Kiegészítések Kurusa Árpád és Szemők Árpád *A számítógépes ábrázoló geometria alapjai* c. könyvéhez

Nagy Gábor P.

2005. szeptember 5.

Tartalomjegyzék

1. Vetítések

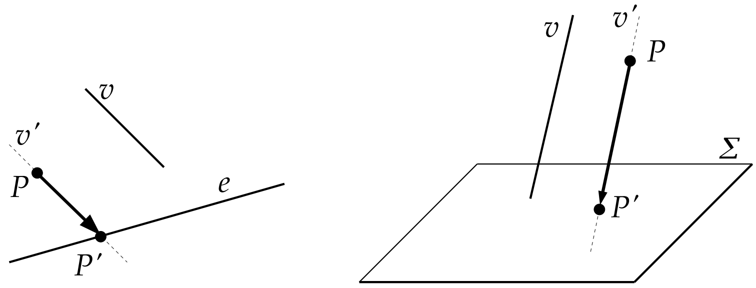
Ábrázolás alatt a továbbiakban olyan megfeleltetést értünk, mely a közönséges tér bizonyos objektumaihoz (pontok, egyenesek, görbék, stb.) egy rögzített sík bizonyos objektumait (pontok, pontpárok, stb.) rendeli hozzá. A legkézenfekvőbb ilyen hozzárendelés a párhuzamos és a középpontos vetítés, ezek közismerten fontos szerepet játszanak a képi ábrázolásban is.

1.1. Vetítések a közönséges síkon és térben

1.1. Definíció. 1. *Adottak a síkon e, v egyenesek, $e \nparallel v$, és a P pont. Legyen $P' = e \cap v'$, ahol v' a P-n átmenő, v-vel párhuzamos egyenes. Ekkor P'-t a P pont* **e-re vett v irányú párhuzamos vetületének** *nevezzük.*

2. *Adott a térben a Σ sík, a v egyenes, $v \nparallel \Sigma$, és a P pont. Legyen $P' = \Sigma \cap v'$, v' a P-n átmenő, v-vel párhuzamos egyenes. Ekkor P'-t a P pont* **Σ-ra vett v irányú párhuzamos vetületének** *nevezzük.*

A fenti típusú leképezéseket összefoglaló néven **párhuzamos vetítésnek** *nevezzük.*



1. ábra. Párhuzamos vetítés a síkon és a térben

Láthatjuk, hogy a vetítés *iránya* alatt a szokásos „vektorszerű" kép helyett egy egyenest, pontosabban annak párhuzamossági osztályát értjük. Az is világos, hogy a párhuzamosságokat kizáró feltételeink szükségesek, mert különben a vetület nem létezik.

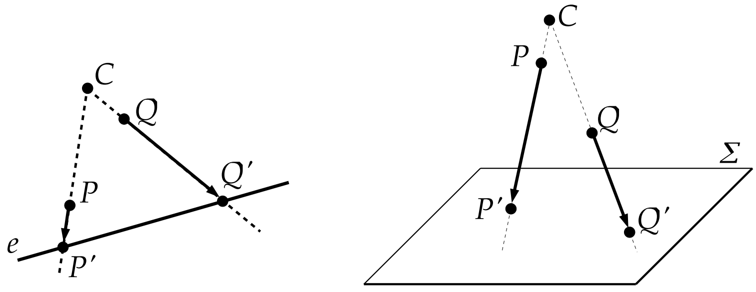
1.2. Definíció. *Legyenek A, B, C egy egyenesre eső különböző pontok. Az A, B, C pontok* **osztóviszonya** *alatt az*

$$(ABC) = \frac{|AC|}{|CB|}$$

értéket értjük, ahol $|AC|$ és $|CA|$ **előjeles távolságot jelent,** *azaz a két érték azonos előjelű, ha A és B közrefogja C-t, és ellenkező előjelű, ha nem.*

Könnyű meggondolni, hogy ha az A, B, C pontok közül ismerek kettőt, és ismerem az (ABC) osztóviszony értékét, akkor a harmadikat egyértelműen meg tudom határozni.

1.3. Állítás. *A párhuzamos vetítés egyenes-, párhuzamosság- és osztóviszony-tartó. Azaz, ha A, B, C egy egyenesre eső különböző pontok, akkor A', B', C' párhuzamos vetületük is egy egyenesre esik. Továbbá, amennyiben A', B', C' különbözőek, akkor $(ABC) = (A'B'C')$.*



2. ábra. Középpontos vetítés a síkon és a térben

Bizonyítás. Következik a tér illeszkedési tulajdonságaiból, valamint a párhuzamos szelők tételéből. □

1.4. Definíció. *1. Adott a síkban az e egyenes és a P és C pontok, $C \notin e$, $P \neq C$. Ekkor a $P' = e \cap PC$ pontot a P pont* e**-re vett,** C **középpontú centrális vetületének** *nevezzük.*

2. Adott a térben a Σ sík és a P és C pontok, $C \notin e$, $P \neq C$. Ekkor a $P' = e \cap PC$ pontot a P pont Σ**-ra vett,** C **középpontú centrális vetületének** *nevezzük.*

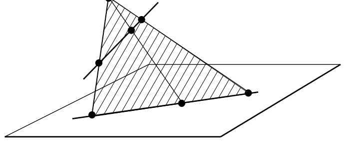
A fenti leképezéseket összefoglaló néven **centrális** *vagy* **középpontos vetítésnek** *nevezzük.*

Rögzítsük a síkbeli e egyenest és a C pontot. Világos, hogy a síknak csak azon pontjait tudom e-re középpontosan vetíteni C-ből, melyekre $e \nparallel PC$. A vetülettel nem rendelkező pontok a P-n átmenő, e-vel párhuzamos e' egyenest alkotják. A térbeli vetítésnél hasonló a helyzet. Rögzített Σ és C esetén pontosan a $P \notin \Sigma'$ pontoknak létezik Σ-ra vett vetületük, ahol Σ' a C-n átmenő, Σ-val párhuzamos sík.

1.5. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $P_1, \cdots, P_n$ pontok* **kollineárisak,** *ha létezik olyan egyenes, melyre mindegyik illeszkedik. Egy ponthalmazok közötti leképezést* **egyenestartónak** *nevezünk, ha kollineáris pontok képei kollineárisak.*

1.6. Állítás. *A középpontos vetítés egyenestartó.*

Bizonyítás. A C centrumon átmenő L egyenes vetület a Σ síkra az $\ell \cap \Sigma$ pont. A C-n nem átmenő ℓ egyenes vetülete a $\Delta \cap \Sigma$ egyenes, ahol Δ az ℓ egyenes és a C pont közös síkja. □



3. ábra: Egyenestartás.

Fontos, mindenki által tapasztalt tény, hogy a térbeli középpontos vetítés **nem párhuzamosságtartó.**

Már síkbeli vetítések esetén könnyen adhatunk példát olyanra, melynél a pontok osztóviszonya középpontos vetítésnél nem őrződik meg. Részletes tárgyalás nélkül megemlítjük, hogy ezzel szemben osztóviszonyok hányadosa már invariáns a középpontos vetítésre.

1.7. Definíció. *Legyenek A, B, C, D egy egyenesre eső különböző pontok. Az A, B, C, D pontok* **kettősviszonya** *alatt az*

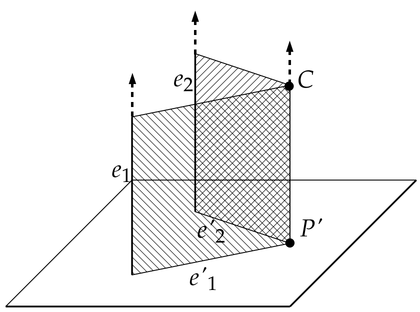
$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}$$

hányadost értjük.

1.8. Tétel (Papposz-Steiner). *A középpontos vetítés kettősviszonytartó.*

1.2. A sík és tér kiterjesztése

A középpontos vetítés már említett fontos tulajdonsága, hogy nem tartja meg a párhuzamosságot. Valójában azt látjuk, hogy az e_1, e_2 párhuzamos egyenesek e'_1, e'_2 képei metszik egymást a $P' = e'_1 \cap e'_2$ pontban. Természetesen az e_1, e_2 egyenesen nincs olyan *közönséges* pont, melynek képe P' lenne. Képzeljünk hozzá ezekhez az egyenesekhez egy *végtelen távoli P* pontot, mondjuk azt, hogy a *párhuzamos egyenesek a végtelenben találkoznak*, és nevezzük P'-t a P végtelen távoli pont vetületének! Mint rövidesen kiderül, ez a gondolatkisérlet matematikai szempontból nagyon is következetes, jól használható fogalmakhoz vezet.



4. ábra: Találkozás a végtelenben

1.9. Definíció. *Jelölje $\mathcal{P}$, $\mathcal{E}$ és $\mathcal{S}$ a közönséges sík pontjainak, egyeneseinek, illetve síkjainak halmazát. Legyen $\mathcal{P}_\infty$ az egyenesek, $\mathcal{E}_\infty$ pedig a síkok párhuzamossági osztályainak a halmaza és definiáljuk az alábbi halmazokat:*

A $\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \cup \mathcal{P}_\infty$ halmaz elemeit **projektív pontoknak;**

a $\mathcal{E}^* = \mathcal{E} \cup \mathcal{E}_\infty$ halmaz elemeit **projektív egyeneseknek;**

a $\mathcal{S}^* = \mathcal{S} \cup \{(\mathcal{P}_\infty, \mathcal{E}_\infty)\}$ halmaz elemeit pedig **projektív síkoknak** *nevezzük.*

A nem közönséges projektív elemeket **végtelen távoli elemeknek** *nevezzük. A közönséges elemek közötti illeszkedési relációt terjesszük ki a projektív elemekre az alábbi módon.*

1. *A $\Sigma_\infty = (\mathcal{P}_\infty, \mathcal{E}_\infty)$ végtelen távoli sík pontosan a végtelen távoli pontokra és egyenesekre illeszkedik.*

2. *A síkok $e \in \mathcal{E}_\infty$ párhuzamossági osztálya pontosan az általa tartalmazott közönséges síkokra illeszkedik mint végtelen távoli egyenes.*

3. *Az $e \in \mathcal{E}_\infty$ végtelen távoli egyenes pontosan akkor illeszkedik a $P_\infty \in \mathcal{P}_\infty$ végtelen távoli pontra, ha az e_∞ osztályba tartozó síkok párhuzamosak a P_∞ osztályba tartozó egyenesekkel.*

4. *Az e közönséges egyenesre illeszkedő egyetlen végtelen távoli pont az e párhuzamossági osztálya.*

5. *A Σ közönséges síkra illeszkedő végtelen távoli pontok pontosan a Σ-val párhuzamos egyenesek párhuzamossági osztályai.*

6. *A Σ közönséges egyenesre illeszkedő egyetlen végtelen távoli egyenes a Σ párhuzamossági osztálya.*

Nevezzük **projektív térnek** *azt a rendszert, amit a $\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \cup \mathcal{P}_\infty$, $\mathcal{E}^* = \mathcal{E} \cup \mathcal{E}_\infty$, $\mathcal{S}^* = \mathcal{S} \cup \mathcal{S}_\infty$ halmazok a tartalmazásra nézve alkotnak. A $\mathcal{P}^*$, $\mathcal{E}^*$, $\mathcal{S}^*$ halmazok elemeit összefoglaló módon projketív pontoknak, projektív egyeneseknek és projektív síkoknak hívjuk.*

Megjegyzés. A végtelen távoli elemeket szokás **ideális** elemeknek is nevezni.

A fentiek alapján minden projektív egyenes projektív pontok halmaza, valamint minden projektív sík projektív pontok és egyenesek halmaza. Emellett a szóhasználat mellett a geometriában szokásos módon beszélünk *pontokat összekötő egyenesről, feszített síkról* és *kitérő egyenesekről.*

1.10. Tétel (A projektív tér illeszkedési tulajdonságai).

1. *Bármely két projektív ponthoz pontosan egy mindkettőt tartalmazó projektív egyenes van.*

2. *Bármely projektív ponthoz és őt nem tartalmazó projektív egyeneshez pontosan egy mindkettőt tartalmazó projektív sík van.*

3. *Két projektív egyenesnek legfeljebb egy közös pontja van. Ha létezik közös pont, akkor a két egyenest pontosan egy sík tartalmazza. Ha nem létezik közös projektív pont, akkor közös projektív sík sem.*

4. *Bármely projektív egyenesnek és őt nem tartalmazó projektív síknak pontosan egy közös pontja van.*

5. *Bármely két projektív sík metszete projektív egyenes.* □

Láthatjuk, hogy illeszkedési szempontból a projektív térben a pontok és az síkok szerepe felcserélhető. Ugyanez elmondható a pontok és az egyenesek szerepéről, ha egy rögzített projektív síkra szorítkozunk. Ebből az észrevételből származó elvet **dualitásnak** nevezzük.

1.3. Perspektivitások

1.11. Definíció. *Legyenek Σ_1, Σ_2 rögzített projektív síkok és C projektív pont, $C \notin \Sigma_1, \Sigma_2$. A C középpontú $\Sigma_1 \to \Sigma_2$ centrális vetítést a két sík közötti C* **centrumú perspektivitásnak** *nevezzük.*

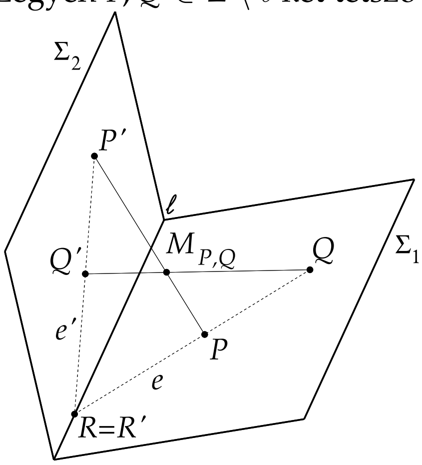
A projektív tér illeszkedési tulajdonságaiból következik az alábbi állítás.

1.12. Állítás. *A perspektivitások egyenes- és kettősviszonytartó bijekciók. A kiindulási és a képsík metszetegyenesének minden pontja fixpont.* □

Ezen állítás megfordítása is igaz; így megkapjuk a perspektivitások egyszerű és nagyon hasznos jellemzését.

1.13. Tétel (Perspektivitások jellemzése). *Legyenek Σ_1, Σ_2 rögzített projektív síkok és $\tau : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ olyan egyenestartó bijektív leképezés, amelynél minden $P \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ pont esetén $\tau(P) = P$ teljesül. Ekkor τ C centrumú perspektivitás valamely $C \notin \Sigma_1, \Sigma_2$ projektív pontra.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $\tau : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ leképezés fixen hagyja a két sík $\ell = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ metszetének minden pontját. Legyen $P, Q \in \Sigma \setminus \ell$ két tetszőleges pont és jelölje R az ℓ és a PQ egyenesek metszéspontját. Mivel a τ egyenestartó, így a P, Q, R és a $P' = \tau(P), Q' = \tau(Q), R' = \tau(R)$ pontok közös $e \subset \Sigma_1$, $e' \subset \Sigma_2$ egyenesre esnek. Ezen két e, e' egyenesnek $R = R'$ közös pontja, ezért az általuk meghatározott Δ sík tartalmazza a P, Q, P', Q' pontokat. Ekkor viszont a PP', QQ' egyenesek metszik egymást, jelölje a metszéspontot $M_{P,Q}$.
A Σ_1-beli $T \notin PQ$ pont esetén a PP', QQ', TT' egyenesek nem esnek közös síkba, viszont páronként metszik egymást az $M_{P,Q}$, $M_{P,T}$, $M_{Q,T}$ pontokban, ami csak úgy lehetséges, ha $M_{P,Q} = M_{P,T} = M_{Q,T}$. Végezetül, hasonló okból az $S \in PQ$ pont esetén $M_{P,S} = M_{S,T} = M_{P,T} = M_{P,Q}$. Azt látjuk tehát, hogy $M_{P,Q}$ független Q-tól, és ekkor $M_{P,Q} = M_{Q,P}$ miatt P-től is. Ez azt jelenti, hogy a $Z = M_{P,Q}$ pontra minden $P \in \Sigma_1$ esetén teljesül $\tau(P) = MP \cap \Sigma_2$, vagyis τ a közönséges vagy végtelen távoli Z-ből vett vetítés. □



5. ábra: Térbeli vetítés

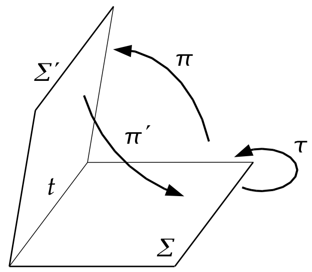
1.4. Tengelyes kollineációk

1.14. Definíció. *A rögzített* Σ *projektív sík önmagára vett egyenestartó bijekcióját* Σ **kollineációjának** *nevezzük.*

1.15. Definíció. *Legyen* τ *a* Σ *projektív sík kollineációja. Azt mondjuk, hogy a* t *egyenes a* τ **tengelye,** *ha* t *minden pontja fixpont. Duális módon, a* C *pont a* τ **centruma,** *ha minden* C*-n átmenő egyenes fixegyenes. Végezetül, amennyiben* τ*-nak van tengelye és centruma, akkor* τ*-t* **tengelyes** *vagy más szóval* **centrális-axiális kollineációnak** *nevezzük.*

1.16. Állítás. *Legyen* τ *a* Σ *projektív sík kollineációja és tegyük fel, hogy a* $t \subset \Sigma$ *egyenes* τ *tengelye. Ekkor* τ *előállítható két térbeli perspektivitás szorzataként.*

Bizonyítás. Tekintsük a Σ-tól különböző, t-n átmenő tetszőleges Σ' projektív síkot és legyen $C \notin \Sigma, \Sigma'$ tetszőleges projektív pont. Legyen π a C centrumú $\Sigma \to \Sigma'$ perspektivitás. Mivel mind τ, mind pedig π egyenestartó bijekciók, melyekre nézve t pontjai fixek, ugyanez igaz a $\pi' = \tau \circ \pi^{-1} : \Sigma' \to \Sigma$ leképezésre. A perspektivitásokat jellemző 1.13 tétel szerint ekkor π' C' centrumú perspektivitás valamely $C' \notin \Sigma, \Sigma'$ pontra. A definícióból adódik $\tau = \pi' \circ \pi$. □



6. ábra: Perspektivitások szorzata

1.17. Következmény. *Egy kollineációnak akkor és csak akkor van tengelye, ha van centruma is.*

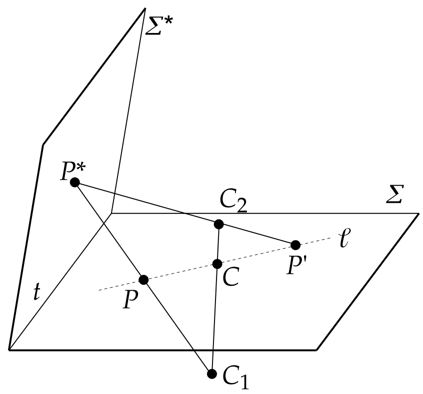
Bizonyítás. Az előző állítás szerint ha a τ kollineációnak van tengelye, akkor előáll két perspektivitás szorzataként. Legyen C, C' ezen perspektivitások centruma. Ha $C = C'$, akkor τ az identitás, ekkor minden pont centrum. Ha $C \neq C'$, akkor a CC' egyenesnek a Σ síkkal vett C^* metszéspontja τ centruma lesz. Ennek leellenőrzését az olvasóra bízzuk. Az állítás második fele a síkbeli dualitás elvének felhasználásával bizonyítható. □

A következő tétel azt mutatja, hogy a projektív síkoknak "nagyon sok" tengelyes kollineációja van.

1.18. Tétel (Tengelyes kollineációk létezése). *Legyen* Σ *tetszőleges projektív sík, ennek* t *tetszőleges egyenese és* C, P, P' *tetszőleges különböző kollineáris pontjai,* $P, P' \notin t$*. Ekkor létezik* Σ*-nak olyan egyértelműen meghatározott* τ *tengelyes kollineációja, melynek* t *tengelye,* C *centruma, és* $\tau(P) = P'$*.*

Bizonyítás. Jelölje ℓ a C, P, P' pontok közös egyenesét. Vegyük fel a tetszőleges t-n átmenő, Σ-tól különböző Σ^* síkot és a tetszőleges térbeli $C_1 \notin \Sigma, \Sigma'$

pontot. Jelölje Δ az ℓ egyenes és a C_1 pont közös síkját. Mivel $P \in \ell \subset \Delta$, ezért a C_1P egyenesnek és a Σ' síknak az P^* metszéspontja benne van Δ-ban. Hasonlóan, a P^*P' egyenes része Δ-nak. A projektív síkok illeszkedési tulajdonságai szerint a Δ-beli P^*P' és CC_1 egyenesek metszik egymást egy C_2 pontban.



7. ábra: Tengelyes kollineáció létezése.

Jelölje $\pi_1 : \Sigma \to \Sigma^*$, illetve $\pi_2 : \Sigma^* \to \Sigma$ a C_1 illetve C_2 centrumú perspektivitásokat, és legyen $\tau : \pi_2 \circ \pi_1$. Nyilván τ t tengelyű kollineácó Σ-n. Mivel $\pi_1(P) = C_1P \cap \Sigma^* = P^*$, és $\pi_2(P^*) = C_2P^* \cap \Sigma = P'$, ezért $\tau(P) = P'$. Végezetül, $C_1C_2 \cap \Sigma = C$, amiből könnyen belátható, hogy C τ centruma.

τ egyértelműsége a szokásos módon adódik: Tegyük fel, hogy τ_1, τ_2 kielégíti a tétel feltételeit, ekkor $\tau_0 = \tau_2^{-1} \circ \tau_1$ olyan kollineáció, melynek t tengelye, C centruma, $P \notin t$ pedig fixpontja. Bármely P-n átmenő ℓ egyenesen két fixpont van, nevezetesen P és $t \cap \ell$, azaz ℓ fixegyenes. Ebből adódik, hogy P is centruma τ_0-nak. Az olvasóra bízzuk annak belátását, hogy két különböző centruma csak az identitásnak lehet. Tehát $\mathrm{id} = \tau_2^{-1} \circ \tau_1$, azaz $\tau_1 = \tau_2$. □

Térjünk vissza a közönséges térbe. Itt a párhuzamos vetítés nyilván egy végtelen távoli pontból történő vetítésnek felel meg. Azt is könnyen láthatjuk, hogy közönséges síkok között a párhuzamos vetítés bijekció, azaz a kiindulási sík végtelen távoli egyenesének képe a képsík végtelen távoli egyenese. Középpontos vetítés esetén két lehetőség van: párhuzamos vagy metsző síkok között vetítünk. Az első esetben a vetítés bijektív, míg a másodikban nem, ekkor a képsík végtelen távoli egyenese egy közönséges egyenes vetülete lesz.

Tekintsük most a közönséges sík tengelyes kollineációit. Ha a C_1 pontot végtelen távolinak válaszjuk, akkor az alábbi lehetőségek vannak.

1. A tengely és a centrum egyaránt végtelen távoli elem. Ekkor $\Sigma \parallel \Sigma^*$ és C_2 is végtelen távoli pont lesz. A kollineációnk közönséges párhuzamos eltolás.

2. A tengely a sík végtelen távoli egyenese, a centrum közönséges pont. Ekkor szintén $\Sigma \parallel \Sigma^*$, C_2 közönséges pont lesz, a kollineáció pedig középpontos nyújtás.

3. A tengely közönséges egyenes, a centrum végtelen távoli pont. Ekkor a végtelen távoli egyenes illeszkedik a centrumra, tehát fixegyenes, és a kollineáció bijektív a közönséges síkon.

Valójában ebben az esetben még megkülönböztethetünk két alesetet, amikor is a centrum a tengely végtelen távoli pontja, illetve amikor a centrum nem illeszkedik a tengelyre. Mindkét alesetben $\Sigma \nparallel \Sigma^*$ és C_2 végtelen távoli pont.

4. A tengely és a centrum közönséges pontok. Ekkor a végtelen távoli egyenes nem lehet fixegyenes (meggondolandó!), azaz a kollineáció nem bijektív a közönséges síkon. Ekkor van egy közönséges egyenes a síkon, melynek képe a végtelen távoli egyenes. Más szóval, ha két egyenes metszéspontja a végtelen távoli egyenes ősképére esik, akkor az egyenesek képei a végtelen távolban metszik egymást, vagyis párhuzamosak.

A fenti diszkusszióból következnek az alábbi eredmények.

1.19. Állítás. *(i) Az olyan tengelyes kollineációk, melyeknek tengelye vagy centruma végtelen távoli, a közönséges sík egyenes- és osztóviszonytartó bijekcióját határozzák meg.*

(ii) Azon tengelyes kollineációk, melyek tengelye közönséges egyenes, centruma pedig végtelen távoli, előállnak két párhuzamos vetítés szorzataként.

Bizonyítás. Csak az (ii) pont szorul némi magyarázatra. A fenti első három pont szerint minden ilyen kollineáció két osztóviszonytartó leképezés szorzata. Csakugyan, a párhuzamos síkok közti vetítés, illetve a metsző síkok közti párhuzamos vetítés a párhuzamos szelők tétele szerint megtartja az osztóviszonyt. □

1.5. Affinitások

1.20. Definíció. *Két közönséges sík közötti egyenes- és osztóviszonytartó leképezéseket* **affin leképezéseknek** *nevezzük. Bijektív affin leképezés esetén* **affin transzformációról** *beszélünk. Egy sík önmagára vett affin transzformációját* **affinitásnak** *nevezzük.*

1.1. Példa. Az egybevágósági transzformációk mind affinitások. Másik fontos példa az olyan tengelyes kollineációk, melyek tengelye közönséges egyenes, a centruma pedig végtelen távoli pont.

1.21. Lemma. *Adott a közönséges sík t egyenese és $P, P' \notin t$ pontjai. Ekkor létezik az egyértelműen meghatározott τ affinitás, melynek t tengelye és melyre $\tau(P) = P'$.*

Bizonyítás. Ha $P = P'$, akkor legyen $\tau = \mathrm{id}$. Tegyük fel, hogy $P \neq P'$ és legyen C a PP' egyenes végtelen távoli pontja. A tengelyes kollineációk létezéséről szóló 1.18 tétel szerint létezik a kibővített projektív sík egy τ_0 kollineációja, melynek t tengelye, C centruma és $\tau_0(P) = P'$. Az 1.19 állítás szerint τ_0 meghatározza a közönséges sík olyan τ affinitását, mely a lemma feltételeinek megfelel. Az unicitás bizonyítását az olvasóra bízzuk. □

1.22. Állítás. *Legyen P_0, P_1, P_2 és Q_0, Q_1, Q_2 a közönséges sík két nem kollineáris ponthármasa. Ekkor létezik az egyértelműen meghatározott τ affinitás, melyre $\tau(P_0) = Q_0$, $\tau(P_1) = Q_1$ és $\tau(P_2) = Q_2$.*

Bizonyítás. Legyen t_1 tetszőleges, P_0, Q_0-t nem tartalmazó egyenes. Az 1.21 lemma szerint létezik α_1 affinitás t_1 tengellyel, melyre $\alpha_1(P_0) = Q_0$. Legyen $P_1' = \alpha_1(P_1)$, $P_2' = \alpha_2(P_2)$ és t_2 tetszőleges egyenes, mely átmegy Q_0-on és nem tartalmazza P_1', Q_1-t. Az említett lemma szerint ismét létezik α_2 affinitás, melynek t_2 tengelye, és $\alpha_2(P_1') = Q_1$. Mivel $Q_0 \in t_2$, ezért $\alpha_2(Q_0) = Q_0$. Végezetül, legyen α_3 olyan affinitás, melynek tengelye a Q_0Q_1 egyenes, és amely a $P_2'' = \alpha_2(P_2')$ pontot Q_2-be viszi, ennek Q_0 és Q_1 fixpontjai.

Definiáljuk a $\tau = \alpha_3 \circ \alpha_2 \circ \alpha_1$ affinitást. Könnyen leellenőrizhető, hogy az α_i-k választása miatt τ a P_0, P_1, P_2 pontokat rendre a Q_0, Q_1, Q_2 pontokba viszi.

Az unicitás belátásához tegyük fel, hogy a τ_1, τ_2 leképezések kielégítik a kívánt feltételeket. Ekkor a $\tau = \tau_2^{-1} \circ \tau_1$ affinitásnak van három nem kollineáris fixpontja, nevezetesen P_0, P_1, P_2. Az τ osztóviszonytartásából következik, hogy a P_0P_1, P_0P_2, P_1P_2 egyenesek minden pontja τ fixpontja. Ekkor viszont minden egyenes fixegyenes, hiszen minden egyenes legalább két pontban metszi ezt a három egyenest, azaz minden egyenesen legalább két fixpont van. Ez azt jelenti, hogy minden pont τ fixpontja, azaz $\tau = \mathrm{id}$ és $\tau_1 = \tau_2$. □

Ennek az állításnak számos következménye van.

1.23. Következmény. *Minden affinitás előáll térbeli párhuzamos vetítések szorzataként.*

Bizonyítás. Valóban, a fenti állítás bizonyításában megmutattuk, hogy minden affinitás olyan tengelyes kollineációk szorzata, melyek tengelye közönséges egyenes, centrumuk pedig végtelen távoli pont. Ezek az 1.19 állítás szerint párhuzamos vetítések szorzatai. □

1.24. Állítás. *Adottak a közönséges térben a Σ, Σ' síkok és ezeken a P_0, P_1, P_2 és P_0', P_1', P_2' nem kollineáris ponthármasok. Ekkor létezik a két sík között az egyértelműen meghatározott τ affin transzformáció, melyre a P_0, P_1, P_2 pontokat rendre a P_0', P_1', P_2' pontokba viszi.*

Bizonyítás. Tetszőleges π párhuzamos vetítéssel vetítsük Σ'-t Σ-ra és jelölje Q_0, Q_1, Q_2 a P_0', P_1', P_2' pontok vetületeit. A fenti állítás szerint létezik τ_0 affinitás, melyre $\tau(P_0) = Q_0$, $\tau(P_1) = Q_1$ és $\tau(P_2) = Q_2$. Ekkor $\tau = \pi^{-1} \circ \tau_0$ megfelelő affin transzformáció. Az unicitás bizonyítását az olvasóra bízzuk. □

1.25. Következmény. *Minden affin transzformáció előáll párhuzamos vetítések szorzataként.* □

Ebből azonnak adódik az affin transzformációk alaptétele.

1.26. Tétel (Affin transzformációk alaptétele). *Az affin transzformációk pontosan a párhuzamos vetítések szorzataként előálló bijektív leképezések.* □

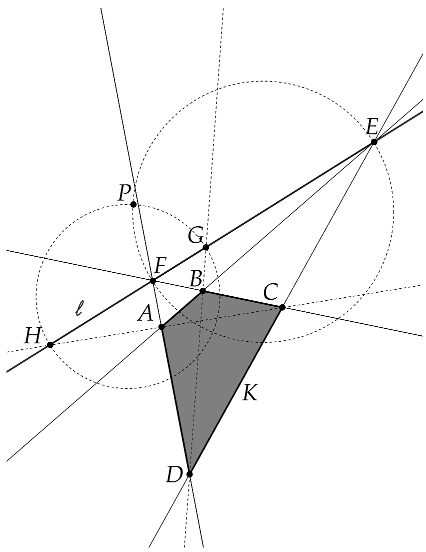
2. Ábrázolások

2.1. A perspektivikus ábrázolás

Perspektivikus ábrázolás alatt a közönséges tér középpontos levetítését értjük egy rögzített síkra, ez utóbbit az ábrázolás **képsíkjának** nevezzük. A vetítés centrumát általában S-el jelöljük, és a **szempont** megnevezést használjuk.

2.1. Állítás. *Legyenek A, B, C, D a K négyszög csúcsai a közönséges síkon és tegyük fel, hogy a szemközti AB, CD illetve BC, DA oldalpárok közül legalább az egyik nem párhuzamos. Ekkor létezik a kibővített síknak olyan φ tengelyes kollineációja, amely az A, B, C, D pontokat egy egységnégyzet négy egymást követő csúcsaiba viszi.*

Bizonyítás. Jelölje ℓ az $E = AB \cap CD$ és $F = BC \cap DA$ metszéspontokat összekötő egyenest. A feltétel szerint legalább az egyik metszéspont közönséges, azaz ℓ közönséges egyenes. Az olvasóra bízzuk annak meggondolását, hogy az ℓ egyenesen az E, F illetve $H = \ell \cap AC$ és $G = \ell \cap BD$ pontok elválasztják egymást a szemléletes értelemben. Ekkor az E, F illetve H, G szakaszok fölé rajzolt Thálész-köröknek létezik metszéspontjuk, jelöljünk az egyiket P-vel. (Lásd a 8. ábrát.) Amennyiben az E, F valamelyike végtelen távoli, akkor Thálész-kör helyett a másikba állított ℓ-re merőleges egyenest veszünk, és hasonlóan járunk el, ha H, G valamelyike végtelen tá-



8. ábra: Tengelyes perspektivitás

voli.

Vegyük most a tetszőleges, ℓ-el párhuzamos t egyenest a $t \neq \ell$ és $P \notin t$ feltételekkel, és legyen φ_1 egy olyan t tengelyű és P centrumú centrális-axiális kollineáció, amely ℓ-et az ℓ^∞ végtelen távoli egyenesbe viszi. Az 1.18 tétel (pontosabban annak duálisa) szerint ilyen φ_1 létezik. Legyen $A' = \varphi_1(A)$, $B' = \varphi_1(B)$, $C' = \varphi_1(C)$, $D' = \varphi_1(D)$.

Mivel az AB és CD egyenesek E metszéspontja ℓ-en fekszik, $A'B' \parallel C'D'$. Hasonlóan, $B'C' \parallel D'A'$, tehát a $K' = A'B'C'D'$ négyszög paralelogramma. Az AB és PE egyenesek metszéspontja szintén ℓ-beli, ezért $A'B'$ párhuzamos PE képével, ami viszont saját maga, mert P centrum. Tehát $A'B' \parallel PE$ és hasonló okból $A'D' \parallel PF$. Mivel P illeszkedik az EF szakasz Thálész-körére, ezért $PE \perp PF$, és így $A'B' \perp A'D'$, vagyis K' téglalap.

Hasonló trükkel mutatjuk meg, hogy K' átlói merőlegesek egymásra: $AC \cap PH \in \ell$, így $A'C' \parallel PH$; hasonlóan $B'D' \parallel PG$, és mivel a $PHG\triangle$ derékszögű, $A'C' \perp B'D'$. Ez azt jelenti, hogy a K' téglalap átlói merőlegesek egymásra, azaz K' négyzet.

Végezetül jelölje φ_2 a P centrumú, $1/a$ arányú középpontos nyújtást, ahol a a K' négyzet oldalhossza és legyen $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$. Ekkor nyilván φ egy P centrumú tengelyes kollineáció, amely az $ABCD$ négyszöget egységnégyzetbe viszi. φ_2 tengelye a végtelen távoli egyenes, így φ tengelyének közönségesnek kell lennie, mert különben $\varphi_1 = \varphi_2^{-1} \circ \varphi$ tengelye is a végtelen távoli egyenes lenne. Tehát φ a keresett tengelyes perspektivitás. $\square$

Rögzítsük a Π képsíkot és a rá merőleges Γ **tárgysíkot.**

2.2. Definíció. *A Γ tárgysíknak a $\Gamma \cap \Pi$ egyenes menti $90°$-os elforgatását a* **tárgysík képsíkba való beforgatásának** *nevezzük.*

2.3. Tétel (A perspektivikus ábrázolás alaptétele). *Adott a K konvex négyszög, melynek legalább az egyik szemközti oldalpárja nem párhuzamos, adottak a Γ, Π metsző síkok és adott az $a > 0$ szám. Ekkor létezik egy a oldalú N négyzet a Γ síkban és egy $S \notin \Gamma, \Pi$ pont, hogy az N négyzet S szempontó perspektivikus képe (azaz középpontos vetülete) egybevágó K-val.*

Bizonyítás. Helyezzük el az N egységnégyzetet Γ-ban. A 2.1 állítás szerint létezik α tengelyes perspektivitása Γ-nak, amelyre $\alpha(N)$ egybevágó K-val. Mozgassuk el N-et Γ-n úgy, hogy α tengelye egybeessék a Γ és Π síkok ℓ metszetével. Jelölje β a Γ sík ℓ körüli beforgatását Π-be és definiáljuk a $\varphi = \beta \circ \alpha$ leképezést. Egyrészt φ olyan egyenestartó leképezés Γ és Π között, amely a végtelen távoli elemekkel bővített síkok közt bijekciót határoz meg. Másrész φ fixen hagyja ℓ minden pontját, hiszen ugyanezt teszi α és β is. Az 1.13 tétel szerint ekkor φ vetítés. Mivel egy négyzet párhuzamos vetülete paralelogramma, ezért φ csak középpontos vetítés lehet. A vetítés centrumát S-sel jelölve a tételt bebizonyítottuk az $a = 1$ esetre.

Tetszőleges $a > 0$ esetén rögzítsünk egy N' egységnégyzetet Γ-ban és S' szempontot úgy, hogy N' S-ből vett vetülete Π-re hasonló legyen K-hoz $1/a$ aránnyal. A teret egy $\Gamma \cap \Pi$-beli pontból a-szorosára nagyítva olyan a oldalú N négyzetet kapunk , melynek középpontos vetülete egybevágó K-val. $\square$

2.2. Az axonometrikus ábrázolás

Axonometrikus ábrázolás alatt a tér párhuzamos vetítését értjük egy rögzített síkra. A merőleges vetítés az axonometrikus ábrázolás egy speciális esete.

2.4. Definíció. *Azokat tengelyes kollineációkat, ahol a tengely közönséges egyenes, a centrum pedig a tengelyre merőleges egyenesek közös végtelen távoli pontja,* **merőleges nyújtásnak** *nevezzük.*

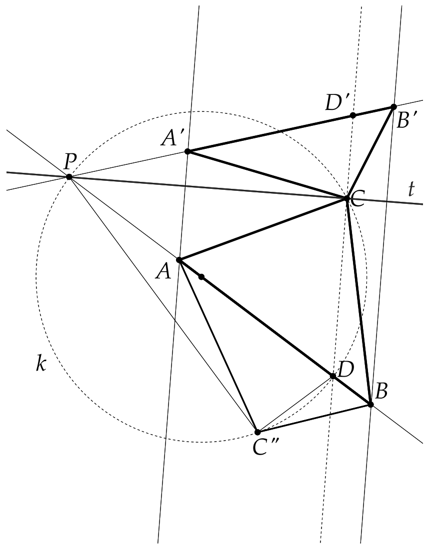
Meggondolható, hogy a merőleges nyújtásokat a t tengelyük mellett egy $\lambda \neq 0$ szám határozza meg. Ekkor ugyanis minden $P \notin t$ pont esetén

$$\frac{|TP|}{|TP'|} = \lambda,$$

ahol T a P pont t-re vett vetülete, P' pedig P képe, és $|TP|, |TP'|$ előjeles távolságot jelöl. Például, $\lambda = -1$ esetén a szóbanforgó affinitás a t-re vett tengelyes tükrözés.

2.5. Tétel. *Adott $ABC\triangle$ és $A_0B_0C_0\triangle$ háromszögekhez létezik ψ merőleges nyújtás, amelynek tengelye átmegy C-n és amely az $ABC\triangle$-t egy $A_0B_0C_0\triangle$-höz hasonló háromszögbe viszi.*

Bizonyítás. Legyen α olyan hasonlósági transzformáció, amelyre $\alpha(A_0) = A$ és $\alpha(B_0) = B$, ennek létezésének bizonyítását az olvasóra bízzuk. Definiáljuk a $C'' = \alpha(C_0)$ pontot és jelölje k azt a kört, amelynek a középpontja az AB egyenesen van és tartalmazza C-t és C''-t. Jelölje D, P a k kör AB-n fekvő átmérőjének két végpontját. Legyen β olyan hasonlósági transzformáció, amely P-t fixen hagyja és C''-t a C pontba viszi és tekintsük az $A' = \beta(A)$, $B' = \beta(B)$, $D' = \beta(D)$ pontokat. (Lásd a 9. ábrát.) Ekkor nyilván az $A'B'C\triangle$ hasonló az eredetileg adott $A_0B_0C_0\triangle$-höz.



9. ábra: Merőleges nyújtás

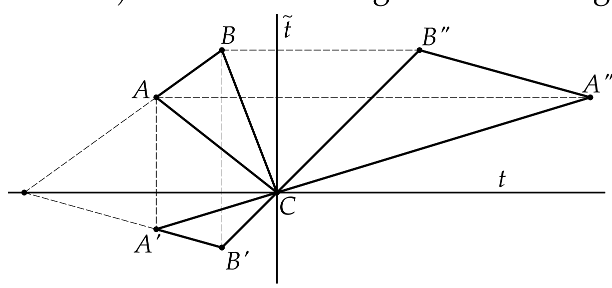
Mivel β osztóviszonytartó, így $(PAB) = (PA'B')$ és $(PAD) = (PA'D')$, és a párhuzamos szelők tétele szerint $AA' \parallel BB' \parallel DD'$. A Thálész-kör miatt a $PDC''\triangle$ C''-nél levő szöge derékszög, ezért a β melletti képe is az: $PCD'\sphericalangle = 90°$. Másrészről a k Thálész-köre a $PCD\triangle$-nek is, azaz $PCD\sphericalangle = 90°$, tehát $C \in DD'$ és $DD' \perp t$. Ez viszont azt jelenti, hogy az AA', BB' egyenesek szintén merőlegesek t-re.

Legyen ψ az a centrális-axiális kollineáció, melynek tengelye t, centruma a t-re merőleges egyenesek végtelen távoli pontja és amely A-t A'-be viszi. Ekkor ψ merőleges nyújtás, amely létezése az 1.18 tételből következik. Ekkor a t-re merőleges egyenesek ψ fixegyenesei és $\psi(PA) = PA'$, azaz $\psi(B) = B'$ és az $ABC\triangle$ ψ melletti képe az $A'B'C\triangle$, amely hasonló az $A_0B_0C_0\triangle$-höz. □

A későbbi alkalmazhatóság szempontjából a 2.5 tétel további pontosításra szorul.

2.6. Lemma. *Legyen ψ olyan t tengelyű, λ arányú merőleges nyújtás, amely az $ABC\triangle$-et az $A'B'C\triangle$-be viszi. Legyen $\tilde{t}$ a t-re C-ben állított merőleges, $\tilde{\lambda} = 1/\lambda$ és legyen $\tilde{\psi}$ a $\tilde{t}$ tengelyű, $\tilde{\lambda}$ arányú merőleges nyújtás. Ekkor az $A'B'C\triangle$ és $A''B''C\triangle = \tilde{\psi}(ABC\triangle)$ háromszögek hasonlók.*

Bizonyítás. Az $\alpha = \tilde{\psi} \circ \psi^{-1}$ kollineáció nyilván fixen hagyja a C pontot és a $t, \tilde{t}$ egyeneseket, és teljesül $\alpha(A'B'C\triangle) = A''B''C\triangle$. Elegendő tehát megmutatni, hogy α hasonlósági transzformáció. A ψ^{-1} merőleges nyújtás a t egyenesen az identitás, a $\tilde{t}$-n pedig $1/\lambda$ arányú nyújtás. Hasonlóan, a $\tilde{\psi}$ a $\tilde{t}$-n identitás, t-n pedig $\tilde{\lambda} = 1/\lambda$ arányú nyújtás. Ezek α szorzata tehát mind t-n, mind pedig $\tilde{t}$-n $1/\lambda$ ará-



10. ábra: A nyújtási arány módosítása nyú nyújtást határoz meg. Mivel α affin transzformáció, így a párhuzamosság megtartása miatt nem lehet más, mint a C középpontú, $1/\lambda$ arányú centrális nyújtás. $\square$

2.7. Állítás. *Adott $ABC\triangle$ és $A_0B_0C_0\triangle$ háromszögekhez létezik ψ merőleges nyújtás, melynek aránya abszolút értékben nagyobb 1-nél és amely az $ABC\triangle$-t egy $A_0B_0C_0\triangle$-höz hasonló háromszögbe viszi.*

Bizonyítás. Legyen ψ a 2.5 tétel szerint létező merőleges nyújtás. Ha $\lambda < 1$, akkor a 2.6 lemma szerint $\tilde{\psi}$ egy minden szempontból megfelelő merőleges nyújtás. $\square$

2.8. Tétel. *Minden háromszög alapú hasábnak van olyan síkmetszete, amely hasonló egy előre megadott háromszöghöz.*

Bizonyítás. Tekintsük a Σ síkbeli $ABC\triangle$ és $A_0B_0C_0\triangle$ háromszögeket és legyen H az $ABC\triangle$ alapú egyenes hasáb. A 2.7 állítás szerint létezik olyan Σ-beli ψ merőleges nyújtás, melyre $\psi(ABC\triangle)$ és $A_0B_0C_0\triangle$ hasonlók, és amelynek t tengelye átmegy C-n, λ aránya pedig abszolút értékben nagyobb 1-nél. Ez azt jelenti, hogy a H A-t tartalmazó élén van olyan A_1 pont, melyre $|A_1T_A| = |\psi(A)T_A|$, ahol T_A az A merőleges vetülete t-n.

Legyen Γ a t egyenes és az A_1 pont által meghatározott sík. Jelölje $\alpha_1 : \Sigma \to \Gamma$ a H éleivel párhuzamos vetítést, és $\alpha_2 : \Gamma \to \Sigma$ a t körüli beforgatást. Ekkor $\alpha_2 \circ \alpha_1$ a Σ sík olyan affin transzformációja, melynek t tengelye, és amely A-t a $\alpha_2(\alpha_1(A)) = \alpha_2(A_1) = \psi(A)$ pontba viszi. Ez azt jelenti, hogy $\alpha_2 \circ \alpha_1 = \psi$, azaz $\alpha_2(ABC\triangle)$ hasonló $A_0B_0C_0\triangle$-höz. Azonban definíció szerint $\alpha_2(ABC\triangle)$ pontosan a H hasáb és a Γ sík metszete. $\square$

2.9. Tétel (Pohlke-tétel – az axonometria alaptétele). *Egy síkon tetszőlegesen adott általános helyzetű O', A', B', C' pontokhoz létezik a térben olyan kocka, melynek az O csúcsából induló OA, OB, OC éleinek párhuzamos vetülete éppen $O'A', O'B', O'C'$.*

Bizonyítás. Válasszunk egy tetszőleges egység oldalú kockát a térben, legyen ennek OA, OB, OC az O csúcsából induló három éle. Nyilván elegendő megmutatni, hogy ezen csúcsok valamely Σ síkra vett párhuzamos vetülete egy $O'A'B'C'$-höz hasonló alakzat.

Jelölje Γ illetve Γ' az O, A, B, illetve O', A', B' pontok által meghatározott síkot. Legyen $C^* \in \Gamma$ a $C' \in \Gamma'$ pont azon $\alpha : \Gamma' \to \Gamma$ egyértelműen meghatározott affin transzformáció melletti képe, melyre teljesül

$\alpha(O') = O$, $\alpha(A') = A$ és $\alpha(B') = B$. Legyen H az az $OAB\triangle$ alapú hasáb, amelynek az élei párhuzamosak a CC^* egyenessel. A 2.8 tétel szerint valamely Σ sík H-ból $O'A'B'\triangle$-höz hasonló $O_1A_1B_1\triangle$-t metsz ki.

Jelölje β a teret Σ-ra képező, CC^*-al párhuzamos vetítést, ekkor $\beta(O) = O_1$, $\beta(A) = A_1$, $\beta(B) = B_1$ és $\beta(C) = \beta(C^*)$. Ez utóbb pontot jelölje C_1.

A $\gamma = \beta \circ \alpha : \Gamma' \to \Sigma$ leképezés affin transzformáció. Teljesül továbbá $\gamma(O'A'B'\triangle) = O_1A_1B_1\triangle \cong O'A'B'\triangle$. Mivel egy affin transzformációt három pontja egyértelműen meghatározza, azért γ nem lehet más, mint egy hasonlósági transzformáció. Ez azt jelenti, hogy az $O_1A_1B_1C_1$ alakzat hasonló $O'A'B'C'$-höz. Mivel $O_1A_1B_1C_1$ az eredeti kocka négy csúcsának párhuzamos vetülete, a bizonyítást befejeztük. $\square$

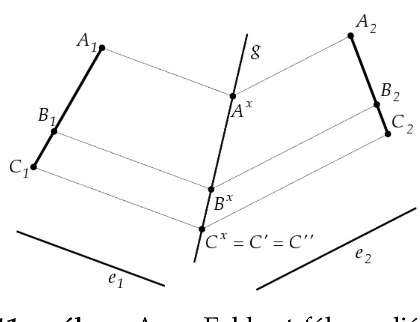
2.3. Az Eckhart-féle eljárás

Az előbbi fejezetben bizonyított két alaptételből az is következik, hogy egy tárgy egyetlen vetületéből, legyen az akár középpontos, akár párhuzamos, viszonylag kevés ismeretet nyerünk a tárgy valódi alakjáról. Ezzel szemben az élővilágban kialakult kétszemes térlátás arra utal, hogy két vetületből már sokkal több információt tudunk leszűrni. Ebben a fejezetben ezt az elképzelést fejtjük ki pontosan az axonometrikus ábrázolás esetében.

Az alábbi lemmának a megfogalmazása bonyolultabb, mint a bizonyítása, mégis érdemes külön megfogalmazni.

2.10. Lemma. *Legyenek A_1, B_1, C_1 és A_2, B_2, C_2 pontok egy-egy egyenesen úgy, hogy $(A_1, B_1, C_1) = (A_2, B_2, C_2)$. Legyenek továbbá e_1, e_2 egymást metsző egyenesek. Jelölje A^* az A_1-en átmenő e_1-el párhuzamos és az A_2-n átmenő e_2-vel párhuzamos egyenes metszéspontját. Értelmezzük a B^*, C^* pontokat hasonlóképpen. Ekkor az A^*, B^*, C^* pontok egy egyenesre esnek és $(A^*, B^*, C^*) = (A_1, B_1, C_1)$.*

Bizonyítás. Legyen g az A^*B^* egyenes. Jelölje C' illetve C'' a C_1-en átmenő e_1-el párhuzamos, illetve a C_2-n átmenő e_2-vel párhuzamos egyenes g-vel vett metszéspontját. A párhuzamos szelők tétele miatt $(A^*, B^*, C') = (A_1, B_1, C_1)$ és $(A^*, B^*, C'') = (A_2, B_2, C_2)$. Mivel $(A_1, B_1, C_1) = (A_2, B_2, C_2)$ és az osztóviszony egyértelműen meghatározza a harmadik pontot, kapjuk, hogy $C' = C'' = C^*$. $\square$



11. ábra: Az Eckhart-féle eljárás egyenes- és osztóviszonytartó

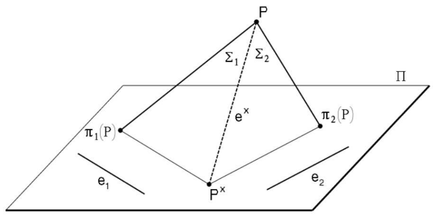
2.11. Definíció. *Adott a térben a Π sík és az $\alpha_1, \alpha_2 : \mathbb{R}^3 \to \Pi$ egyenes- és osztóviszonytartó leképezések. Adottak továbbá a Π-beli e_1, e_2 metsző egyenesek. Tetszőleges P térbeli ponthoz rendeljük hozzá azt a $P^* \in \Pi$ pontot, melyet a*

$\alpha_1(P)$-n átmenő e_1-el párhuzamos és a $\alpha_2(P)$-n átmenő e_2-vel párhuzamos egyenesek metszéspontjaként kapunk. Az $\mathbb{R}^3 \to \Pi$, $P \mapsto P^*$ leképezést létesítő eljárást **Eckhart-féle eljárásnak** nevezzük.*

Az Eckhart-féle eljárással egy térbeli objektum két párhuzamos vetületéből tetszőleges vetülete előállítható.

2.12. Tétel. *Adott a térben a Π sík és a $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^3 \to \Pi$ párhuzamos vetítések. Legyen e tetszőleges Π-t metsző térbeli egyenes, ennek vetületei $e_1 = \pi_1(e)$ és $e_2 = \pi_2(e)$. Jelölje α az ezen leképezésekből és egyenesekből az Eckhart-féle eljárással értelmezett $\mathbb{R}^3 \to \Pi$, $P \mapsto P^*$ leképezést. Ekkor α nem más, mint az e egyenes párhuzamossági osztálya által meghatározott párhuzamos vetítés Π-re.*

Bizonyítás. Jelölje Σ_1, Σ_2 a $P, \pi_1(P), P^*$, illetve a $P, \pi_2(P), P^*$ ponthármasok által meghatározott síkokat, és legyen $e^* = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$. Ekkor mindkét a $\pi_i(e^*) = \pi_i(P)P^*$ vetület párhuzamos az e_i egyenessel ($i = 1, 2$), tehát e^* párhuzamos e-vel, ami azt jelenti, hogy P^* valóban a P e irányú vetülete. □



12. ábra: Új vetület előállítása

Legyen A_1, A_2 az A térbeli alakzat két párhuzamos vetülete a Π síkra és legyen A^* az ezekből az Eckhart-féle eljárással megalkotott kép. Fontos kérdés, hogy mi történik A^*-al, ha az A_1 vagy A_2 képeket elmozdítom a Π síkban. A válasz az alkalmazott mozgatás típusától függ; a legegyszerűbb az az eset, amikor eltolásról van szó.

Tegyük fel például, hogy A_1-et eltolom a $\boldsymbol{v}$ vektorral. Vegyük észre, hogy ha $\boldsymbol{v}$ párhuzamos e_1-el, akkor az A^* kép nem változik. Ha pedig $\boldsymbol{v}$ párhuzamos e_2-vel, akkor A^* is eltolódik $\boldsymbol{v}$-vel. Általános esetben tehát azt mondhatjuk, hogy A^* a $\boldsymbol{v}'$ vektorral tolódik el, ahol $\boldsymbol{v}'$ a $\boldsymbol{v}$ vektor e_2-vel párhuzamos komponense. Következik továbbá az alábbi állítás.

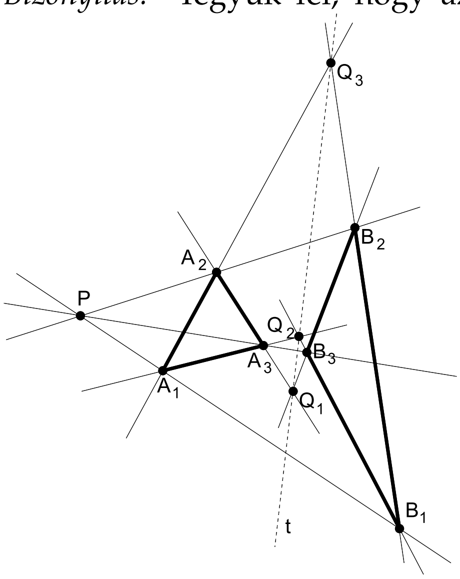
2.13. Állítás. *Legyen az A alakzat két párhuzamos vetülete a Π síkra A_1, A_2, és legyenek A_1', A_2' ezek tetszőleges eltoltjai. Hozzuk létre az A^* képet A_1' és A_2' felhasználásával az Eckhart-féle eljárás segítségével. Ekkor A^* egybevágó és egyállású az A egy jól meghatározott párhuzamos vetületével.* □

2.4. Illeszkedés-geometriai alkalmazások

Az alábbi tételek alapvető fontosságúak a modern geometriában.

2.14. Tétel (Desargues-tétel). *Legyen A_1, A_2, A_3 és B_1, B_2, B_3 két általános helyzetű ponthármas. Jelölje e_i az A_iB_i egyeneseket és Q_k az $A_iA_j \cap B_iB_j$ metszéspontot, ahol $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ különböző számok. Ekkor az e_1, e_2, e_3 egyenesek akkor és csak akkor illeszkednek közös pontra, ha a Q_1, Q_2, Q_3 pontok kollineárisak.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az A_1B_1, A_2B_2 és A_3B_3 egyenesek a közös P pontban metszik egymást. Jelölje t az Q_2Q_3 egyenest. Az 1.18 tétel szerint létezik olyan φ tengelyes kollineáció, melynek tengelye t, centruma P és melyre $\varphi(A_1) = B_1$. Mivel P centrum, ezért az A_2B_2 és A_3B_3 egyenesek fixek; hasonló okból Q_2 és Q_3 fixpontok. Ekkor viszont $\varphi(A_2) = \varphi(A_1Q_3 \cap A_2B_2) = B_1Q_3 \cap A_2B_2 = B_2$ és $\varphi(A_3) = \varphi(A_1Q_2 \cap A_3B_3) = B_1Q_2 \cap A_3B_3 = B_3$. Ebből köveztekzik, hogy $\varphi(A_2A_3) = B_2B_3$. Mivel peidg minden tengely kollineációra igaz, hogy egy egyenes és a képe a tengelyen metszik egymást, így adódik $Q_3 \in t$.

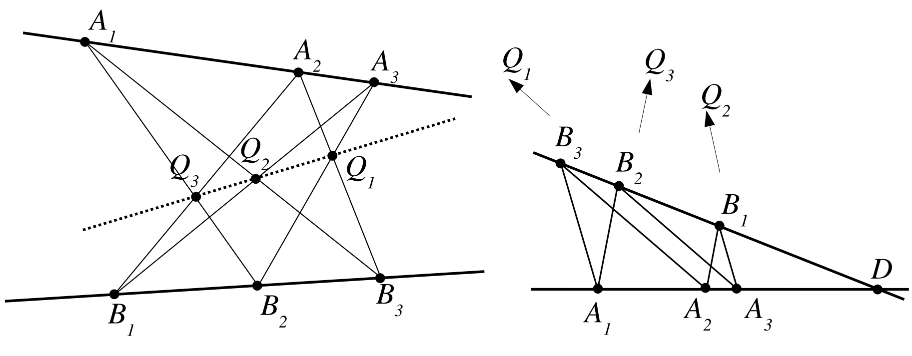


13. ábra: Desargues-tétel.

Ezzel beláttuk a „csak akkor” állítást. Mivel ennek duálisa pontosan a fordított irány, így a tételt bebizonyítottuk. □

2.15. Tétel (Pappusz-tétel). *Legyenek A_1, A_2, A_3 illetve B_1, B_2, B_3 az e illetve f egyenes különböző pontjai. Jelölje Q_k az $A_iB_j \cap A_jB_i$ metszéspontot. Ekkor az Q_1, Q_2, Q_3 pontok egy egyenesre illeszkednek.*

14. ábra. Pappusz-tétel.



Bizonyítás. A 2.1 állítás szerint egy megfelelő kollineáció alkalmazásával elérhetjuk, hogy a Q_1, Q_2 pontok végtelen távoli pontokban kerüljenek. Az kell ekkor megmuttni, hogy Q_3 képe is végtelen távoli lesz, azaz $A_1B_2 \parallel A_2B_1$. Mivel $A_1B_3 \parallel A_3B_1$ és $A_2B_3||A_3B_2$, a párhuzamos szelők tétele szerint

$$\frac{|DA_2|}{|DA_3|} = \frac{|DB_3|}{|DB_2|}, \qquad \frac{|DA_3|}{|DA_1|} = \frac{|DB_1|}{|DB_3|}.$$

A megfelelő oldalakat összeszorozva adódik

$$\frac{|DA_1|}{|DA_2|} = \frac{|DB_2|}{|DB_1|},$$

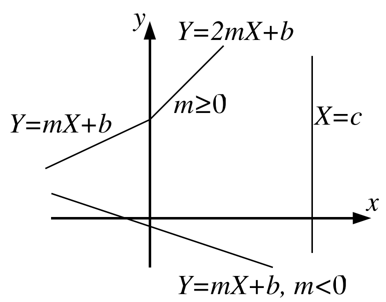
vagyis a párhuzamos szelők tételének megfordítása miatt csakugyan $A_1B_2 \parallel A_2B_1$. □

A Desargues- és Pappusz-tétel fontos tualjdonsága, hogy pontok és egyenesek illeszkedésén kívül más fogalmakat nem használ. Ezért aztán természetes a kérdés, hogy levezethetők-e ezek közvetlenül a projektív sík illeszkedési tulajdonságaiból (axiómákból). Erre a válasz mindkét esetben nem, azaz megadható pontoknak és egyeneseknek olyan absztrakt illeszkedési rendszere, melyben a projektív illeszkedési axiómát teljesülnek, de sem Desargues sem Pappusz tétele nem igaz. A legegyszerűbb ilyen a *Moulton-féle sík.*

A Moulton-sík ponthalmaza a közönséges síkhoz hasonlóan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Az „egyeneseket” egyszerűen ponthalmazként értelmezzük, és az olvasóra bízzuk annak meggondolását, hogy ezek kielégítik a közönséges sík illeszkedési axiómáit. Nos, az egyenesek három osztályba sorolhatók:

1. $\{(x, mx + b) \mid x \in \mathbb{R}\}$, ahol $m < 0$ és b tetszőleges.
2. $\{(c, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$, ahol c tetszőleges.
3. $\{(x, mx + b) \mid x < 0\} \cup \{(x, 2mx + b) \mid x \geq 0\}$, ahol $m \geq 0$ és b tetszőleges.

Látható, hogy az 1. és 2. típusú egyenesek a közönséges sík negatív meredekségű, illetve függőleges egyenesei. A 3. típusú egyenesek olyan pozitív meredekségű egyenesek, melyek az y-tengelynél „megtörnek”.



15. ábra: A Moulton-sík egyenesei

Az is könnyen meggondolható, hogy a Moulton-síkon sem Desargues sem pedig Pappusz tétele nem teljesül, hiszen ha úgy vesszük fel az adott konfigurációt, hogy csak egyetlen pontja essék az y-tengelytől balra, és az ebbe futó 3 közönséges egyenes közül 2 meredekséges negatív, egy pedig pozitív, akkor a három Moulton-féle egyenes nem fog közös pontra illeszkedni.

Másrészről azonban meggondolhatjuk, hogy a Desargues-tétel bizonyításában csak a tengelyes kollineációk létezését garantáló 1.18 tételt használtuk fel, amit térbeli vetítgetésekkel bizonyítottunk. Ebből következik, hogy Desargues tétele bizonyítható pusztán a *térbeli projektív illeszkedési* *axiómákból.* Ugyanez nem modható el a Pappusz-tételre, azaz létezik pontoknak, egyeneseknek és síkoknak olyan absztrakt illeszkedési rendszere, mely a közönséges projektív térhez hasonló, de a síkjaiban nem teljesül a Pappusz-tétel. Ilyen rendszer megadása már bonyolultabb algebrai ismereteket követel meg, ezért erre nem térünk ki, csak a klasszikus példa nevét közöljük: ez az *oktávok síkja.*

Végezetül megemlítjük, hogy a Desargues-tétel bebizonyítható közvetlenül a Pappusz-tétel felhasználásával, azaz ha egy absztrakt illeszkedési rendszer *Pappusz-féle,* vagyis teljesül benne Pappusz tétele, akkor Desargues-féle is egyben, azaz teljesül benne a Desargues-tétel.

3. Bézier-görbék

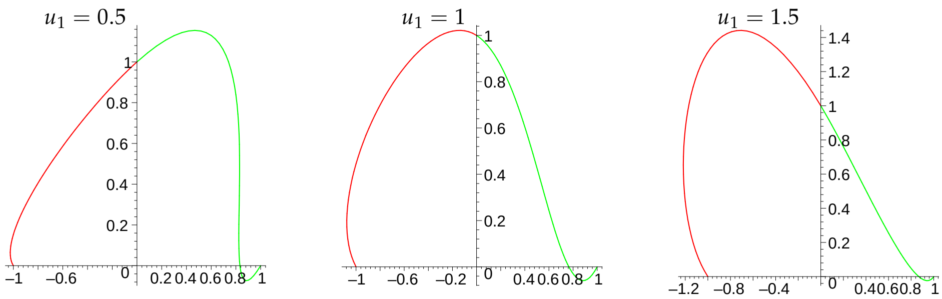
3.1. Összetett Bézier-görbék

3.1. Definíció. *Ha az $n \times n$-es $A = (a_{ij})$ mátrix elemeire minden $i = 1, \ldots, n$ esetén fennáll*

$$|a_{ii}| > |a_{i,1}| + \cdots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \cdots + |a_{i,n}|,$$

akkor az A mátrixot **diagonálisan dominánsnak** *nevezzük.*

3.2. Lemma (Domináns mátrixok tétele). *Ha az A mátrix diagonálisan domináns, akkor* $\det(A) \neq 0$ *és A invertálható.*



16. ábra. Összetett Bézier-görbék $u_0 = 0 < u_1 < u_2 = 2$ beosztással.

3.3. Tétel (2.3.5. Tétel). *Tetszőlegesen adott $\boldsymbol{p}_0, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ csomópontokhoz, $\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}_n$ vektorokhoz és $u_0 < \cdots < u_n$ töréspontokhoz pontosan egy olyan $\boldsymbol{S}(t)$ köbös összetett Bézier-görbe létezik, amely kétszer folytonosan differenciálható és amelyre $\boldsymbol{S}(u_i) = \boldsymbol{p}_i$ ($i = 0, \ldots, n$), $\boldsymbol{S}'(u_0) = \boldsymbol{t}_0$, $\boldsymbol{S}'(u_0) = \boldsymbol{t}_n$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen a keresett $\boldsymbol{S}(t)$ összetett Bézier-görbe i-dik részgörbéje $\boldsymbol{S}_i(t)$, ennek kontrollpontjai legyenek $\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{q}_i^+, \boldsymbol{q}_{i+1}^-, \boldsymbol{p}_{i+1}$. Ezen köbös Bézier-görbék végpontjaiban az első és második kétoldali deriváltak is egybe kell essenek. A $\Delta_i = u_{i+1} - u_i$ jelöléssel ezt az alábbi egyenletek fejezik ki.

$$\boldsymbol{t}_0 = 3\,\frac{\boldsymbol{q}_0^+ - \boldsymbol{p}_0}{\Delta_0}, \qquad \boldsymbol{t}_n = 3\,\frac{\boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{q}_n^-}{\Delta_{n-1}}, \tag{1}$$

$$3\,\frac{\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{q}_i^-}{\Delta_{i-1}} = 3\,\frac{\boldsymbol{q}_i^+ - \boldsymbol{p}_i}{\Delta_i}, \qquad i = 1, \ldots, n-1, \tag{2}$$

$$6\,\frac{\boldsymbol{q}_{i-1}^+ - 2\boldsymbol{q}_i^- - \boldsymbol{p}_i}{\Delta_{i-1}^2} = 6\,\frac{\boldsymbol{p}_i - 2\boldsymbol{q}_i^+ - \boldsymbol{q}_{i+1}^-}{\Delta_i^2}, \qquad i = 1, \ldots, n-1. \tag{3}$$

Az (1) egyenlőségből közvetlenül adódik $\boldsymbol{q}_0^+$ és $\boldsymbol{q}_n^-$. A maradék $2(n-1)$ egyenletet átrendezhetjük úgy, hogy a $2(n-1)$ ismeretlen $\boldsymbol{q}_1^\pm, \ldots, \boldsymbol{q}_{n-1}^\pm$ egy oldalra kerüljön.

$$\Delta_{i-1}\boldsymbol{q}_i^+ + \Delta_i\boldsymbol{q}_i^- = (\Delta_i + \Delta_{i-1})\boldsymbol{p}_i, \tag{4}$$

$$\Delta_i^2\boldsymbol{q}_{i-1}^+ + 2\Delta_{i-1}^2\boldsymbol{q}_i^+ - 2\Delta_i^2\boldsymbol{q}_i^- - \Delta_{i-1}^2\boldsymbol{q}_{i+1}^- = (\Delta_{i-1}^2 - \Delta_i^2)\boldsymbol{p}_i. \tag{5}$$

Ez egy szabályos lineáris egyenletrendszer, melynek együtthatóiból alkotott mátrix $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ alakú. Meg kell mutatnunk, hogy $\det(M) \neq 0$, hiszen ekkor az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van, ami egy, a feltételeinket kielégítő, egyértelműen meghatározott összetett Bézier-görbének felel meg.

Az A, B, C, D mátrix elemeire

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \delta_{ij}\Delta_{i-1}, & b_{ij} &= \delta_{ij}\Delta_i \\ c_{ij} &= \delta_{i,j+1}\Delta_i^2 + 2\delta_{ij}\Delta_{i-1}^2, & d_{ij} &= -\delta_{i,j-1}\Delta_{i-1}^2 - 2\delta_{ij}\Delta_i^2 \end{aligned}$$

adódik. Mivel A és B diagonálisak, ezért felcserélhetők, és így érvényes két mártix szorzatára vonatkozó

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & -B \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & DA - CB \end{pmatrix}$$

azonosság. A determinánsok szorzástétele szerint tehát

$$\det(M) = \det(DA - CB).$$

Legyen $E = DA - CB$, ekkor az E mátrix elemeire

$$e_{ij} = d_{ij}\Delta_{j-1} - c_{ij}\Delta_j = -\Delta_{i-1}\Delta_i^2(2\delta_{ij} + \delta_{i,j+1}) - \Delta_{i-1}^2\Delta_i(2\delta_{ij} + \delta_{i,j-1}).$$

Ez azt jelenti, hogy az E mátrix i-dik sora

$$(\ldots, 0, -\Delta_{i-1}^2\Delta_i, -2\Delta_{i-1}\Delta_i(\Delta_{i-1}+\Delta_i), -\Delta_{i-1}\Delta_i^2, 0, \ldots),$$

ahol a nullától különböző elemek az $(i-1)$-dik, i-dik és $(i+1)$-dik pozícióban vannak. Látható, hogy E minden eleme szigorúan negatív és E diagonálisan domináns, azaz $\det(E) \neq 0$. $\square$

3.2. Racionális Bézier-görbék

3.4. Definíció. *A* $\boldsymbol{p}_0, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ **kontrollpontokhoz** *és* $\omega_0, \ldots, \omega_n$ **súlyokhoz** *tartozó* **racionális Bézier-görbe** *alatt a* $[0,1]$ *intervallumon értelemezett*

$$\boldsymbol{c}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i \boldsymbol{p}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)}$$

görbét értjük. Az n számot a racionális Bézier-görbe **rangjának** *nevezzük.*

VIGYÁZAT, az elnevezés félreértést okozhat! A racionális Bézier-görbék családja **tágabb** a Bézier-görbék családjánál. Könnyű meggondolni, hogy konstans súlyozás, azaz $\omega_0 = \cdots = \omega_n$ esetén $\boldsymbol{c}(t)$ pontosan a $\boldsymbol{p}_0, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ kontrollpontok által meghatározott Bézier-görbe. (Hiszen $\sum_i B_i^n(t) = 1$.)

Másik fontos észrevétel, hogy n-edrangú racionális Bézier-görbeként pontosan azok a (tér)görbék állnak elő, melyek koordinátafüggvényei $\dfrac{f_i(t)}{f_0(t)}$ alakúak, ahol $f_0(t), f_i(t)$ legfeljebb n-edfokú polinomok.

3.1. Példa. A $\boldsymbol{p}_0 = (0,0)$, $\boldsymbol{p}_1 = (\frac{1}{2}, 0)$, $\boldsymbol{p}_2 = (2,2)$ kontrollpontok és az $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 1$ súlyok a $(0,1)$ középpontú, 1 sugarú K kör negyed körcikkét határozzák meg.
Bizonyítás. Számolással adódik, hogy a fenti értékek a

$$\boldsymbol{c}(t) = \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{2t^2}{t^2+1}\right)$$

görbét határozzák meg, ami valóban a K kört paraméterezi. $\square$

3.5. Tétel (A racionális Bézier-görbék projektív invarianciája). *Legyen* $\boldsymbol{c}(t)$ *a* $\boldsymbol{p}_0, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ *kontrollpontok és* $\omega_0, \ldots, \omega_n$ *súlyok által meghatározott racionális Bézier-görbe és tekintsük a*

$$\varphi : \boldsymbol{x} \mapsto \frac{A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{x} + b_0}$$

törtlineáris leképezést. Ekkor a $\boldsymbol{d}(t) = \varphi(\boldsymbol{c}(t))$ *görbe a* $\boldsymbol{p}_i' = \varphi(\boldsymbol{p}_i)$ *kontrollpontok és* $\omega_i' = \omega_i(\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{p}_i + b_0)$ *súlyok ($i = 0, \ldots, n$) által meghatározott racionális Bézier-görbe.*

Bizonyítás. Valóban, egyszerű számolással adódik

$$\begin{aligned}
\varphi(\boldsymbol{c}(t)) &= \frac{A\boldsymbol{c}(t)+\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{c}(t)+b_0} \\
&= \frac{\dfrac{\sum_i \omega_i A\boldsymbol{p}_i B_i^n(t)}{\sum_i \omega_i B_i^n(t)} + \dfrac{\sum_i \omega_i B_i^n(t)}{\sum_i \omega_i B_i^n(t)}\boldsymbol{b}}{\dfrac{\sum_i \omega_i \boldsymbol{a}_0\boldsymbol{p}_i B_i^n(t)}{\sum_i \omega_i B_i^n(t)} + \dfrac{\sum_i \omega_i B_i^n(t)}{\sum_i \omega_i B_i^n(t)}b_0} \\
&= \frac{\sum_i \omega_i (A\boldsymbol{p}_i+\boldsymbol{b})B_i^n(t)}{\sum_i \omega_i(\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{p}_i+b_0)B_i^n(t)} \\
&= \frac{\sum_i \omega_i'\boldsymbol{p}_i' B_i^n(t)}{\sum_i \omega_i' B_i^n(t)}.
\end{aligned}$$

Ezt akartuk belátni. □