & f(y) & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y' - f(y) = 0$$

A lemma bizonyítása: III. lépés

Nyilván $f(0) = 0$ és $f(1) = 1$. Megmutatjuk, hogy $f(x+y) = f(x) + f(y)$ és $f(xy) = f(x)f(y)$.

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x+y & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f(x) & f(y) & 1 \\ f(x+y) & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) + f(y) - f(x+y) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & y & 1 \\ x & xy & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & f(y) & 1 \\ f(x) & f(xy) & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad f(xy) - f(x)f(y) = 0$$

Ekkor $f(x) = x$ és minden közönséges pont fixpont. Ekkor minden egyenes fixegyenes, azaz φ az identitás.

Projektív lineáris transzformációk

Definíció: Projektív lineáris transzformációk

Legyen $A = (a_{ij})$ olyan 3×3-as mátrix, melynek determinánsa $\det(A) \neq 0$. Tekintsük a $\varphi_A : P(x_1, x_2, x_3) \mapsto P'(x_1', x_2', x_3')$ leképezést, ahol

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{cases}$$

Ekkor φ_A-t az A mátrix által megadott projektív lineáris leképezésnek nevezzük.

Mátrix jelöléssel a pontokat oszlopvektorként tekintve:

$$\varphi_A(P(\boldsymbol{x})) = P'(\boldsymbol{x}'), \qquad \boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}.$$

Projektív lineáris transzformációk alaptulajdonságai

Állítás: Projektív lineáris transzformációk alaptulajdonságai

1. A projektív lineáris transzformációk a projektív pontok halmazának önmagára vett jól definiált leképezése.
2. $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$ és $\varphi_A^{-1} = \varphi_{A^{-1}}$.
3. A projektív lineáris leképezések csoportot alkotnak.
4. $\varphi_A = \varphi_B$ akkor és csak akkor, ha $A = \lambda B$ valamely $\lambda \neq 0$ skalárra.
5. A projektív lineáris leképezések a projektív sík kollineációi.

Biz. (1) Meg kell gondolni, hogy P képe független a homogén számhármast meghatározó vektor választásától. A (2) és (3) triviális.

Bizonyítás: $\varphi_A = \varphi_B \iff A = \lambda B$

Megmutatjuk, hogy $\varphi_A = \varphi_B \iff A = \lambda B$. Az $\Leftarrow$ irány triviális. Tfh. $\varphi_A = \mathrm{id}$. Ekkor $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} = \lambda_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}$ valamely $\lambda_{\boldsymbol{x}}$ skalárra.

$$\lambda_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = \lambda_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} + \lambda_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{y}$$

miatt

$$(\lambda_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}} - \lambda_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{x} + (\lambda_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}} - \lambda_{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} \implies \lambda_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}} = \lambda_{\boldsymbol{x}} = \lambda_{\boldsymbol{y}},$$

ha $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ lineárisan függetlenek. Ha $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ lineáris függő, azaz $\boldsymbol{y} = c\boldsymbol{x}$, akkor

$$\lambda_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{y} = cA\boldsymbol{x} = c\lambda_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} = \lambda_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y} \implies \lambda_{\boldsymbol{x}} = \lambda_{\boldsymbol{y}}.$$

Tehát a $\lambda_{\boldsymbol{x}} = \lambda$ skalár független $\boldsymbol{x}$-től.
Ha most $\varphi_A = \varphi_B$, akkor $\varphi_{AB^{-1}} = \mathrm{id}$ és $AB^{-1} = \lambda I$.

Bizonyítás: A projektív lineáris transzformációk kollineációk

Az előző állításból következik, hogy φ_A invertálható, tehát bijektív. Legyenek $P(\boldsymbol{x})$, $Q(\boldsymbol{y})$, $R(\boldsymbol{z})$ különböző kollineáris pontok. Ekkor

$$\boldsymbol{z} = \lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}$$

valamely $\lambda, \mu \neq 0$ skalárokra. A pontok képeire:

$$\boldsymbol{z}' = A\boldsymbol{z} = A(\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}) = \lambda A\boldsymbol{x} + \mu A\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{x}' + \mu\boldsymbol{y}',$$

tehát $P'(\boldsymbol{x}')$, $Q'(\boldsymbol{y}')$, $R'(\boldsymbol{z}')$ is kollineáris és φ_A egyenestartó. Megmutatjuk, hogy az $e : \boldsymbol{u}^t X = 0$ egyenes φ_A melletti képe $e' : (\boldsymbol{u}')^t X = 0$, ahol $\boldsymbol{u} = A^t\boldsymbol{u}'$:

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{x}) \in e \quad &\Leftrightarrow \quad 0 = \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{x} \\
&\Leftrightarrow \quad 0 = (A^t\boldsymbol{u}')^t\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}')^t A\boldsymbol{x} \\
&\Leftrightarrow \quad 0 = (\boldsymbol{u}')^t\boldsymbol{x}' \\
&\Leftrightarrow \quad P'(\boldsymbol{x}') \in e'.
\end{aligned}$$

Lemma projektív lineáris transzformációkról

Lemma projektív lineáris transzformációkról

Legyen $P_0(\boldsymbol{x}_0), P_1(\boldsymbol{x}_1), P_2(\boldsymbol{x}_2), P_3(\boldsymbol{x}_3)$ négy általános helyzetű pont a projektív síkon. Ekkor létezik φ_A projektív lineáris transzformáció, mely az E_0, E_1, E_2, E_3 alappontokat a megfelelő pontba viszi: $\varphi_A(E_i) = P_i$.

Bizonyítás.

$$\varphi_A(E_1) = P_1 \iff \exists c_1 \neq 0 : c_1\boldsymbol{x}_1 = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix},$$

azaz az A mátrix 1. oszlopa $c_1\boldsymbol{x}_1$ alakú. Hasonlóan, az A 2. ill. 3. oszlopa $c_2\boldsymbol{x}_2$ illetve $c_3\boldsymbol{x}_3$ valamely $c_2, c_3 \neq 0$ skalárokra.

Lemma bizonyításának folytatása

A $\varphi_A(E_0) = P_0$ feltétel szerint valamely $c_0 \neq 0$ skalárra

$$c_0\boldsymbol{x}_0 = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + a_{13} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} \end{pmatrix} = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3.$$

Mivel a P_i-k általános helyzetűek, ezért $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ bázist alkotnak és tetszőleges $c_0 \neq 0$ esetén c_1, c_2, c_3 egyértelműen meghatározott skalárok.
Meg kell még gondolni, hogy $c_1, c_2, c_3 \neq 0$. Ha azonban pl. $c_1 = 0$, akkor a P_0, P_2, P_3 pontok kollineárisak, ami nem lehetséges. Ezzel a keresett A mátrixot megkonstruáltuk.

A projektív geometria alaptétele

Tétel: A projektív geometria alaptétele

Tetszőleges projektív kollineáció egyértelműen előállítható projektív lineáris transzformációként.

Biz. Legyen α kollineáció és jelölje P_i az E_i alappont α melleti képét. Legyen φ_A olyan projektív lineáris transzformáció, melyre $\varphi_A(E_i) = P_i$ és tekintsük a $\beta = \alpha^{-1} \circ \varphi_A$ kollineációt. Megmutatjuk, hogy β fixen hagyja az alappontokat:

$$\beta(E_i) = \alpha^{-1}(\varphi_A(E_i)) = \alpha^{-1}(P_i) = E_i.$$

A korábbi lemma szerint ekkor $\beta = \mathrm{id}$ és $\alpha = \varphi_A$. Az egyértelműség triviális.

Az alaptétel következményei

Következmény

1. Legyen P_0, P_1, P_2, P_3, illetve Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 a projektív sík két általános helyzetű pontnégyese. Ekkor létezik pontosan egy φ kollineáció, melyre $\varphi_A(P_i) = Q_i$, $i = 0, 1, 2, 3$.
2. Legyenek A_1, A_2, A_3 az e, valamint B_1, B_2, B_3 az f egyenes különböző pontjai. Ekkor létezik φ kollineáció amelyre $\varphi(A_i) = B_i$, $i = 1, 2, 3$.
3. Ha a φ kollineációnak van három egy egyenesen fekvő fixpontja, akkor az egyenes minden pontja fixpont. Duálisan, ha három egy pontra illeszkedő egyenes fix, akkor a pontra illeszkedő összes egyenes φ fixegyenese.

Kollineációk fixpontja

Definíció: Sajátérték, sajátvektor

Legyen A $n \times n$-en mátrix. Azt mondjuk, hogy az $\boldsymbol{x}$ vektor az A sajátvektora, a λ valós szám pedig pedig A sajátértéke, ha teljesül $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.

Lemma: A sajátértékek kiszámítása

Az A mátrix sajátértékei az $f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ polinom gyökei.

Állítás: Kollineáció fixpontjainak kiszámítása

A φ_A projektív lineáris transzformáció akkor és csak akkor hagyja fixen a $P(\boldsymbol{x})$ pontot, ha $\boldsymbol{x}$ az A sajátvektora.

A homogén koordinátarendszer megváltoztatása

A projektív lineáris leképezést felfoghatjuk elsőfokú behelyettesítésként, valamint a homogén koordinátarendszer megváltoztatásaként is.

Legyenek $F_0(\boldsymbol{f}_0), \ldots, F_3(\boldsymbol{f}_3)$ általános helyzetű pontok. Ekkor

$$\boldsymbol{f}_0 = c_1\boldsymbol{f}_1 + c_2\boldsymbol{f}_2 + c_3\boldsymbol{f}_3,$$

áttérve az $\boldsymbol{f}_i$ vektorról $c_i\boldsymbol{f}_i$-re, kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{f}_0 = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3,$$

és $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ skalárszorzó erejéig egyértelműek.

Definíció: Általános alappontokhoz tartozó homog. koordináták

A $P(\boldsymbol{x})$ pont $F_0, \ldots, F_3$ alappontokhoz tartozó homogén koordinátái (y_1, y_2, y_3), ahol

$$\boldsymbol{x} = y_1\boldsymbol{f}_1 + y_2\boldsymbol{f}_2 + y_3\boldsymbol{f}_3.$$

A homogén koordinátarendszer megváltoztatása (folyt.)

Állítás

Legyen φ_A az a kollineáció, melyre $\varphi_A(F_i) = E_i$, azaz $A\boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{e}_i$. Legyen a P pont homogén koordinátája $\boldsymbol{x}$ illetve $\boldsymbol{y}$ az $E_0, \dots$ illetve az $F_0, \dots$ koordinátarendszerekben. Ekkor az $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y}$ hozzárendelést a $\boldsymbol{y} = A^t\boldsymbol{x}$ összefüggés határozza meg.

Biz.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 \\ &= x_1A\boldsymbol{f}_1 + x_2A\boldsymbol{f}_2 + x_3A\boldsymbol{f}_3 \\ &= y_1\boldsymbol{f}_1 + y_2\boldsymbol{f}_2 + y_3\boldsymbol{f}_3, \end{aligned}$$

azaz $(x_1, x_2, x_3)A = (y_1, y_2, y_3)$. Mátrix jelöléssel $\boldsymbol{x}^tA = \boldsymbol{y}^t$, ami a kívánt összefüggés transzponáltja.

Kollineáció centruma és tengelye

Definíció: Kollineáció centruma és tengelye

A e egyenest a kollineáció tengelyének nevezzük, ha minden pontja fix. Az P pont a kollineáció centruma, ha minden P-re illeszkedő egyenes fixegyenes.

Vegyük észre, hogy a tengely és centrum duális fogalmak.

Példák

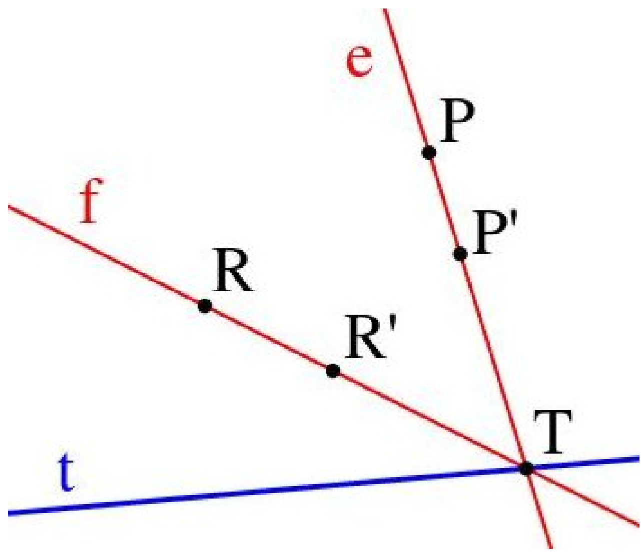
- A tengelyes tükrözés tengelye tengely. Van-e centruma?
- A középpontos nyújtás középpontja centrum, a végtelen távoli egyenes pedig tengely.
- Ha $\alpha \neq 180°$, akkor az α szögű forgatásnak nincs se centruma, se pedig tengelye.
- Az eltolásnak a végtelen távoli egyenes tengelye, az eltolás iránya által meghat. v.t. pont pedig centruma.

Centrális-axiális kollineációk

Állítás

Egy (projektív) kollineációnak akkor és csak akkor van tengelye, ha van centruma.

Biz. A dualitás miatt elég az egyik irányt belátni. Tfh. t tengely. Ha van t-re nem illeszkedő fixpont, akkor az centrum.
Tfh. minden $P \notin t$, $P' \neq P$. Az ábra szerint PP' fixegyenes. Vegyük f-et T-n át és legyen $R \in f$. RR' fixegyenes, $PP' \cap RR' \in t$, azaz $f = RR'$ fixegyenes.
Tehát T centrum.



Centrális-axiális kollineációk koordinátás alakja

Definíció: Centrális-axiális kollineáció

Azokat a kollineációkat, melyeknek van centrumuk és tengelyük, centrális-axiális kollineációknak nevezzük.

Állítás: Sok centrális-axiális kollineáció van

Legyen t a projektív sík tetszőleges egyenese és P, Q és Q' három tetszőleges projektív pont úgy, hogy $Q, Q' \notin t$, P, Q, Q' kollineárisok és $Q, Q' \neq P$. Ekkor pontosan egy olyan φ centrális-axiális kollineáció létezik, amelynek t tengelye, P centruma és Q képe Q'.

Biz. Feltehetjük, hogy t a v.t. egyenes. Ha $P \in t$, akkor φ az az eltolás, amely Q-t Q'-be viszi. Ha P köz. pont, akkor φ az a P középpontú nyújtás, melyre $\varphi(Q) = Q'$.

Centrális-axiális kollineációk koordinátás alakja

Lemma: Lineáris leképezések egy osztálya

Legyenek $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ vektorok és α skalár, és legyen

$$L_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\alpha} : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \alpha(\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}.$$

Ekkor $L_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\alpha} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés, melyre:

1. $L_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},0} = \mathrm{id}$ és $L_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\alpha} \circ L_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\beta} = L_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\alpha+\beta+\alpha\beta(\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y})}$.
2. Ha $\alpha(\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}) \neq -1$, akkor $L^{-1}_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\alpha} = L_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\beta}$, ahol $\beta = -\frac{\alpha}{1+\alpha(\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y})}$.
3. Ha $\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{x} = 0$ valamely $\boldsymbol{x}$-ra, akkor $L_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\alpha}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.
4. Ha $\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x} = 0$, akkor $\boldsymbol{x}' = L_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\alpha}(\boldsymbol{x})$-re teljesül $\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}' = 0$.

Állítás: Centrális-axiális kollineációk koordinátás alakja

Ha $\alpha(\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}) \neq -1$, akkor $L_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\alpha}$ centrális-axiális kollineációt határoz meg, melynek tengelye $t : \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{X} = 0$ és centruma $C(\boldsymbol{y})$.

Kúpszeletek a közönséges síkon

A közönséges síkon kúpszeleteknek nevezzük a ellipszist, parabolát és hiperbolát. Ezek geometriai definíciója (fókuszpontokkal és vezéregyenessel) koordinátamentes, csak a távolság fogalmát használja. A kúpszeletek egyenlete a koordinátarendszer megfelelő megválasztásával kanonikus alakra hozható:

$$\begin{aligned} \text{Parabola:} \quad & X^2 = 2pY, \\ \text{Ellipszis:} \quad & \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1, \\ \text{Hiperbola:} \quad & \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1, \end{aligned}$$

ahol az a, b, p konstansoknak szemléletes geometriai jelentés tulajdonítható.

Görbék a közönséges síkon

Legyen $f(x, y)$ kétváltozós folytonosan differenciálható függvény és jelölje a parciális deriváltakat $\partial_1 f(x, y), \partial_2 f(x, y)$.

Definíció: Síkgörbék

A közöséges sík azon pontjainak halmazát, melyek koordinátáai f zéróhelyei, f görbéjének nevezzük:

$$\Gamma_f = \{(x, y) \mid f(x, y) = 0\}.$$

Amennyiben f n-edfokú polinom, Γ_f-et n-edrendű görbének mondjuk.

Példák: Görbék a közönséges síkon

Az egyenesek elsőfokú görbék. Az $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ függvény görbéje az origó középpontú egységkör. Másodrendű görbék.

Görbe érintője

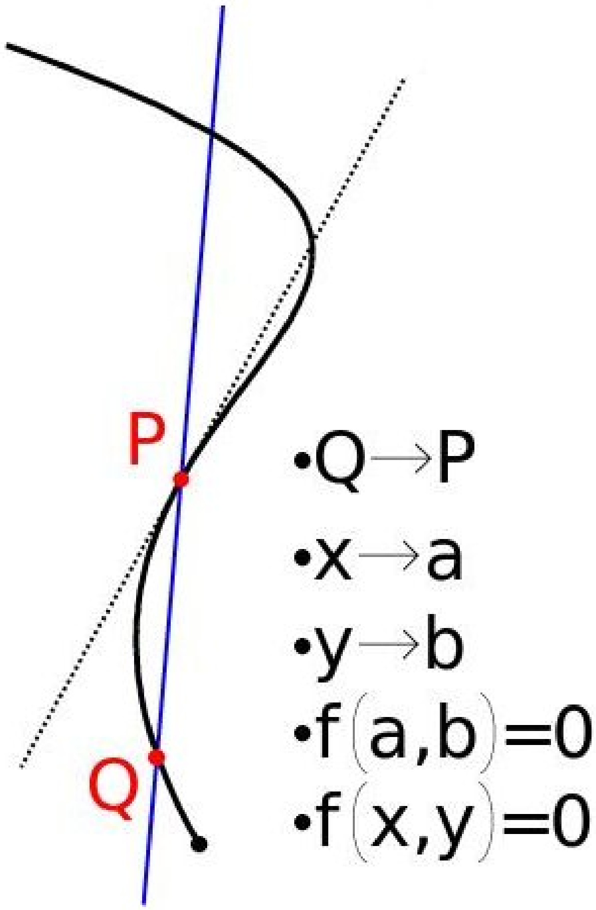
Definíció: Görbe érintője

A Γ_f görbe P pontbeli érintője a P-beli szelők határhelyzete. Azaz ha $Q \neq P$ szintén a görbe egy pontja, és $Q \to P$ a görbén, akkor a P-beli érintő a PQ egyenes határhelyzete.

Állítás: Az érintő egyenlete

Az $f(x, y) = 0$ görbe $P(a, b)$ pontjához a. cs. a. tudunk egyértelmű érintőt húzni, ha $(\partial_1 f(a, b), \partial_2 f(a, b)) \neq (0, 0)$. Ekkor az érintő egyenlete

$$\partial_1 f(a, b)(X - a) + \partial_2 f(a, b)(Y - b) = 0.$$



Görbe érintőjének egyenlete

A $\partial_1 f(a,b)(X-a)+\partial_2 f(a,b)(Y-b)=0$ egyenes átmegy a $P(a,b)$ ponton és a meredeksége $m_P=-\frac{\partial_1 f(a,b)}{\partial_2 f(a,b)}$. Megmutatjuk, hogy ez a PQ szelők meredekségének határértéke. A differenciálhatóság miatt a

$$h(x,y)=\frac{f(a,y)-f(x,y)}{a-x}, \qquad g(x,y)=\frac{f(x,b)-f(x,y)}{b-y}$$

függvények folytonosak, és teljesül $h(a,b)=\partial_1 f(a,b)$, $g(a,b)=\partial_2 f(a,b)$. Az egyenleteket átírva kapjuk, hogy

$$f(x,y)=f(a,y)+h(x,y)(a-x)=f(a,b)+h(x,y)(a-x)+g(a,y)(b-y).$$

Legyen $f(a,b)=f(x,y)=0$, ekkor $h(x,y)(a-x)+g(a,y)(b-y)=0$ és a PQ szelő meredeksége

$$m_{PQ}=\frac{b-y}{a-x}=-\frac{h(x,y)}{g(a,y)}\to m_P=-\frac{\partial_1 f(a,b)}{\partial_2 f(a,b)}.$$

Homogén polinomok

Az általános n-változós d-edfokú polinom:

$$f(X_1,\ldots,X_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n\geq 0}^{i_1+\cdots+i_n\leq d} a_{i_1\cdots i_n} X_1^{i_1} X_2^{i_2}\cdots X_n^{i_n}.$$

Az $a_{i_1\cdots i_n} X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n}$ tag a polinom monómja, $i_1+\cdots+i_n$ a monóm totális foka.

Definíció: Homogén polinom

Az n-változós $f(X_1,\ldots,X_n)$ polinomot d-edfokú homogén polinomnak nevezzük, ha minden monómjának a totális foka d.

Lemma: Polinomok homogenitásának jellemzése

Az $f(X_1,\ldots,X_n)$ polinom akkor és csak akkor d-edfokú homogén polinom, ha minden t esetén teljesül

$$f(tX_1,\ldots,tX_n) = t^d f(X_1,\ldots,X_n).$$

Homogén polinomok alaptulajdonságai

Állítás: A homogén polinomok alaptulajdonságai

1. Ha az $(x_1, \ldots, x_n)$ szám n-es zéróhelye az $f(X_1, \ldots, X_n)$ homogén polinomnak, akkor minden λ skalár esetén $(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$ is zéróhelye neki.
2. Homogén polinomok szorzatai és osztói is homogének.
3. A d-edfokú homogén polinomok összegei és skalárszorosai is d-edfokú homogén polinomok. (Vektorteret alkotnak.)
4. Az $f(X_1, \ldots, X_n)$ d-edfokú homogén polinomra teljesül

$$\partial_1 f(X_1, \ldots, X_n)X_1 + \cdots + \partial_n f(X_1, \ldots, X_n)X_n = df(X_1, \ldots, X_n).$$

Biz. (1), (2) és (3) közvetlen következik a lemmából, valamint t szerinti deriválással és $t = 1$ helyettesítéssel (4) is.

Görbék a projektív síkon

Definíció: Projektív görbe

Legyen $F(X,Y,Z)$ n-edfokú homogén polinom. A

$$\Gamma_F := \{P(x,y,z) \mid F(x,y,z) = 0\}$$

ponthalmazt az F által meghatározott n-edfokú projektív görbének nevezzük.

Példák projektív görbékre

- Az egyenesek elsőfokú projektív görbék.
- Legyen $F(X,Y,Z) = XY$ ekkor egyrészt Γ_F másodfokú görbe. Másrészről Γ_F az $X = 0$ és az $Y = 0$ egyenesek uniója.
- Általában, ha $F = GH$, akkor $\Gamma_F = \Gamma_G \cup \Gamma_H$.
- Legyen $F(X,Y,Z) = X^2 - YZ$. Ekkor F másodrendű görbe, mely nem áll elő két egyenes uniójaként.

Homogén és inhomogén polinomok kapcsolata

Állítás: Homogén és inhomogén polinomok kapcsolata

Tetszőleges n-edfokú 2-változós $f(X,Y)$ polinomhoz rendeljük hozzá az

$$F(X,Y,Z) = Z^n f\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$$

3-változós polinomot. Ekkor F n-edfokú homogén polinom, melyre $F(X,Y,1) = f(X,Y)$ teljesül. Γ_F közönséges pontjai pontosan Γ_f elemei.

Biz. Ha $f(X,Y) = \sum a_{ij}X^iY^j$, $i+j \leq n$ akkor

$$F(X,Y,Z) = \sum a_{ij}X^iY^jZ^{n-i-j}$$

n-edfokú homogén polinom. A $P(x,y)$ közönséges pont homogén koordinátái $(x,y,1)$ és $F(x,y,1) = f(x,y)$, azaz $P(x,y,1) \in \Gamma_F \iff P(x,y) \in \Gamma_f$-re.

Síkgörbe projektív lezártja

Definíció: Görbe projektív lezártja

Legyen $f(X, Y)$ kétváltozós polinom és az iménti módon definiáljuk a hozzá tartozó $F(X, Y, Z)$ háromváltozós homogén polinomot. A Γ_F görbét a Γ_f görbe projektív lezártjának nevezzük.

Példák görbék projektív lezártjára

- Az $aX + bY + c = 0$ közönséges egyenes projektív lezártja az $aX + bY + cZ = 0$ projektív egyenes.
- Az origó középpontú egységkör egyenlete $X^2 + Y^2 = 1$, vagyis ez az $f(X, Y) = X^2 + Y^2 - 1$ polinom zérushelye. Ennek projektív lezártja a $F(X, Y, Z) = X^2 + Y^2 - Z^2$ polinom által meghatározott másodfokú görbe.
- Az $Y = X^2$ parabola polinomja $f(X, Y) = X^2 - Y$, ennek projektív lezártja $F(X, Y, Z) = X^2 - YZ$. Mutassuk meg, hogy Γ_F-nek pontosan egy végtelen távoli pontja van.

Projektív görbe érintője

Állítás: Projektív görbe érintője

A $\Gamma_F : F(X, Y, Z) = 0$ projektív görbe $P(a, b, c)$ pontjában az érintő homogén koordinátás egyenlete

$$0 = \partial_1 F(a, b, c)X + \partial_2 F(a, b, c)Y + \partial_3 F(a, b, c)Z.$$

Definíció: Sima pont, szinguláris pont

Azt mondjuk, hogy a $P(a, b, c)$ pont $\Gamma_F : F(X, Y, Z) = 0$ projektív görbe szinguláris pontja, ha P-ben az F mindhárom parciális deriváltja 0. Ellenkező esetben P-t a görbe sima pontjának nevezzük.

Megjegyzés. Látható, hogy a görbe sima pontjai pontosan azok, amelyekbe egyértelmű érintőt tudunk húzni. Például az $F(X, Y, Z) = X^2 - YZ$ minden pontja sima, míg $P(0, 0, 1)$ szinguláris pontja $F(X, Y, Z) = XY$-nak.

Alakzatok projektív ekvivalenciája

Definíció: Projektív ekvivalencia

Azt mondjuk, hogy a projektív sík két alakzata projektívan ekvivalens, ha létezik az egyiket a másikba vivő projektív lineáris transzformáció.

- Mivel a projektív lineáris transzformációk csoportot alkotnak, a projektív ekvivalencia ekvivalenciareláció.
- Ekvivalens alakzatok csak a homogén koordinátarendszer megválasztásában különböznek egymástól.
- Két projektívan ekvivalens görbe esetén a koordinátarendszer megfelelő választásával az egyik a másik alakjára hozható.

Az általános másodrendű polinomok

Az általános kétismeretlenes másodfokú polinom:

$$f(X,Y) = a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2a_{13}X + 2a_{23}Y + a_{33},$$

általános háromismeretlenes másodfokú homogén polinom:

$$F(X,Y,Z) = a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2a_{13}XZ + 2a_{23}YZ + a_{33}Z^2.$$

Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

3×3-as szimmetrikus mátrixot, F az következő alakban írható fel:

$$F(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j$$

Másodrendű projektív görbék

Definíció: Másodrendű projektív görbék

Legyen $A = (a_{ij})$ 3×3-as szimmetrikus mátrix. Azon közönséges pontok halmazát, melyek koordinátái kielégítik az

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2a_{13}X + 2a_{23}Y + a_{33} = 0$$

másodfokú polinomot, közönséges másodrendű görbének nevezzük. Ezen görbe projektív lezártjának egyenlete

$$a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_{33}X_3^2 + 2a_{12}X_1X_2 + 2a_{13}X_1X_3 + 2a_{23}X_2X_3 = 0.$$

A projektív egyenletet röviden $\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = 0$ alakban írjuk.

Lineáris transzformációk hatása másodrendű görbéken

Állítás: Lineáris transzformációk hatása másodrendű görbéken

Az $\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = 0$ másodrendű görbét a φ_M projektív lineáris transzformáció a $\boldsymbol{x}^t B\boldsymbol{x} = 0$ másodrendű görbébe viszi, ahol $B = M^{-t} A M^{-1}$.

Bizonyítás. Legyen a $P(\boldsymbol{x})$ pont képe $P'(\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{y} = M\boldsymbol{x}$.

$$\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = 0 \Leftrightarrow (M^{-1}\boldsymbol{y})^t A(M^{-1}\boldsymbol{y}) \Leftrightarrow \boldsymbol{y}^t M^{-t} A M^{-1}\boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{y}^t B\boldsymbol{y},$$

tehát $P(\boldsymbol{x})$ akkor és csak akkor illeszkedik az $\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = 0$ görbére, ha $P'(\boldsymbol{y})$ képe illeszkedik az $\boldsymbol{x}^t B\boldsymbol{x} = 0$ görbére.

Példa: Kúpszeletek ekvivalenciája

Mutassuk meg, hogy az ellipszis, a parabola, és a hiperbola projektívan ekvivalensek.

Elfajuló másodrendű görbék

Definíció: Elfajuló másodrendű görbék

Azt mondjuk, hogy a $\Gamma : \boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x} = 0$ egyenletű projektív másodrendű görbe elfajuló, ha $\det(A) = 0$.

Tétel: Elfajuló másodrendű görbék osztályozása

Legyen $A = (a_{ij})$ a nullmátrixtól különböző 3×3-as szimmetrikus mátrix, melyre $\det(A) = 0$ és jelölje Γ az $\boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x} = 0$ egyenletű másodrendű görbét. Ekkor Γ projektívan ekvivalens az alábbiak egyikével:

1. $X_1 X_2 = 0$, azaz Γ két egyenes uniója.
2. $X_1^2 = 0$, azaz Γ egyetlen egyenes.
3. $X_1^2 + X_2^2 = 0$, azaz Γ egyetlen pontból áll.

Elfajuló másodrendű görbék osztályozása

Mivel $\det(A) = 0$, a Cramer-szabály szerint $\exists \boldsymbol{a} \neq 0$, melyre $A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. Ekkor $P(\boldsymbol{a}) \in \Gamma$. Feltehetjük, hogy $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)$, ekkor

$$\Gamma : a_{11}X_1^2 + 2a_{12}X_1X_2 + a_{22}X_2^2 = 0.$$

Jelölje $\Delta = 4(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})$ a diszkriminánst.
1. eset: $\Delta > 0$. Ekkor az $a_{11}X^2 + 2a_{12}X + a_{22} = 0$ egyenletnek két különböző α, β gyöke van, azaz $a_{11}X^2 + 2a_{12}X + a_{22} = c(X - \alpha)(X - \beta)$ alakban szorzattá alakítható. Ez azt jelenti, hogy Γ egyenlete is

$$a_{11}X_1^2 + 2a_{12}X_1X_2 + a_{22}X_2^2 = c(X_1 - \alpha X_2)(X_1 - \beta X_2)$$

alakba írható, és Γ két különböző egyenes uniója.
2. eset: $\Delta = 0$. Ekkor az előbbi módszerrel

$$a_{11}X_1^2 + 2a_{12}X_1X_2 + a_{22}X_2^2 = c(X_1 - \alpha X_2)^2$$

és Γ az $e : X_1 - \alpha X_2 = 0$ egyenes.

Elfajuló másodrendű görbék osztályozása (folyt.)

3. eset: $\Delta < 0$. Ekkor $a_{11} \neq 0$ és leosztva vele $a_{11} = 1$ feltehető. Tekintsük az

$$\begin{aligned} X_1^2 + 2a_{12}X_1X_2 + a_{22}X_2^2 &= (X_1 + a_{12}X_2)^2 + (a_{22} - a_{12}^2)X_2^2 \\ &= (X_1 + a_{12}X_2)^2 - \Delta X_2^2 \end{aligned}$$

átalakítást. Látható, hogy az

$$X_1' = X_1 + a_{12}X_2, \qquad X_2' = \sqrt{-\Delta}X_2$$

lineáris helyettesítés Γ egyenletét a kívánt $(X_1')^2 + (X_2')^2 = 0$ alakra hozza.

Következmény

Az elfajuló másodrendű görbéknek mindig van szinguláris pontjuk.

Másodrendű görbék és egyenesek metszete

Állítás: Másodrendű görbék és egyenesek metszete

Legyen Γ másodrendű görbe, e egyenes. Ekkor $|\Gamma \cap e| \leq 2$ vagy pedig $e \subsetneq \Gamma$. Az utóbbi esetben Γ elfajuló.

Bizonyítás. Az egyenes egyenlete elsőfokú, Γ-é másodfokú, a metszéspontokat behelyettesítéssel keressük meg. Másodfokúba elsőfokút helyettesítve másodfokú egyenletet kapunk, ami vagy azonosan nulla, vagy pedig ≤ 2 gyöke van. Az első esetben $e \subsetneq \Gamma$. Tegyük most fel, hogy $\Gamma : \boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x} = 0$ tartalmaz egyenest, projektív ekvivalencia miatt feltehető, hogy az egyenes egyenlete $Z = 0$. Ekkor $a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$, azaz $\det(A) = 0$.

Másodrendű görbe öt ponton át

Tétel: Másodrendű görbe öt ponton át

A projektív síkon 5 általános helyzetű ponthoz pontosan egy rajtuk átmenő nem-elfajuló másodrendű görbe létezik.

Biz. Tekintsük a P_i pont (x_i, y_i, z_i) homogén koordinátáit $(i = 1, \ldots, 5)$ és keressük a kérdéses kúpszeletet

$$a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_{33}X_3^2 + 2a_{12}X_1X_2 + 2a_{13}X_1X_3 + 2a_{23}X_2X_3 = 0$$

alakban. Az X_1, X_2, X_3 helyébe x_i, y_i, z_i-t helyettesítve egy hat ismeretlenes, az

$$a_{11}x_i^2 + a_{22}y_i^2 + a_{33}z_i^2 + 2a_{12}x_iy_i + 2a_{13}x_iz_i + 2a_{23}y_iz_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, 5$$

egyenletekből álló homogén lineáris egyenletrendszert kapunk az a_{ij} ismeretlenekkel. Ennek biztos létezik $A = (a_{ij})$ nem-triviális megoldása, legyen Γ az $\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = 0$ másodrendű görbe.

Másodrendű görbe öt ponton át (folyt.)

Megmutatjuk, hogy Γ nem-elfajuló. Ellenkező esetben Γ egy pont vagy legfeljebb két egyenes uniója volna, azaz az öt pont közül legalább három kollineáris lenne.
Meg kell még mutatunk, hogy Γ egyértelmű. Ez azzal ekvivalens, hogy az öt egyenlet lineárisan független. Ellenkező esetben feltehetnénk, hogy Γ illeszkedik egy tetszőleges $P_6(x_6, y_6, z_6)$ pontra. Valóban egy hatodik pont hozzávétele egy további egyenletet jelentene az együtthatókra, és továbbra is létezne nem-triviális megoldás.
Válasszuk P_6-ot a P_1P_2 egyenesről, ekkor $|P_1P_2 \cap \Gamma| \geq 3$, azaz $P_1P_2 \subseteq \Gamma$ és Γ elfajuló. Mint már láttuk, ez ellentmond az öt pont általános helyzetének.

Konjugált pontpárok

Rögzítsük a

$$\Gamma : a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_{33}X_3^2 + 2a_{12}X_1X_2 + 2a_{13}X_1X_3 + 2a_{23}X_2X_3 = 0$$

nem-elfajuló projekítv másodrendű görbét és jelölje $A = (a_{ij})$ az együtthatókból álló 3×3-as szimmetrikus mátrixot.

Definíció: Kúpszeletre nézve konjugált pontpár

Azt mondjuk, hogy a $P(x_1, x_2, x_3)$ és $Q(y_1, y_2, y_3)$ pontok konjugáltak a Γ másodrendű görbére nézve, ha teljesül

$$\boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{y} = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i y_j = 0.$$

Jelölés: $P \perp Q$. A P pont konjugált pontjainak halmazát $P^{\perp}$ jelöli.

A konjugáltsági reláció alaptulajdonságai I.

Definíció: Önkonjugált pont

A P ponton önkonjugáltnak nevezzük, ha $P \perp P$.

Tétel: A konjugáltsági reláció alaptulajdonságai I.

A másodrendű görbére vett konjugáltsági reláció szimmetrikus. Az önmagukkal konjugált pontok pontosan a másodrendű görbe pontjai. Egy egyenesen legfeljebb 2 önkonjugált pont van.

Biz. Mivel A szimmetrikus mátrix, ezért

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{y} = (\mathbf{x}^t A\mathbf{y})^t = \mathbf{y}^t A^t \mathbf{x} = \mathbf{y}^t A\mathbf{x},$$

így $P(\mathbf{x}) \perp Q(\mathbf{y})$ akkor és csak akkor, ha $Q(\mathbf{y}) \perp P(\mathbf{x})$. A többi triviális.

A konjugáltsági reláció alaptulajdonságai II.

Tétel: A konjugáltsági reláció alaptulajdonságai II.

Legyen $\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{x}$, ahol $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$. Ekkor $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ és a $P(\boldsymbol{x})$ pont konjugált pontjainak $P^{\perp}$ halmaza a $\boldsymbol{u}^t X = 0$ egyenletű egyenes pontjai.

Biz. Legyen e az $\boldsymbol{u}^t X = 0$ egyenletű egyenes. Mivel $\boldsymbol{u}^t = \boldsymbol{x}^t A^t = \boldsymbol{x}^t A$, ezért

$$\begin{aligned} Q \in P^{\perp} &\iff P(\boldsymbol{x}) \perp Q(\boldsymbol{y}) \\ &\iff \boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{y} = 0 \\ &\iff \boldsymbol{u}^t \boldsymbol{y} = 0 \\ &\iff Q \in e, \end{aligned}$$

azaz $P^{\perp} = e$.

A konjugáltsági reláció alaptulajdonságai III.

Tétel: A konjugáltsági reláció alaptulajdonságai III.

A $P \mapsto P^{\perp}$ leképezés illeszkedéstartó bijekció a projektív pontok és egyenesek halmazai között. Speciálisan,

$$(PQ)^{\perp} = P^{\perp} \cap Q^{\perp}, \qquad (e \cap f)^{\perp} = e^{\perp} f^{\perp}$$

teljesül minden P, Q pontra és e, f egyenesre.

Biz. Vizsgáljuk az $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{u} = A\boldsymbol{x}$ leképezést. Ez $\det(A) \neq 0$ miatt bijektív transzformáció, mely lineárisan függő vektorokat lineárisan függőkbe visz. Geometriailag ez azt jelenti, hogy a $P \mapsto P^{\perp}$ leképezés bijektív, és kollineáris pontok képei közös ponton átmenő egyenesek.

Pont polárisa, egyenes pólusa másodrendű görbére

Következmény

Az e egyenesre illeszkedő P pontok $P^\perp$ képei sugársort alkotnak. Ezen sugársor Q tartójára teljesül $Q^\perp = e$.

Definíció: Pólus, poláris

Az $e = P^\perp$ egyenest a P pont Γ másodrendű görbe szerinti polárisának, míg P-t az e pólusának nevezzük és a $P = e^\perp$ jelölést használjuk.

Példák: Számoljuk ki!

- A $\mathcal{K}$ kör O origójának $\mathcal{K}$-ra vett polárisa a végtelen távoli egyenes.
- A $\mathcal{P}$ parabola szimmetriatengelyének pólusa a rá merőleges egyenesek közös végtelen távoli pontja.

Érintők és polárisok

Állítás: Érintők és polárisok kapcsolata

Legyen P a $\Gamma : \boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = 0$ másodrendű görbe tetszőleges pontja. Ekkor $P^\perp$ a Γ P-beli érintője.

Bizonyítás. A $P(\boldsymbol{x})$-beli érintő együtthatói a Γ homogén egyenletének parciális deriváltjai az $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ helyettesítés mellett:

$$\begin{aligned} u_1 &= 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3, \\ u_2 &= 2a_{21}x_1 + 2a_{22}x_2 + 2a_{23}x_3, \\ u_3 &= 2a_{31}x_1 + 2a_{32}x_2 + 2a_{33}x_3, \end{aligned}$$

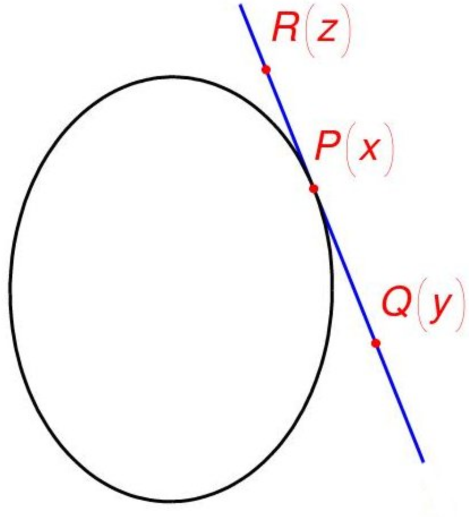
azaz konstans szorzótól eltekintve valóban $\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{x}$ az érintő együtthatóira, azaz az érintő $P^\perp$.

1-szelők és polárisok

Állítás: 1-szelők és polárisok kapcsolata

Legyen Γ nem-efajuló másodrendű görbe, $P \in \Gamma$. Ekkor $\{P\} = \gamma \cap P^{\perp}$ és az összes többi P-n átmenő egyenes két pontban metszi Γ-t.

Bizonyítás. Legyen $P(\boldsymbol{x}) \in \Gamma$, $Q(\boldsymbol{y}) \notin \Gamma$ és tekintsük a PQ egyenes P-től különböző általános $R(\boldsymbol{z})$ pontját, $\boldsymbol{z} = \lambda\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$.



$$\begin{aligned}
R \in \Gamma \quad &\Leftrightarrow \quad 0 = \boldsymbol{z}^t A \boldsymbol{z} = (\lambda\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})^t A(\lambda\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \\
&\Leftrightarrow \quad 0 = \lambda^2 \boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} + 2\lambda\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^t A\boldsymbol{y} \\
&\Leftrightarrow \quad 0 = 2\lambda\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^t A\boldsymbol{y} \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda = -\frac{\boldsymbol{y}^t A\boldsymbol{y}}{2\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{y}}.
\end{aligned}$$

Azaz, PQ-nak akkor és csak akkor van P-től különböző metszéspontja, ha $\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{y} \neq 0$, azaz ha $Q \notin P^{\perp}$.

Érintők és 1-szelők

Következmény: Érintők és 1-szelők kapcsolata

Nem-elfajuló projektív másodrendű görbe esetén az egy pontban metsző egyenesek pontosan az érintők.

Az előző két állításból következik, hogy mind az 1-szelők, mind pedig az érintők a görbe pontjainak polárisai.

Szemléletes bizonyítás. Mivel az érintő a szelő határhelyzete, elég megmutatni, hogy e-t "kicsit megváltoztatva" 2 metszéspontot kapunk. Az e egyetlen metszéspontjának oka, hogy az egyenletét Γ egyenletébe helyettesítve a kapott másodrendű egyenlet diszkriminánsa $\Delta = 0$. Ha azonban e-t kissé megforgatom P-n át, együtthatói kicsit megváltoznak, és Δ is kicsit megváltozik, azaz $\Delta \neq 0$ lesz. De $\Delta < 0$ nem lehet, mert akkor e nem metszené Γ-t, azaz $\Delta > 0$ és e két pontban metszi Γ-t.

Külső és belső pontok, egyenesek

Állítás: Érintők adott ponton át

Adott Γ nem-elfajuló másodrendű görbéhez bármely P pontból legfeljebb két érintő húzható. Ha P-n egyetlen érintő megy át, akkor $P \in \Gamma$ és az érintő $P^\perp$.

Biz. Legyen e_1, e_2 érintő P-n keresztül Q_1, Q_2 érintési ponttal. Ekkor

$$P^\perp = (e_1 \cap e_2)^\perp = e_1^\perp e_2^\perp = Q_1 Q_2.$$

Mivel $|\Gamma \cap P^\perp| \leq 2$, ezért nincs több érintő P-n át.

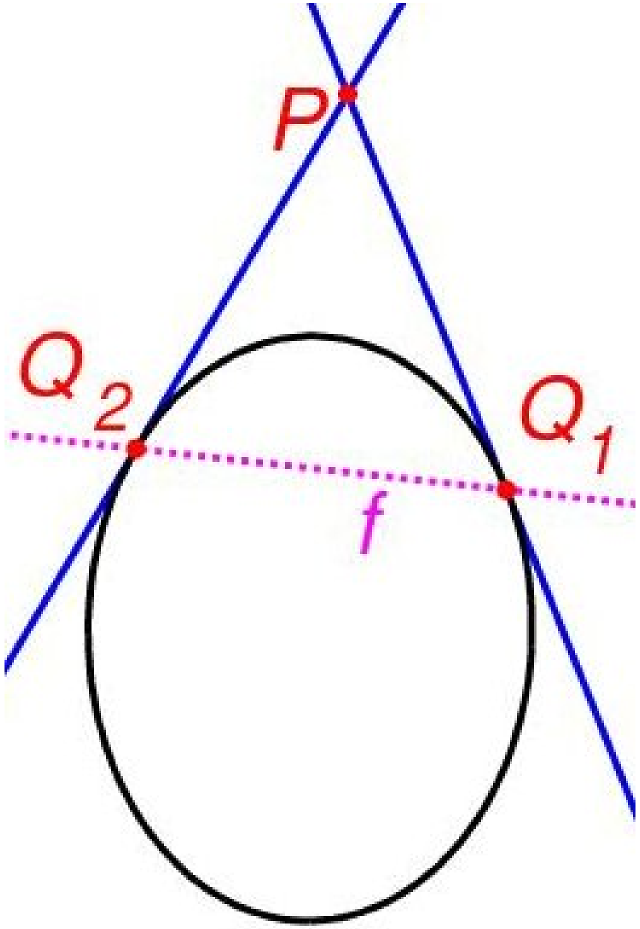
Definíció: Külső és belső pontok, egyenesek

Legyen Γ nem-elfajuló másodrendű görbe. Azt mondjuk, hogy a P pont a Γ külső pontja, ha belőle pontosan két érintő húzható Γ-hoz. P belső pont, ha nem húzható belőle érintő. Az e egyenes külső, ha nem metszi Γ-t, és belső, ha két pontban metszi.

Pólus, poláris szerkesztése I.

Állítás: Pólus, poláris szerkesztése I.

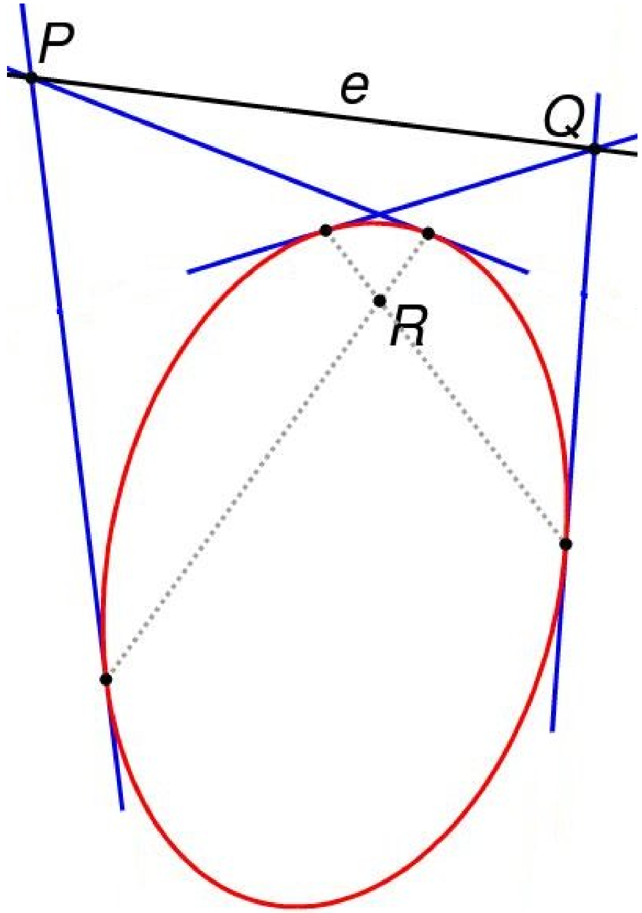
- Külső pont polárisa belső egyenes, belső ponté pedig külső egyenes.
- Legyen P a Γ külső pontja, jelölje e_1, e_2 a P-ből Γ-hoz húzott két érintőt. Ekkor $P^\perp = f = Q_1Q_2$, ahol $Q_i = e_i^\perp$ az érintési pontok.
- Legyen e belső egyenes, jelölje Q_1, Q_2 a Γ-val vett metszéspontjait, valamint e_1, e_2 az ezekbe húzott érintőket. Ekkor f pólusa $P = e_1 \cap e_2$.



Pólus, poláris szerkesztése II.

Állítás: Pólus, poláris szerkesztése II.

- Legyen e külső egyenes. Válasszunk e-n két külső pontot, P, Q. Szerkesszük meg $P^{\perp}$, $Q^{\perp}$-et, ezek R metszéspontja e pólusa.
- Legyen R a Γ belső pontja. Válasszunk két belső egyenest R-en át. Az ezek pólusait összekötő e egyenes R polárisa.



Megj. Annak a szemléletes ténynek, miszerint külső egyenes minden pontja külső, és hogy belső pontra csupa belső egyenes illeszkedik, a bizonyítása messze nem triviális.

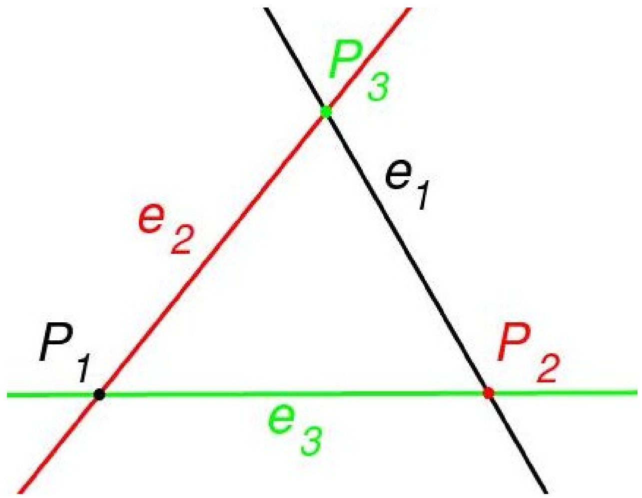
Önkonjugált háromszögek

Definíció: Önkonjugált háromszög

Azt mondjuk, hogy az P_1, P_2, P_3 pontok önkonjugált háromszöget alkotnak a Γ másodrendű görbére nézve, ha a csúcsok polárisai a szemközti oldalegyenesek: $P_1^\perp = P_2P_3$, $P_2^\perp = P_1P_3$, $P_3^\perp = P_1P_2$.

Önkonjugált háromszögek konstrukciója:

- Tudjuk, hogy minden egyenesen legfeljebb két önkonjugált pont van, tehát létezik P_1 nem önkonjugált pont. Legyen $e_1 = P_1^\perp$, $P_1 \notin e_1$.
- Legyen $P_2 \in e_1$ tetszőleges nem önkonjugált pont, $e_2 = P_2^\perp$.
- Legyen $P_3 = e_1 \cap e_2$, $e_3 = P_3^\perp = e_1^\perp e_2^\perp = P_1P_2$.



Nem-elfajuló másodrendű görbék osztályozása – lemma

Lemma: Másodrendű görbe egyenlete önkonjugált alappontokkal

Legyen Γ nem-elfajuló másodrendű görbe és tegyük fel, hogy a homogén koordinátarendszer E_1, E_2, E_3 alappontjai önkonjugált háromszöget alkotnak Γ-ra nézve. Ekkor Γ egyenlete

$$a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_{33}X_3^2 = 0.$$

Biz. Legyen $A = (a_{ij})$ a Γ egyenletének mátrixa. Az $E_1(1,0,0)$ alappont polárisa az

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = 0$$

egyenes. A tétel szerint $E_1^\perp = E_2E_3$, mely utóbbi egyenlete $X_1 = 0$. Ez azt jelenti, hogy $a_{12} = a_{13} = 0$. $E_2^\perp = E_1E_3$ felhasználásával hasonlóan adódik $a_{23} = 0$.

Nem-elfajuló másodrendű görbék osztályozása

Tétel: Nem-elfajuló másodrendű görbék osztályozása

Tetszőleges nem-elfajuló másodrendű görbe projektívan ekvivalens az alábbbi két görbe egyikével.

1. $\Gamma : X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$, ha csupa képzetes pontja van.
2. $\Gamma : X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 0$, ha van legalább egy valós pontja.

Biz. A lemma szerint a koordinátarendszer megválasztható úgy, hogy Γ egyenlete $a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_{33}X_3^2 = 0$. Legyen $a_{ii} = \pm b_i^2$, és tekintsük a

$$\varphi : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (b_1x_1, b_2x_2, b_3x_3)$$

projektív lineáris transzformációt. Ez Γ-t a $\pm X_1^2 \pm X_2^2 \pm X_3^2 = 0$ egyenletű kúpszeletbe viszi. A változók esetleges cseréjével, és -1-el való szorzással tehát Γ egyenlete a kívánt alakú lesz.

Másodrendű görbék és a kúpszeletek

Következmény: Másodrendű görbék és a kúpszeletek

A valós ponttal rendelkező projektív nem-elfajuló másodrendű görbék mind projektív ekvivalensek és végtelen sok valós pontjuk van. Speciálisan, a kúpszeletek és a valós ponttal rendelkező nem-elfajuló másodrendű görbék ugyanazok. A projektív másodrendű görbe közönséges része ellipszis, parabola vagy hiperbola attól függően, hogy 0, 1 vagy 2 végtelen távoli pontja van.

Megjegyzés. Az $X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 0$ egyenletet a projektív kúpszeletek kanonikus alakjának is nevezzük, mivel **a homogén koordinátarendszer megfelelő megválasztásával bármely projektív kúpszelet ilyen alakra hozható.**

Kúpszelet megadása öt adattal

Tétel: Kúpszelet megadása öt adattal

Az alábbi öt adat egyértelműen meghatároz egy nem-elfajuló kúpszeletet, azaz pontosan egy nem-elfajuló kúpszelet van, mely átmegy az adott pontokon és érinti az adott egyeneseket.

1. Négy általános helyzetű pont, és egy egyenes, mely ezek egyikére illeszkedik.
2. Három általános helyzetű pont és két egyenes, melyek ezek közül egyre-egyre illeszkednek.
3. Három ált. helyzetű egyenes és közülük kettő egy-egy pontja.
4. Négy ált. helyzetű egyenes és az egyikükre illeszkedő pont.
5. Öt általános helyzetű egyenes.

A bizonyítás hasonló, mint az öt pontra illeszkedő kúpszeletről szóló tételben.

Menelaosz-tétel

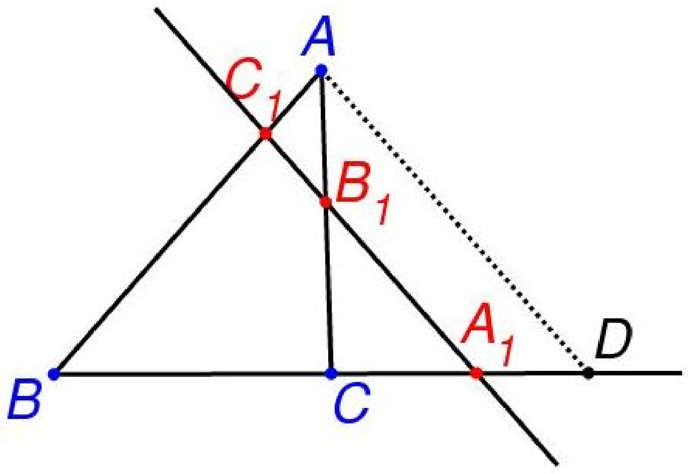
Lemma: Menelaosz-tétel

Tekintsük az $ABC\triangle$-t és az oldalegyeneseknek a csúcsoktól különböző A_1, B_1, C_1 pontjait. Ezek akkor és csak akkor kollineárisak, ha az előjeles távolságokra teljesül

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = -1. \tag{3}$$

Biz. Tfh. $A_1, B_1, C_1 \in e$, legyen $D \in BC$ úgy, hogy $AD \parallel e$. A párhuzamos szelők tétele miatt:

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{|DA_1|}{|A_1B|}, \quad \frac{|AB_1|}{|B_1C|} = \frac{|DA_1|}{|A_1C|} \Rightarrow (3).$$



Másik irány a szokásos módon.

Szelő szakaszok tétele

Lemma: Szelő szakaszok tétele

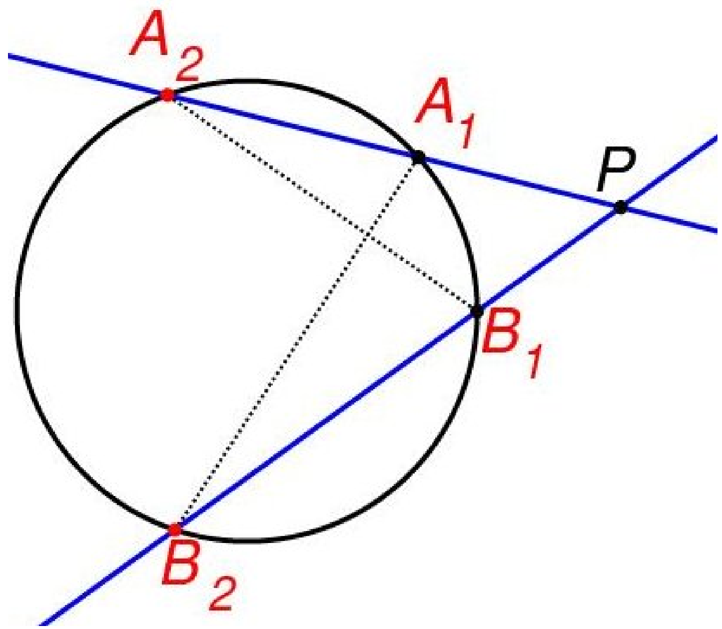
Legyen k kör, $P \notin k$, e, f egyenesek P-n át. Jelölje A_1, A_2 illetve B_1, B_2 az e, f egyenesek k-val vett metszéspontjait. Ekkor teljesül

$$|PA_1||PA_2| = |PB_1||PB_2|.$$

Biz. A kerületi szögek tétele miatt $B_1A_1B_2\sphericalangle = B_1A_2B_2\sphericalangle$, tehát $PA_1B_2\triangle \sim PB_1A_2\triangle$. A megfelelő oldalak arányaira:

$$\frac{|PA_1|}{|PB_2|} = \frac{|PB_1|}{|PA_2|},$$

amiből adódik a kívánt eredmény.

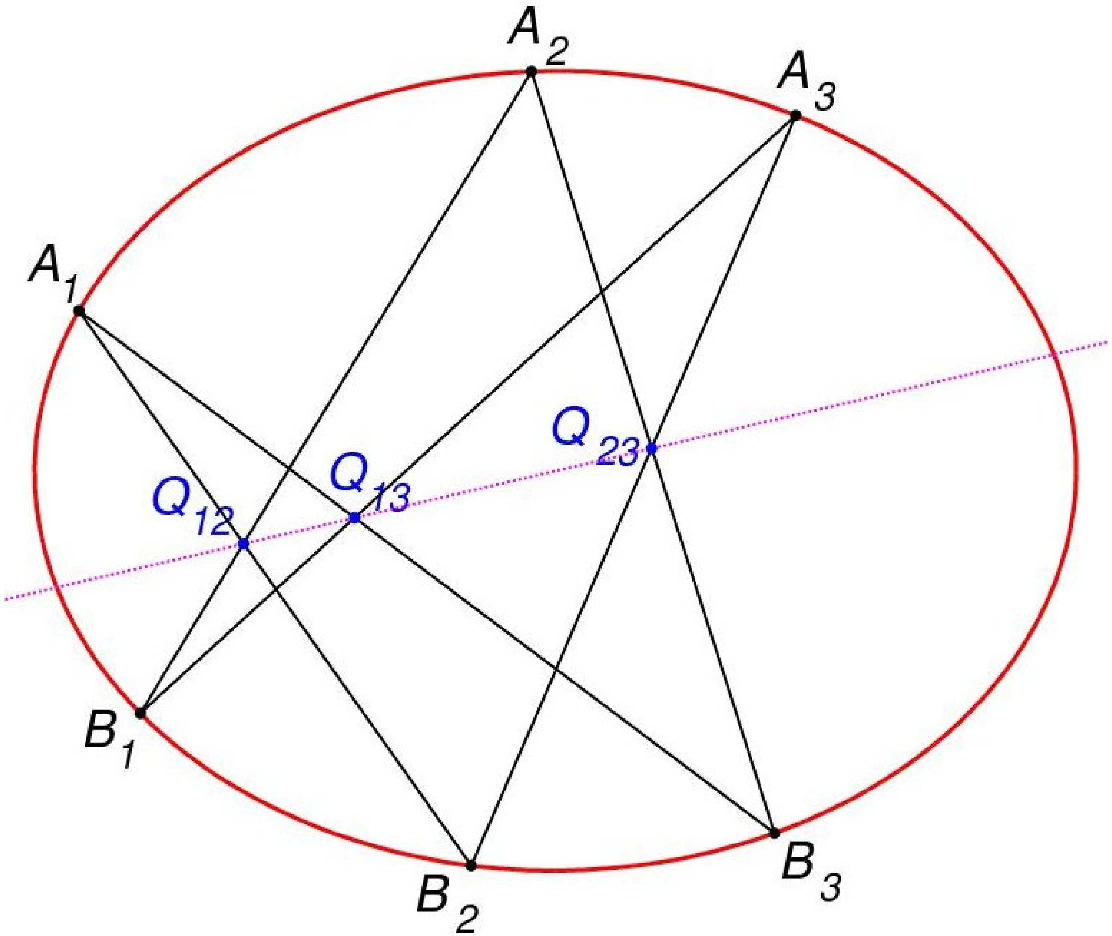


Pascal-tétel

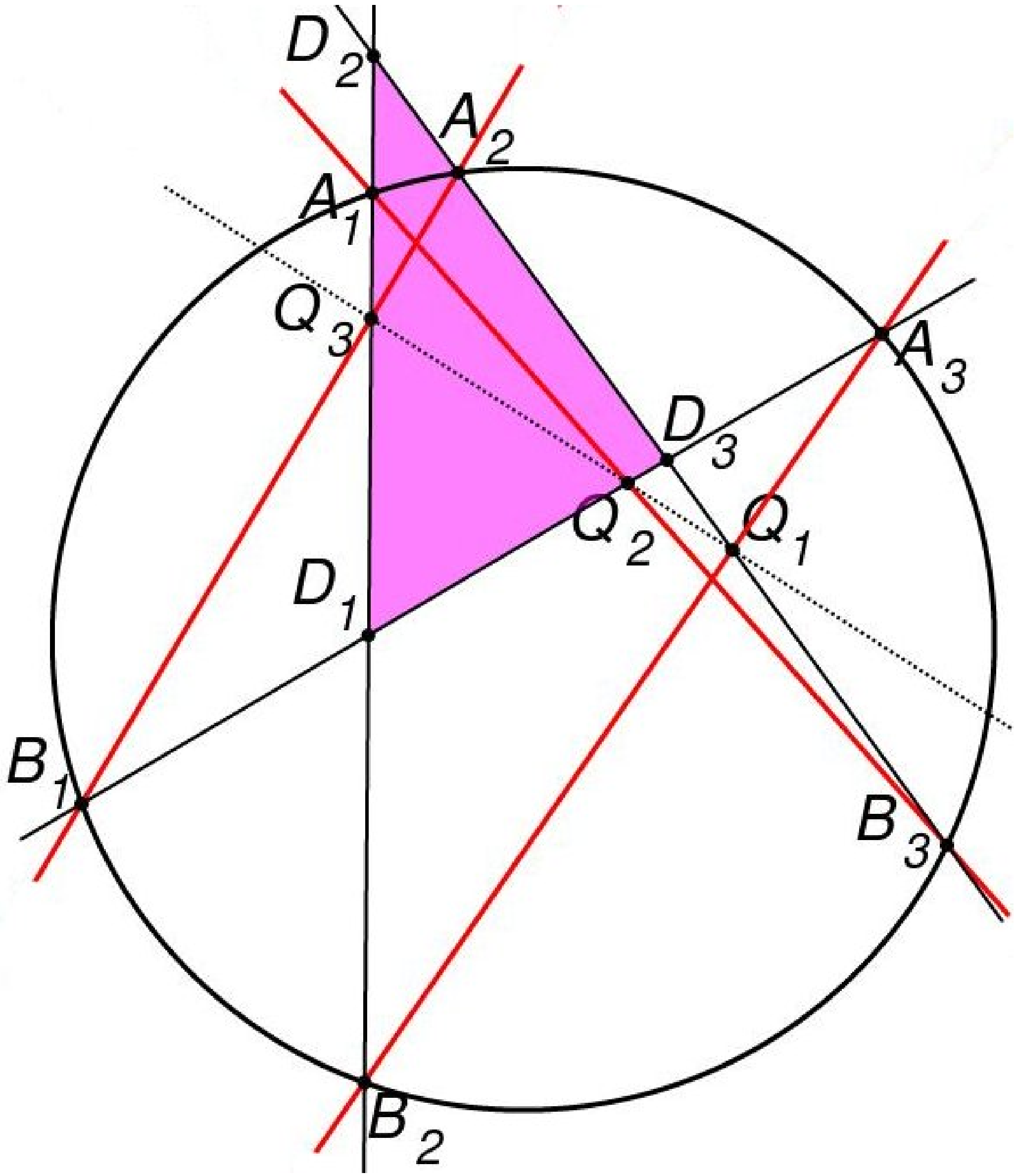
Tétel: Pascal-tétel

Tekintsük a kúpszelet A_1, A_2, A_3 és B_1, B_2, B_3 pontjait. Ekkor a
$Q_1 = A_2B_3 \cap A_3B_2$,
$Q_2 = A_1B_3 \cap A_3B_1$,
$Q_3 = A_1B_2 \cap A_2B_1$
pontok kollineárisak.

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy Γ kör és a pontok közönségesek.



Pascal-tétel (folyt.)



Háromszor Menelaosz-tétel a $D_1D_2D_3\triangle$-re:

$A_1Q_2B_3 \Rightarrow$

$$\frac{|D_1A_1|}{|A_1D_2|}\cdot\frac{|D_2B_3|}{|B_3D_3|}\cdot\frac{|D_3Q_2|}{|Q_2D_1|}=-1$$

$A_2Q_3B_1 \Rightarrow$

$$\frac{|D_1Q_3|}{|Q_3D_2|}\cdot\frac{|D_2A_2|}{|A_2D_3|}\cdot\frac{|D_3B_1|}{|B_1D_1|}=-1$$

$A_3Q_1B_2 \Rightarrow$

$$\frac{|D_1B_2|}{|B_2D_2|}\cdot\frac{|D_2Q_1|}{|Q_1D_3|}\cdot\frac{|D_3A_3|}{|A_3D_1|}=-1$$

Pascal-tétel (folyt.)

A három egyenlőséget összeszorozva és átrendezve:

$$-1 = \frac{|D_3Q_2|}{|Q_2D_1|}\frac{|D_1Q_3|}{|Q_3D_2|}\frac{|D_2Q_1|}{|Q_1D_3|}\cdot \left(\frac{|D_1A_1||D_1B_2|}{|D_1A_3||D_1B_1|}\right)\left(\frac{|D_2A_2||D_2B_3|}{|D_2A_1||D_2B_2|}\right)\left(\frac{|D_3A_3||D_3B_1|}{|D_3A_2||D_3B_3|}\right)$$

A zárójeles tényezők a szelő szakaszok tétele miatt mind 1-ek. Tehát

$$\frac{|D_3Q_2|}{|Q_2D_1|}\frac{|D_1Q_3|}{|Q_3D_2|}\frac{|D_2Q_1|}{|Q_1D_3|} = -1,$$

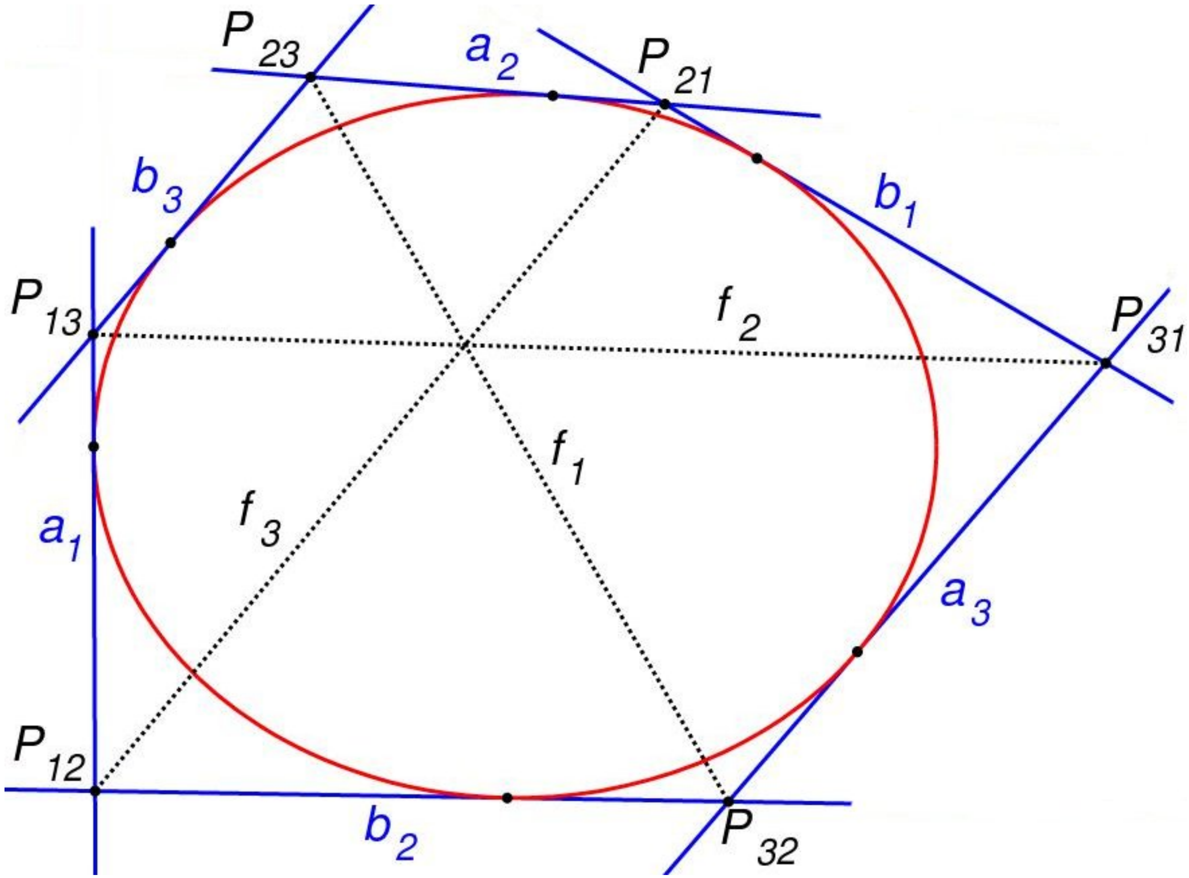
azaz a Menelaosz-tétel ismételt alkalmazásával látjuk, hogy a Q_1, Q_2, Q_3 pontok kollineárisak.

Brianchon-tétel

A Pascal-tétel duálisa:

Tétel: Brianchon-tétel

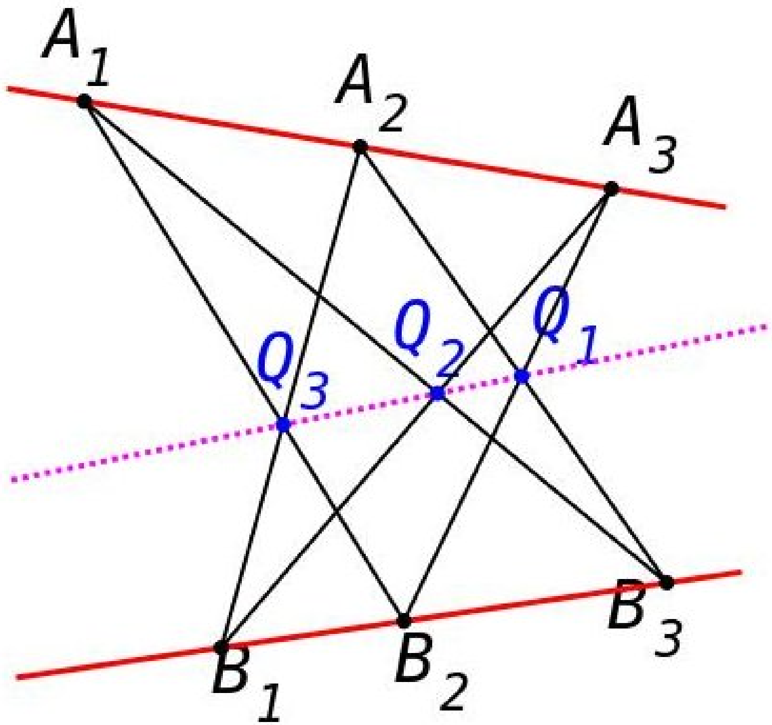
Tekintsük a kúpszelet a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 érintőit. Ekkor az $f_1 = P_{23}P_{32}$, $f_2 = P_{13}P_{31}$ és $f_3 = P_{12}P_{21}$ egyenesek egy ponton mennek át.



Papposz-tétel

Tétel: Papposz-tétel

Tekintsük az e,f egyenesek $A_1, A_2, A_3 \in e$, $B_1, B_2, B_3 \in f$ pontjait. Ekkor a
$Q_1 = A_2B_3 \cap A_3B_2$,
$Q_2 = A_1B_3 \cap A_3B_1$,
$Q_3 = A_1B_2 \cap A_2B_1$ pontok kollineárisak.

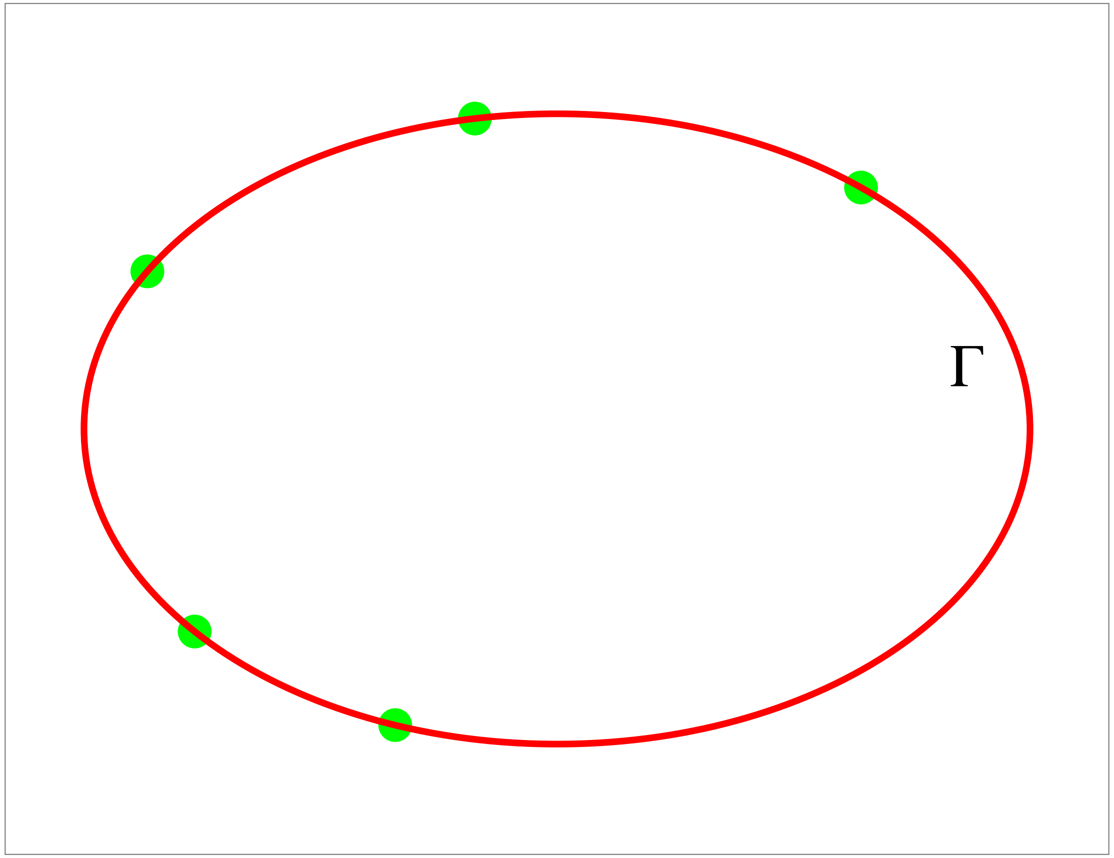


Szemléletes bizonyítás: Tekintsük a $\Gamma = e \cup f : \boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x} = 0$ kúpszeletet, $\det(A) = 0$. Módosítsuk "kicsit" A-t, ekkor Γ nem-elfajuló lesz, Pascal-tétel miatt Q_1, Q_2, Q_3 kollineáris. Ez csak úgy lehetséges, ha eredetileg is kollineárisak voltak.

Kúpszelet általános pontjának szerkesztése

Kúpszelet általános pontjának szerkesztése

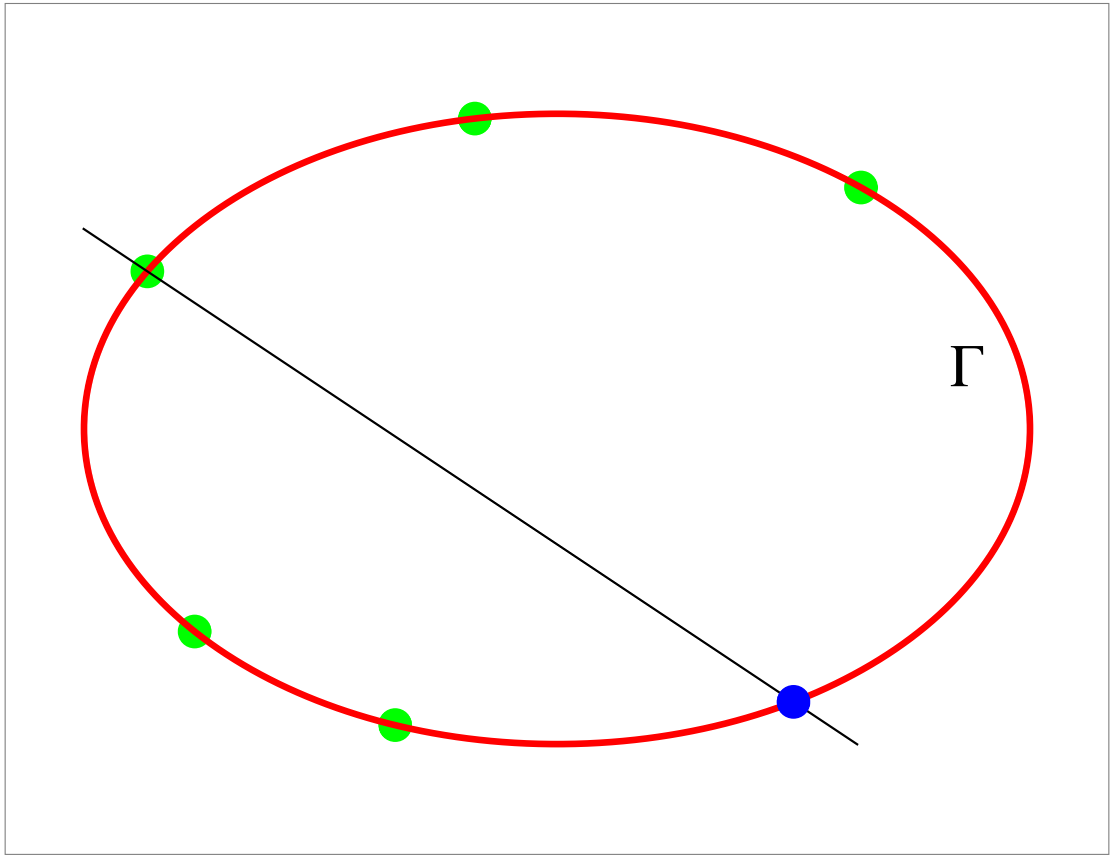
A kúpszelet általános pontja a Pascal-tétel segítségével csak vonalzóval megszerkeszthető.



Kúpszelet általános pontjának szerkesztése

Kúpszelet általános pontjának szerkesztése

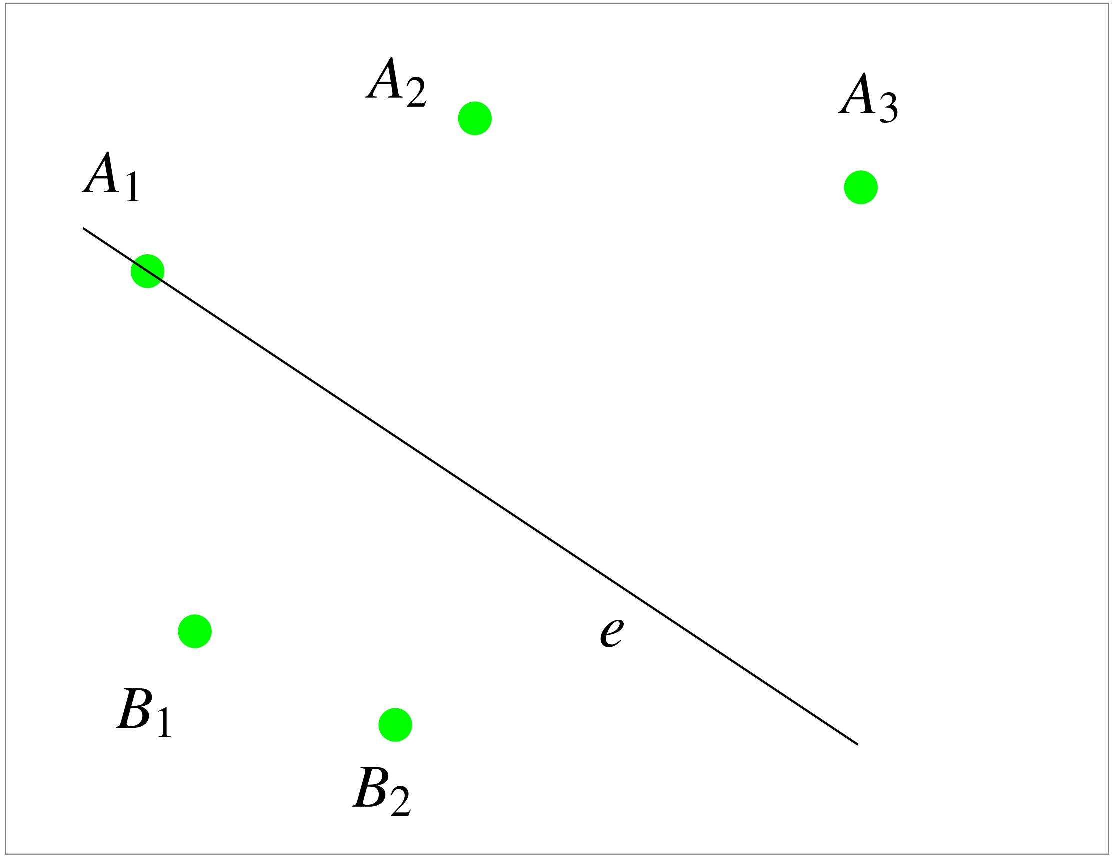
A kúpszelet általános pontja a Pascal-tétel segítségével csak vonalzóval megszerkeszthető.



Kúpszelet általános pontjának szerkesztése

Kúpszelet általános pontjának szerkesztése

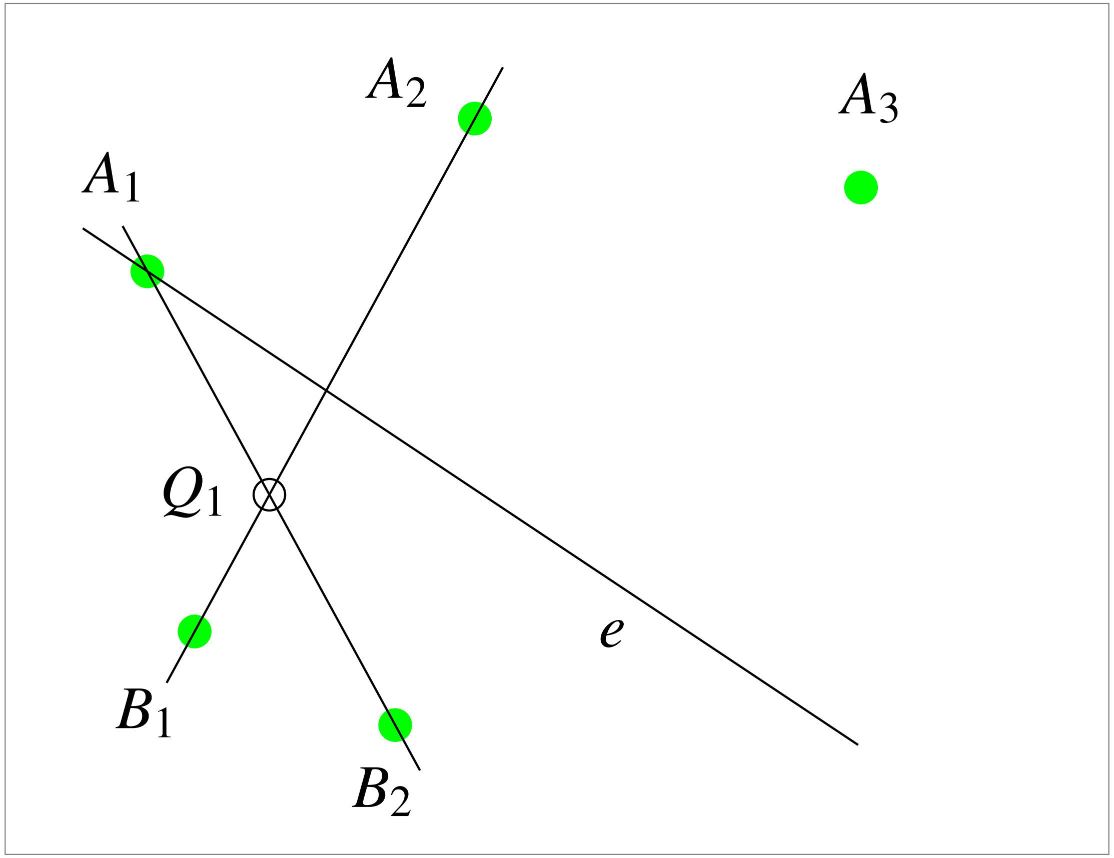
A kúpszelet általános pontja a Pascal-tétel segítségével csak vonalzóval megszerkeszthető.



Kúpszelet általános pontjának szerkesztése

Kúpszelet általános pontjának szerkesztése

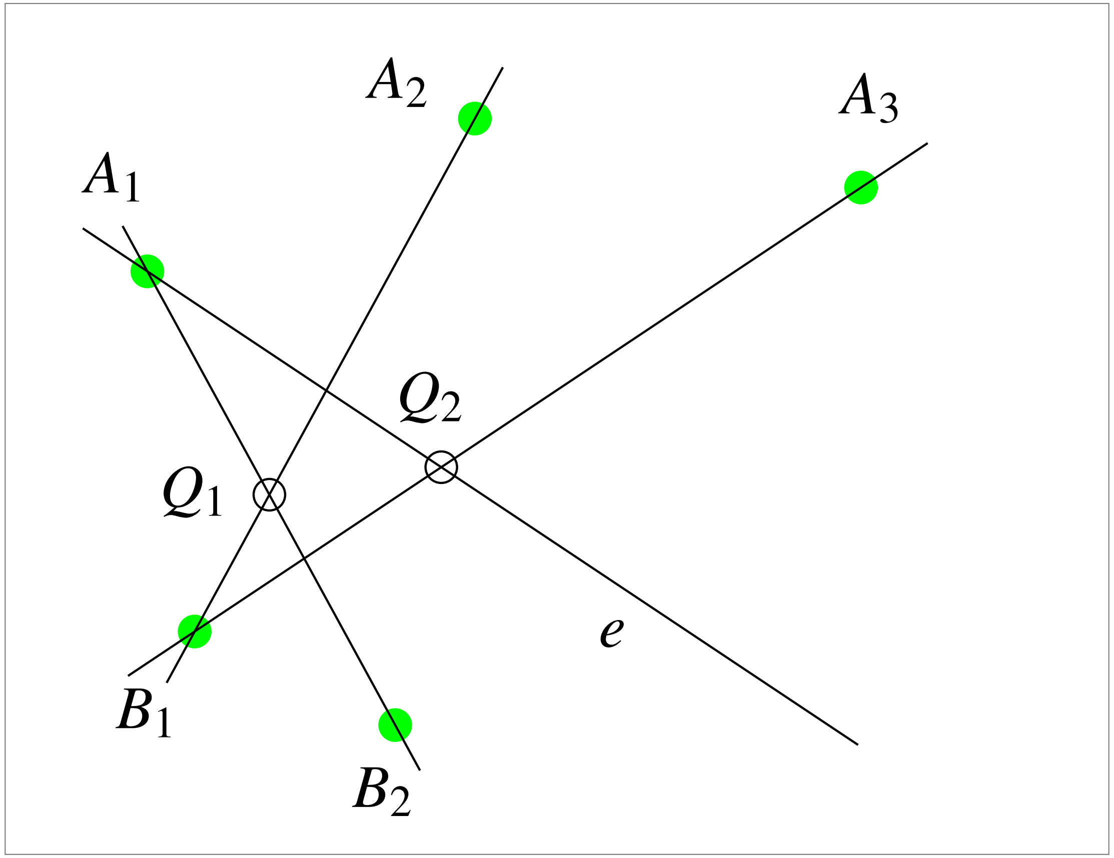
A kúpszelet általános pontja a Pascal-tétel segítségével csak vonalzóval megszerkeszthető.



Kúpszelet általános pontjának szerkesztése

Kúpszelet általános pontjának szerkesztése

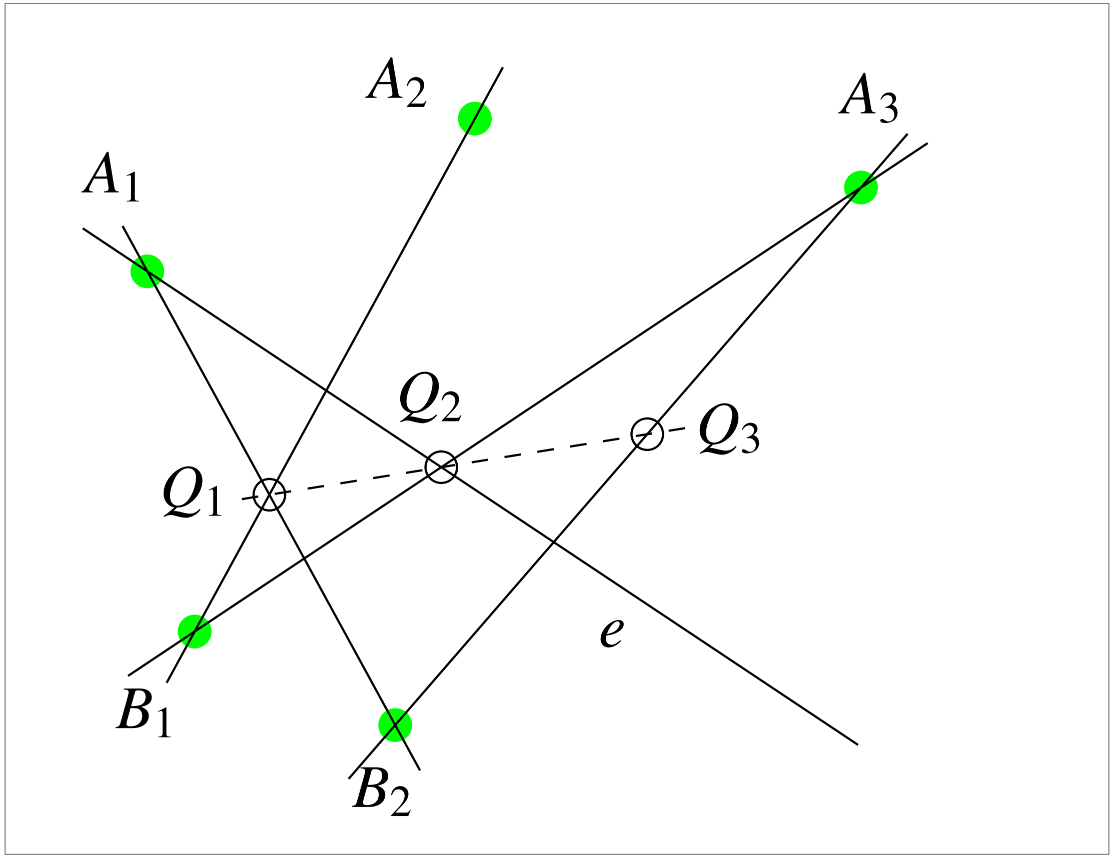
A kúpszelet általános pontja a Pascal-tétel segítségével csak vonalzóval megszerkeszthető.



Kúpszelet általános pontjának szerkesztése

Kúpszelet általános pontjának szerkesztése

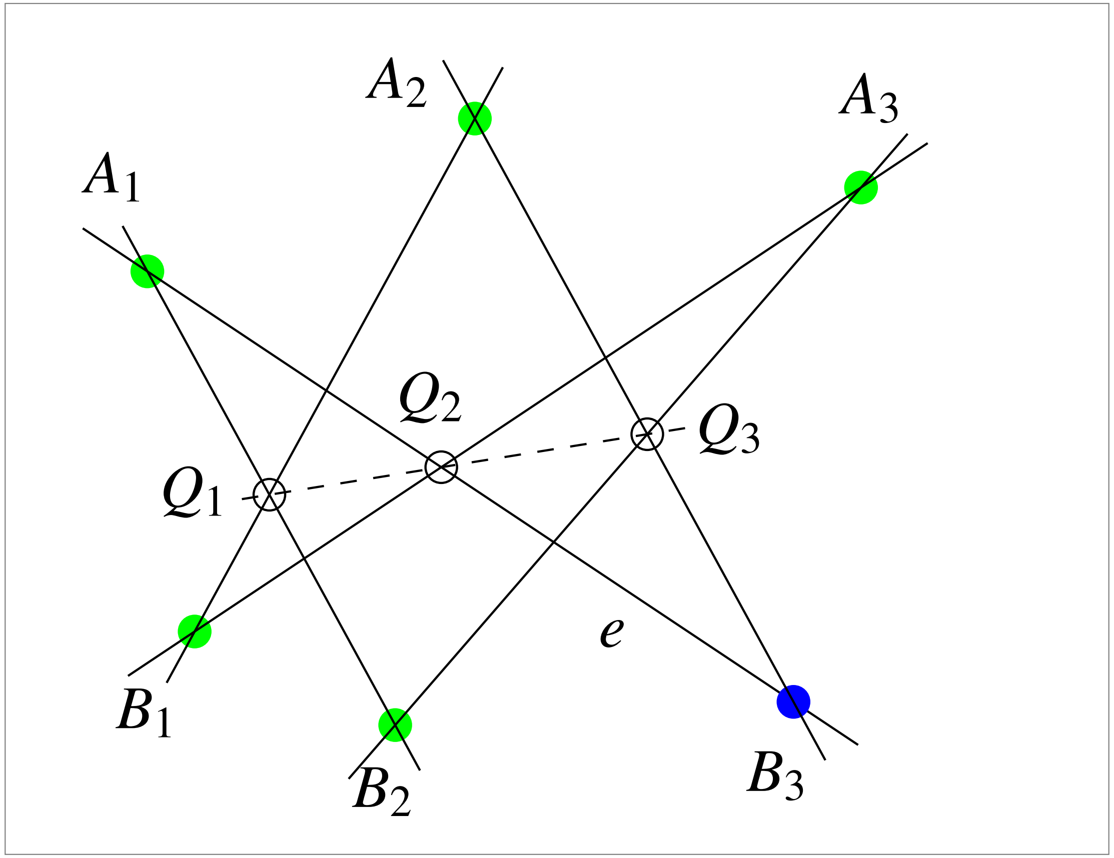
A kúpszelet általános pontja a Pascal-tétel segítségével csak vonalzóval megszerkeszthető.



Kúpszelet általános pontjának szerkesztése

Kúpszelet általános pontjának szerkesztése

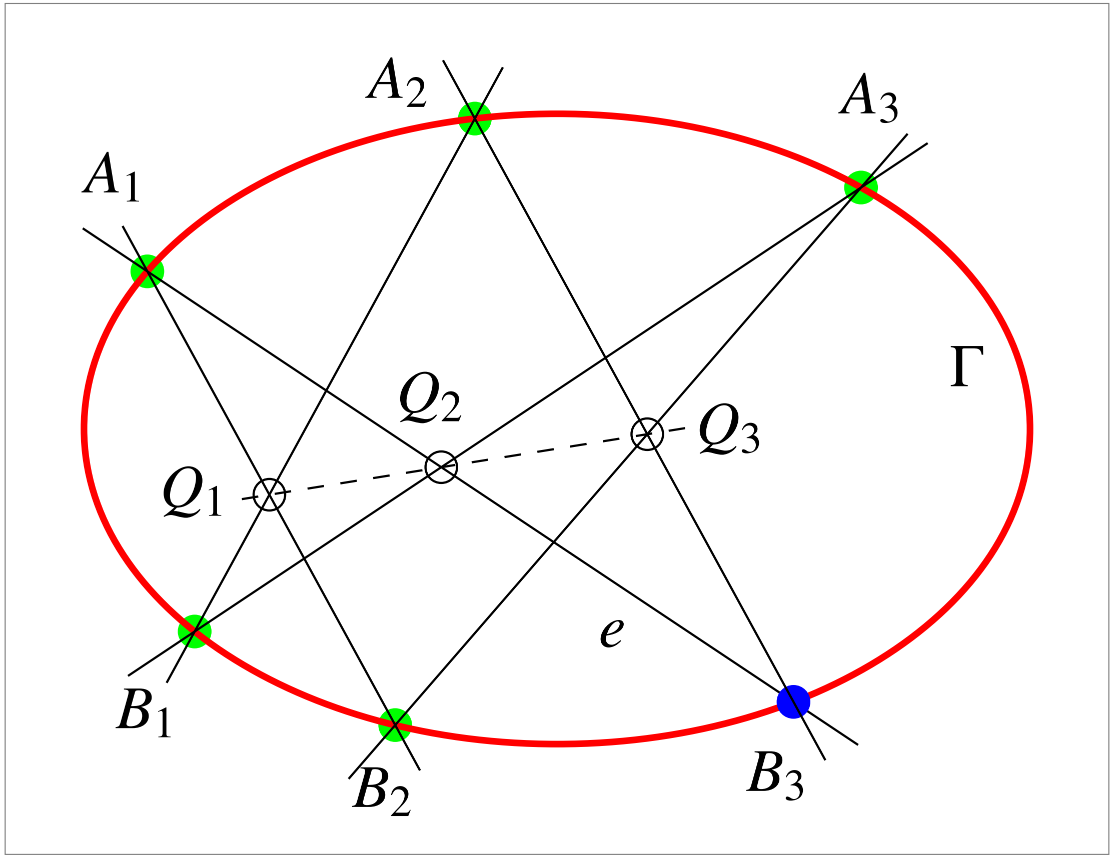
A kúpszelet általános pontja a Pascal-tétel segítségével csak vonalzóval megszerkeszthető.



Kúpszelet általános pontjának szerkesztése

Kúpszelet általános pontjának szerkesztése

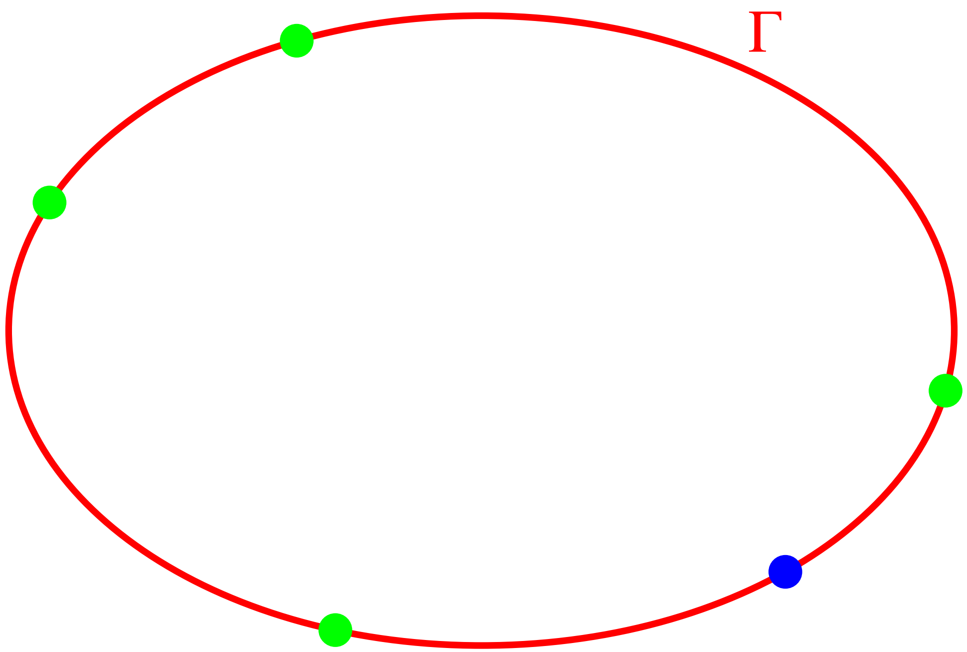
A kúpszelet általános pontja a Pascal-tétel segítségével csak vonalzóval megszerkeszthető.



Kúpszelet érintőjének szerkesztése

Kúpszelet érintőjének szerkesztése

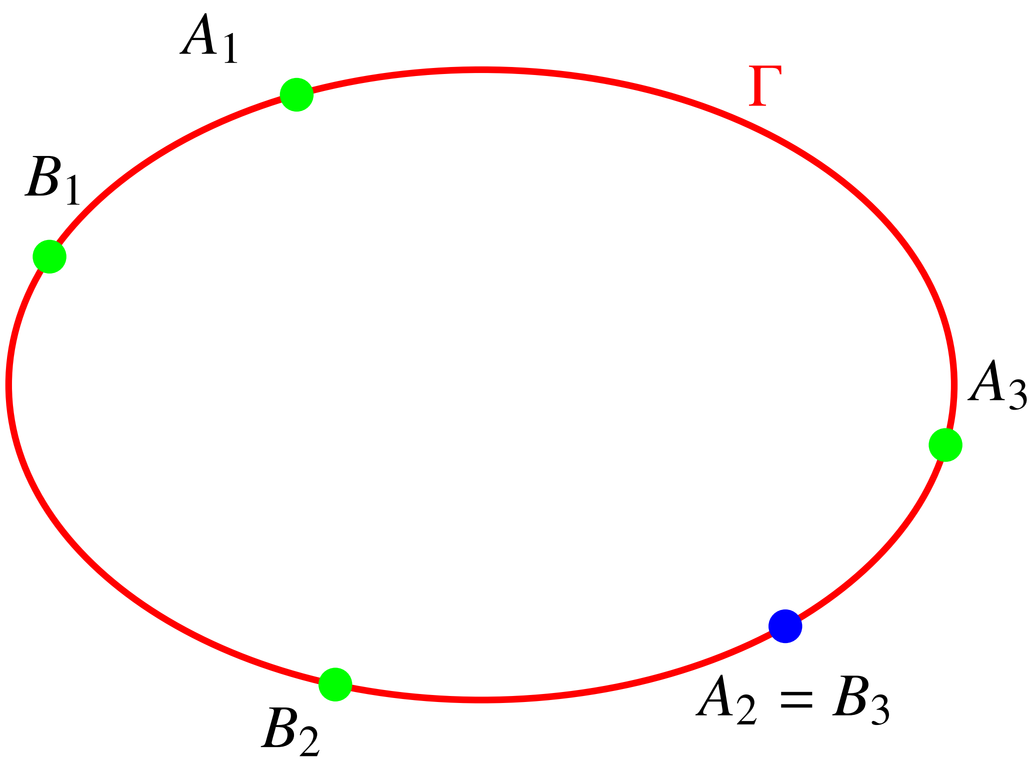
A kúpszelet érintője a Pascal-tétel segítségével csak vonalzóval megszerkeszthető.



Kúpszelet érintőjének szerkesztése

Kúpszelet érintőjének szerkesztése

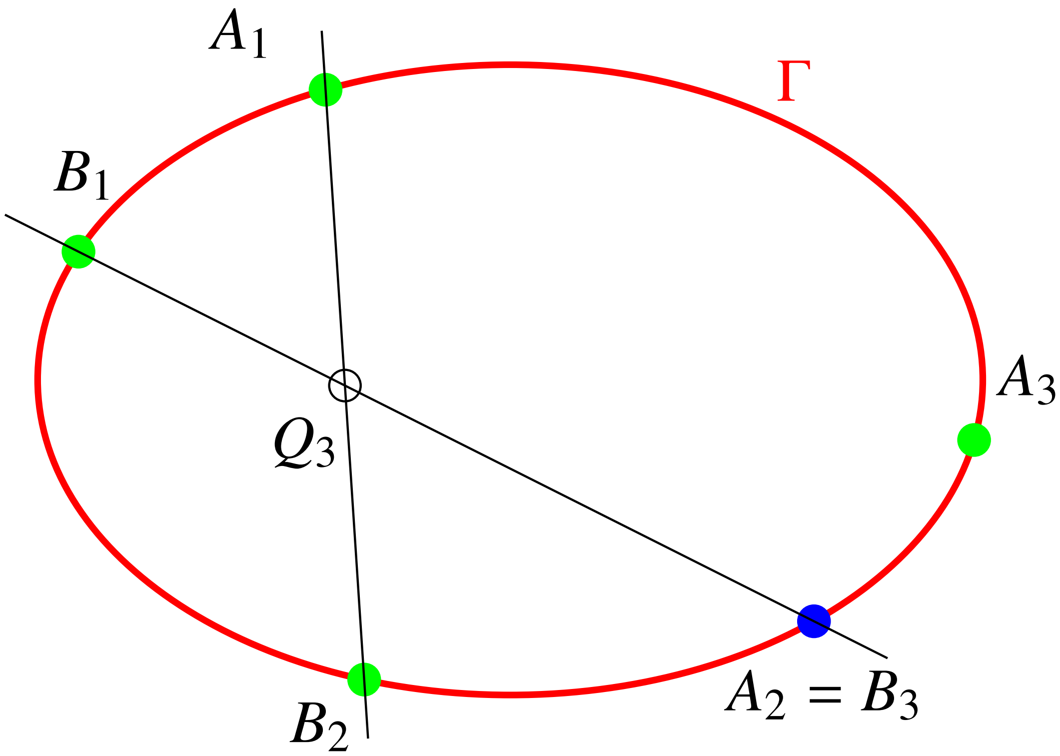
A kúpszelet érintője a Pascal-tétel segítségével csak vonalzóval megszerkeszthető.



Kúpszelet érintőjének szerkesztése

Kúpszelet érintőjének szerkesztése

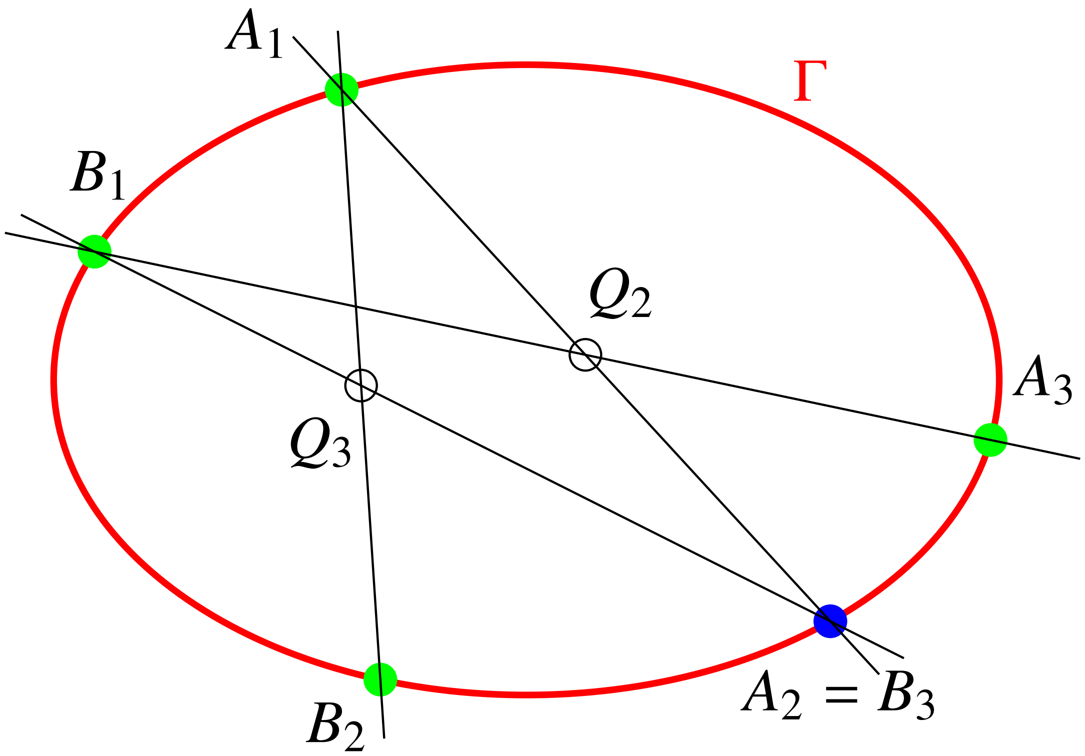
A kúpszelet érintője a Pascal-tétel segítségével csak vonalzóval megszerkeszthető.



Kúpszelet érintőjének szerkesztése

Kúpszelet érintőjének szerkesztése

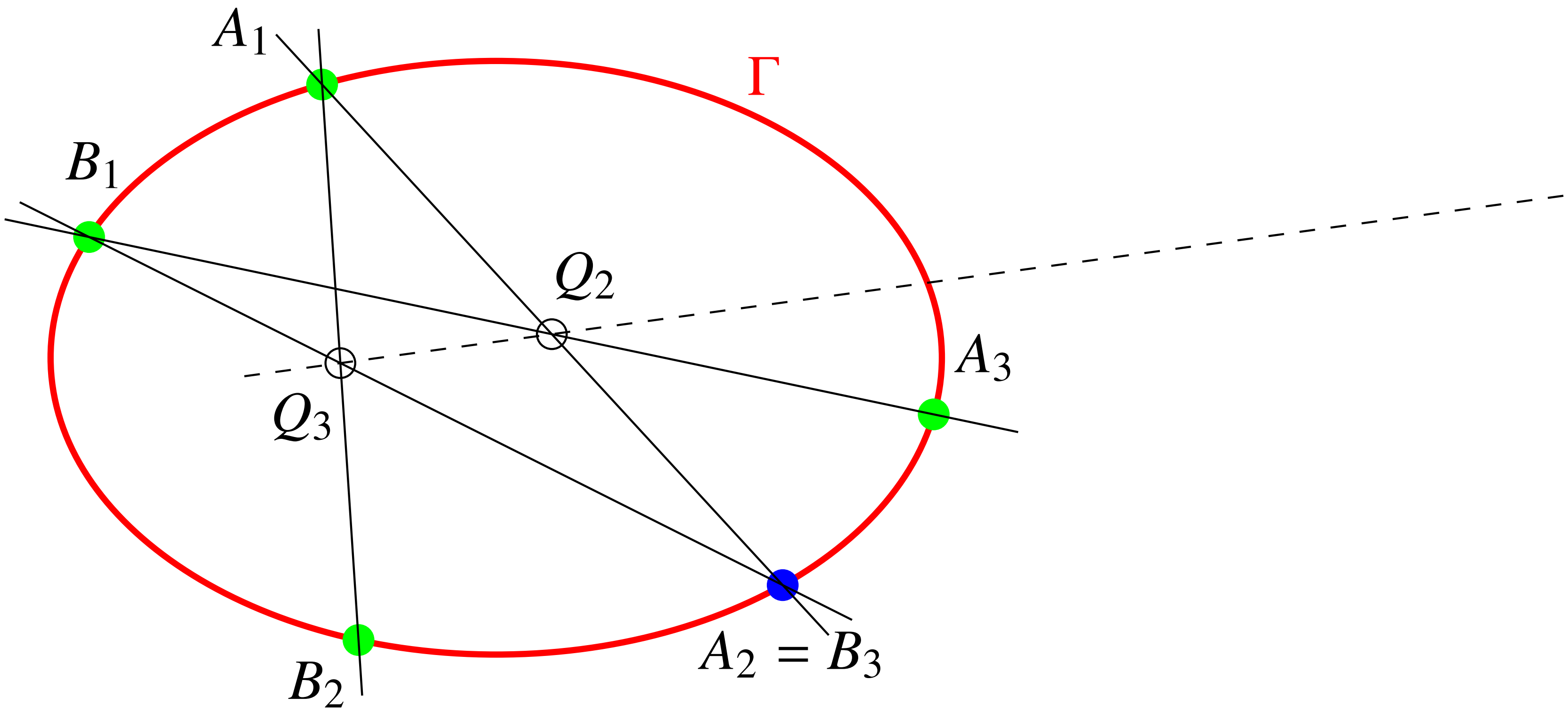
A kúpszelet érintője a Pascal-tétel segítségével csak vonalzóval megszerkeszthető.



Kúpszelet érintőjének szerkesztése

Kúpszelet érintőjének szerkesztése

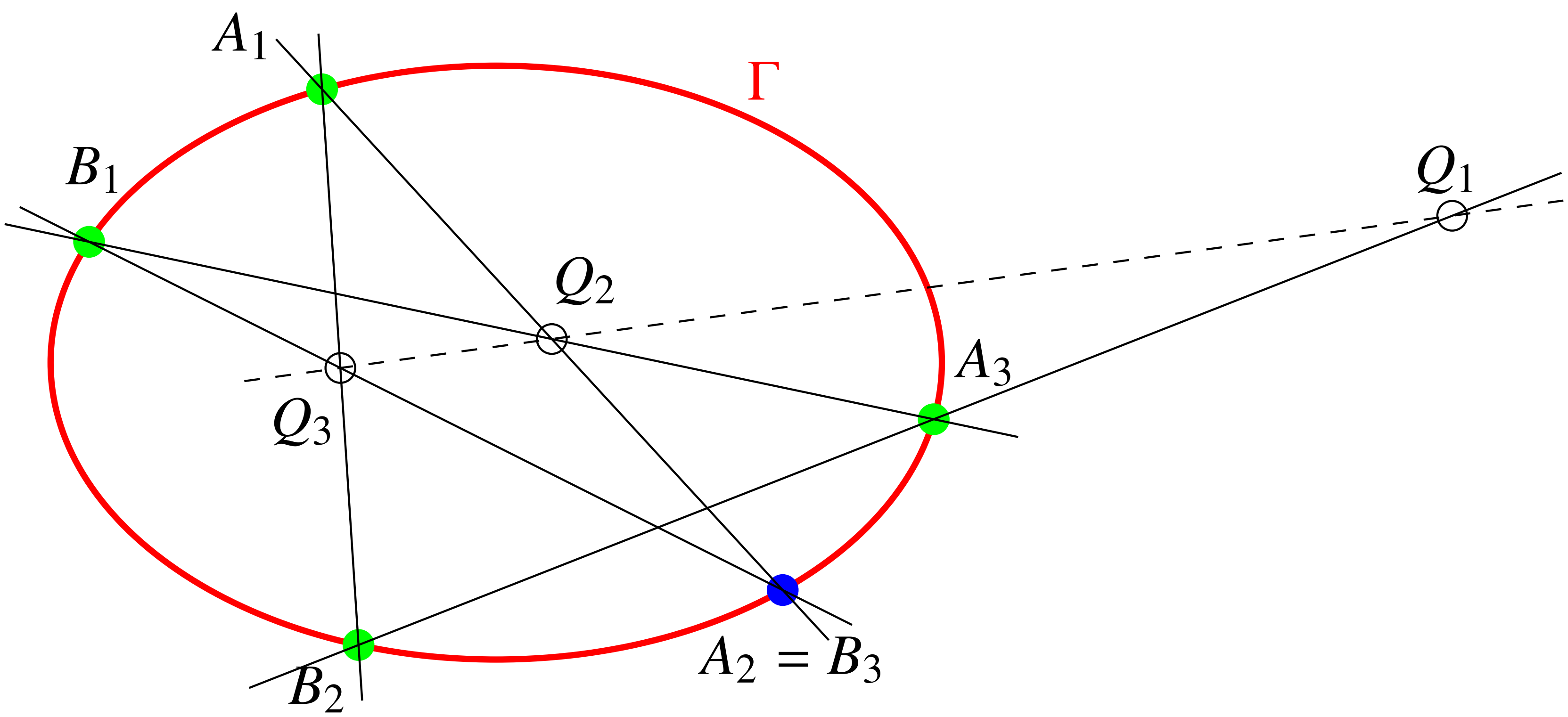
A kúpszelet érintője a Pascal-tétel segítségével csak vonalzóval megszerkeszthető.



Kúpszelet érintőjének szerkesztése

Kúpszelet érintőjének szerkesztése

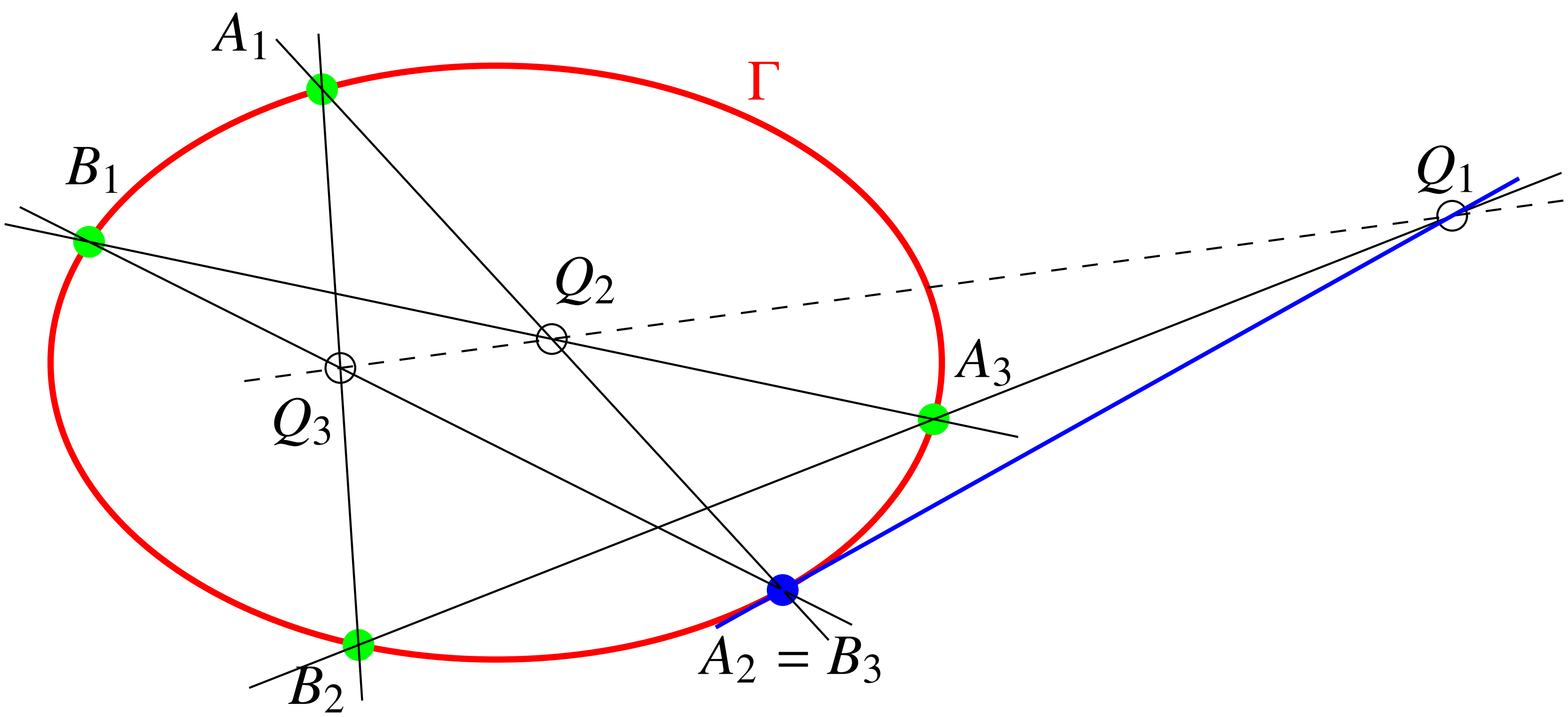
A kúpszelet érintője a Pascal-tétel segítségével csak vonalzóval megszerkeszthető.



Kúpszelet érintőjének szerkesztése

Kúpszelet érintőjének szerkesztése

A kúpszelet érintője a Pascal-tétel segítségével csak vonalzóval megszerkeszthető.



Az előadásban hivatkozott matematikusok

- Euklidesz, görög matematikus, Kr.e. 325–265
- Alexandriai Menelaosz, görög metamatikus és csillagász, Kr.u. 70–140
- Alexandriai Papposz, görög metamatikus, Kr.u. 290–350
- Gérard Desargues, francia mérnök és matematikus, 1591–1661
- Blaise Pascal, francia matematikus, fizikus és teológus, 1623–1662
- Gabriel Cramer, svájci matematikus, 1704–1752
- Charles Julien Brianchon, francia vegyész és matematikus, 1783–1864