Geometria jegyzetvázlatok

levelező tagozatos
kiegészítő matematika tanár szakos hallgatóknak

Nagy Gábor Péter

2006. szeptember 1.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Projektív geometria

1.1. Projektív pontok és egyenesek illeszkedése

1.1.1. A közönséges sík végtelen távoli elemei

Jelölje $\mathcal{P}$ és $\mathcal{E}$ a közönséges sík pontjainak és egyeneseinek halmazát. Az egyeneseket azonosítjuk a rájuk illeszkedő pontok halmazával. Két egyenest **párhuzamosnak** mondunk, ha egybeesnek vagy nincs közös pontjuk. Tudjuk, hogy $\mathcal{E}$-n a párhuzamosság ekvivalenciareláció, az ekvivalenciaosztályokat *párhuzamossági osztályoknak* nevezzük; jelölje $\mathcal{O}$ a párhuzamossági osztályok halmazát.

1.1.1. Definíció. *A $P_1, \cdots, P_n$ pontokat* ***kollineárisaknak*** *mondjuk, ha közös egyenesre illeszkednek. Egy síkbeli ponthalmaz* ***általános helyzetű****, ha semmelyik három pontja nem kollineáris. Hasonlóan, egyenesek egy halmaza általános helyzetű, ha semmelyik három eleme nem megy át közös ponton.*

Ismert, hogy a közönséges sík kielégíti a következő illeszkedési tulajdonságokat:

(A1) Két különböző pontra pontosan egy egyenes illeszkedik.
(A2) Két különböző egyenesnek legfeljebb egy közös pontja van.
(A3) Adott P ponthoz és e egyeneshez pontosan egy f egyenes létezik, mely illeszkedik P-re és párhuzamos e-vel.
(A4) Létezik három általános helyzetű pont.

Definiáljuk az alábbi halmazokat: $\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \cup \mathcal{O}$ és $\mathcal{E}^* = \mathcal{E} \cup \{\mathcal{O}\}$. Ezeken a halmazokon értelmezzük az $| \subset \mathcal{P}^* \times \mathcal{E}^*$ **illeszkedési relációt** az alábbi módon:

$$\forall P \in \mathcal{P}, \forall e \in \mathcal{E} : P \mid e \Leftrightarrow P \in e,$$
$$\forall o \in \mathcal{O}, \forall e \in \mathcal{E} : o \mid e \Leftrightarrow e \in o,$$
$$\forall P \in \mathcal{P} : P \nmid \mathcal{O},$$
$$\forall o \in \mathcal{O} : o \mid \mathcal{O}.$$

1.1.2. Definíció. *A $\mathcal{P}^*$ illetve $\mathcal{E}^*$ elemeit* ***projektív pontoknak,*** *illetve* ***projektív egyeneseknek*** *nevezzük. A projektív pontok és egyenesek összesége a* ***projektív sík.***

Az $\mathcal{O}$ elemeit ***végtelen távoli pontoknak,*** *$\mathcal{O}$-t pedig* ***végtelen távoli egyenesnek****, a többit* ***közönséges pontnak*** *és* ***egyenesnek*** *hívjuk. Azt mondjuk, hogy a $P \in \mathcal{P}^*$ projektív pont* ***illeszkedik*** *az $e \in \mathcal{E}^*$ projektív egyenesre, ha $P \mid e$.*

A geometriában szokásos módon a projektív egyeneseket is azonosítjuk a rájuk illeszkedő projektív pontok halmazával.

1.1.3. Tétel. *A projektív sík teljesíti az alábbi illeszkedési tulajdonságokat:*

(P1) Két különböző pontra pontosan egy egyenes illeszkedik.

(P2) Két különböző egyenesnek pontosan egy közös pontja van.

(P3) Létezik négy általános helyzetű pont.

Bizonyítás. (P1) Két közönséges pontot egy közönséges egyenes, két végtelen távoli pontot pedig a végtelen távoli egyenes köt össze. Ha P közönséges, Q pedig egy végtelen távoli pont, akkor őket az a közönséges egyenes köti össze, amely átmegy P-n és a Q párhuzamossági osztályba tartozik.

(P2) Két metsző közönséges egyenes közönséges pontban metszi egymást. Két párhuzamos közönséges egyenes ugyanazt a végtelen távoli pontot (azaz párhuzamossági osztályt) tartalmazza, tehát ezek egy végtelen távoli pontban metszik egymást. Végül az e közönséges egyenes és az ℓ^∞ végtelen távoli egyenes közös pontja az e-re illeszkedő végtelen távoli pont, azaz e párhuzamossági osztálya. □

A projektív sík legfontosabb tulajdonsága, hogy a középpontos vetítés „szépen viselkedik."

1.1.4. Állítás. *Tekintsük az e, f egyeneseket és a P pontot úgy, hogy P ne illeszkedjék sem e-re, sem f-re. Definiáljuk az $\pi_{e,f,P} : e \to f$* ***vetítést:*** *a $Q \in e$ pontra legyen $\pi_{e,f,P}(Q) = f \cap PQ$. Ekkor $\pi_{e,f,P}$ bijekciót határoz meg e és f ponthalmazai között.* □

1.1.2. Homogén koordinátázás

A projektív sík számos geometriai jelenséget leegyszerűsít, a vele való munkát megkönnyítendő koordinátarendszert vezetünk be rajta. Mint szokásos, koordinátarendszer alatt azt értjük, ami a geometriai fogalmakat (pont, egyenes, illeszkedés) átfordítja a számok nyelvére.

Tekintsük a $V = \mathbb{R}^n$ vektorteret és vezessük be az alábbi $\sim$ relációt: $(x_1, \ldots, x_n) \sim (y_1, \ldots, y_n)$ akkor és csak akkor, ha valamely $\lambda \neq 0$ skalárra

$$(y_1, \ldots, y_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Ez nyilván ekvivalenciareláció.

1.1.5. Definíció. *Az* $\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0}$ *halmaz* $\sim$ *szerinti ekvivalenciaosztályait* ***homogén szám n-eseknek*** *nevezzük.*

Normális ember nem szeret ekvivalenciaosztályokban gondolkodni. A homogén szám n-esekre gondolhatunk egyszerű vektorként, azzal a kiegészítéssel, hogy nem engedjük meg a nullvektort, és két vektort nem tekintünk különbözőnek, ha csak skalár szorzóban különböznek. A jelölésben nem fogunk különbséget tenni homogén szám n-esek és vektorok között, azaz (x_1, x_2, x_3) egyszerre jelöli $\mathbb{R}^3$-beli vektort és az által meghatározott homogén számhármast, azaz a $\sim$ reláció szerinti ekvivalencia osztályát.

A továbbiakban az esetek legnagyobb részében homogén számhármasokra, és ritkábban homogén számpárokra lesz szükségünk.

Tekintsük az $a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 = 0$ alakú 3-változós homogén lineáris egyenletet. Ha ennek az (x_1, x_2, x_3) számhármas megoldása, akkor minden $0 \neq \lambda$ szám esetén $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ is megoldása, azaz értelmes azt mondani, hogy az (x_1, x_2, x_3) **homogén számhármas megoldása** a fenti homogén lineáris egyenletnek.

Rögzítsünk a közönséges síkon egy **ferdeszögű koordinátarendszert.** Ekkor a pontokat valós (x, y) számpárok, az egyeneseket pedig $aX + bY + c = 0$ két ismeretlenes, elsőfokú egyenletek írják le, ahol $(a, b) \neq (0, 0)$. Az illeszkedést a behelyettesítés határozza meg, azaz a $P(x, y)$ pont akkor és csak akkor illeszkedik az $e : aX + bY + c = 0$ egyenesre, ha koordinátái kielégítik annak egyenletét: $ax + by + c = 0$. Az egyenes egyenlete skalár szorzó erejéig van meghatározva, azaz $aX + bY + c = 0$ és $a'X + b'Y + c' = 0$ akkor és csak akkor írja le ugyanazt az egyenest, ha $(a', b', c') = \lambda(a, b, c)$ valamely $\lambda \neq 0$ skalárra. Két egyenes $e : aX + bY + c = 0$ és $e' : a'X + b'Y + c' = 0$ akkor és csak akkor párhuzamos, ha (a, b) és (a', b') **normálvektoraik** egymás skalárszorosai.

A projektív sík homogén koordinátarendszerét úgy vezetjük be, hogy pontokat homogén számhármasok, egyeneseket pedig három ismeretlenes elsőfokú homogén egyenletek fognak leírni. A $P(x, y)$ közönséges pont homogén kordinátája a $(x, y, 1)$ vektor által meghatározott homogén számhármas, míg az $aX + bY + c = 0$ egyenes végtelen távoli pontjának homogén koordinátái $(-b, a, 0)$. Az $aX + bY + c = 0$ közönséges egyenes homogén egyenlete $aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0$, a végtelen távoli egyenes egyenlete $X_3 = 0$.

1.1.6. Állítás. *Az imént ismertetett homogén koordinátázás bijekció a projektív pontok és a homogén számhármasok halmaza, valamint a projektív egyenesek és a három ismeretlenes homogén lineáris egyenletek halmazai között. A* (x_1, x_2, x_3) *homogén koordinátákkal rendelkező* P *projektív pont akkor és csak akkor illeszkedik az* $aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0$ *egyenletű homogén egyenesre, ha koordinátái kielégítik annak egyenletét:* $ax_0 + bx_2 + cx_3 = 0$.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy a koordinátázásnál megadott leképzés invertálható. Legyen (x_1, x_2, x_3) homogén számhármas. Ha $x_3 \neq 0$, akkor ez a $P(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3})$ közönséges pont homogén koordinátája. Ha $x_3 = 0$, akkor $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ és ez az $x_2X - x_1Y = 0$

egyenes végtelen távoli pontjának homogén koordinátái. Hasonlóan látható a leképezés invertálhatósága egyenletek esetén. Az illeszkedés meggondolása szintén egyszerű esetszétválasztással jön ki. □

Nagyon fontos azt meggondolni, hogy homogén koordinátákkal kifejezve mit jelent három projektív pont kollinearitása.

1.1.7. Lemma. *Legyenek $P(x_1, x_2, x_3)$, $Q(y_1, y_2, y_3)$, $R(z_1, z_2, z_3)$ különböző projektív pontok. Az alábbiak ekvivalensek:*

(i) *P, Q, R kollineárisak.*

(ii) *A három pont homogén koordinátáiból alkotott mátrix determinánsa nulla:*

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{pmatrix} = 0.$$

(iii) *$\boldsymbol{z} = \lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{y}$ valamely $\lambda, \mu \neq 0$ skalárokra.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $P(x_1, x_2, x_3)$, $Q(y_1, y_2, y_3)$, $R(z_1, z_2, z_3)$ pontok mind illeszkednek az $\ell : u_1X_1 + u_2X_2 + u_3X_3 = 0$ egyenesre. Ez pontosan azt jelenti, hogy az

$$\begin{cases} x_1U_1 + x_2U_2 + x_3U_3 = 0 \\ y_1U_1 + y_2U_2 + y_3U_3 = 0 \\ z_1U_1 + z_2U_2 + z_3U_3 = 0 \end{cases}$$

homogén lineáris egyenletrendszernek van nem-triviális megoldása, nevezetesen ℓ együtthatói: (u_1, u_2, u_3). A Cramer-szabály szerint ez egyrészt azzal ekvivalens, hogy az együtthatókból alkotott mátrix determinánsa nulla, másrészt pedig, hogy a mátrix sorai lineárisan függők: $\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y} + \gamma \boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$. Ha $\gamma = 0$, akkor $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ egymás skalárszorosai, azaz a P és Q projektív pontok megegyeznek. Hasonlóan, $\alpha, \beta \neq 0$. Átvíve $\boldsymbol{z}$-t a bal oldalra és osztva $-\gamma$-val kapjuk az (iii)-ben szereplő alakot. □

1.1.8. Következmény. *Ha $P(\boldsymbol{x})$ és $Q(\boldsymbol{y})$ különböző projektív pontok, akkor a PQ egyenes ponthalmaza*

$$\{R(\boldsymbol{z}) \mid \boldsymbol{z} = \lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{y} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}. \quad \square$$

1.1.3. A dualitási elv

Vegyük észre, hogy a projektív síkon a pontok és az egyenesek hasonlóan viselkednek. Ez látszik az illeszkedési tulajdonságaikból, valamint a homogén koordinátázásból is. Valóban, az e egyenest megadó $u_1X_1 + u_2X_2 + u_3X_3 = 0$ egyenlet együtthatói homogén számhármast alkotnak: nem lehet mind egyszerre nulla és skalár szorzóban különböző együtthatók ugyanazt az egyenest határozzák meg. Ez teszi lehetővé a következő elv alkalmazását a projektív síkon:

1.1.9. Definíció. *Két projektív síkkal kapcsolatos fogalmat, állítást vagy bizonyítást* ***duálisnak*** *nevezünk, ha az egyik a másikból megkapható a pontok és egyenesek szerepének felcserélésével. A* ***dualitási elv*** *az, hogy egy állítás duálisának a bizonyítása az állítás bizonyításának dualizálásával megkapható.*

Minden esetben ügyelni kell a következetességre a pontok és egyenesek szerepének felcserélésében. Példaként szerepeltessük az fenti állítás duálisát.

1.1.10. Állítás. *Legyenek* $e : u_1X_1 + u_2X_2 + u_3X_3 = 0$*,* $f : v_1X_1 + v_2X_2 + v_3X_3 = 0$*,* $g : w_1X_1 + w_2X_2 + w_3X_3 = 0$ *különböző projektív egyenesek. Az alábbiak ekvivalensek:*

(i) e, f, g *közös pontra illeszkednek.*

(ii) A három egyenes egyenletének együtthatóiból alkotott mátrix determinánsa nulla:

$$\det \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \\ v_0 & v_1 & v_2 \\ w_0 & w_1 & w_2 \end{pmatrix} = 0.$$

(iii) $\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{v} + \mu\boldsymbol{w}$ *valamely* $\lambda, \mu \neq 0$ *skalárokra.* □

1.1.4. Desargues-tétel

1.1.11. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* $A_1A_2A_3$ *és* $B_1B_2B_3$ *háromszögek* ***pontra nézve perspektívek,*** *ha az* A_1B_1*,* A_2B_2*,* A_3B_3 *egyenesek közös ponton mennek át. Duálisan, a két háromszög* ***egyenesre nézve perspektív,*** *ha az* $A_1A_2 \cap B_1B_2$*,* $A_1A_3 \cap B_1B_3$*,* $A_2A_3 \cap B_2B_3$ *pontok kollineárisak.*

1.1.12. Tétel (Desargues-tétel). *A projektív síkon két háromszög akkor és csak akkor perspektív pontra nézve, ha egyenesre nézve is az.*

Bizonyítás. Jelöljük a szóbanforgó pontok homogén koordinátáit a megfelelő vektorral: $P(\boldsymbol{p})$, $A_1(\boldsymbol{a}_1), \ldots$. Tegyük fel, hogy a két háromszög pontra nézve perspektív, azaz a P, A_i, B_i pontok kollineárisak, $i = 1, 2, 3$. Ha $A_i = B_i$ valamely i-re, akkor a tétel állítása triviálisan teljesül. Ha $A_i \neq B_i$, akkor $\boldsymbol{p} = \alpha_i\boldsymbol{a}_i + \beta\boldsymbol{b}_i$ valamely $\alpha_i, \beta_i \neq 0$ skalárokra. Definiáljuk a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}_1 &= \alpha_2\boldsymbol{a}_2 - \alpha_3\boldsymbol{a}_3 = \beta_3\boldsymbol{b}_3 - \beta_2\boldsymbol{b}_2, \\ \boldsymbol{q}_2 &= \alpha_3\boldsymbol{a}_3 - \alpha_1\boldsymbol{a}_1 = \beta_1\boldsymbol{b}_1 - \beta_3\boldsymbol{b}_3, \\ \boldsymbol{q}_3 &= \alpha_1\boldsymbol{a}_1 - \alpha_2\boldsymbol{a}_2 = \beta_2\boldsymbol{b}_2 - \beta_1\boldsymbol{b}_1 \end{aligned}$$

vektorokat. Látható, hogy az általuk meghatározott Q_1, Q_2, Q_3 pontok illeszkednek az alábbi egyenesekre:

$$Q_1 \mid A_2A_3, B_2B_3, \qquad Q_2 \mid A_1A_3, B_1B_3, \qquad Q_3 \mid A_1A_2, B_1B_2,$$

azaz $Q_1 = A_2A_3 \cap B_2B_3$, $Q_2 = A_1A_3 \cap B_1B_3$, $A_1A_2 \cap B_1B_2$. Másrészt

$$\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2 + \boldsymbol{q}_3 = \alpha_2\boldsymbol{a}_2 - \alpha_3\boldsymbol{a}_3 + \alpha_3\boldsymbol{a}_3 - \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_1\boldsymbol{a}_1 - \alpha_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0},$$

ami azt jelenti, hogy a $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3$ vektorok lineárisan függők. Tehát Q_1, Q_2, Q_3 kollineárisak. □

1.2. Projektív lineáris transzformációk

Jelölje $\mathcal{P}$ és $\mathcal{E}$ a projektív sík pont- illetve egyeneshalmazát. A pontokat homogén koordinátás alakban adjuk meg, pl. $P(\boldsymbol{x})$, ahol

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

oszlopvektor. Az egyenesek egyenlete

$$\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{X} = (u_1, u_2, u_3)\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = u_1X_1 + u_2X_2 + u_3X_3 = 0.$$

1.2.1. Kollineációk

1.2.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ leképezés* ***egyenestartó,*** *ha kollineáris pontokat kollineáris pontokba képez. A $\mathcal{P}$ önmagára vett egyenestartó bijekcióit* ***kollineációknak*** *nevezzük.*

1.2.2. Állítás. *A projektív sík kollineációi csoportot alkotnak.* □

Az egyenestartó bijekciók egyenest egyenesbe képeznek, tehát minden kollineáció létrehoz egy bijekciót $\mathcal{E}$-n is. Ráadásul elmondhatjuk, hogy ez is *illeszkedéstartó,* azaz közös ponttal rendelkező egyenesek képei is rendelkeznek közös ponttal.

Legyen φ kollineáció, és vegyünk két tetszőleges P, Q pontot az e egyenesen. Ekkor e képét már a két pont képe meghatározza: $\varphi(e) = \varphi(P)\varphi(Q)$. Hasonlóan, a P ponton átmenő e, f egyenesek képei megadják P képét: $\varphi(P) = \varphi(e) \cap \varphi(f)$.

A közönséges síkon számos kollineációt ismerünk. Ilyen az összes egybevágósági transzformáció (tengelyes tükrözés, eltolás, forgatás, csúsztatva tükrözés), a középpontos nyújtás és pl. a merőleges nyújtás. Mivel ezek bijektívek a közönséges pontok halmazán, ezért párhuzamos egyeneseket párhuzamos egyenesekbe képeznek. Más szóval, megőrzik a párhuzamossági relációt, így párhuzamossági osztályok képe mindig párhuzamossági osztály. Ezzel beláttuk:

1.2.3. Állítás. *A közönséges sík egyenestartó bijekciói olyan kollineációt hoznak létre a projektív síkon, amely a végtelen távoli egyenest önmagára képezi.* □

1.2.4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy P a φ kollineáció* ***fixpontja,*** *ha $\varphi(P) = P$. Az e egyenest* ***fixegyenesnek*** *nevezzük, ha $\varphi(e) = e$, azaz ha minden $P \in e$ esetén $\varphi(P) \in e$. Az e egyenes* ***pontonként fix,*** *ha minden pontja φ fixpontja.*

Ha az e egyenesre illeszkedik két fixpont, akkor e fixegyenes. Ha a P pontra illeszkedik két fixegyenes, akkor P fixpont. A későbbiekben kulcsfontosságú lesz a következő lemma.

1.2.5. Lemma. *Ha a φ kollineáció fixen hegyja a homogén koordinátarendszer $E_0(1,1,1)$, $E_1(1,0,0)$, $E_2(0,1,0)$, $E_3(0,0,1)$ alappontjait, akkor φ az identitás.*

Bizonyítás. Ebben az esetben az E_iE_j egyenesek fixegyenesek. Fixpontok továbbá

$$\begin{aligned} E_{12}(1,1,0) &= E_0E_3 \cap E_1E_2, \\ E_{13}(1,0,1) &= E_0E_2 \cap E_1E_3, \\ E_{23}(0,1,1) &= E_0E_1 \cap E_2E_3, \end{aligned}$$

valamint

$$(1,-1,0) = E_{13}E_{23} \cap E_1E_2.$$

A $P(x,0,1)$ pont képe $(x',0,z')$ alakú, ahol $z' \neq 0$, azaz $z' = 1$ feltehető. Vezessük be az $f(x) = x'$ jelölést. Mivel $(0,0,1)$ és $(1,0,1)$ fixpontok, így $f(0) = 0$ és $f(1) = 1$.

Legyen $Q'(0,x',1)$ a $Q(0,x,1)$ pont képe. Mivel a

$$P(x,0,1), \qquad Q(0,x,1), \qquad R(1,-1,0)$$

pontok kollineárisak, ezért a

$$P'(f(x),0,1), \qquad Q'(0,x',1), \qquad R'(1,-1,0)$$

képeik is azok, vagyis $x' = f(x)$. Tekintsük most a $P(x,y,1)$ közönséges pontot és ennek a $P'(x',y',1)$ képét. Mivel a P, $(x,0,1)$ és $(0,1,0)$ kollineárisak, ezért a képeik is: P', $(f(x),0,1)$, $(0,1,0)$. Ez azt jelenti, hogy $x' = f(x)$ és hasonlóan $y' = f(y)$, tehát a P általános közönséges pontra

$$P(x,y,1) \mapsto P'(f(x),f(y),1).$$

Megmutatjuk, hogy f **additív és multiplikatív.** Vizsgáljuk először az

$$P(x,y,1), \qquad Q(x+y,0,1), \qquad (1,-1,0)$$

kollineáris ponthármast és ezen pontok

$$P(f(x),f(y),1), \qquad Q(f(x+y),0,1), \qquad (1,-1,0)$$

képeit. A pontok kollinearitása miatt a megfelelő determináns

$$0 = \det \begin{pmatrix} f(x) & f(y) & 1 \\ f(x+y) & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = f(x) + f(y) - f(x+y),$$

azaz f additív. Végezetük, tekintsük a

$$P(1, y, 1), \qquad Q(x, xy, 1), \qquad R(0, 0, 1)$$

kollineáris pontokat és

$$P(1, f(y), 1), \qquad Q(f(x), f(xy), 1), \qquad R(0, 0, 1)$$

képeiket. Ismét a determinánst használva kapjuk, hogy

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1 & f(y) & 1 \\ f(x) & f(xy) & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = f(xy) - f(x)f(y),$$

vagyis f multiplikatív. Jól ismert tény (ld. a Függelékben az A.1.2 tételt), hogy a valós számokon értelmezett additív és multiplikatív függvény vagy azonosan nulla vagy az identitás; $f(1) = 1$ miatt tehát csak $f(x) = x$ állhat fenn. Ez azt jelenti, hogy φ az összes közönséges pontot fixen hagyja. Ekkor azonban minden egyenesre legalább két fixpont illeszkedik, azaz minden egyenes fixegyenes és így minden pont fixpont. $\square$

1.2.2. Projektív lineáris transzformációk

1.2.6. Definíció. *Legyen $A = (a_{ij})$ olyan 3×3-as mátrix, melynek determinánsa $\det(A) \neq 0$. Jelölje φ_A a projektív sík ponthalmazának $P(\boldsymbol{x}) \mapsto P'(\boldsymbol{x}')$, $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ leképezését. Ekkor φ_A-t az A mátrix által megadott* ***projektív lineáris leképezésnek*** *nevezzük.*

Világos, hogy φ_A projektív értelmeben is jól meghatározott. Valóban, a P-t megadó $\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{x}$ vektor esetén $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} = \lambda A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}'$, azaz $\boldsymbol{y}'$ ugyanazt a P' projektív pontot jelenti, mint $\boldsymbol{x}'$. Az is lényeges, hogy $\det(A) \neq 0$ miatt $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ esetén $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, azaz minden pontnak jól definiált a képe.

1.2.7. Állítás. *Legyen A, B két 3×3-as mátrix, melyekre $\det(A), \det(B) \neq 0$.*

(i) $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$ *és* $\varphi_A^{-1} = \varphi_{A^{-1}}$.

(ii) *A projektív lineáris leképezések csoportot alkotnak.*

(iii) $\varphi_A = \varphi_B$ *akkor és csak akkor, ha $A = \lambda B$ valamely $\lambda \neq 0$ skalárra.*

Bizonyítás. (i) következik a definícióból és abból, hogy az I egységmátrixra $\varphi_I = \mathrm{id}$. (ii) az előző pont folyománya. (iii)-hez először megmutatjuk, hogy $\varphi_A = \mathrm{id}$ akkor és csak akkor, ha $A = \lambda I$. Az „akkor” rész triviális, tegyük fel, hogy $\varphi_A = \mathrm{id}$. Ekkor minden $P(\boldsymbol{x})$ projektív pontra $P' = P$, azaz $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} = \lambda_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}$ valamely $\lambda_{\boldsymbol{x}}$ skalárra. Ekkor egyrészt

$$A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \lambda_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}),$$

másrészt

$$A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = \lambda_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} + \lambda_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{y},$$

azaz

$$(\lambda_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}} - \lambda_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{x} + (\lambda_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}} - \lambda_{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$$

minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ esetén. Ebből következik, hogy lineárisan független $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$-ra

$$\lambda_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}} = \lambda_{\boldsymbol{x}} = \lambda_{\boldsymbol{y}}.$$

Ha pedig $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ lineáris függő, azaz a két vektor egymás skalár szorosa, akkor $\boldsymbol{y} = c\boldsymbol{x}$ és

$$\lambda_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{y} = cA\boldsymbol{x} = c\lambda_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} = \lambda_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y}.$$

Tehát minden esetben $\lambda_{\boldsymbol{x}} = \lambda_{\boldsymbol{y}}$, vagyis $\lambda_{\boldsymbol{x}} = \lambda$ skalár független $\boldsymbol{x}$-től.

Tegyük most fel, hogy $\varphi_A = \varphi_B$. Ekkor $\varphi_A^{-1} \circ \varphi_B = \varphi_{A^{-1}B} = \mathrm{id}$, így $A^{-1}B = \lambda I$ és $B = \lambda A$. Ezt akartuk belátni. □

1.2.8. Állítás. *A projektív lineáris leképezések a projektív sík kollineációi.*

Bizonyítás. Az előző állításból következik, hogy φ_A invertálható, tehát bijektív. Legyenek $P(\boldsymbol{x})$, $Q(\boldsymbol{y})$, $R(\boldsymbol{z})$ különböző kollineáris pontok és $P'(\boldsymbol{x}')$, $Q'(\boldsymbol{y}')$, $R'(\boldsymbol{z}')$ ezek képei a φ_A projektív lineáris transzformáció mellett. Mivel P, Q, R kollineárisok, $\boldsymbol{z} = \lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}$ valamely λ, μ skalárokra. Ekkor

$$\boldsymbol{z}' = A\boldsymbol{z} = A(\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}) = \lambda A\boldsymbol{x} + \mu A\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{x}' + \mu\boldsymbol{y}',$$

ami azt jelenti, hogy P', Q', R' is kollineáris. □

Nem nehéz megmutatni, hogy az $e : \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{X} = 0$ egyenes φ_A melletti képe $e' : (\boldsymbol{u}')^t\boldsymbol{X} = 0$, ahol $\boldsymbol{u} = A^t\boldsymbol{u}'$. Csakugyan,

$$P(\boldsymbol{x}) \in e \Leftrightarrow 0 = \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{x} \Leftrightarrow 0 = (A^t\boldsymbol{u}')^t\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}')^t A\boldsymbol{x} \Leftrightarrow 0 = (\boldsymbol{u}')^t\boldsymbol{x}' \Leftrightarrow P'(\boldsymbol{x}') \in e'.$$

Vegyük észre, hogy az $m : a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 = 0$ egyenes φ_A melletti képe pontosan az $\ell^\infty : X_3 = 0$ végtelen távoli egyenes. Csakugyan, egy pont koordinátái akkor és csakis akkor elégítik ki m egyenletét, ha a pont képének utolsó koordinátája nulla, azaz ha a pont képe illeszkedik ℓ^∞-re. Ez egyrészt azt jelenti, hogy bármely projektív egyeneshez létezik olyan projektív lineáris transzformáció, amely őt a végtelen távoli egyenesbe viszi. Másrészt azt látjuk, hogy φ_A akkor és csak akkor hagyja fixen a végtelen távoli egyenest, ha $a_{31} = a_{32} = 0$. Ekkor $a_{33} \neq 0$, hiszen $\det(A) \neq 0$, és A megfelelő skalárszorosára áttérve elérhetjük, hogy $a_{33} = 1$ legyen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ha φ_A fixen hagyja ℓ^∞-t, akkor a közönséges pontokat közönséges pontokba viszi:

$$\varphi_A : \; P(x, y, 1) \mapsto P'(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, a_{21}x + a_{22}y + a_{23}, 1).$$

Láthatóan ez pontosan az

$$P(x, y) \mapsto P'(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, a_{21}x + a_{22}y + a_{23})$$

affin transzformáció hatása a közönséges síkon.

1.2.3. A projektív geometria alaptétele

1.2.9. Definíció. *Az $E_0(1:1:1)$, $E_1(1:0:0)$, $E_2(0:1:0)$ és $E_3(0:0:1)$ pontokat a homogén koordinátarendszer **alappontjainak** nevezzük.*

1.2.10. Lemma. *Legyen $P_0(\boldsymbol{x}_0), P_1(\boldsymbol{x}_1), P_2(\boldsymbol{x}_2), P_3(\boldsymbol{x}_3)$ négy általános helyzetű pont a projektív síkon. Ekkor létezik pontosan egy φ_A projektív lineáris transzformáció, mely az alappontokat a megfelelő pontba viszi: $\varphi_A(E_i) = P_i$.*

Bizonyítás. A $\varphi_A(E_1) = P_1$ feltétel azt jelenti, hogy valamely $c_1 \neq 0$ skalárra

$$c_1\boldsymbol{x}_1 = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix},$$

azaz az A mátrix első oszlopa az $\boldsymbol{x}_1$ vektor skalárszorosa. Hasonlóan, $\varphi_A(E_2) = P_2$, $\varphi_A(E_3) = P_3$ miatt az A második illetve harmadik oszlopa $c_2\boldsymbol{x}_2$ illetve $c_3\boldsymbol{x}_3$ valamely $c_2, c_3 \neq 0$ skalárokra. Mivel

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + a_{13} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} \end{pmatrix} = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3$$

az A oszlopainak összege, ezért $\varphi_A(E_0) = P_0$ maga után vonja a

$$c_0\boldsymbol{x}_0 = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3$$

egyenlőséget. Mivel P_1, P_2, P_3 nem kollineáris, ezért az $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ vektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^3$-be, és így tetszőleges $c_0 \neq 0$-hoz létezik pontosan egy c_1, c_2, c_3, melyek kielégítik a fenti egyenlőséget. A c_i skalárok egyike sem lehet nulla, mert akkor a többi

x_j-k lineáris függők, azaz a megfelelő P_j-k kollineárisak lennének, ellentmondva az általános helyzetüknek. Így tehát minden $c_0 \neq 0$ választáshoz pontosan egy megfelelő A mátrixot tudtunk konstruálni. Mivel a c_0 különböző értékadásai A-t csak skalár szorzóval módosítják, kaptuk, hogy A skalár szorzó erejéig egyértelműen meg van határozva, azaz a keresett φ_A projektív lineáris leképezés egyértelmű. □

A következő tétel fontosságát az adja, hogy segítségével pontosan leírhatjuk a projektív sík struktúrájának belső szabályosságait.

1.2.11. Tétel (A projektív geometria alaptétele). *A projektív sík kollineációi pontosan a projektív lineáris leképezések.*

Bizonyítás. Legyen α tetszőleges kollineáció és jelölje rendre Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 a homogén koordinátarendszer alappontjainak α melletti képét. Az 1.2.12 tétel szerint létezik pontosan egy φ_A projektív lineáris transzformáció, melyre $\varphi_A(E_i) = Q_i$. Ekkor a $\beta = \varphi_A^{-1} \circ \alpha$ leképezés olyan kollineáció, melynek az alappontok fixpontjai:

$$\beta(E_i) = \varphi_A^{-1}(\alpha(E_i)) = \varphi_A^{-1}(Q_i) = E_i.$$

Az 1.2.5 lemma szerint $\beta = \mathrm{id}$, azaz $\alpha = \varphi_A$ projektív lineáris kollineáció. □

Az alkalmazások szempontjából az alaptétel következő átfogalmazása nagyon lényeges.

1.2.12. Tétel (A projektív lineáris transzformációk hatása). *Legyen P_0, P_1, P_2, P_3, illetve Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 a projektív sík két általános helyzetű pontnégyese. Ekkor létezik pontosan egy φ_A projektív lineáris kollineáció, melyre $\varphi_A(P_i) = Q_i$, $i = 0, 1, 2, 3$.*

Bizonyítás. Az előző lemmából tudjuk, hogy léteznek φ_B, φ_C projektív lineáris leképezések, melyek az $E_0, \ldots$ alappontokat a megfelelő $P_0, \ldots$ illetve $Q_0, \ldots$ pontokba viszik. Ekkor az $\varphi_{CB^{-1}}$ leképezésre

$$\varphi_{CB^{-1}}(P_i) = (\varphi_C \circ \varphi_B^{-1})(P_i) = \varphi_C(\varphi_B^{-1}(P_i)) = \varphi_C(E_i) = Q_i$$

teljesül. Meg kell még mutatnunk $\varphi_{CB^{-1}}$ egyértelműségét. Tegyük fel, hogy φ_D szintén kielégíti a tételben foglaltakat. Ekkor φ_C és φ_{DB} egyaránt a $Q_0, \ldots$ pontokba viszi a négy alappontot. Az előző lemma szerint ekkor $\varphi_C = \varphi_{DB}$, azaz $\varphi_D = \varphi_{CB^{-1}}$. □

Most megadjuk a fenti tételek legfontosabb következményeit. A megfogalmazásokban projektív lineáris transzformációkat említünk, de hangsúlyozzuk, hogy az alaptétel értelmében az állítások tetszőleges kollineációkra igazak.

1.2.13. Következmény. *Ha φ projektív lineáris transzformációnak van négy általános helyzetű fixpontja, akkor az az identitás.*

Bizonyítás. Az identitás nyilván ilyen, és mivel az 1.2.12 tétel szerint négy általános helyzetű pont képe egyértelműen meghatározza a projektív lineáris leképezést, a szóbanforgó transzformáció csak az identitás lehet. □

1.2.14. Következmény. *Legyen $A_1, A_2, A_3 \in e$ és $B_1, B_2, B_3 \in f$ két kollineáris pontharmas, amelyre $A_i \neq A_j$, $B_i \neq B_j$ ha $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Ekkor létezik φ projektív lineáris leképezés, amelyre $\varphi(A_i) = B_i$, $i = 1, 2, 3$.*

Bizonyítás. Vegyünk e-re illetve f-re nem illeszkedő különböző P_1, P_2, Q_1 és Q_2 pontokat úgy, hogy a P_1, P_2, A_3 illetve a Q_1, Q_2, B_3 ponthármasak kollineárisak. Ekkor az A_1, A_2, P_1, P_2 illetve a B_1, B_2, Q_1, Q_2 pontnégyesek általános helyzetűek, azaz létezik φ projektív lineáris leképezés úgy, hogy $\varphi(A_1) = B_1$, $\varphi(A_2) = B_2$, $\varphi(P_1) = Q_1$ és $\varphi(P_2) = Q_2$. A φ egyenestartása miatt

$$\varphi(A_3) = \varphi(A_1A_2 \cap P_1P_2) = B_1B_2 \cap Q_1Q_2 = B_3,$$

amivel bebizonyítottuk az állítást. □

1.2.15. Állítás. *Ha a φ_A projektív lineáris transzformációnak van három egy egyenesen fekvő fixpontja, akkor az egyenes minden pontja fixpont. Duálisan, ha három egy pontra illeszkedő egyenes fix, akkor a pontra illeszkedő összes egyenes φ_A fixegyenese.*

Bizonyítás. Legyenek az e egyenes $P(\boldsymbol{x})$, $Q(\boldsymbol{y})$, $R(\boldsymbol{z})$ pontjai a φ_A fixpontjai. Mivel $\boldsymbol{z} = \lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}$ és $\lambda, \mu \neq 0$, áttérhetünk a P illetve Q pontoknál a $\lambda\boldsymbol{x}$, $\mu\boldsymbol{y}$ homogén koordinátákra, azaz az általánosság megszorítás nélkül feltehetjük, hogy $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$. A fixpont tulajdonságból tudjuk, hogy $A\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x}$, $A\boldsymbol{y} = b\boldsymbol{y}$ és $A\boldsymbol{z} = c\boldsymbol{z}$ valamely a, b, c skalárokra. A korábban látott módszerrel megmutatható, hogy $a = b = c$, de ekkor az e tetszőleges $S(u\boldsymbol{x} + v\boldsymbol{y})$ pontjára

$$A(u\boldsymbol{x} + v\boldsymbol{y}) = uA\boldsymbol{x} + vA\boldsymbol{y} = a(u\boldsymbol{x} + v\boldsymbol{y}),$$

azaz $S' = \varphi_A(S) = S$. □

1.2.16. Állítás. *Tegyük fel, hogy a φ_A projektív lineáris transzformációnak*

(1) *négy általános helyzetű fixpontja van.*

(2) *három általános helyzetű fixpontja, és egy ezek egyikére sem illeszkedő fixegyenese van.*

(3) *egy fixpontja és három, a fixpontot nem tartalmazó általános helyzetű fixegyenese van.*

(4) *négy általános helyzetű fixpontja van.*

Ekkor $\varphi_A = \mathrm{id}$.

Bizonyítás. (1)-et már láttuk. (2): Tekintsük a fixpontok által meghatározott három egyenes metszéspontját a fixegyenessel. Ez három fixpont, azaz a fixegyenes pontonként fix, így választhatunk egy negyedik általános helyzetű fixpontot a meglévő háromhoz. Tehát $\varphi_A = \mathrm{id}$. (3) és (4) dualizálással kapható. □

A projektív lineáris leképezést felfoghatjuk **elsőfokú behelyettesítésként,** valamint a **homogén koordinátarendszer megváltoztatásaként** is. A homogén koordinátarendszer ugyanis tetszőleges általános helyzetű $F_0(\boldsymbol{f}_0), \ldots, F_3(\boldsymbol{f}_3)$ pontokból levezethető. Ekkor ugyanis

$$\boldsymbol{f}_0 = c_1\boldsymbol{f}_1 + c_2\boldsymbol{f}_2 + c_3\boldsymbol{f}_3$$

valamely egyértelműen meghatározott c_1, c_2, c_3 skalárokra. Térjünk át az F_i pontot megadó $\boldsymbol{f}_i$ vektorról $c_i\boldsymbol{f}_i$-re, ekkor

$$\boldsymbol{f}_0 = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3,$$

és az $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ vektorok skalárszorzó erejéig (pontosabban $\boldsymbol{f}_0$ választásának erejéig) egyértelműen vannak meghatározva. Az általános $P(\boldsymbol{x})$ pontra legyen

$$\boldsymbol{x} = y_1\boldsymbol{f}_1 + y_2\boldsymbol{f}_2 + y_3\boldsymbol{f}_3,$$

most szintén, az $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ számhármas skalár szorzó erejéig egyértelműen meghatározott. Azt mondjuk, hogy ez a hármas a P pont homogén koordinátája az F_0, F_1, F_2, F_3 alappontokra nézve.

Legyen φ_A az a projektív lineáris transzformáció és vizsgáljuk meg az $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y}$ hozzárendelést. Ekkor az

$$\boldsymbol{x} = A^t\boldsymbol{y}$$

összefüggést kapjuk, azaz $\boldsymbol{y} = A^{-t}\boldsymbol{x}$. (A részletek kidolgozását az érdeklődő olvasókra bízzuk.) Más szóval, az új alappontok felvétele a homogén koordinátázás szempontjából egyenértékű az A^{-t} mátrix által meghatározott projektív lineáris transzformáció alkalmazásával.

1.2.4. Kollineációk fixpontjai

Rögzítsük a φ_A projektív lineáris transzformációt. A $P(\boldsymbol{x})$ pont akkor és csak akkor fixpontja a φ_A-nak, ha $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ valamely λ skalárra, azaz ha $\boldsymbol{x}$ az A mátrix sajátvektora. A fixpontok meghatározásához tehát először meg kell határozni A sajátértékeit, ezek a $f_A(x) = \det(A - xI)$ harmadfokú polinom gyökei.

Rögzítsük A-nak λ sajátértékét és keressük meg a hozzá tartozó sajátvektorokat, azaz keressük azon $\boldsymbol{x}^t = (x_1, x_2, x_3)$ számhármasokat, melyekre $(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Részletesen kiírva az

$$\begin{aligned}
(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0\\
a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 &= 0\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 &= 0
\end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszert kapjuk, melynek mátrixa nulla determinánsú, azaz a három egyenlet nem független. A φ_A fixpontjainak homogén koordinátái pontosan az egyenletrendszer megoldásai.

Három lehetőség van:

I. eset: Mindhárom egyenlet azonosan nulla. Ekkor $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \lambda$ a többi $a_{ij} = 0$, azaz $A = \lambda I$ és $\varphi_A = \mathrm{id}$, tehát minden pont fixpont.

II. eset: A három közül az egyik nem azonosan nulla, és a másik kettő ennek skalárszorosa. Jelölje $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$ a nem-triviális egyenletet. Bármely $\boldsymbol{x}$, mely ezt kielégíti, megoldása a fenti egyenletrendszernek. Ezek a megoldások azonban a projektív sík egy e egyenesét határozzák meg. Azt kaptuk tehát, hogy az e egyenes minden pontja φ_A fixpontja, azaz e tengely.

III. eset: A három egyenlet közül kettő lineárisan független, a harmadik pedig ezek lineáris kombinációja. Ekkor skalár szorzó erejéig egyetlen nem-triviális megoldás van, azaz egyetlen $P(\boldsymbol{x})$ fixpontot kapunk.

1.2.5. Centrális-axiális kollineációk

1.2.17. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a t egyenes a φ kollineáció* ***tengelye,*** *ha t minden pontja a φ fixpontja. A P pont a φ* ***centruma,*** *ha minden P-re illeszkedő egyenes a φ fixegyenese.*

A definícióból azonnal adódik, hogy egy identitástól különböző kollineációnak legfeljebb egy centruma, illetve tengelye lehet. P_1, P_2 centrumok esetén ugyanis minden olyan Q pontra illeszkedne két fixegyenes, amely nem a P_1P_2 egyenesen fekszik: P_1Q és P_2Q. Két fixegyenes metszéspontja fixpont, azaz a P_1P_2 egyenesen kívül minden pont fixpont. Mivel ekkor minden egyenesen van legalább két fixpont, minden egyenes fixegyenes, és a kollineáció az identitás.

Duálisan megmutatható, hogy két tengellyel rendelkező kollineáció csak az identitás lehet.

1.2.18. Állítás. *Egy kollineációnak akkor és csak akkor van tengelye, ha van centruma.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy t a φ kollineáció tengelye. Ha φ-nek van t-re nem illeszkedő P fixpontja, akkor P centrum. Csakugyan, ha az e egyenes átmegy P-n, akkor e-re legalább két fixpont illeszkedik: egyrészt P, másrészt $Q = e \cap t \neq P$. Két fixpontot összekötő egyenes maga is fix.

Tegyük ezért fel, hogy φ-nek nincs t-n kívüli fixpontja. Tetszőleges $Q \notin t$ pont esetén így $Q \neq Q' = \varphi(Q)$ és $e = QQ'$ egy jól definiált egyenes. Jelölje P az $e \cap t$ pontot, erre teljesül $P = \varphi(P) \neq Q, Q'$ és $e = PQ = PQ'$. Az e egyenes képe $\varphi(e) = \varphi(P)\varphi(Q) = PQ' = e$, vagyis e fixegyenes.

Megmutatjuk, hogy P centruma φ-nek. Tekintsünk ugyanis egy tetszőleges P-re illeszkedő $f \neq t$ egyenest és vegyünk ezen egy $R \notin t$ pontot, $R' = \varphi(R)$. Az előbb látottak szerint $g = RR'$ fixegyenes. Mivel az e és g fixegyenesek metszéspontja fixpont, az csak t-nek egy pontja lehet: $e \cap g = g \cap t = e \cap t = P$. Ez azt jelenti, hogy mind f, mind pedig g tartalmazza a P és R pontokat, azaz $f = g = PR$ fixegyenes.

Az állítás megfordítása az előző rész duálisa, így a bizonyítást befejeztük. □

1.2.19. Definíció. *Azokat a projektív transzformációkat, amelyeknek van tengelye és centruma, **centrális-axiális kollineációknak** nevezzük.*

Példák a közönséges síkon: A t egyenesre vett tengelyes tükrözésnek t tengelye, a t-re merőleges egyenesek közös végtelen távoli pontja pedig centruma, hiszen ezek az egyenesek mind fixegyenesek. A C pontra vett középpontos tükrözés centruma C, tengelye pedig a végtelen távoli egyenes. Valóban, középpontos tükrözés esetén minden egyenes párhuzamos a képével, azaz a párhuzamossági osztályok fixek, ami azt jelenti, hogy a végtelen távoli pontok fixek. Ugyanez elmondható bármely C középpontú centrális nyújtásról. Végezetül, az eltolás tengelye a végtelen távoli egyenes, hiszen itt is igaz, hogy minden egyenes párhuzamos a képével. Az eltolás fixegyenesei az eltolás irányával párhuzamos egyenesek, tehát az eltolás centruma az eltolás irányába eső végtelen távoli pont.

Ezek felhasználásával mutatjuk meg, hogy sok centrális-axiális kollineáció van.

1.2.20. Állítás. *Legyen t a projektív sík tetszőleges egyenese és P, Q és Q' három tetszőleges projektív pont úgy, hogy $Q, Q' \notin t$, P, Q, Q' kollineárisok és $Q, Q' \neq P$. Ekkor pontosan egy olyan φ centrális-axiális kollineáció létezik, amelynek t tengelye, P centruma és Q képe Q'.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $t = \ell^\infty$ a végtelen távoli egyenes. Ha $P \in t$, akkor φ csak az az eltolás lehet, amely Q-t Q'-be viszi. Valóban, ennek centruma a QQ' végtelen távoli pontja, azaz P. Ha P közönséges pont, akkor egy egyértelműen meghatározott P nyújtás viszi Q-t Q'-be, hiszen P, Q és Q' kollineárisak.

Tekintsük most az általános esetet, és vegyünk egy olyan α transzformációt, amely t-t ℓ^∞-be viszi. Legyen $R = \alpha(P)$, $S = \alpha(Q)$ és $S' = \alpha(S)$. Mivel ekkor R, S, S' kollineárisak, az előzőek alapján létezik egy ψ centrális-axiális kollineáció, melynek tengelye ℓ^∞, centruma R és $S' = \psi(S)$. Könnyen leellenőrizhető, hogy ekkor a $\varphi = \alpha^{-1} \circ \psi \circ \alpha$ projektív leképezés teljesíti az állításban támasztott feltételeket. □

Az 1.2.11 alaptétel szerint minden kollineáció, így az imént említettek is, projektív lineáris transzformáció. Példaként felírjuk az (a, b) vektorral való eltolás és az origó középpontú λ arányú nyújtás mátrixát:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elemi geometria érdekesség, hogy centrális-axiális kollineációk csak vonalzóval is megszerkeszthetők.

1.2.21. Állítás. *Legyen φ centrális-axiális kollineáció t tengellyel és P centrummal és tegyük fel, hogy ismerjük a $Q \neq P$, $Q \notin t$ pont $Q' = \varphi(Q)$ képét. Ekkor bármely R pontra $R' = \varphi(R)$ vonalzóval megszerkeszthető.*

Bizonyítás. Nézzük először azt az esetet, amikor R nem illeszkedik a PQ egyenesre. Ekkor a PR egyenes fix, mivel átmegy a centrumon, ezért tartalmazza R'-t. A $T = QR \cap t$ pont és a Q, R pontok három különböző kollineáris pont, azaz R'-t tartalmazza a QT egyenes $Q'T$ képe. Ebből adódik $R' = PR \cap Q'T$.

Ha $R \in PQ$, akkor veszünk egy tetszőleges $S \notin PQ$ pontot. Ennek S' képét a fentiek szerint meg tudjuk szerkeszteni. Az R képe ekkor $R' = PQ \cap S'U$, ahol $U = SR \cap t$. □

A centrális-axiális kollineációk koordinátás alakjának meghatározásához definiáljuk leképezéseknek egy családját.

1.2.22. Lemma. *Legyenek $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ vektorok és α skalár, és legyen*

$$L_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\alpha} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \alpha(\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}.$$

Ekkor az alábbiak teljesülnek:

(i) $L_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\alpha}$ *lineáris leképezés.*

(ii) *Fennáll* $L_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},0} = \mathrm{id}$ *és* $L_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\alpha} \circ L_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\beta} = L_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\alpha+\beta+\alpha\beta(\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y})}$.

(iii) *Ha* $\alpha(\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}) \neq -1$, *akkor* $L_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\alpha}$ *invertálható és inverze* $L_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\beta}$, *ahol*

$$\beta = -\frac{\alpha}{1 + \alpha(\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y})}.$$

(iv) *Ha* $\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{x} = 0$ *valamely* $\boldsymbol{x}$*-ra, akkor* $L_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\alpha}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.

(v) *Ha* $\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x} = 0$ *valamely* $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}$*-re, akkor* $\boldsymbol{x}' = L_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\alpha}(\boldsymbol{x})$*-re teljesül* $\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}' = 0$.

Bizonyítás. Közvetlen számolással minden adódik. □

1.2.23. Állítás. *Ha $\alpha(\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}) \neq -1$, akkor az $L_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},\alpha}$ lineáris leképezés által meghatározott projektív lineáris transzformáció centrális-axiális kollineáció, melynek tengelye $t : \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{X} = 0$ és centruma $C(\boldsymbol{y})$.*

Bizonyítás. A lemmából adódik, hogy t minden pontja fix és hogy a C-n átmenő e : $\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{X} = 0$ egyenes minden $P(\boldsymbol{x})$ pontjára teljesül $P'(\boldsymbol{x}') \in e$, azaz e fixegyenes. □

1.3. Másodrendű görbék, projektív kúpszeletek

1.3.1. Görbék a közönséges és a projektív síkon

Legyen $f(x,y)$ kétváltozós, folytonosan differenciálható függvény, és jelölje a parciális deriváltakat $\partial_1 f(x,y), \partial_2 f(x,y)$.

1.3.1. Definíció. *A közöséges sík azon pontjainak halmazát, melyek koordinátáai f zéróhelyei, f* ***görbéjének*** *nevezzük:*

$$\Gamma_f = \{(x,y) \mid f(x,y) = 0\}.$$

Amennyiben f n-edfokú polinom, Γ_f-et ***n-edrendű görbének*** *mondjuk.*

Pl. az $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ függvény görbéje az origó középpontú, 1 sugarú kör, ami ezek szerint másodrendű görbe.

1.3.2. Definíció. *A Γ_f görbe P pontbeli* ***érintője*** *a P-beli szelők határhelyzete. Azaz ha $Q \neq P$ szintén a görbe egy pontja, és $Q \to P$ a görbén, akkor a P-beli érintő a PQ egyenes határhelyzete.*

Természetesen nem minden esetben van a görbének P-beli érintője, azonban ha van neki, akkor azt mondjuk, hogy a görbe **sima** P-ben. A parciális deriváltak létezése miatt a

$$h(x,y) = \frac{f(a,y) - f(x,y)}{a - x}, \qquad g(x,y) = \frac{f(x,b) - f(x,y)}{b - y}$$

függvények folytonosak, és teljesül

$$h(a,b) = \partial_1 f(a,b), \qquad g(a,b) = \partial_2 f(a,b).$$

Az egyenleteket átírva kapjuk, hogy

$$f(x,y) = f(a,y) + h(x,y)(a-x) = f(a,b) + h(x,y)(a-x) + g(a,y)(b-y).$$

Legyen most $P(a,b), Q(x,y) \in \Gamma_f$, azaz

$$f(a,b) = f(x,y) = 0 \quad \text{és} \quad h(x,y)(a-x) + g(a,y)(b-y) = 0.$$

A PQ szelő meredeksége

$$m_{PQ} = \frac{b-y}{a-x} = -\frac{h(x,y)}{g(a,y)},$$

melynek határértéke $Q \to P$ esetén a P-beli érintő meredeksége:

$$m_{PQ} = \frac{b-y}{a-x} \to m_P = -\frac{\partial_1 f(a,b)}{\partial_2 f(a,b)}.$$

Ennek akkor is van geometriai értelme, ha $\partial_1 f(a,b) \neq 0$ és $\partial_2 f(a,b) = 0$, hiszen ekkor az érintő párhuzamos az y-tengellyel. Ha azonban a két parciális derivált egyszerre nulla, akkor azt mondjuk, hogy P-hez **nem húzható egyértelmű érintő.**

1.3.3. Állítás. *Az $f(x,y) = 0$ görbe $P(a,b)$ pontjához akkor és csak akkor tudunk egyértelmű érintőt húzni, ha $(\partial_1 f(a,b), \partial_2 f(a,b)) \neq (0,0)$. Ekkor az érintő egyenlete*

$$\partial_1 f(a,b)(X-a) + \partial_2 f(a,b)(Y-b) = 0.$$

□

A görbék osztályában fontos szerepet töltenek be a polinomok segítségével leírható példányok. Az általános 2-változós n-edfokú polinom

$$f(X,Y) = a_{00} + a_{10}X + a_{01}Y + a_{20}X^2 + a_{11}XY + a_{02}Y^2 + \cdots = \sum_{i,j\geq 0}^{i+j\leq n} a_{ij}X^iY^j$$

alakú. Az $a_{ij}X^iY^j$ tagot a polinom **monómjának**, $i+j$-t pedig a monóm **totális fokának** mondjuk.

1.3.4. Definíció. *Az n-változós $f(X_1,\ldots,X_n)$ polinomot* ***m-edfokú homogén polinomnak*** *nevezzük, ha minden monómjának a totális foka m.*

1.3.5. Állítás. *Az $f(X_1,\ldots,X_n)$ polinom akkor és csak akkor m-edfokú homogén polinom, ha minden t esetén teljesül*

$$f(tX_1,\ldots,tX_n) = t^m f(X_1,\ldots,X_n).$$

m-edfokú homogén polinomokra igaz továbbá a

$$\partial_1 f(X_1,\ldots,X_n)X_1 + \cdots + \partial_n f(X_1,\ldots,X_n)X_n = mf(X_1,\ldots,X_n)$$

azonosság.

Bizonyítás. Az első kijelentés közvetlenül leellenőrizhető. A másodikhoz tekintsük az első azonosság t szerinti deriváltját, majd helyettesítsünk $t = 1$-et. □

A projektív síkon használt *homogén koordinátázás* szoros kapcsolatban áll a *homogén polinomokkal.* Csakugyan, projektív értelemben csak homogén polinomok zérushelyeiről van értelme beszélni, hiszen az (x,y,z) és a $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ számhármasok ugyanazt a P projektív pontot határozzák meg, és az $F(X,Y,Z)$ homogén polinomnak akkor és csak akkor zéróhelye (x,y,z), ha minden $\lambda \neq 0$ esetén $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ is zéróhelye neki. Ilyen értelmeben tudunk beszélni az $F(X,Y,Z)$ homogén polinom által meghatározott Γ_F projektív görbéről:

$$\Gamma_F := \{P(x,y,z) \mid F(x,y,z) = 0\}.$$

1.3.6. Állítás. *Tetszőleges n-edfokú 2-változós $f(X,Y)$ polinomhoz rendeljük hozzá az*

$$F(X,Y,Z) = Z^n f\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$$

3-változós polinomot. Ekkor F n-edfokú homogén polinom, melyre $F(X,Y,1) = f(X,Y)$ teljesül. Igaz továbbá, hogy Γ_F közönséges pontjai pontosan Γ_f elemei.

Bizonyítás. Ha $f(X,Y) = \sum a_{ij} X^i Y^j$ alakú, ahol $i + j \leq n$, akkor

$$F(X,Y,Z) = \sum a_{ij} X^i Y^j Z^{n-i-j}$$

n-edfokú homogén polinom. Az $f(X,Y) = F(X,Y,1)$ azonosság triviális. Tekintsük a $P(x,y)$ közönséges pontot. Ennek homogén koordinátái $(x,y,1)$ és

$$F(x,y,1) = 0 \iff f(x,y) = 0,$$

azaz P akkor és csak akkor illeszkedik Γ_F-ra, ha illeszkedik Γ_f-re. $\square$

1.3.7. Definíció. *Legyen $f(X,Y)$ kétváltozós polinom és az iménti módon definiáljuk a hozzá tartozó $F(X,Y,Z)$ háromváltozós homogén polinomot. A Γ_F görbét a Γ_f görbe* ***projektív lezártjának*** *nevezzük.*

Végezetül vizsgáljuk meg a projektív görbék érintőit. Ehhez először meghatározzuk $F(X,Y,Z)$ parciális deriváltjait:

$$\begin{aligned}
\partial_1 F(X,Y,Z) &= Z^{n-1} \partial_1 f\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right), \\
\partial_2 F(X,Y,Z) &= Z^{n-1} \partial_2 f\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right), \\
\partial_3 F(X,Y,Z) &= nZ^{n-1} f\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) - Z^{n-2} X \partial_1 f\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) - Z^{n-2} Y \partial_2 f\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \\
&= Z^{n-1}\left(nf\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) - \frac{X}{Z}\partial_1 f\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) - \frac{Y}{Z}\partial_2 f\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)\right),
\end{aligned}$$

azaz

$$\partial_3 F(x,y,1) = nf(x,y) - x\partial_1 f(x,y) - y\partial_2 f(x,y).$$

Az $f(x,y) = 0$ görbe $P(a,b)$ pontjához húzott érintő egyenlete homogén a homogén polinommal kifejezve:

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_1 f(a,b)(X-a) + \partial_2 f(a,b)(Y-b) \\
&= \partial_1 f(a,b)X + \partial_2 f(a,b)Y - \partial_1 f(a,b)a - \partial_2 f(a,b)b \\
&= \partial_1 F(a,b,1)X + \partial_2 F(a,b,1)Y + \partial_3 F(a,b,1).
\end{aligned}$$

Ebből következik:

1.3.8. Állítás. *A $\Gamma_F : F(X,Y,Z) = 0$ projektív görbe $P(a,b,c)$ pontjában az érintő homogén koordinátás egyenlete*

$$0 = \partial_1 F(a,b,c)X + \partial_2 F(a,b,c)Y + \partial_3 F(a,b,c)Z. \qquad \square$$

1.3.2. Másodrendű projektív görbék

Tekintsük a

$$0 = f(X,Y) = a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2a_{13}X + 2a_{23}Y + a_{33}$$

másodfokú görbét, illetve ennek

$$0 = F(X,Y,Z) = a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2a_{13}XZ + 2a_{23}YZ + a_{33}Z^2$$

projektív lezártját. Használva az

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

3×3-as szimmetrikus mátrixot, az $F(X,Y,Z)$ homogén másodfokú polinom

$$F(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j$$

alakban írható fel. Valóban, ezen mátrixszorzás eredménye 1×1-es mátrix, azaz valós szám. Mivel eddig is oszlopvektorokkal számoltunk, a továbbiakban az $\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x}$ jelölést fogjuk használni 3-ismeretlenes homogén másodfokú kifejezések rövid felírására.

1.3.9. Definíció. *Legyen $A = (a_{ij})$ 3×3-as szimmetrikus mátrix. Azon közönséges pontok halmazát, melyek koordinátái kielégítik az*

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2a_{13}X + 2a_{23}Y + a_{33} = 0$$

*másodfokú polinomot, **másodrendű görbének** nevezzük. Azon projektív pontok halmazát, melyek homogén kordinátáira teljesül*

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}X_iX_j = a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_{33}X_3^2 + 2a_{12}X_1X_2 + 2a_{13}X_1X_3 + 2a_{23}X_2X_3 = 0,$$

*a másodrendű görbe **projektív lezártjának** mondjuk.*

Példák

A közönséges síkon **kúpszeleteknek** nevezzük a **ellipszist, parabolát és hiperbolát.** Ezek geometriai definíciója (fókuszpontokkal és vezéregyenessel) koordinátamentes, csak a távolság fogalmát használja. Egy jól ismert tétel szerint a kúpszeletek egyenlete a **koordinátarendszer megfelelő megválasztásával kanonikus alakra hozható.** A megfelelő egyenletek:

$$\begin{aligned} \text{Parabola:} \quad & X^2 = 2pY, \\ \text{Ellipszis:} \quad & \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1, \\ \text{Hiperbola:} \quad & \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1, \end{aligned}$$

ahol az a, b, p konstansoknak szemléletes geometriai jelentés tulajdonítható. Könnyű meggondolni, hogy ezen görbék projektív lezártjainak egyenletei:

$$\begin{aligned} \text{Parabola:} \quad & X^2 - 2pYZ = 0, \\ \text{Ellipszis:} \quad & \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - Z^2 = 0, \\ \text{Hiperbola:} \quad & \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - Z^2 = 0, \end{aligned}$$

azaz az együtthatókból alkotott megfelelő mátrixok:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p \\ 0 & -p & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Végezetül, vizsgáljuk meg a

$$\Gamma : X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$$

másodrendű görbét. A definíció szerint ez nem-elfajuló, hiszen mártixa az egységmátrix, melynek determinánsa 1. Másrészről az egyenletnek a valós számhármasok halmazán egyetlen megoldása van: $x = y = z = 0$, ami pedig nem eredményez projektív pontot. Tehát egy nem-elfajuló másodrendű görbe ponthalmaza lehet üres is. Valójában azt mondjuk, hogy ennek a kúpszeletnek **csupa képzetes pontja** van.

A következő fogalom alapvető fontosságú a projektív sík geometriai vizsgálatai szempontjából.

1.3.10. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a projektív sík két alakzata **projektívan ekvivalens,** ha létezik az egyiket a másikba vivő projektív lineáris transzformáció.*

Mivel a projektív lineáris transzformációk csoportot alkotnak, a projektív ekvivalencia ekvivalenciareláció. Azt is mondjuk, hogy ekvivalens görbék csak *a homogén koordinátarendszer megválasztásában különböznek egymástól,* vagy más szóval, a *koordinátarendszer megfelelő választásával az egyik a másik alakjára hozható.* Példaként megemlítjük, hogy a projektív egyenesek projektív ekvivalensek.

A másodrendű görbék és projektív lineáris transzformációk kapcsolatáról szól a következő állítás.

1.3.11. Állítás. *Az $\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = 0$ másodrendű görbét a φ_M projektív lineáris transzformáció a $\boldsymbol{x}^t B\boldsymbol{x} = 0$ másodrendű görbébe viszi, ahol $B = M^{-t}AM^{-1}$.*

Bizonyítás. Tekintsük a $\Gamma : \boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = 0$ másodrendű görbét és a φ_M projektív lineáris transzformációt. Vizsgáljuk meg a görbe $\Gamma' = \varphi_M(\Gamma)$ képét. A $P(\boldsymbol{x})$ pont akkor és csak akkor illeszkedik Γ'-re, ha az $M^{-1}\boldsymbol{x}$ vektor által meghatározott ősképe illeszkedik Γ-ra, azaz $\boldsymbol{x}^t M^{-t}AM^{-1}\boldsymbol{x} = 0$ teljesül. Más szóval, Γ' szintén másodfokú görbe, melynek egyenlete $\boldsymbol{x}^t B\boldsymbol{x} = 0$, ahol $B = M^{-t}AM^{-1}$. □

1.3.12. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\Gamma : \boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = 0$ egyenletű projektív másodrendű görbe* ***elfajuló,*** *ha* $\det(A) = 0$.

Az 1.3.11 állítás bizonyításából kiderült, hogy a φ_M projektív lineáris transzformáció Γ-t a $\boldsymbol{x}^t B\boldsymbol{x} = 0$ egyenletű másodrendű görbébe viszi, ahol $B = M^{-t}AM^{-1}$. Ebből adódik, hogy Γ képe akkor és csak akkor elfajuló, ha Γ is az.

A fejezet hátralévő részében elfajuló másodrendű görbéket vizsgálunk.

1.3.13. Tétel (Elfajuló másodrendű görbék osztályozása). *Legyen $A = (a_{ij})$ a nullmátrixtól különböző 3×3-as szimmetrikus mátrix, melyre $\det(A) = 0$ és jelölje Γ az $\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = 0$ egyenletű másodrendű görbét. Ekkor Γ projektívan ekvivalens az alábbiak egyikével:*

(i) $X_1X_2 = 0$, *azaz Γ két egyenes uniója.*

(ii) $X_1^2 = 0$, *azaz Γ egyetlen egyenes.*

(iii) $X_1^2 + X_2^2 = 0$, *azaz Γ egyetlen pontból áll.*

Bizonyítás. Mivel $\det(A) = 0$, a Cramer-szabály szerint létezik nullvektortól különböző $\boldsymbol{a}$ vektor, melyre $A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. Ekkor $P(\boldsymbol{a}) \in \Gamma$, hiszen $\boldsymbol{a}^t A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^t\boldsymbol{0} = 0$. Válasszuk meg a homogén koordinátarendszert úgy, hogy $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)$. Ebben az esetben $A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ miatt $a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$ és Γ egyenlete

$$a_{11}X_1^2 + 2a_{12}X_1X_2 + a_{22}X_2^2 = 0.$$

Jelölje $\Delta = 4(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})$ ezen kvadratikus alak diszkriminánsát.

1. eset: $\Delta > 0$. Ekkor az $a_{11}X^2 + 2a_{12}X + a_{22} = 0$ egyenletnek két különböző α_1, α_2 gyöke van, azaz

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}X + a_{22} = c(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$$

alakban szorzattá alakítható. Ez azt jelenti, hogy Γ egyenlete is

$$a_{11}X_1^2 + 2a_{12}X_1X_2 + a_{22}X_2^2 = c(X_1 - \alpha_1X_2)(X_1 - \alpha_2X_2)$$

alakba írható, és Γ az $e_1 : X_1 - \alpha_1X_2 = 0$ valamint az $e_2 : X_1 - \alpha_2X_2 = 0$ egyenesek uniója. A gyökök különbözősége miatt a két egyenes különböző. A koordinátarendszer megváltoztatásával elérhetjük, hogy $e_1 : X_1 = 0$, $e_2 : X_2 = 0$, ekkor pedig Γ egyenlete $X_1X_2 = 0$.

2. eset: $\Delta = 0$. Ekkor az előbbi módszerrel

$$a_{11}X_1^2 + 2a_{12}X_1X_2 + a_{22}X_2^2 = c(X_1 - \alpha X_2)^2$$

és Γ az $e : X_1 - \alpha X_2 = 0$ egyenes. Koordinátatranszformációval $\Gamma : X_1^2 = 0$.

3. eset: $\Delta < 0$. Ekkor $a_{11} \neq 0$ és leosztva vele $a_{11} = 1$ feltehető. Tekintsük az

$$X_1^2 + 2a_{12}X_1X_2 + a_{22}X_2^2 = (X_1 + a_{12}X_2)^2 + (a_{22} - a_{12}^2)X_2^2 = (X_1 + a_{12}X_2)^2 - \Delta X_2^2$$

átalakítást. Látható, hogy az

$$X_1' = X_1 + a_{12}X_2, \qquad X_2' = \sqrt{-\Delta}X_2$$

lineáris helyettesítés Γ egyenletét a kívánt alakra hozza. □

1.3.3. A nem-elfajuló másodrendű görbék

Ebben a fejezetben $A = (a_{ij})$ olyan 3×3-as szimmetrikus mátrix, melyre $\det(A) \neq 0$, Γ az $\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = 0$ egyenletű projektív másodrendű görbe.

1.3.14. Állítás. *A Γ nem-elfajuló másodrendű görbét tetszőleges egyenes* 0, 1 *vagy* 2 *pontban metszi.*

Bizonyítás. A homogén koordinátarendszer megfelelő megválasztásával elérhetjük, hogy az e egyenes egyenlete $X_1 = 0$, ezt Γ egyenletébe helyettesítve a

$$a_{22}X_2^2 + 2a_{23}X_2X_3 + a_{33}X_3^2 = 0$$

kvadratikus alakot kapjuk. Ha ez azonosan nulla, akkor A-nak a második és harmadik sora lineárisan függő, azaz $\det(A) = 0$, ami a feltétel szerint nem igaz. Ezen kvadratikus alak irreducibilis, teljes négyzet vagy két lineáris tag szorzata attól függően, hogy a diszkriminánsa negatív, 0 vagy pozitív. Ezekben az esetekben rendre 0, 1 vagy két metszéspontot kapunk. □

A későbbiekben látni fogjuk, hogy a projektív nem-elfajuló görbék minden pontja sima, és az érintők pontosan az egyetlen pontban metsző egyenesek.

1.3.15. Tétel (Másodrendű görbe öt ponton át). *A projektív síkon adott* 5 *általános helyzetű ponthoz pontosan egy rajtuk átmenő nem-elfajuló másodrendű görbe létezik.*

Bizonyítás. Tekintsük a P_i pont (x_i, y_i, z_i) homogén koordinátáit $(i = 1, \ldots, 5)$ és keressük a kérdéses kúpszeletet

$$a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_{33}X_3^2 + 2a_{12}X_1X_2 + 2a_{13}X_1X_3 + 2a_{23}X_2X_3 = 0$$

alakban. Az X_1, X_2, X_3 helyébe x_i, y_i, z_i-t helyettesítve egy hat ismeretlenes, az

$$a_{11}x_i^2 + a_{22}y_i^2 + a_{33}z_i^2 + 2a_{12}x_iy_i + 2a_{13}x_iz_i + 2a_{23}y_iz_i = 0, \quad i = 1, \dots, 5$$

egyenletekből álló homogén lineáris egyenletrendszert kapunk az a_{ij} ismeretlenekkel. Ennek biztos létezik $A = (a_{ij})$ nem-triviális megoldása, és tetszőleges ilyen egy $P_1, \dots, P_5$-ön átmenő Γ nem-elfajuló kúpszeletet eredményez. Valóban, ha Γ elfajuló lenne, akkor egy pont vagy legfeljebb két egyenes uniója volna, azaz az öt pont közül legalább három kollineáris lenne.

Meg kell még mutatunk, hogy skalár szorzó erejéig egyértelmű a megoldás. Ez azzal ekvivalens, hogy az öt egyenlet lineárisan független. Ellenkező esetben ugyanis hozzá tudnánk venni egy tetszőleges hatodik $P_6(x_6, y_6, z_6)$ pont által meghatározott egyenletet, és így is találnánk $A = (a_{ij})$ nem-triviális megoldást. Ha azonban P_6-ot úgy választjuk, P_1, P_2-től különbözzék és illeszkedjen a P_1P_2 egyenesre, akkor az A mátrix által meghatározott Γ kúpszelet a P_1P_2 egyenest három pontban metszené. Ekkor Γ elfajuló volna, és a P_i pontok megint csak nem lennének általános helyzetűek. $\square$

1.3.4. Konjugált pontok, pólus, poláris

Rögzítsük a

$$\Gamma : \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}X_iX_j = a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_{33}X_3^2 + 2a_{12}X_1X_2 + 2a_{13}X_1X_3 + 2a_{23}X_2X_3 = 0$$

nem-elfajuló projektív másodrendű görbét és jelölje $A = (a_{ij})$ az együtthatókból álló 3×3-as szimmetrikus mátrixot.

1.3.16. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $P(x_1, x_2, x_3)$ és $Q(y_1, y_2, y_3)$ pontok* ***konjugáltak a** Γ **másodrendű görbére nézve,*** *ha teljesül*

$$\boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{y} = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_iy_j = 0.$$

Jelölés: $P \perp Q$. A P pont konjugált pontjainak halmazát $P^\perp$ jelöli.

Megjegyzés. Érdemes vigyázni, mert a „*konjugált*" kifejezést a matematikában több különböző értelemben használjuk. Ez nem igazán meglepő, ha figyelembe vesszük a latin *conjugatus* szó eredeti jelentését: egyesült, összekapcsolt.

A következő tétel a konjugáltság alapvető tulajdonságait sorolja fel.

1.3.17. Tétel. *(i) A másodrendű görbére vett konjugáltsági reláció szimmetrikus.*

(ii) Az önmagukkal konjugált pontok pontosan a másodrendű görbe pontjai. Egy egyenesen legfeljebb 2 *önkonjugált pont van.*

(iii) *Legyen $\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{x}$, ahol $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$. Ekkor $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ és a $P(\boldsymbol{x})$ pont konjugált pontjainak $P^\perp$ halmaza a $\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{X} = 0$ egyenletű egyenes pontjai.*

(iv) *A $P \mapsto P^\perp$ leképezés illeszkedéstartó bijekció a projektív pontok és egyenesek halmazai között. Speciálisan,*

$$(PQ)^\perp = P^\perp \cap Q^\perp, \qquad (e \cap f)^\perp = e^\perp f^\perp$$

teljesül minden P, Q pontra és e, f egyenesre.

(v) *Az e egyenesre illeszkedő P pontok $P^\perp$ képei sugársort alkotnak.*

Bizonyítás. (i) Mivel A szimmetrikus mátrix, ezért

$$\boldsymbol{x}^tA\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}^tA\boldsymbol{y})^t = \boldsymbol{y}^tA^t\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^tA\boldsymbol{x},$$

így $P(\boldsymbol{x}) \perp Q(\boldsymbol{y})$ akkor és csak akkor, ha $Q(\boldsymbol{y}) \perp P(\boldsymbol{x})$. (ii) Triviális. (iii) Legyen e az $\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{X} = 0$ egyenletű egyenes. Mivel $\boldsymbol{u}^t = \boldsymbol{x}^tA^t = \boldsymbol{x}^tA$, ezért

$$Q \in P^\perp \iff P(\boldsymbol{x}) \perp Q(\boldsymbol{y}) \iff \boldsymbol{x}^tA\boldsymbol{y} = 0 \iff \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y} = 0 \iff Q \in e,$$

azaz $P^\perp = e$. (iv) Vizsgáljuk az $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{u} = A\boldsymbol{x}$ leképezést. Ez $\det(A) \neq 0$ miatt bijektív transzformáció, mely lineárisan függő vektorokat lineárisan függőkbe visz. Geometriailag ez azt jelenti, hogy a $P \mapsto P^\perp$ leképezés bijektív, és kollineáris pontok képei közös ponton átmenő egyenesek. (v) Következik az előző részből. □

1.3.18. Definíció. *Az $e = P^\perp$ egyenest a P pont Γ másodrendű görbe szerinti **polárisának,** míg P-t az e **pólusának** nevezzük és a $P = e^\perp$ jelölést használjuk.*

A szimmetria miatt az $e = P^\perp$ egyenes Q pontjainak $Q^\perp$ polárisai mind átmennek $e^\perp = P$-n. Az alábbi fogalom igen hasznos:

1.3.19. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az P_1, P_2, P_3 pontok **önkonjugált háromszöget** alkotnak a $\Gamma : \boldsymbol{x}^tA\boldsymbol{x} = 0$ másodrendű görbére nézve, ha a csúcsok polárisai a szemközti oldalegyenesek: $P_1^\perp = P_2P_3$, $P_2^\perp = P_1P_3$, $P_3^\perp = P_1P_2$.*

Önkonjugált háromszögek könnyen konstruálhatók. Tudjuk, hogy az önkonjugált pontok pontosan Γ elemei, és minden egyenesen legfeljebb két ilyen pont van. Ezért nem okoz problémát a P_1 pontot úgy megválasztani, hogy $P_1 \notin e_1 = P_1^\perp$. Legyen $P_2 \in e_1$ tetszőleges nem önkonjugált pont, $e_2 = P_2^\perp$ és $P_3 = e_1 \cap e_2$. Ekkor $e_1 = P_1^\perp = P_2P_3$ definíció szerint, $e_2 = P_2^\perp = P_1P_3$ teljesül $P_1 \perp P_2$ miatt és

$$P_3^\perp = (e_1 \cap e_2)^\perp = e_1^\perp e_2^\perp = P_1P_2,$$

azaz a három pont csakugyan önkonjugált háromszöget alkot.

1.3.5. Másodrendű görbék vizsgálata a polaritás felhasználásával

Azokat az egyeneseket, melyek egyetlen pontban metszik a Γ nem-elfajuló másodrendű görbét, 1-szelőknek nevezzük. A következő állítások megmutatják a görbe pontjainak polárisai, az 1-szelők és a görbe érintői közötti kapcsolatot.

1.3.20. Állítás (Érintők és polárisok kapcsolata). *Legyen P a $\Gamma : \boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = 0$ másodrendű görbe tetszőleges pontja. Ekkor $P^\perp$ a Γ P-beli érintője.*

Bizonyítás. A $P(\boldsymbol{x})$-beli érintő együtthatói a Γ homogén egyenletének parciális deriváltjai az $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ helyettesítés mellett:

$$\begin{aligned} u_1 &= 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3, \\ u_2 &= 2a_{21}x_1 + 2a_{22}x_2 + 2a_{23}x_3, \\ u_3 &= 2a_{31}x_1 + 2a_{32}x_2 + 2a_{33}x_3, \end{aligned}$$

azaz konstans szorzótól eltekintve valóban $\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{x}$ az érintő együtthatóira, azaz az érintő $P^\perp$. $\square$

1.3.21. Állítás (1-szelők és polárisok kapcsolata). *Legyen Γ nem-efajuló másodrendű görbe, $P \in \Gamma$. Ekkor $\{P\} = \gamma \cap P^\perp$ és az összes többi P-n átmenő egyenes két pontban metszi Γ-t.*

Bizonyítás. Legyen $P(\boldsymbol{x}) \in \Gamma$, $Q(\boldsymbol{y}) \notin \Gamma$ és tekintsük a PQ egyenes P-től különböző általános $R(\boldsymbol{z})$ pontját, $\boldsymbol{z} = \lambda\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$. Ekkor

$$\begin{aligned} R \in \Gamma &\Leftrightarrow 0 = \boldsymbol{z}^t A\boldsymbol{z} = (\lambda\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})^t A(\lambda\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \\ &\Leftrightarrow 0 = \lambda^2\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} + 2\lambda\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^t A\boldsymbol{y} \\ &\Leftrightarrow 0 = 2\lambda\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^t A\boldsymbol{y} \\ &\Leftrightarrow \lambda = -\frac{\boldsymbol{y}^t A\boldsymbol{y}}{2\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{y}}. \end{aligned}$$

Azaz, PQ-nak akkor és csak akkor van P-től különböző metszéspontja, ha $\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{y} \neq 0$, azaz ha $Q \notin P^\perp$. $\square$

1.3.22. Következmény (Érintők és 1-szelők kapcsolata). *Nem-elfajuló projektív másodrendű görbe esetén az egy pontban metsző egyenesek pontosan az érintők.*

Bizonyítás. Az előző két állításból következik, hogy mind az 1-szelők, mind pedig az érintők a görbe pontjainak polárisai. $\square$

Ez utóbbi következményre egy szemléletes bizonyítást is megadunk. Mivel az érintő a szelő határhelyzete, elég megmutatni, hogy e-t „kicsit megváltoztatva” 2 metszéspontot kapunk. Az e egyetlen metszéspontjának oka, hogy az egyenletét Γ egyenletébe helyettesítve a kapott másodrendű egyenlet diszkriminánsa $\Delta = 0$. Ha azonban e-t kissé megforgatom P-n át, együtthatói kicsit megváltoznak, és Δ is kicsit megváltozik, azaz $\Delta \neq 0$ lesz. De $\Delta < 0$ nem lehet, mert akkor e nem metszené Γ-t, azaz $\Delta > 0$ és e két pontban metszi Γ-t.

Most megkeressük a projektív nem-elfajuló másodrendű görbék **kanonikus alakját,** azaz megkeressük azt a homogén koordinátarendszert, amelyikben a Γ egyenlete a lehető legegyszerűbb. Válasszunk először úgy, hogy a koordinátarendszer $E_1(1,0,0)$, $E_2(0,1,0)$, $E_3(0,0,1)$ *alappontjai önkonjugált háromszöget alkossanak.* Ekkor az $E_1E_2E_3\triangle$ oldalegyeneseinek egyenletei

$$E_1E_2 : X_3 = 0, \qquad E_1E_3 : X_2 = 0, \qquad E_2E_3 : X_1 = 0.$$

Másrészről, a $\Gamma : \boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = 0$ másodrendű görbe által meghatározott polaritás az alappontokhoz rendre az

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = 0, \quad a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + a_{32}X_3 = 0, \quad a_{13}X_1 + a_{23}X_2 + a_{33}X_3 = 0$$

egyenletű egyeneseket rendeli. Ez csak úgy lehetséges, ha

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0,$$

azaz a kúpszelet egyenlete

$$\Gamma : a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_{33}X_3^2 = 0.$$

Mivel $a_{ii} = \pm b_i^2$, a $\varphi : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (b_1x_1, b_2x_2, b_3x_3)$ projektív lineáris transzformáció Γ-t a $\pm X_1^2 \pm X_2^2 \pm X_3^2 = 0$ egyenletű kúpszeletbe viszi. Más szóval, a koordinátarendszer megfelelő megválasztásával Γ alakja ilyenre hozható. A változók esetleges cseréjével, és -1-el való szorzással tehát Γ egyenlete

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0 \qquad \text{vagy} \qquad X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 0$$

lesz. Ezzel beláttuk:

1.3.23. Tétel (A nem-elfajuló másodrendű görbék osztályozása). *A homogén koordinátarendszer megfelelő megválasztásával a Γ projektív nem-elfajuló másodrendű görbe egyenlete az alábbi alakra hozható:*

(i) $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$, *ha Γ-nak csupa képzetes pontja van.*

(ii) $X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 0$, *ha Γ-nak van legalább egy valós pontja.*

Ezeket az egyenleteket a projektív másodrendű görbék ***kanonikus alakjának*** *nevezzük.* □

1.3.24. Következmény. *A valós ponttal rendelkező projektív nem-elfajuló másodrendű görbék mind projektív ekvivalensek és végtelen sok valós pontjuk van. Speciálisan, a kúpszeletek és a nem-elfajuló másodrendű görbék ugyanazok. A projektív másodrendű görbe közönséges része ellipszis, parabola vagy hiperbola attól függően, hogy* 0, 1 *vagy* 2 *végtelen távoli pontja van.* □

Végezetül, az 1.3.15 tételt kicsit általánosabban is kimondjuk.

1.3.25. Tétel (Kúpszelet megadása öt adattal). *Az alábbi öt adat egyértelműen meghatároz egy nem-elfajuló kúpszeletet, azaz pontosan egy nem-elfajuló kúpszelet van, mely átmegy az adott pontokon és érinti az adott egyeneseket.*

(1) *Négy általános helyzetű pont, és egy egyenes, mely ezek egyikére illeszkedik.*

(2) *Három általános helyzetű pont és két egyenes, melyek ezek közül egyre-egyre illeszkednek.*

(3) *Három általános helyzetű egyenes és közülök kettő egy-egy pontja.*

(4) *Négy általános helyzetű egyenes és az egyikükre illeszkedő pont.*

(5) *Öt általános helyzetű egyenes.*

Bizonyítás. A bizonyítás teljesen hasonlóan megy, mint az 1.3.15 tételben, mivel az a tény, hogy az adott P pont polárisa az e egyenes, szintén egy lineáris egyenletet ad az a_{ij} együtthatókra. □

1.3.6. Pascal és Brianchon tételei projektív kúpszeletekre

Az 1.3.24 következmény alapján a projektív nem-elfejuló másodrendű görbéket **projektív kúpszeleteknek** is fogjuk nevezni. A $\Gamma : \boldsymbol{x}^A\boldsymbol{x} = 0$ kúpszelet P, Q pontjait összekötő PQ egyenes jól meghatározott, ha $P \neq Q$. A továbbiakban, ha $P = Q$, akkor az PQ egyenes alatt a kúpszelet P-beli érintőjét fogjuk érteni.

A fejezetünk fő eredményének bizonyításához két elemi geometriai tételt kell felelevenítenünk.

1.3.26. Lemma (Menelaosz-tétel). *Tekintsük a közönséges sík ABC háromszögét és az oldalegyeneseknek a csúcsoktól különböző A_1, B_1, C_1 pontjait. Ezen három pont akkor és csak akkor kollineáris, ha az előjeles távolságokra teljesül*

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = -1. \tag{1.1}$$

Bizonyítás. Mivel az előjeles távolságok $\frac{|AC_1|}{|C_1B|}$ aránya akkor és csak akkor pozitív, ha C_1 az A és B pontok közé esik, könnyen meggondolható, hogy a fenti szorzat három tényezője közül 0 vagy 2 pozitív, tehát az eredmény szükségképpen negatív. Foglalkozzunk mostantól előjel nélküli távolságokkal.

Tegyük fel, hogy az A_1, B_1, C_1 pontok kollineárisak, legyen e a közös egyenesük, és jelölje D az A-n átmenő e-vel párhuzamos egyenes metszéspontját a BC egyenessel. Ekkor kapunk két hasonló háromszögpárt:

$$ABD\triangle \sim C_1BA_1\triangle, \qquad CA_1B_1\triangle \sim CDA\triangle.$$

A megfelelő oldalak arányai megegyeznek:

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{|DA_1|}{|A_1B|}, \qquad \frac{|AB_1|}{|B_1C|} = \frac{|DA_1|}{|A_1C|}.$$

A két egyenletet egymással elosztva kapjuk (1.1)-t.

Tegyük most fel, hogy az A_1, B_1, C_1 pontokra teljesül (1.1). Legyen $C_2 = AB \cap A_1B_1$, ekkor az előzőek szerint

$$\frac{|AC_2|}{|C_2B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = -1.$$

Ebből adódik

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{|AC_2|}{|C_2B|},$$

ami pedig csak úgy lehetséges, ha $C_1 = C_2$, azaz az A_1, B_1, C_1 pontok kollineárisak. □

1.3.27. Lemma (Szelő szakaszok tétele). *Legyen k kör, $P \notin k$ pont, e, f két egyenes P-n át. Jelölje A_1, A_2 illetve B_1, B_2 az e, illetve f egyenesek k-val vett metszéspontjait. Ekkor teljesül*

$$|PA_1||PA_2| = |PB_1||PB_2|.$$

Bizonyítás. A kerületi szögek tétele miatt a $B_1A_1B_2$ szög és a $B_1A_2B_2$ szög egyenlő, tehát a $PA_1B_2\triangle$ és a $PB_1A_2\triangle$ háromszögek két szöge megegyezik, azaz a háromszögek hasonlók. A megfelelő oldalak arányainak egyezése miatt

$$\frac{|PA_1|}{|PB_2|} = \frac{|PB_1|}{|PA_2|},$$

amiből adódik a kívánt eredmény. □

1.3.28. Tétel (Pascal-tétel). *Legyen Γ nem-elfajuló projektív kúpszelet és jelölje A_1,A_2,A_3 és B_1,B_2,B_3 ennek két különböző pontokból álló ponthármasait. Ekkor a $Q_1 = A_2B_3 \cap A_3B_2$, $Q_2 = A_1B_3 \cap A_3B_1$, $Q_3 = A_1B_2 \cap A_2B_1$ pontok kollineárisak.*

Bizonyítás. Legyen

$$D_1 = A_1B_2 \cap A_3B_1, \quad D_2 = A_1B_2 \cap A_2B_3, \quad D_3 = A_2B_3 \cap A_3B_1.$$

Vegyük úgy fel a homogén koordinátarendszert, hogy a végtelen távoli egyenes nem metszi Γ-t és nem megy át az A_i, B_i, Q_i, D_i pontok egyikén sem. Ekkor mindent vizsgálhatunk a közönséges síkon, ahol is Γ ellipszis. Egy további projektív lineáris transzformációval elérhetjük, hogy Γ kör legyen.

Alkalmazzuk háromszor a Menelaosz-tételt a $D_1D_2D_3\triangle$-re:

Kollineáris ponthármas	**Menelaosz-tétel**
$A_1Q_2B_3$	$\frac{\lvert D_1A_1\rvert}{\lvert A_1D_2\rvert}\cdot\frac{\lvert D_2B_3\rvert}{\lvert B_3D_3\rvert}\cdot\frac{\lvert D_3Q_2\rvert}{\lvert Q_2D_1\rvert}=-1$
$A_2Q_3B_1$	$\frac{\lvert D_1Q_3\rvert}{\lvert Q_3D_2\rvert}\cdot\frac{\lvert D_2A_2\rvert}{\lvert A_2D_3\rvert}\cdot\frac{\lvert D_3B_1\rvert}{\lvert B_1D_1\rvert}=-1$
$A_3Q_1B_2$	$\frac{\lvert D_1B_2\rvert}{\lvert B_2D_2\rvert}\cdot\frac{\lvert D_2Q_1\rvert}{\lvert Q_1D_3\rvert}\cdot\frac{\lvert D_3A_3\rvert}{\lvert A_3D_1\rvert}=-1$

A három egyenlőséget összeszorozva és átrendezve a

$$\frac{|D_3Q_2|}{|Q_2D_1|}\frac{|D_1Q_3|}{|Q_3D_2|}\frac{|D_2Q_1|}{|Q_1D_3|}\left(\frac{|D_1A_1||D_1B_2|}{|D_1A_3||D_1B_1|}\right)\left(\frac{|D_2A_2||D_2B_3|}{|D_2A_1||D_2B_2|}\right)\left(\frac{|D_3A_3||D_3B_1|}{|D_3A_2||D_3B_3|}\right)=-1$$

egyenletet kapjuk, ahol a zárójeles tényezők a szelő szakaszok tétele miatt mind 1-ek. Tehát

$$\frac{|D_3Q_2|}{|Q_2D_1|}\frac{|D_1Q_3|}{|Q_3D_2|}\frac{|D_2Q_1|}{|Q_1D_3|}=-1,$$

azaz a Menelaosz-tétel ismételt alkalmazásával látjuk, hogy a Q_1, Q_2, Q_3 pontok kollineárisak. □

Vegyük észre, hogy a bizonyítás során az A_iB_j egyenesekre felírt képletek helytállók akkor is, ha $A_i = B_j$, ekkor a szelő szakaszok tételét a külső pontból húzott érintőre kell alkalmazni. A Pascal-tételt gyakran az alábbi formában idézik: A kúpszeletbe írt hatszög szemközti oldalainak metszéspontjai közös egyenesre illeszkednek. Valóban, az $A_1B_2A_3B_1A_2B_3$ hatszög szemközti oldalpárjai A_1B_2 és B_1A_2, B_2A_3 és A_2B_3, valamint A_3B_1 és B_3A_1. A Pascal-tétel duálisa Brianchon-tétel néven ismert: Kúpszelet köré írt hatszög átlói egy ponton mennek át. Itt az a, b érintők metszéspontja alatt az $a = b$ esetben a közös érintési pontot értjük.

1.3.29. Tétel (Brianchon-tétel). *Legyen Γ nem-elfajuló kúpszelet és a_1,a_2,a_3, b_1,b_2,b_3 érintők úgy, hogy $a_i \neq a_j$, $b_i \neq b_j$ ha $i \neq j$. Legyen $P_{ij} = a_i \cap b_j$. Ekkor az $f_1 = P_{23}P_{32}$, $f_2 = P_{13}P_{31}$ és $f_3 = P_{12}P_{21}$ egyenesek egy ponton mennek át.* □

Ennek a két tételnek több fontos következménye van.

1.3.30. Következmény. *Legyen A_1, A_2, A_3 a Γ nem-elfajuló kúpszelet három pontja, $a_i = A_i^{\perp}$ az ezen pontokba húzott érintők. Legyen $C_1 = a_2 \cap a_3$, $C_2 = a_1 \cap a_3$, $C_3 = a_1 \cap a_2$. Ekkor az $A_1A_2A_3$ és a $C_1C_2C_3$ háromszögek pontra nézve perspektívek, azaz az A_1C_1, A_2C2, A_3C_3 egyenesek közös ponton mennek át.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk Pascal tételét az A_1, A_2, A_3, $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2$, $B_3 = A_3$ pontokra. □

1.3.31. Következmény (Kúpszelet szerkesztése). *Adottak a $P_1, \ldots, P_5$ általános helyzetű pontok, az ezekre illeszkedő Γ nem-elfajuló kúpszelet és a P_1-re illeszkedő e egyenes. Ekkor az e-nek a Γ-val vett P_1 től különböző X pontja az alábbi módon megszerkeszthető: Legyen $Q_1 = P_1P_2 \cap P_4P_5$, $Q_3 = P_3P_4 \cap e$, $Q_2 = Q_1Q_2 \cap P_2P_3$ és $X = P_5Q_2 \cap e$.*

Bizonyítás. Mivel a hat pont $P_1, \ldots, P_5, X$ kielégíti a Pascal-tételt és $X \in e$, ezért X nem lehet más. □

1.3.32. Következmény (Pascal-tétel megfordítása). *A $P_1, P_2, \ldots, P_6$ általános helyzetű pontok a síkon akkor és csak akkor illeszkednek közös kúpszeletre, ha teljesül rájuk a Pascal-tétel állítása, azaz ha a*

$$Q_1 = P_1P_2 \cap P_4P_5, \quad Q_2 = P_2P_3 \cap P_5P_6, \quad Q_3 = P_3P_4 \cap P_6P_1$$

pontok kollineárisak.

Bizonyítás. Tekintsük a $P_1, \ldots, P_5$ pontokon áthaladó Γ nem-elfajuló kúpszeletet és az előbb látottak szerint szerkesszük meg a P_1P_6 egyenes P_1-től különböző P_6' metszéspontját Γ-val. (Azaz $P_6' = P_1$ ha P_1P_6 érinti Γ-t.) Ekkor egyrészt $P_6' \in \Gamma$, másrészt a szerkesztés menetéből adódóan $P_6 = P_6'$. □

1.3.7. Papposz-tétel

A következő tétel felfogható a Pascal-tétel elfajuló kúpszeletre vonatkozó kiterjesztésének.

1.3.33. Tétel (Papposz-tétel). *Legyen e és f két különböző projektív egyenes, $A_1, A_2, A_3 \in e$, $B_1, B_2, B_3 \in f$ különböző pontokból álló ponthármasok. Ekkor a $Q_1 = A_2B_3 \cap A_3B_2$, $Q_2 = A_1B_3 \cap A_3B_1$, $Q_3 = A_1B_2 \cap A_2B_1$ pontok kollineárisak.*

Bizonyítás. A 3×3-as szimmetrikus mátrixok egy 6-dimenziós V vektorteret alkotnak $\mathbb{R}$ felett. Tekintsük a determinánst mint $\det : V \to \mathbb{R}$ függvényt. Mivel ez folytonos, a zéróhelyei *zárt halmazt* alkotnak V-ben, azaz minden $A \in V$, $\det(A) = 0$ mátrixhoz *tetszőlegesen közel* találunk $A' \in V$, $\det(A') \neq 0$ mátrixot.

Legyen $\Gamma = e \cup f$ elfajuló kúpszelet egyenlete $\boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x} = 0$ és tegyük fel, hogy $Q_3 \notin Q_1Q_2$. Válasszunk Γ-hoz *megfelelően közel* egy nem-elfajuló Γ' kúpszelet, és ezen az A_i, B_i-khez megfelelően közel A_i', B_i' pontokat. A „megfelelő közelség" alatt azt értjük, hogy Q_3' ne illeszkedjék $Q_1'Q_2'$-re. Ezt a folytonosság miatt megtehetnénk, de ekkor ellentmondásba jutnánk a Pascal-tétellel, tehát $Q_3 \notin Q_1Q_2$ nem lehetséges. □

1.4. Korrelációk, polaritások

A $\Gamma : \boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x} = 0$ kúpszelet által meghatározott $P \mapsto P^\perp$ leképezés illeszkedéstartó bijekció a projektív pontok és egyenesek halmazai között. Ebben a fejezetben általánosabban vizsgáljuk az ilyen bijekciókat.

A továbbiakban $\mathcal{P}$ illetve $\mathcal{E}$ jelöli a projektív sík pontjainak és egyeneseinek halmazait.

1.4.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\rho : \mathcal{P} \to \mathcal{E}$ leképezés* ***illeszkedéstartó,*** *ha kollineáris pontokat közös ponton átmenő egyenesekbe képez. A $\rho : \mathcal{P} \to \mathcal{E}$ illeszkedéstartó bijekciókat* ***korrelációnak nevezzük.***

A továbbiakban legyen ρ korreláció. Az illeszkedéstartás miatt a rögzített e egyenes pontjainak ρ melletti képei egyetlen sugársor elemei, jelölje Q a sugársor tartóját. Azt mondjuk, hogy Q az e egyenes képe a ρ korreláció mellett. Könnyen meggondolható, hogy így ρ meghatároz egy $\mathcal{E} \to \mathcal{P}$ egyenestartó bijekciót is. Ebből adódik, hogy van értelme két korreláció szorzatáról beszélni, ami természetesen kollineáció.

Jelölje ρ_0 azt a korrelációt, amelyik a $P(\boldsymbol{a})$ ponthoz az $e : \boldsymbol{a}^t \boldsymbol{X} = 0$ egyenest rendeli. Tekintsünk egy tetszőleges ρ korrelációt és legyen $\alpha = \rho_0^{-1} \circ \rho$. Ekkor α kollineáció, azaz az 1.2.11 alaptétel szerint $\alpha = \varphi_B$ projektív lineáris transzformáció valamely B 3×3-as mátrixszal. Más szóval $\rho = \rho_0 \circ \varphi_B$, azaz a $P(\boldsymbol{a})$ pont képe a $\boldsymbol{a}^t B^t \boldsymbol{X} = 0$ egyenletű egyenes.

1.4.2. Tétel (Korrelációk koordinátás alakja). *Minden ρ korrelációhoz létezik B 3×3-as mátrix úgy, hogy a $P(\boldsymbol{x})$ pont ρ melleti képe az $e : \boldsymbol{u}^t \boldsymbol{X} = 0$ egyenes, ahol*

$$\boldsymbol{u} = B\boldsymbol{x}. \qquad \square$$

A továbbiakban olyan korrelációkkal foglalkozunk, melyek négyzete az identitás.

1.4.3. Lemma. *A π korreláció négyzete akkor és csak akkor az identitás, ha minden P, Q pontra teljesül, hogy $P \in \pi(Q) \iff Q \in \pi(P)$.* $\square$

1.4.4. Definíció. *A π korrelációt* ***polaritásnak*** *nevezzük, ha $\pi^2 = \mathrm{id}$. Ekkor azon P, Q pontokat, melyre $P \in \pi(Q)$,* ***konjugált pontoknak*** *nevezzük. A konjugáltsági relációt $P \sim Q$-val jelöljük. A P pont $\pi(P)$ képét a π szerinti* ***polárisnak,*** *az e egyenes $\pi(e)$ képét a π szerinti* ***pólusnak*** *nevezzük.*

1.4.5. Lemma. *Tegyük fel, hogy az A, B mátrixokra teljesük, hogy $0 = \boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{y} \iff 0 = \boldsymbol{x}^t B \boldsymbol{y}$. Ekkor $B = cA$ valamely c skalárra.*

Bizonyítás. A lemmában szereplő A és B mátrixok ugyanazt $\rho_A = \rho_B$ a korrelációt határozzák meg. Ekkor $\rho_0 \circ \rho_A$ és $\rho_0 \circ \rho_B$ ugyanazt a projektív lineáris transzformációt eredményezik, ami csak úgy lehetséges, ha a két mátrix egymás skalárszorosa, ld. az 1.2.7 állítást. □

Legyen π az A mátrix által meghatározott polaritás és tekintsük a $P(\boldsymbol{x})$, $Q(\boldsymbol{y})$ konjugált pontokat. A P polárisa az $e : \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{X} = 0$ egyenes, ahol $\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{x}$. Az, hogy $Q \in e = \pi(P)$, az $\boldsymbol{x}^t A^t \boldsymbol{y} = 0$ egyenlőséggel fejezhető ki. Vegyük észre, hogy a mátrixszorzás szabályai szerint $\boldsymbol{x}^t A^t \boldsymbol{y}$ 1×1-es mátrix, tehát egyszerű skalárnak tekinthető. Amennyiben $\boldsymbol{x}^t = (x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{y}^t = (y_1, y_2, y_3)$ és $A = (a_{ij})$, akkor ez a skalár

$$\boldsymbol{x}^t A^t \boldsymbol{y} = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ji} x_i y_j.$$

Mivel az 1×1-es mátrixok szimmetrikusak, minden A mátrixra teljesül

$$\boldsymbol{x}^t A^t \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}^t A^t \boldsymbol{y})^t = \boldsymbol{y}^t A \boldsymbol{x}.$$

Mint láttuk, az a tény, hogy $\pi^2 = \mathrm{id}$, ekvivalens azzal, hogy $0 = \boldsymbol{x}^t A^t \boldsymbol{y} \Leftrightarrow 0 = \boldsymbol{y}^t A^t \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{y}$. A fenti lemma szerint ekkor $A^t = cA$ valamely c skalárra. Mivel

$$A = (A^t)^t = (cA)^t = cA^t = c^2 A$$

és A nem a zéró mátrix, ezért $c^2 = 1$, vagyis $A^t = A$ vagy $A^t = -A$ teljesül. Ha azonban $A^t = -A$ akkor

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

és $\det(A) = -acb + bac = 0$.

Ezzel beláttuk:

1.4.6. Állítás. *Az A mátrix által meghatározott korreláció akkor és csak akkor polaritás, ha A szimmetrikus.* □

1.4.7. Definíció. *A P pontot a π polaritás* ***abszolút pontjának*** *nevezzük, ha $P \in \pi(P)$. Hasonlóan, e* ***abszolút egyenes,*** *ha $\pi(e) \in e$.*

Ha A a π polaritás mátrixa, akkor az abszolút pontok az $\boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x} = 0$ egyenlőséget kielégítő $P(\boldsymbol{x})$ pontok. Ezt kiírva:

$$0 = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3,$$

azaz x_1, x_2, x_3-ra egy *másodfokú homogén egyenletet* kapunk. Tehát a projektív kúpszeleteket a polaritások abszolút pontjainak halmazaként is felfoghatjuk.

1.5. Névjegyzék

- **Euklidesz,** görög matematikus, Kr.e. 325–265
- **Alexandriai Menelaosz,** görög metamatikus és csillagász, Kr.u. 70–140
- **Alexandriai Papposz,** görög metamatikus, Kr.u. 290–350
- **Gérard Desargues,** francia mérnök és matematikus, 1591–1661
- **Blaise Pascal,** francia matematikus, fizikus és teológus, 1623–1662
- **Gabriel Cramer,** svájci matematikus, 1704–1752
- **Charles Julien Brianchon,** francia vegyész és matematikus, 1783–1864

A. Függelék

Matematikai előismeretek

A.1. Lineáris algebra

Ebben a fejezetben a *vektorok* témakörének minimális alapismereteit gyűjtöttük össze, amelyek a sík- és térgeometriai megfontolásokhoz nem nélkülözhetők.

A.1.1. Véges dimenziós vektorterek

Az $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ valós szám n-esek halmaza **vektorteret** alkot a komponensenkénti

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

összeadás és a valós számokkal (skalárokkal) való

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

szorzás műveleteire nézve. Ezen halmaz elemeit **n-dimenziós vektoroknak** nevezzük. Ha $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in \mathbb{R}^n$ és $c_1, \ldots, c_m \in R$, akkor

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + c_m\boldsymbol{v}_m \in \mathbb{R}^n$$

szintén vektor, ezt a $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ vektorok **lineáris kombinációjának** hívjuk. A lineáris kombináció **triviális,** ha $c_1 = \ldots = c_m = 0$. A $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in \mathbb{R}^n$ vektorok **lineárisan függők,** ha a $\boldsymbol{O} = (0, \ldots, 0)$ **nullvektor** előáll, mint a $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ vektorok nem-triviális lineáris kombinációja. Könnyű meggondolni, hogy ez ekvivalens azzal, hogy a szóbanforgó m vektor egyike előáll a többi lineáris kombinációjaként. Ebből adódik, hogy két vektor akkor és csak akkor lineárisan függő, ha az egyik a másik skalárszorosa.

Igaz továbbá, hogy ha az $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ vektorok mindegyike a $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ vektorok lineáris kombinációja, akkor az $\boldsymbol{u}_i$-k lineáris kombinációja előáll, mint az eredeti $\boldsymbol{v}_j$-k lineáris kombinációja.

Hagyományosan az $\mathbb{R}^n$ halmaz elemeit *sorvektorokként* jelenítjük meg, természetesen megállapodás szerint ezek helyett használhatunk *oszlopvektorokat* is. A fent definiált fogalmak változtatás nélkül alkalmazhatók oszlopvektorok esetén is.

Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezés **lineáris,** ha $f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$ és $f(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda f(\boldsymbol{v})$ teljesül minden $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorra és $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárra. Ismert, hogy minden lineáris $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezés

$$f : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x'_1, \ldots, x'_n)$$

alakú, ahol

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n, \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n, \\ \vdots \\ x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n. \end{cases} \tag{A.1}$$

Az

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$n \times n$-es mátrixot az f **leképezés mátrixának** nevezzük. Ha $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés mátrixa

$$B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

akkor az $f \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \boldsymbol{v} \mapsto f(g(\boldsymbol{v}))$ leképezés szintén lineáris, és a

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ & & \ddots & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

mátrixára teljesül $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$. Az így meghatározott C mátrixot az A és B **mátrixszorzatának** nevezzük és $C = AB$-vel jelüljük. A leképezések szorzatának asszociatív tulajdonságából következik a mátrixszorzás asszociativitása. Az identikus leképezés mátrixa az

$$\mathbf{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

egységmátrix. Minden $n \times n$-es A mátrixra teljesül $\mathbf{1}_n A = A\mathbf{1}_n = A$.

A mátrixszorzat definíciójából még egy fontos észrevételt tudunk leszűrni: Az A és B mátrixok AB szorzatának sorvektorai a B mátrix sorainak lineáris kombinációi. Hasonlóan, a szorzat oszlopvektorai az A oszlopainak lineáris kombinációi.

Minden mátrixban a lineárisan független sorok száma megegyezik a lineárisan független oszlopok számával; ezt a számot a mátrix **rangjának** nevezzük.

Az A mátrix **determinánsa** a

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \in \mathbb{R}$$

valós szám, ahol S_n az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz permutációinak halmaza, az $\operatorname{sgn}(\sigma)$ pedig 1 vagy -1 attól függően, hogy a σ páros vagy páratlan permutáció. Az $n = 2$ és $n = 3$ esetekben

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

illetve

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

A **determinánsok szorzástétele** szerint az $n \times n$-es A, B mátrixok esetén $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Az A mátrix **adjungáltjának** nevezzük, és A^{adj}-al jelöljük azt az $n \times n$-es, nem csupa nullából álló mátrixot, amelyre teljesül

$$AA^{\mathrm{adj}} = A^{\mathrm{adj}}A = \det(A)\,\mathbf{1}_n.$$

Ismert, hogy az adjungált mátrix mindig létezik, és abban az esetben, ha a mátrix determinánsa nem nulla, egyetlen ilyen mátrix van. Az $n = 2$ és $n = 3$ esetekben

$$A^{\mathrm{adj}} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \tag{A.2}$$

illetve

$$A^{\mathrm{adj}} = \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & -a_{12}a_{33} + a_{13}a_{32} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ -a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & -a_{11}a_{23} + a_{13}a_{21} \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & -a_{11}a_{32} + a_{12}a_{31} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

Ha $\det(A) \neq 0$, akkor az $A^{-1} = \det(A)^{-1}\, A^{\mathrm{adj}}$ mátrixra teljesül $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{1}_n$. Az A^{-1} mátrixot az A **inverz mátrixának** nevezzük. Ha $\det(A) = 0$, akkor nem létezik inverze, hiszen $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 0$ minden B-re, amíg $\det(\mathbf{1}_n) = 1$.

Tekintsük az A mátrix elemeiből képzett n **egyenletből álló,** n **ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszert:**

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots a_{1n}X_n = 0, \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots a_{2n}X_n = 0, \\ \vdots \\ a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \ldots a_{nn}X_n = 0. \end{cases} \tag{A.4}$$

Ennek mindig van megoldása, nevezetesen $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$, ezt nevezzük a **triviális megoldásnak.** Nem-triviális megoldás létezése definíció szerint pontosan azt jelenti, hogy az egyenletrendszert meghatározó A mátrix oszlopvektorai lineárisan függők.

A nem-triviális megoldások megkeresése az ismert **Gauss-féle eliminációs eljárással** történik, amikor is az egyenletek lineáris kombinációit képezve alakítjuk azt át. Az (A.4) egyenletrendszernek pontosan akkor van nem-triviális megoldása, ha az átalakítással csökkenteni tudjuk az egyenletek számát, azaz az (A.4) egyik egyenlete kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Ez nyilván ekvivalens azzal, hogy az A mátrix sorai lineárisan függők.

Ezeket összefoglalva kimondjuk az alábbi tételt.

A.1.1. Tétel (Cramer-szabály). *Legyen A $n \times n$-es mátrix és tekintsük a hozzá tartozó n egyenletből álló, n ismeretlenes* (A.4) *homogén lineáris egyenletrendszert. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

(i) *Az egyenletrendszernek létezik nem-triviális megoldása.*

(ii) *Az A mátrix sorai lineárisan függők.*

(iii) *Az A mátrix oszlopai lineárisan függők.*

(iv) $\det(A) = 0$.

Bizonyítás. Az (i), (ii) és (iii) pontok ekvivalenciáját a tétel kimondása előtt meggondoltuk. Tegyük fel, hogy $\det(A) = 0$ és tekintsük az A mátrix A^{adj} adjungáltját, erre fennáll $A^{\mathrm{adj}}A = 0$. Mivel A^{adj} nem nullmátrix, és tudjuk, hogy a mátrixszorzat sorai A sorainak lineáris kombinációi, ezért azt látjuk, hogy A sorainak egy lineáris kombinációja kiadja a nullvektort, vagyis A sorvektorai lineárisan függők. Eszerint $(iv) \Longrightarrow (ii)$.

Tegyük végül fel, hogy $\det(A) \neq 0$, azaz A invertálható. Ez egyenértékű azzal, hogy az A által meghatározott $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés invertálható. (Az f inverze az a lineáris leképezés, amelyet A^{-1} határoz meg.) Mivel tehát f bijektív és $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, ezért $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ esetén $f(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0}$. Az f definíciójának és az (A.4) az összehasonlítása alapján ez azt jelenti, hogy az egyenletrendszernek nincs nem-triviális megoldása. Ezzel beláttuk, hogy $(i) \Longrightarrow (iv)$. $\square$

Rögzítsük az $n \times n$-es A mátrixot és tegyük fel, hogy valamely $\boldsymbol{v} \neq 0$ vektorra és λ skalárra

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$

teljesül. Ekkor λ-t az A **sajátértékének,** $\boldsymbol{v}$-t pedig az A **sajátvektorának** nevezzük. A fenti egyenlet nyilván

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

alakban is írható, ahol I az $n \times n$-es egységmátrix. Mivel $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, az $A - \lambda I$ mátrix oszlopai lineárisan függők, azaz $\det(A - \lambda I) = 0$.

Az $f_A(x) = \det(A - xI)$ függvény x-nek n-edfokú polinomja, ezt az A **karakterisztikus polinomjának** hívjuk. Az $f_A(x)$ gyökei pontosan az A sajátértékei. Adott

λ sajátértékhez a sajátvektor meghatározása egyszerű lineáris egyenletrendszer megoldását jelenti. Megjegyezzük, hogy adott λ sajátértékhez végtelen sok sajátvektor tartozik, ezek mindig vektorteret alkotnak. A λ-hoz tartozó két sajátvektor között nem teszünk különbséget, ha egymás skalárszorosai.

A.1.2. Vektorok szorzatai

A $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n), \boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ vektorok **skalárszorzatát** vagy **belső szorzatát** az

$$\boldsymbol{ab} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

képlet definiálja. Erre nyilván teljesül

(i) $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$ (szimmetria),

(ii) $\boldsymbol{a}(\beta \boldsymbol{b} + \gamma \boldsymbol{c}) = \beta\, \boldsymbol{ab} + \gamma\, \boldsymbol{ac}$ (bilinearitás),

(iii) $\boldsymbol{a}^2 \geq 0$ és $\boldsymbol{a}^2 = 0$ akkor és csak akkor, ha $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ (pozitív definitség).

A belső szorzat segítségével értelmezzük a vektor $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2}$ **hosszát,** valamint az

$$\cos \gamma = \frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$$

összefüggés segítségével két vektor **bezárt szögét.** Két vektor akkor és csak akkor **merőleges,** ha belső szorzatuk 0.

Megjegyzés. Amennyiben $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ n-dimenziós oszlopvektorok, akkor $\boldsymbol{a}^t \boldsymbol{b}$ 1×1-es mátrix, azaz tekinthető skalárnak. Ennek értéke pontosan a két vektor belső szorzata, és a belső szorzat $\boldsymbol{a}^t \boldsymbol{b}$-ként való jelölése sok más szempontból is igen hasznos.

Legyen $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ ortonormált bázis $\mathbb{R}^3$-ben, azaz

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = 1, \qquad \boldsymbol{ij} = \boldsymbol{jk} = \boldsymbol{ij} = 0.$$

Legyen $\boldsymbol{a} = a_1 \boldsymbol{i} + a_2 \boldsymbol{k} + a_3 \boldsymbol{k}, \boldsymbol{b} = b_1 \boldsymbol{i} + b_2 \boldsymbol{k} + b_3 \boldsymbol{k}$ és definiáljuk a két vektor **vektoriális szorzatát** az alábbi formális determinánssal:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\boldsymbol{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\boldsymbol{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\boldsymbol{k}.$$

Ez rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

(i) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ (antiszimmetria).

(ii) $\boldsymbol{a} \times (\beta \boldsymbol{b} + \gamma \boldsymbol{c}) = \beta\, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \gamma\, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$ (bilinearitás).

(iii) $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin \gamma$, ahol γ a két vektor bezárt szöge.

(iv) $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0$, azaz a vektoriális szorzat merőleges a tényezőkre.

Adott a 3-dimenziós tér 3 vektora: $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Ezek **vegyesszorzatán** az

$$\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$$

kifejezést értjük. A belső és a vektoriális szorzatok képleteiből adódik, hogy a három vektor vegyesszorzata pont a belőlük alkotott 3×3-as determináns értéke:

$$\boldsymbol{abc} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Ez bizonyítja az alábbi tulajdonságokat:

(i) A vegyesszorzat lineáris mindhárom változójában.

(ii) A vegyesszorzat alternál, azaz $\boldsymbol{abc} = -\boldsymbol{bac}$ és $\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{cab}$.

(iii) A vegyesszorzat akkor és csak akkor 0, ha a három vektor lineárisan függő.

(iv) A vegyesszorzat geometriai jelentése a három vektor által kifeszített paralelepipedon térfogata.

A.1.3. A valós számtest automorfizmusáról

Testek alatt olyan algebrai struktúrát értünk, melyekben a négy alapművelet a „szokott módon” működik. Ezt a négy műveletet megőrző leképezéseket **testautomorfizmusoknak** nevezzük. Az alábbi fontos tétel azt mondja ki, hogy a valós számoknak nincs az identitástól különböző testautomorfizmusok.

A.1.2. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan leképezés, amely minden $x, y \in R$ esetén teljesíti a*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{és} \qquad f(xy) = f(x)f(y)$$

azonosságokat. Ekkor f vagy az azonosan 0 leképezés vagy az identitás $\mathbb{R}$-en.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ leképezés eleget tesz a tételbeli feltételeknek. Erre fennáll

$$\begin{aligned} f(0) &= f(0+0) = f(0) + f(0), \\ f(1) &= f(1 \cdot 1) = f(1)^2, \end{aligned}$$

amiből következik, hogy $f(0) = 0$ és $f(1) = 0$ vagy $f(1) = 1$. Ha $f(1) = 0$, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = f(1x) = 0f(x) = 0,$$

azaz f az azonosan nulla leképezés. Tegyük fel a továbbiakra, hogy $f(1) = 1$.

Mivel $0 = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$, így $f(-x) = -f(x)$. Ha n pozitív egész, akkor

$$f(n) = f(1 + \ldots + 1) = f(1) + \ldots + f(1) = n$$

teljesül. Ha $n < 0$ negatív egész, akkor $f(n) = -f(-n) = -(-n) = n$. Ha $r = n/m \in \mathbb{Q}$, ahol $n, m \in \mathbb{Z}$ egészek, akkor

$$n = f(n) = f(rm) = f(r)f(m) = f(r)m,$$

amiből $f(r) = n/m = r$ adódik, azaz f **az identitás a racionális számok halmazán.**

Megmutatjuk, hogy f **szigorúan monoton növő,** vagyis $x < y$ esetén $f(x) < f(y)$ teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}$ valós szám esetén. Ekkor ugyanis létezik egy $a > 0$ valós szám, amelyre $y = x + a^2$ áll fenn, amiből azt kapjuk, hogy

$$f(y) = f(x + a^2) = f(x) + f(a)^2 > f(x).$$

Tegyük végül fel, hogy létezik $x \in \mathbb{R}$ valós szám, amelyre $f(x) \neq x$. Mivel $f(x)$ is valós, így ekkor létezik egy $r \in \mathbb{Q}$ racionális szám, amely x és $f(x)$ közé esik, ha például $x < f(x)$, akkor $x < r < f(x)$. Az f monotonitása miatt viszont

$$x < r \implies f(x) < f(r) = r$$

következik, tehát ellentmondáshoz jutottunk. Nyilván ugyanígy ellentmondást kapunk, ha $x > f(x)$-et tételezzük fel. Vagyis egyetlen $x \in \mathbb{R}$ esetén sem állhat fent $x \neq f(x)$, azaz $f = \mathrm{id}$. □