Feladatok Kalkulus gyakorlatra és vizsgára közgazdász hallgatóknak

2010. szeptember 29.

1. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket:

   1) $3x^2 + 5x + 3 > 1$,
   2) $-2x^2 + 6x - 3 < 5$,
   3) $7x^2 + 3x - 4 < 0$,
   4) $\dfrac{x^2 + 2x - 2}{x^2 - 3x + 4} > 3$,
   5) $\dfrac{5x + 7}{x - 2} - \dfrac{2x + 21}{x + 7} > \dfrac{2}{3}$,
   6) $\dfrac{|x - 3|}{x^2 - 5x + 6} \geq 2$,
   7) $\dfrac{x^2 - |x| - 12}{x - 3} \geq 2x$,
   8) $\left|\dfrac{x - 2}{x + 2}\right| \leq 3$.

2. Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

   1) $f(x) = (x - 2)\sqrt{\dfrac{x + 1}{1 - x}}$,
   2) $f(x) = \sqrt{\cos(x^2)}$,
   3) $f(x) = \sqrt{\sin(x^2)}$,
   4) $f(x) = \lg\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$,
   5) $f(x) = \arcsin\dfrac{2x}{1 + x}$,
   6) $f(x) = \arccos(2\sin x)$,

7) $f(x) = \lg\big(\cos(\lg x)\big)$,

8) $f(x) = \operatorname{ctg}(\pi x) + \arccos(2^x)$,

9) $f(x) = \lg(1 - 2\cos x)$,

10) $f(x) = \arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$,

11) $f(x) = \sqrt{x^2-3} + \dfrac{1}{\sqrt{-x^2+9}}$,

12) $f(x) = \lg(\lg x) + \arccos(1-x)$,

13) $f(x) = \log_2\big(\log_{1/2}(x^2-3x+2)\big)$,

14) $f(x) = \sqrt{2\ln(2-x) + \ln\dfrac{1}{x}}$,

15) $f(x) = \sqrt{1 - \log_{1/3}\dfrac{x^2+4x}{2x-3}}$,

16) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2^x-4}{3x^2-8x+5}}$,

17) $f(x) = \sqrt{1 - 5^{(x-3)^2-|x-3|-2}}$,

18) $f(x) = \sqrt{8^{\frac{x+3}{2}} - 8^{-|x-4|}}$,

19) $f(x) = \sqrt{1 - \log^2_{1/2}(x^2-2)}$,

20) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-5x+4}{x^2+6x-7}}$,

21) $f(x) = \sqrt{|x-2| + |x-5|}$,

22) $f(x) = \ln\dfrac{x+3}{x-3}$,

23) $f(x) = \sqrt{\log_3\dfrac{1+x}{x-1}}$,

24) $f(x) = x\sqrt{x^2-2}$,

25) $f(x) = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$,

26) $f(x) = \ln\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$.

3. Ábrázoljuk lineáris függvény-transzformációval az alábbi függvényeket:

1) $f(x) = (3-2x)^2 + 1$,

2) $f(x) = 2\log_{1/2}(2x-4)$,

3) $f(x) = 1 - 2\sqrt{4-x}$,

4) $f(x) = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$,

5) $f(x) = 2 \cdot 10^{3x+6} + 1$,

6) $f(x) = 2|3x-1| + 5$.

4. Határozzuk meg a következő határértékeket:

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$,

2) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$,

3) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2+x-5}{x^2-3x+2}$,

4) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-12x+16}{x^2-4}$,

5) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^3-3x-2}$,

6) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{4-\sqrt{21-x}}{\sqrt[3]{x-13}+2}$,

7) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{25+x}-\sqrt[3]{29-x}}{x-\sqrt{2x}}$,

8) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+5x}+x\right)$,

9) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+5x}+x\right)$,

10) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$,

11) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$,

12) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x(\sqrt{x^2+1}+x)\right)$,

13) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(x(\sqrt{x^2+1}+x)\right)$,

14) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{1+2x+x^2}-\sqrt{x^2-4x+1}\right)$,

15) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{1+2x+x^2}-\sqrt{x^2-4x+1}\right)$,

16) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$,

17) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+x-1}{x+1}$,

18) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\pi x)}{x}$,

19) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin\frac{\pi x}{2}}{x}$,

20) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sin\frac{\pi x}{2}}{x}$,

21) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(3x)}{2x}$,

22) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{2x}$,

23) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{2x}$,

24) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\sin(5x)}$,

25) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}$,

26) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{\sin(4\pi x)}$,

27) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin(2x)}{x+\sin(3x)}$,

28) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{2x-1}{3x+1}\right)^x$,

29) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{4x-1}{2x+3}\right)^x$,

30) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{3x+1}{3x+7}\right)^{x+3}$,

31) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{2x+3}{3x+7}\right)^{x+1}$,

32) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$,

33) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{(x^2)}$.

5. Differenciáljuk a következő függvényeket:

1) $y = 2x + 1,$

2) $y = x^2 + 2x,$

3) $y = x^5(x+1)^2,$

4) $y = x + \sqrt{x},$

5) $y = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}},$

6) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}},$

7) $y = x\sin(x),$

8) $y = \sin^2(x)\cos^3(x),$

9) $y = x\ln(x),$

10) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x},$

11) $y = \dfrac{(x+\sqrt[3]{x})^2}{x^3},$

12) $y = (3x-5)^6,$

13) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x+4)^2}},$

14) $y = \sqrt[4]{(8x-3)^3},$

15) $y = \dfrac{1-\sqrt[3]{1+x}}{x\sqrt{1-x}},$

16) $y = \dfrac{1}{\sin^3(2x)},$

17) $y = x\ln(x+\sqrt{x^2+1}),$

18) $y = \ln\operatorname{tg} x + \dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}(2x),$

19) $y = e^{3x}(x+3),$

20) $y = e^{-x}(\cos x + \sin x),$

21) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-2x}{1+2x}},$

22) $y = x^2\operatorname{arctg} x,$

23) $y = \dfrac{x^2+\sin x}{\ln(x)+\sqrt{x}},$

24) $y = x^5e^x\ln 5,$

25) $y = x2^{1-x^2}$,

26) $y = \dfrac{\sin(2x+1)}{\sin x - \cos x}$,

27) $y = 2^{\sqrt[5]{\operatorname{tg}(5x+1)}}$,

28) $y = \dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}$,

29) $y = 3^{\ln^2(1+e^{-x})}$,

30) $y = \arccos \dfrac{1-x^3}{1+x^3}$,

31) $y = x^{\sqrt{x}}$,

32) $y = (\cos x)^x$,

33) $y = 4^{x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$,

34) $y = (e^x + e^{-x})^{\cos(2x)}$.

6. A L'Hospital-szabály segítségével számítsuk ki a következő határértékeket:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{x}$,

2) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{2x-\pi}{\cos x}$,

3) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin x}{\pi - x}$,

4) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{1-\sin x}{1+\cos(2x)}$,

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{x+7\sqrt{x}}$,

6) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-(3x+1)\sqrt{x}+2}{x-1}$,

7) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}$,

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{10(\sin(x)-x)}{x^3}$,

9) $\lim\limits_{x\to 0+0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$,

10) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x - \sqrt{x^2+x}\right)$,

11) $\lim_{x\to\infty} \left(x \operatorname{tg} \frac{1}{x} \right)$,

12) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x-5}{2x^2-x+2}$,

13) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$,

14) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right)$,

15) $\lim_{x\to\infty} \left(x e^{-x} \right)$,

16) $\lim_{x\to 0} \left(x^2 \, e^{\frac{1}{x^2}} \right)$,

17) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2 - x}$.

7. Teljes függvényvizsgálat után rajzoljuk fel a következő függvények grafikonját:

1) $y = x^3 - 3x + 3$,

2) $y = x(6-2x)^2$,

3) $y = 1 - 9x - 6x^2 - x^3$,

4) $y = (x-2)^3 + 1$,

5) $y = x^4 - 2x^2$,

6) $y = x^4 + 6x^2 - 4$,

7) $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$,

8) $y = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$,

9) $y = x + \sin x, \quad 0 \le x \le 2\pi$,

10) $y = x - \sin x, \quad 0 \le x \le 2\pi$,

11) $y = 2x - 3x^{2/3}$,

12) $y = 5x^{2/5} - 2x$,

13) $y = x\sqrt{8 - x^2}$,

14) $y = (2 - x^2)^{3/2}$,

15) $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$,

16) $y = \frac{x^3}{3x^2 + 1}$,

17) $y = |x^2 - 1|$,

18) $y = |x^2 - 2x|$,

19) $y = \sqrt{|x - 4|}$,

20) $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$,

21) $y = x - \dfrac{1}{x}$,

22) $y = \dfrac{x^2}{(x - 1)^2}$,

23) $y = x^2 - 2x + 3$,

24) $y = 4 - 3x - 2x^3$,

25) $y = 2x^3 + 1$,

26) $y = x^3 - 3x + 1$,

27) $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 20$,

28) $y = -2x^3 + 3x^2 + 12x + 2$,

29) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 2x + 1$,

30) $y = 3x^4 + 4x^3$,

31) $y = \dfrac{3}{2}x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 8$,

32) $y = \sqrt{x^2 + 5}$,

33) $y = \sqrt{x^2 - 4}$,

34) $y = (x + 2)^{3/2} + 1$,

35) $y = \dfrac{1}{2}x - \sqrt{x}$,

36) $y = \dfrac{1}{x + 1}$,

37) $y = \dfrac{x}{x - 1}$,

38) $y = \dfrac{x + 2}{x - 2}$,

39) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$,

40) $y = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$,

41) $y = \dfrac{x^2-9}{x^2-4}$,

42) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$,

43) $y = \dfrac{1}{x^2-x-2}$,

44) $y = \dfrac{x+1}{x^2-2x-1}$,

45) $y = x^2\, e^x$,

46) $y = x^2\, e^{-x}$,

47) $y = \sqrt[3]{x^2} e^{\frac{2x}{3}}$,

48) $y = e^{\frac{1}{x}-x}$,

49) $y = \sqrt{x}\ln x$,

50) $y = x^2 \ln^2(x)$,

51) $y = x^2 \ln|x|$,

52) $y = \dfrac{x}{e^x(x-1)}$,

53) $y = (x-6)e^{-\frac{1}{x}}$,

54) $y = x^2 e^{-x^2}$,

55) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2x}{x^2-1}$,

56) $y = \dfrac{x^3}{3-x^2}$,

57) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,

58) $y = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$.

8. Határozzuk meg a következő függvények helyi minimumait, maximumait!

1) $f(x) = x^2 - 1$,

2) $f(x) = x^2 - 2x + 1$,

3) $f(x) = x^2 - 4x + 3$,

4) $f(x) = x^3 - 2x^2$,

5) $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x + 8$,

6) $f(x) = -x^3 + 12x$,

7) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 108x + 20$,

8) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 216x + 25$,

9) $f(x) = -4x^3 + 6x^2 - 3x + 5$,

10) $f(x) = x^3 + 12x^2 + 48x + 3$,

11) $f(x) = x^5 - 15x^2$,

12) $f(x) = \dfrac{2x - 1,}{x + 2}$

13) $f(x) = \dfrac{x + 1,}{-3 - x^2}$

14) $f(x) = x + \dfrac{1,}{x}$

15) $f(x) = x^5 e^{-x,}$

16) $f(x) = xe^{-x^2,}$

17) $f(x) = x - \ln(x + 1)$,

18) $f(x) = 2\sin(x) + \cos^2(x)$,

19) $f(x) = \cos^3(x) + \sin^3(x)$.

9. Keressük meg az alábbi függvények maximumát és minimumát a megadott intervallumokon:

1) $f(x) = -2x - 1, \quad [0,3]$,

2) $f(x) = x^3 - 3x + 8, \quad [-1,2]$,

3) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}, \quad [1/2,2]$,

4) $f(x) = x^5 - 5x^3, \quad [-1, \sqrt{5}]$,

5) $f(x) = x^3 - 4500x^2 + 6 \cdot 10^6 x, \quad [0,3000]$,

6) $f(x) = x^2\, e^{-x}, \quad [0,4]$,

7) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x, \quad [0,1]$,

8) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}, \quad [0,2]$,

9) $f(x) = \sqrt[3]{\sin^2(x)}, \quad [0, \pi]$,

10) $f(x) = 2x + 2 - 3\sqrt[3]{(x + 2)^2}, \quad [-3,0]$,

11) $f(x) = 2x^2 + 3x - 4, \quad (-\infty, \infty)$,

12) $f(x) = -x^2 + 4x + 3, \quad (-\infty, \infty)$,

13) $f(x) = x^{1/3}, \quad (-\infty, \infty)$,

14) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad (-\infty, \infty)$,

15) $f(x) = x^2 - 2x - 3, \quad (0, 4),$

16) $f(x) = x^2 - 2x - 3, \quad [0, 4),$

17) $f(x) = x^2 - 2x - 3, \quad (0, 4],$

18) $f(x) = x^2 - 2x - 3, \quad [0, 4],$

19) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1, \quad [-3, 2],$

20) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1, \quad [-3, 1],$

21) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1, \quad [-2, 3],$

22) $f(x) = 3x^4 + 4x^3, \quad [-2, 1],$

23) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 3, \quad [-2, 3],$

24) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad [0, 3],$

25) $f(x) = \frac{x}{x-1}, \quad [2, 4],$

26) $f(x) = 4x + \frac{1}{x}, \quad [1, 3],$

27) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}, \quad [2, 3],$

28) $f(x) = \frac{1}{8}x^2 - 4\sqrt{x}, \quad [0, 9],$

29) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad (0, \infty),$

30) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad (0, 2],$

31) $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+5}, \quad [-2, 1],$

32) $f(x) = x^2 + 2x^{2/3}, \quad [-2, 2],$

33) $f(x) = x^{2/3}(x^2 - 4), \quad [-1, 2],$

34) $f(x) = x^{2/3}(x^2 - 4), \quad [-1, 3],$

35) $f(x) = x^2(x^2 - 1)^3, \quad [-1, 2],$

36) $f(x) = \frac{x}{x^2+2}, \quad [-1, 2],$

37) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \quad [-1, 1],$

38) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}, \quad [0, 2].$

10. Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat:

1) $$\int \frac{(x^2+1)(x^3-1)}{\sqrt[3]{x^2}}dx,$$

2) $$\int \sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx,$$

3) $$\int \mathrm{ctg}^2(x)dx,$$

4) $\displaystyle\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx,$

5) $\displaystyle\int (\frac{6}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x^2} + 4)dx,$

6) $\displaystyle\int (x^e + \sqrt[3]{x})dx,$

7) $\displaystyle\int \frac{x^4 - x^3 + x + 2}{x^2}dx.$

11. Számítsuk ki a következő integrálokat a parciális integrálás módszerével:

1) $\displaystyle\int x \sin x dx,$

2) $\displaystyle\int x \cos^2(x) dx,$

3) $\displaystyle\int \ln^2 x dx,$

4) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}dx,$

5) $\displaystyle\int x^2 \ln(1+x)dx,$

6) $\displaystyle\int x \ln\big(1 + \frac{1}{x}\big)dx,$

7) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx,$

8) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+2x}}dx,$

9) $\displaystyle\int x^3 \ln x dx,$

10) $\displaystyle\int \frac{\ln \ln x}{x}dx,$

11) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx,$

12) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x dx.$

12. Számítsuk ki a következő integrálokat a helyettesítés módszerével:

1) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}dx,$

2) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(4-3x)}dx,$

3) $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+9}dx,$

4) $\displaystyle\int e^{\sin x}\cos x dx,$

5) $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2(x)}dx,$

6) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{1+x^3}dx,$

7) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{4+5e^{3x}}dx,$

8) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1-\cos x}dx,$

9) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x dx,$

10) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx,$

11) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx,$

12) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx,$

13) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2(x)}}dx,$

14) $\displaystyle\int \frac{\sin^3(x)}{\sqrt{\cos(x)}}dx,$

15) $\displaystyle\int \frac{\ln x\sqrt{\ln x}}{x}dx,$

16) $\displaystyle\int \cos x\sqrt[4]{\sin x}dx,$

17) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}dx,$

18) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx,$

19) $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx,$

20) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

13. Számítsuk ki a következő integrálokat:

1) $\int \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x+1} dx,$

2) $\int \frac{3}{(7x-4)^5} dx,$

3) $\int \frac{x}{(3x-1)^2} dx,$

4) $\int \frac{2x}{(x-3)^4} dx,$

5) $\int \frac{1}{x^2-2x+5} dx,$

6) $\int \frac{1}{3x^2+4x+7} dx,$

7) $\int \frac{1}{x^2-6x+12} dx,$

8) $\int \frac{1}{9x^2-6x-8} dx,$

9) $\int \frac{x-2}{x^2-7x+12} dx,$

10) $\int \frac{3-4x}{2x^2-3x+1} dx,$

11) $\int \frac{x^2-x+4}{(x^2-1)(x+2)} dx,$

12) $\int \frac{x^3}{x+1} dx,$

13) $\int \frac{x^{10}}{x^2+x-2} dx,$

14) $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3} dx,$

15) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx,$

16) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4 - x^2} dx.$

14. Határozzuk meg a két függvény grafikonja közötti területet az adott intervallumon:

1) $y = x^2,\ y = x^3, \quad [0{,}1],$
2) $y = x^2,\ y = x^3, \quad [1{,}2],$
3) $y = x^2,\ y = \sqrt[2]{x}, \quad [0{,}1],$
4) $y = x^3,\ y = \sqrt[3]{x}, \quad [1{,}2],$
5) $y = x^3,\ y = -x, \quad [1{,}2],$
6) $y = 1 + x,\ y = \ln(x), \quad [1, e],$
7) $y = \sin(x),\ y = \cos(x), \quad [0, \pi/4],$
8) $y = \sin(x),\ y = \cos(x), \quad [\pi/2, \pi].$

15. Állapítsuk meg, hogy konvergens vagy divergens az improprius integrál. Ha konvergens, számítsuk ki az értékét:

1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^3},$
2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}},$
3) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x} dx,$
4) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^4 + 4},$
5) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3}{x^4 + 1} dx,$
6) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^2 - 1},$
7) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[2]{x(1 + \sqrt[2]{x})^3}},$
8) $\displaystyle\int_1^\infty x e^{-x} dx,$
9) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[2]{1 - x}},$
10) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x) dx,$

11) $\displaystyle\int_0^3 \frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}dx,$

12) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}.$

16. Szöveges feladatok

1) Mi a jelenértéke 15 évenkénti, egyenként 3500 dollár összegű befizetésnek, ha az első befizetés mostantól számítva 1 év múlva esedékes és a kamatláb év 12 százalék?

2) Egy szerzőnek jogdíj fizetendő egy könyvért. Két ajánlat közül kell választania:

   (a) Azonnal kifizetnek neki 21000 dollárt,

   (b) Fizetnek neki öt éven át minden évben 4600 dollárt, az első részletet azonnal.

   Ezen ajánlatok közül melyik az előnyösebb az írónak, ha az éves kamatláb 6 százalék?

3) Egy építési vállalkozás egy építési telket akar vásárolni, és három különböző fizetési ütemterv közül választhat:

   (a) Fizet 67000 dollárt készpénzben.

   (b) Fizet 12000 dollárt 8 éven át minden évben, az első részletet azonnal.

   (c) Fizet 22000 dollárt készpénzben és azután 12 éven át minden évben 7000 dollárt, az első részletet 1 év múlva.

   Határozzuk meg, hogy melyik ütemezés a legolcsóbb, ha a kamatláb 11,5 %és a cégnek legalább 67000 dollár készpénz rendelkezésére áll. Mi történik, ha a cég csak 22000 dollárt tud azonnal kifizetni? Továbbá mi a helyzet akkor, ha a kamatláb 12,5 %?

4) Határozzuk meg a következő 15 év folyamán várható, 500$ éves jövedelemáram jelen- és jövőértékét, feltéve, hogy az éves kamat 6%, és folyamatosan tőkésítjük.

5) Tegyük fel, hogy 1000 $-t fektetünk be 5%-os évi kamatozás mellett. Mennyit fog ez érni

   a) 10 év múlva,

   b) 50 év múlva,

   ha a kamatjóváírás

   i) évenként

ii) havonta
iii) folytonosan

történik.

6) Tegyük fel, hogy egy árucikk ára x év elteltével

$$f(x) = 4e^{x/4}.$$

Ha a cikk ára eléri a 18 egységet, akkor árkontrollt alkalmaznak, ami abból áll, hogy az ár pillanatnyi százalékos növekedését 10%-kal csökkentik. Mikor válik szükségessé az árkontroll? Mennyi idő alatt duplázódik meg az árucikk ára az árkontroll bevezetése előtt és után?

7) Egy hátizsák előállításának és terítésének költsége c dollár. Ha a hátizsákot x dollárért kínálják, az értékesített mennyiséget az

$$n = \frac{a}{x-c} + b(100-x)$$

függvény adja meg, ahol a és b pozitív állandók. Milyen fogyasztói ár hozza a maximális profitot?

8) Valaki 65. születésnapján egy járadékot vásárol egy biztosító társaságtól. A biztosító azt vállalja, hogy minden évben 5000 dollárt fizet ki neki 10 éven keresztül, az első alkalommal a 66. születésnapján. A biztosító 8% éves kamatot ad a befektetés összegére. Mennyibe kerül a járadék?

9) Egy ember 63 éves korában nyugdíjba vonul. 120000 dolláros megtakarításáért évjáradékot vásárol egy biztosítótól. A biztosító évi 6% kamatot fizet a befektetett összegre, és azt vállalja, hogy 15 évig évente ugyanakkora járadékot biztosít ügyfelének, az első járadékot a szerződéskötést követő év végén fizeti. Mekkora az éves járadék?

10) Egy diák tanulmányai alatt 8000 dollár diákhitelt vett fel. A hitelre a diploma megszerzésétől kezdődően évi 10% kamatot kell fizetnie, és öt év alatt kell a hitelt visszatéríteni úgy, hogy minden év végén befizet ugyanakkora összeget. Mekkora az éves térítés összege?

11) Ha az éves inflációs ráta 7,5%, akkor mennyi idő alatt duplázódnak meg az árak?

12) Egy befektető elhelyezett egy összeget a bankban 5 évvel ezelőtt, amelyre a bank évi 8% kamatot fizetett, és a kamatokat negyedévente írta jóvá. A befektető számláján most 22289,22 dollár van. Mekkora volt az 5 évvel ezelőtt befektetett összeg?

13) Mekkora a jelenértéke egy öt év múlva esedékes 59673 dolláros összegnek, ha az éves kamat 8% és a kamatot folytonosan írják jóvá?