Valós gyökű polinomok és kombinatorika

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2014. március 24.

Polinomok, alapok

Jelölés

$\mathbb{R}[x]$.

Polinomok, alapok

Jelölés

$\mathbb{R}[x]$.

$p \in \mathbb{R}[x]$

- $p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0, \quad a_n \neq 0$

Polinomok, alapok

Jelölés

$\mathbb{R}[x]$.

$p \in \mathbb{R}[x]$

- $p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0, \quad a_n \neq 0$
- $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots$ véges összeg

Polinomok, alapok

Jelölés

$\mathbb{R}[x]$.

$p \in \mathbb{R}[x]$

- $p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0, \quad a_n \neq 0$
- $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots$ véges összeg
- $p \equiv (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ egy „idő után” kontsans 0

Polinomok, alapok

Jelölés

$\mathbb{R}[x]$.

$p \in \mathbb{R}[x]$

- $p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0, \quad a_n \neq 0$
- $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots$ véges összeg
- $p \equiv (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ egy „idő után” kontsans 0
- $p \equiv \{a_i\}_{i=0}^{\infty} = \left\{[x^i]p\right\}_{i=0}^{\infty}$ véges sok nem-0 tag

Polinomok, alapok

Jelölés

$\mathbb{R}[x]$.

$p \in \mathbb{R}[x]$

- $p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0, \quad a_n \neq 0$
- $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots$ véges összeg
- $p \equiv (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ egy „idő után” kontsans 0
- $p \equiv \{a_i\}_{i=0}^{\infty} = \{[x^i]p\}_{i=0}^{\infty}$ véges sok nem-0 tag

Definíció/fokszám

$$\deg p = \max\{k : [x^k]p \neq 0\}.$$

Polinomok, alapok

Jelölés

$\mathbb{R}[x]$.

$p \in \mathbb{R}[x]$

- $p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0, \quad a_n \neq 0$
- $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots$ véges összeg
- $p \equiv (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ egy „idő után" kontsans 0
- $p \equiv \{a_i\}_{i=0}^{\infty} = \{[x^i]p\}_{i=0}^{\infty}$ véges sok nem-0 tag

Definíció/fokszám

$$\deg\, p = \max\{k : [x^k]p \neq 0\}.$$

$$\deg\, 0 = -\infty.$$

Alapműveletek

$p, q \in \mathbb{R}[x], \alpha \in \mathbb{R}$

$$p + q : [x^k](p+q) = [x^k]p + [x^k]q,$$

Alapműveletek

$p, q \in \mathbb{R}[x], \alpha \in \mathbb{R}$

$$p + q : [x^k](p+q) = [x^k]p + [x^k]q,$$

$$p \cdot q : [x^k](p \cdot q) = \sum_{i,j \in \mathbb{N} : x^i \cdot x^j = x^k} [x^i]p \cdot [x^j]q,$$

Alapműveletek

$p, q \in \mathbb{R}[x], \alpha \in \mathbb{R}$

$$p + q : [x^k](p+q) = [x^k]p + [x^k]q,$$

$$p \cdot q : [x^k](p \cdot q) = \sum_{i,j \in \mathbb{N} : x^i \cdot x^j = x^k} [x^i]p \cdot [x^j]q,$$

$$\alpha \cdot p : [x^k](\alpha \cdot p) = \alpha \cdot [x^k]p.$$

Alapműveletek

$p, q \in \mathbb{R}[x], \alpha \in \mathbb{R}$

$$p + q : [x^k](p + q) = [x^k]p + [x^k]q,$$

$$p \cdot q : [x^k](p \cdot q) = \sum_{i,j \in \mathbb{N} : x^i \cdot x^j = x^k} [x^i]p \cdot [x^j]q,$$

$$\alpha \cdot p : [x^k](\alpha \cdot p) = \alpha \cdot [x^k]p.$$

Észrevétel

$\mathbb{R}[x]$ tekinthető mint vektortér.

Alapműveletek

$p, q \in \mathbb{R}[x], \alpha \in \mathbb{R}$

$$p + q : [x^k](p+q) = [x^k]p + [x^k]q,$$

$$p \cdot q : [x^k](p \cdot q) = \sum_{i,j \in \mathbb{N} : x^i \cdot x^j = x^k} [x^i]p \cdot [x^j]q,$$

$$\alpha \cdot p : [x^k](\alpha \cdot p) = \alpha \cdot [x^k]p.$$

Észrevétel

$\mathbb{R}[x]$ tekinthető mint vektortér.
$\mathbb{R}[x]$ tekinthető mint gyűrű.

Alapműveletek és a fokszám

Lemma

$$\deg\, pq = \deg\, p + \deg\, q,$$

Alapműveletek és a fokszám

Lemma

$$\deg\, pq = \deg\, p + \deg\, q,$$

$$\deg\, p + q \leq \max\{\deg\, p, \deg\, q\},$$

Lemma

$$\deg pq = \deg p + \deg q,$$

$$\deg p + q \leq \max\{\deg p, \deg q\},$$

$$\deg \alpha p = \deg p, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

Alapműveletek és a fokszám

Lemma

$$\deg\ pq = \deg\ p + \deg\ q,$$

$$\deg\ p + q \leq \max\{\deg\ p, \deg\ q\},$$

$$\deg\ \alpha p = \deg\ p, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

Észrevétel

$\mathbb{R}[x]^{\leq d}$ vektortér.

Alapműveletek és a fokszám

Lemma

$$\deg\ pq = \deg\ p + \deg\ q,$$

$$\deg\ p + q \leq \max\{\deg\ p, \deg\ q\},$$

$$\deg\ \alpha p = \deg\ p, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

Észrevétel

$\mathbb{R}[x]^{\leq d}$ vektortér.

$$\dim\ \mathbb{R}[x]^{\leq d} =$$

Alapműveletek és a fokszám

Lemma

$$\deg\ pq = \deg\ p + \deg\ q,$$

$$\deg\ p + q \leq \max\{\deg\ p, \deg\ q\},$$

$$\deg\ \alpha p = \deg\ p, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

Észrevétel

$\mathbb{R}[x]^{\leq d}$ vektortér.

$$\dim\ \mathbb{R}[x]^{\leq d} = d + 1.$$

Alapműveletek és a fokszám

Lemma

$$\deg\ pq = \deg\ p + \deg\ q,$$

$$\deg\ p + q \leq \max\{\deg\ p, \deg\ q\},$$

$$\deg\ \alpha p = \deg\ p, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

Észrevétel

$\mathbb{R}[x]^{\leq d}$ vektortér.

$$\dim\ \mathbb{R}[x]^{\leq d} = d + 1.$$

Standard bázis: $\{1, x, x^2, \ldots, x^d\}$.

Alapműveletek és a fokszám

Lemma

$$\deg pq = \deg p + \deg q,$$

$$\deg p + q \leq \max\{\deg p, \deg q\},$$

$$\deg \alpha p = \deg p, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

Észrevétel

$\mathbb{R}[x]^{\leq d}$ vektortér.

$$\dim \mathbb{R}[x]^{\leq d} = d + 1.$$

Standard bázis: $\{1, x, x^2, \ldots, x^d\}$.

Észrevétel

$\mathbb{R}[x]^{=d}$ NEM vektortér.

Definíció

Az r szám a $p \in \mathbb{R}[x]$ polinom gyöke, ha

- $p(r) = 0$,

Polinomok gyökei

Definíció

Az r szám a $p \in \mathbb{R}[x]$ polinom gyöke, ha

- $p(r) = 0$,
- $p(x) = (x - r)p_0(x)$,

Polinomok gyökei

Definíció

Az r szám a $p \in \mathbb{R}[x]$ polinom gyöke, ha

- $p(r) = 0$,
- $p(x) = (x - r)p_0(x)$, azaz $x - r | p(x)$.

Polinomok gyökei

Definíció

Az r szám a $p \in \mathbb{R}[x]$ polinom gyöke, ha

- $p(r) = 0$,
- $p(x) = (x - r)p_0(x)$, azaz $x - r | p(x)$.

Definíció

Az r szám a $p \in \mathbb{R}[x]$ polinom μ-szörös multiplicitású gyöke, ha

(i) $(x - r)^\mu | p(x)$,

Definíció

Az r szám a $p \in \mathbb{R}[x]$ polinom gyöke, ha

- $p(r) = 0$,
- $p(x) = (x - r)p_0(x)$, azaz $x - r | p(x)$.

Definíció

Az r szám a $p \in \mathbb{R}[x]$ polinom μ-szörös multiplicitású gyöke, ha

(i) $(x - r)^{\mu} | p(x)$,

(ii) $(x - r)^{\mu+1} \not| p(x)$.

Jelölések

- $\mathbb{R}[x]_{\text{valós}}$,

Jelölések

Jelölések

- $\mathbb{R}[x]_{\text{valós}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{pozitív}}$,

Jelölések

- $\mathbb{R}[x]_{\text{valós}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{pozitív}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{negatív}}$,

Jelölések

Jelölések

- $\mathbb{R}[x]_{\text{valós}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{pozitív}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{negatív}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{valós, fő}}$,

Jelölések

Jelölések

- $\mathbb{R}[x]_{\text{valós}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{pozitív}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{negatív}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{valós, fő}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{pozitív, fő}}$,

Jelölések

Jelölések

- $\mathbb{R}[x]_{\text{valós}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{pozitív}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{negatív}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{valós, fő}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{pozitív, fő}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{negatív, fő}}$.

Jelölések

Jelölések

- $\mathbb{R}[x]_{\text{valós}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{pozitív}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{negatív}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{valós, fő}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{pozitív, fő}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{negatív, fő}}$.
- $\mathbb{R}[x]_{\text{valós, különböző}}$,

Jelölések

Jelölések

- $\mathbb{R}[x]_{\text{valós}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{pozitív}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{negatív}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{valós, fő}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{pozitív, fő}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{negatív, fő}}$.
- $\mathbb{R}[x]_{\text{valós, különböző}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{pozitív, különböző}}$,

Jelölések

- $\mathbb{R}[x]_{\text{valós}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{pozitív}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{negatív}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{valós, fő}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{pozitív, fő}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{negatív, fő}}$.
- $\mathbb{R}[x]_{\text{valós, különböző}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{pozitív, különböző}}$,
- $\mathbb{R}[x]_{\text{negatív, különböző}}$.

Példa

Legyen $p \in \mathbb{R}[x]_{\text{fő}}^{=2}$,

Példa

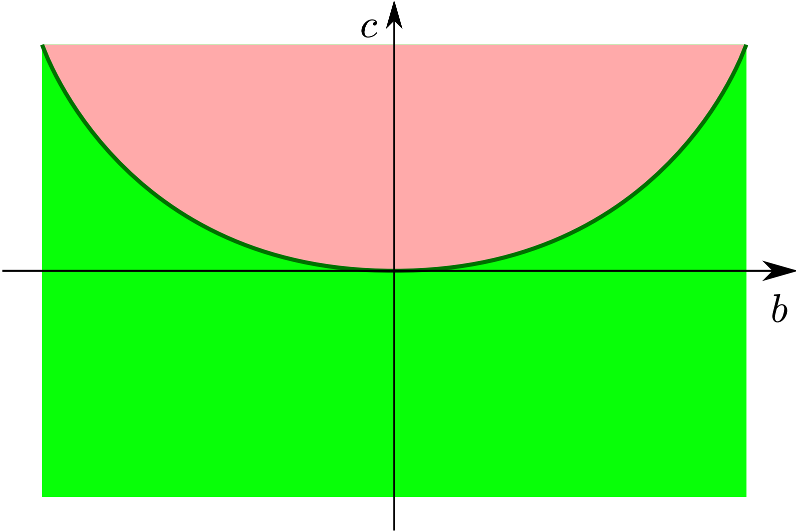
Legyen $p \in \mathbb{R}[x]_{\text{fő}}^{=2}$, azaz $p = x^2 + bx + c$.

Példa

Legyen $p \in \mathbb{R}[x]_{\text{fő}}^{=2}$, azaz $p = x^2 + bx + c$. $(b, c) \in \mathbb{R}^2$.

Példa

Legyen $p \in \mathbb{R}[x]_{\text{fő}}^{=2}$, azaz $p = x^2 + bx + c$. $(b, c) \in \mathbb{R}^2$.



Polinomok geometriája

$$\mathbb{R}[x]_{\text{fő}}^{=d} \qquad \equiv \qquad \mathbb{R}^d$$

Polinomok geometriája

$\mathbb{R}[x]^{=d}_{\text{fő}} \equiv \mathbb{R}^d$
$p = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + a_{d-2}x^{d-2} + \ldots + a_1x + a_0 \mapsto$
$(a_{d-1}, a_{d-2}, \ldots, a_1, a_0)$

Polinomok geometriája

$\mathbb{R}[x]^{=d}_{\text{fő}} \equiv \mathbb{R}^d$

$p = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + a_{d-2}x^{d-2} + \ldots + a_1 x + a_0 \mapsto (a_{d-1}, a_{d-2}, \ldots, a_1, a_0)$

Tétel

a) $H_{\text{valós}}$ zárt,

Polinomok geometriája

$$\mathbb{R}[x]^{=d}_{\text{fő}} \qquad \equiv \qquad \mathbb{R}^d$$
$$p = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + a_{d-2}x^{d-2} + \ldots + a_1 x + a_0 \mapsto$$
$$(a_{d-1}, a_{d-2}, \ldots, a_1, a_0)$$

Tétel

a) $H_{\text{valós}}$ zárt,

b) $H_{\text{valós, különböző}}$ nyilt,

Polinomok geometriája

$$\mathbb{R}[x]^{=d}_{\text{fő}} \equiv \mathbb{R}^d$$
$$p = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + a_{d-2}x^{d-2} + \ldots + a_1 x + a_0 \mapsto (a_{d-1}, a_{d-2}, \ldots, a_1, a_0)$$

Tétel

a) $H_{\text{valós}}$ zárt,

b) $H_{\text{valós, különböző}}$ nyilt,

c) $H_{\text{valós, különböző}} = H^o_{\text{valós}}$.

Polinomok geometriája

$$\mathbb{R}[x]^{=d}_{\text{fő}} \equiv \mathbb{R}^d$$
$$p = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + a_{d-2}x^{d-2} + \ldots + a_1 x + a_0 \mapsto (a_{d-1}, a_{d-2}, \ldots, a_1, a_0)$$

Tétel

a) $H_{\text{valós}}$ zárt,

b) $H_{\text{valós, különböző}}$ nyilt,

c) $H_{\text{valós, különböző}} = H^o_{\text{valós}}$.

Tétel

Tetszőleges $p \in \mathbb{R}[x]^{=d}_{\text{valós}}$ esetén van olyan $\{p_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}[x]^{=d}_{\text{valós, különböző}}$, hogy

$$p_n \longrightarrow p.$$

Példák

Példák

Binomiális tétel

$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n$ valós gyökű.

Példák

Binomiális tétel

$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n$ valós gyökű.

Permutációk számlálása ciklusok száma szerint

$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} x^3 + \ldots + \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} x^{n-1} + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} x^n$ valós gyökű.

Példák

Binomiális tétel

$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n$ valós gyökű.

Permutációk számlálása ciklusok száma szerint

$\left[{n \atop 0}\right] + \left[{n \atop 1}\right] x + \left[{n \atop 2}\right] x^2 + \left[{n \atop 3}\right] x^3 + \ldots + \left[{n \atop n-1}\right] x^{n-1} + \left[{n \atop n}\right] x^n$ valós gyökű.

Észrevétel

A fentiek NEGATÍV GYÖKŰEK.

Példák

Binomiális tétel

$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n$ valós gyökű.

Permutációk számlálása ciklusok száma szerint

$\left[{n \atop 0}\right] + \left[{n \atop 1}\right] x + \left[{n \atop 2}\right] x^2 + \left[{n \atop 3}\right] x^3 + \ldots + \left[{n \atop n-1}\right] x^{n-1} + \left[{n \atop n}\right] x^n$ valós gyökű.

Észrevétel

A fentiek NEGATÍV GYÖKŰEK.
A valós gyökű főpolinomok között
a negatív gyökűség $\equiv$

Példák

Binomiális tétel

$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n$ valós gyökű.

Permutációk számlálása ciklusok száma szerint

$\left[{n \atop 0}\right] + \left[{n \atop 1}\right] x + \left[{n \atop 2}\right] x^2 + \left[{n \atop 3}\right] x^3 + \ldots + \left[{n \atop n-1}\right] x^{n-1} + \left[{n \atop n}\right] x^n$ valós gyökű.

Észrevétel

A fentiek NEGATÍV GYÖKŰEK.
A valós gyökű főpolinomok között
a negatív gyökűség $\equiv$ pozitív együtthatójúság.

Példák

Binomiális tétel

$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n$ valós gyökű.

Permutációk számlálása ciklusok száma szerint

$\left[{n \atop 0}\right] + \left[{n \atop 1}\right] x + \left[{n \atop 2}\right] x^2 + \left[{n \atop 3}\right] x^3 + \ldots + \left[{n \atop n-1}\right] x^{n-1} + \left[{n \atop n}\right] x^n$ valós gyökű.

Észrevétel

A fentiek NEGATÍV GYÖKŰEK.
A valós gyökű főpolinomok között
a negatív gyökűség $\equiv$ pozitív együtthatójúság.

Szimmetrikus mátrix karakterisztikus polinomja

$\det(xI - A)$ valós gyökű,

Példák

Binomiális tétel

$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n$ valós gyökű.

Permutációk számlálása ciklusok száma szerint

$\left[{n \atop 0}\right] + \left[{n \atop 1}\right] x + \left[{n \atop 2}\right] x^2 + \left[{n \atop 3}\right] x^3 + \ldots + \left[{n \atop n-1}\right] x^{n-1} + \left[{n \atop n}\right] x^n$ valós gyökű.

Észrevétel

A fentiek NEGATÍV GYÖKŰEK.
A valós gyökű főpolinomok között
a negatív gyökűség $\equiv$ pozitív együtthatójúság.

Szimmetrikus mátrix karakterisztikus polinomja

$\det(xI - A)$ valós gyökű, HA A szimmetrikus, négyzetes mátrix.

Gyökök és együtthatók

Gyökök és együtthatók

Legyen $p \in \mathbb{R}[x]^{=n}_{\text{fő}}$.

Gyökök és együtthatók

Legyen $p \in \mathbb{R}[x]_{\text{fő}}^{=n}$.
p együtthatói: $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$.

Gyökök és együtthatók

Legyen $p \in \mathbb{R}[x]^{=n}_{\text{fő}}$.
p együtthatói: $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$.
p gyökei: $p(x) = (x + r_1)(x + r_2)\ldots(x + r_n)$.

Gyökök és együtthatók

Legyen $p \in \mathbb{R}[x]_{\text{fő}}^{=n}$.
p együtthatói: $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$.
p gyökei: $p(x) = (x + r_1)(x + r_2)\ldots(x + r_n)$.
Ekkor

$$a_{n-1} = r_1 + r_2 + \ldots + r_n,$$

Gyökök és együtthatók

Legyen $p \in \mathbb{R}[x]_{\text{fő}}^{=n}$.
p együtthatói: $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$.
p gyökei: $p(x) = (x + r_1)(x + r_2)\ldots(x + r_n)$.
Ekkor

$$a_{n-1} = r_1 + r_2 + \ldots + r_n,$$

$$a_{n-2} = r_1 r_2 + r_1 r_3 + \ldots + r_{n-1} r_n,$$

Gyökök és együtthatók

Legyen $p \in \mathbb{R}[x]_{\text{fő}}^{=n}$.
p együtthatói: $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$.
p gyökei: $p(x) = (x + r_1)(x + r_2)\ldots(x + r_n)$.
Ekkor

$$a_{n-1} = r_1 + r_2 + \ldots + r_n,$$

$$a_{n-2} = r_1 r_2 + r_1 r_3 + \ldots + r_{n-1} r_n,$$

$$a_{n-3} = r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \ldots + r_{n-2} r_{n-1} r_n,$$

Gyökök és együtthatók

Legyen $p \in \mathbb{R}[x]^{=n}_{\text{fő}}$.
p együtthatói: $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$.
p gyökei: $p(x) = (x + r_1)(x + r_2)\ldots(x + r_n)$.
Ekkor

$$a_{n-1} = r_1 + r_2 + \ldots + r_n,$$

$$a_{n-2} = r_1 r_2 + r_1 r_3 + \ldots + r_{n-1} r_n,$$

$$a_{n-3} = r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \ldots + r_{n-2} r_{n-1} r_n,$$

$$a_{n-4} = r_1 r_2 r_3 r_4 + r_1 r_2 r_3 r_5 + \ldots + r_{n-3} r_{n-2} r_{n-1} r_n,$$

$$\vdots$$

Gyökök és együtthatók

Legyen $p \in \mathbb{R}[x]_{\text{fő}}^{=n}$.
p együtthatói: $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$.
p gyökei: $p(x) = (x + r_1)(x + r_2)\ldots(x + r_n)$.
Ekkor

$$a_{n-1} = r_1 + r_2 + \ldots + r_n,$$

$$a_{n-2} = r_1 r_2 + r_1 r_3 + \ldots + r_{n-1} r_n,$$

$$a_{n-3} = r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \ldots + r_{n-2} r_{n-1} r_n,$$

$$a_{n-4} = r_1 r_2 r_3 r_4 + r_1 r_2 r_3 r_5 + \ldots + r_{n-3} r_{n-2} r_{n-1} r_n,$$

$$\vdots$$

$$a_0 = r_1 r_2 \ldots r_{n-1} r_n.$$

Negatív gyökű polinomok

Tétel (Newton)

Legyen $p \in \mathbb{R}[x]_{\text{valós, negatív, fő}}$:
$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$. Ekkor

$$1, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$$

LOG-KONKÁV.

Negatív gyökű polinomok

Tétel (Newton)

Legyen $p \in \mathbb{R}[x]_{\text{valós, negatív, fő}}$:
$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$. Ekkor

$$1, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$$

LOG-KONKÁV.

Definíció

$\{a_i\}_{i=0}^{n}$ log-konkáv, ha

Negatív gyökű polinomok

Tétel (Newton)

Legyen $p \in \mathbb{R}[x]_{\text{valós, negatív, fő}}$:
$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$. Ekkor

$$1, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$$

LOG-KONKÁV.

Definíció

$\{a_i\}_{i=0}^n$ log-konkáv, ha

- $\{\log a_i\}_{i=0}^n$ konkáv,

Negatív gyökű polinomok

Tétel (Newton)

Legyen $p \in \mathbb{R}[x]_{\text{valós, negatív, fő}}$:
$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$. Ekkor

$$1, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$$

LOG-KONKÁV.

Definíció

$\{a_i\}_{i=0}^n$ log-konkáv, ha

- $\{\log a_i\}_{i=0}^n$ konkáv,
- $\frac{\log a_{k-1} + \log a_{k+1}}{2} \leq \log a_k$, ha $k = 1, 2, \ldots, n-1$

Negatív gyökű polinomok

Tétel (Newton)

Legyen $p \in \mathbb{R}[x]_{\text{valós, negatív, fő}}$:
$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$. Ekkor

$$1, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$$

LOG-KONKÁV.

Definíció

$\{a_i\}_{i=0}^n$ log-konkáv, ha

- $\{\log a_i\}_{i=0}^n$ konkáv,
- $\frac{\log a_{k-1} + \log a_{k+1}}{2} \leq \log a_k$, ha $k = 1, 2, \ldots, n-1$
- $a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2$, ha $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Jelölés

Legyen H egy halmaz. $\binom{H}{k}$ a H halmaz k elemű részhalmazainak összessége.

Tétel

Megadható olyan

$$\varphi : \binom{H}{k-1} \times \binom{H}{k+1} \to \binom{H}{k} \times \binom{H}{k}$$

EGY-EGYértelmű leképzés, amelyre $(A, B) \mapsto (C, D)$ esetén

$$A \uplus B = C \uplus D.$$

További példa

Definíció

Legyen G egy egyszerű gráf. $M \subset E(G)$ PÁROSÍTÁS, ha

További példa

Definíció

Legyen G egy egyszerű gráf. $M \subset E(G)$ PÁROSÍTÁS, ha M-ben NINCS két szomszédos/összefutó él.

További példa

Definíció

Legyen G egy egyszerű gráf. $M \subset E(G)$ PÁROSÍTÁS, ha M-ben NINCS két szomszédos/összefutó él.

$\delta(M) = |V(G)| - 2|M| = n - 2|M|$, nem párosított pontok száma.

További példa

Definíció

Legyen G egy egyszerű gráf. $M \subset E(G)$ PÁROSÍTÁS, ha M-ben NINCS két szomszédos/összefutó él.

$\delta(M) = |V(G)| - 2|M| = n - 2|M|$, nem párosított pontok száma.

Definíció

$$m_G(x) = \sum_{M:\ \text{párosítás}\ G\text{-ben}} (-1)^{|M|} x^{\delta(M)} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \delta_{n-2i}(G) x^{n-2i},$$

ahol

További példa

Definíció

Legyen G egy egyszerű gráf. $M \subset E(G)$ PÁROSÍTÁS, ha M-ben NINCS két szomszédos/összefutó él.

$\delta(M) = |V(G)| - 2|M| = n - 2|M|$, nem párosított pontok száma.

Definíció

$$m_G(x) = \sum_{M:\ \text{párosítás}\ G\text{-ben}} (-1)^{|M|} x^{\delta(M)} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \delta_{n-2i}(G) x^{n-2i},$$

ahol $\delta_k(G) = |\{M : \text{ párosítás}, \delta(M) = k\}|$.

További példa

Definíció

Legyen G egy egyszerű gráf. $M \subset E(G)$ PÁROSÍTÁS, ha M-ben NINCS két szomszédos/összefutó él.

$\delta(M) = |V(G)| - 2|M| = n - 2|M|$, nem párosított pontok száma.

Definíció

$$m_G(x) = \sum_{M:\ \text{párosítás } G\text{-ben}} (-1)^{|M|} x^{\delta(M)} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \delta_{n-2i}(G) x^{n-2i},$$

ahol $\delta_k(G) = |\{M : \text{ párosítás, } \delta(M) = k\}|$.

Tétel

$$m_G(x) \in \mathbb{R}[x]^n_{\text{valós, fő}}$$

Példák

- $\delta_n(G) = 1.$

Példák

- $\delta_n(G) = 1.$
- $\delta_{n-2}(G) = |E(G)|.$

Példák

- $\delta_n(G) = 1.$
- $\delta_{n-2}(G) = |E(G)|.$
- $\delta_{n-2k}(S_n) = 0$, ha $k \geq 2.$

Példák

- $\delta_n(G) = 1$.
- $\delta_{n-2}(G) = |E(G)|$.
- $\delta_{n-2k}(S_n) = 0$, ha $k \geq 2$.
- $\delta_{n-2k}(K_n) = \binom{n}{2k}(2k-1)(2k-3)(2k-5)\ldots = \frac{n!}{2^k k!(n-2k)!}$.

Példák

- $\delta_n(G) = 1$.
- $\delta_{n-2}(G) = |E(G)|$.
- $\delta_{n-2k}(S_n) = 0$, ha $k \geq 2$.
- $\delta_{n-2k}(K_n) = \binom{n}{2k}(2k-1)(2k-3)(2k-5)\ldots = \frac{n!}{2^k k!(n-2k)!}$.
- $\delta_{2k}(HK_{n,n}) = \left\{ {n \atop k} \right\}$.

Tétel

Legyen G egy egyszerű gráf és $e = uv \in E(G)$ egy éle. Ekkor

$$m_G(x) = m_{G-e}(x) - m_{G-\{u,v\}}(G).$$

Egyszerű eset

Tétel

Legyen T egy fa. Ekkor

$$m_T(x) = \det\left(xI - A_T\right).$$

Egyszerű eset

Tétel

Legyen T egy fa. Ekkor

$$m_T(x) = \det\left(xI - A_T\right).$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} & & & \\ & A_{T_1} & & 0 \\ & & 1 & \\ \hline & 1 & & \\ 0 & & & A_{T_2} \\ & & & \end{array}\right)$$

Következmény

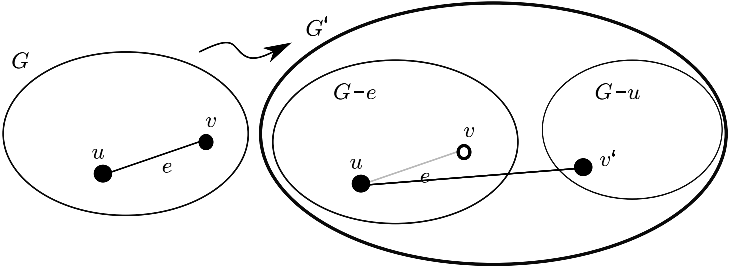
Legyen T egy fa. Ekkor

(i) $m_T(x)$ gyökei valósak (T sajátértékei).

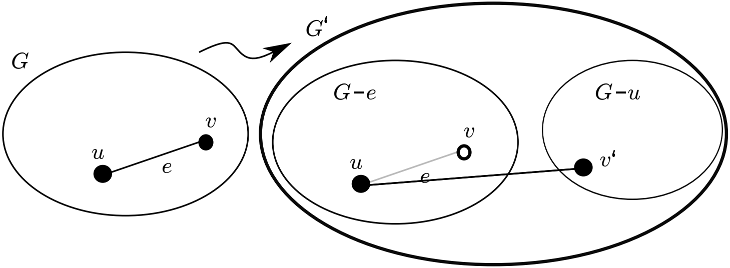
(ii) $m_T(x)$ minden r gyökére

$$|r| \leq 2\sqrt{\Delta(T) - 1}.$$

Egy ügyes észrevétel



Egy ügyes észrevétel



Észrevétel

(i) $m_{G'}(x) = m_{G-e}(x)m_{G-u}(x) - m_{G-u}m_{G-\{u,v\}}(x)$.

(ii) $m_G(x) | m_{G'}(x)$.

Módosított szomszédsági mátrix

Legyen $\sigma : E(G) \to \{-1, 1\}$.

Módosított szomszédsági mátrix

Legyen $\sigma : E(G) \to \{-1, 1\}$.

A_G^σ: mint az A_G szomszédsági mátrix, csak az e élnek két darab $\sigma(e)$ érték felel meg (a megfelelő pozícióban).

Módosított szomszédsági mátrix

Legyen $\sigma : E(G) \to \{-1, 1\}$.

A_G^σ: mint az A_G szomszédsági mátrix, csak az e élnek két darab $\sigma(e)$ érték felel meg (a megfelelő pozícióban).

$A_G = A_G^1$.

Fontos

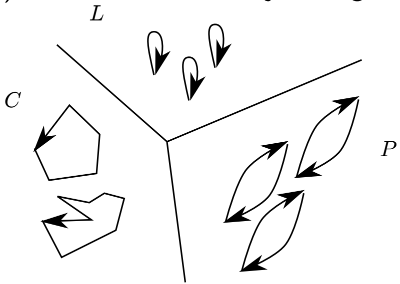
Észrevétel

$$\mathbb{E}_\sigma det\left(xI - A_G^\sigma\right) = m_G(x).$$

Észrevétel

$$\mathbb{E}_\sigma det\,(xI - A_G^\sigma) = m_G(x).$$

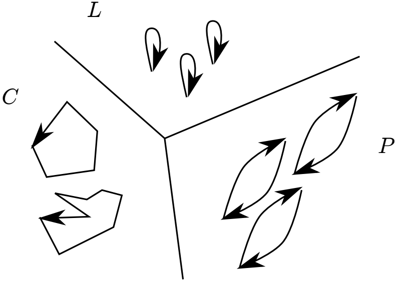
$\pi : V(G) \to V(G) \qquad \Longrightarrow \qquad k$ kifejtési tag a bal oldalon.



Észrevétel

$$\mathbb{E}_\sigma det\,(xI - A_G^\sigma) = m_G(x).$$

$\pi : V(G) \to V(G) \quad \Longrightarrow \quad k$ kifejtési tag a bal oldalon.

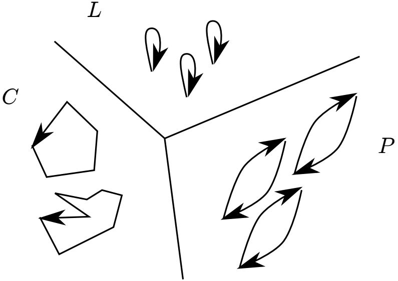


Ha $C \neq \emptyset$, akkor

Észrevétel

$$\mathbb{E}_\sigma det\,(xI - A_G^\sigma) = m_G(x).$$

$\pi : V(G) \to V(G) \qquad \Longrightarrow \qquad k$ kifejtési tag a bal oldalon.



Ha $C \neq \emptyset$, akkor

$$\mathbb{E}_\sigma k = 0.$$

A Tétel

Adam Marcus, Daniel A. Spielman, Nikhil Srivastava

Van olyan σ, hogy
$$\det\left(xI - A_G^{\sigma}\right)$$
minden r gyökére
$$r \le 2\sqrt{\Delta(G) - 1}.$$

Levezető tétel I.

Tétel I.

Legyen $p, q \in \mathbb{R}[x]^{=n}_{\text{valós, fő}}$. Akövetkezők ekvivalensek:

(i) Minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén $\alpha p + \beta q \in \mathbb{R}[x]_{\text{valós}}$.

(ii) p és q gyökei alternálnak.

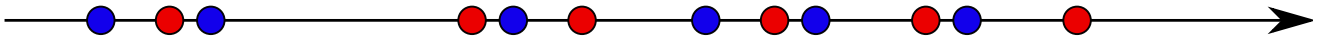
Levezető tétel I.

Tétel I.

Legyen $p, q \in \mathbb{R}[x]^{=n}_{\text{valós, fő}}$. Akövetkezők ekvivalensek:

(i) Minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén $\alpha p + \beta q \in \mathbb{R}[x]_{\text{valós}}$.

(ii) p és q gyökei alternálnak.



Levezető tétel II.

Tétel II.

Legyen $p, q \in \mathbb{R}[x]^{=n}_{\text{valós, fő}}$. Akövetkezők ekvivalensek:

(i) Minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ esetén $\alpha p + \beta q \in \mathbb{R}[x]_{\text{valós}}$.

(ii) p és q gyökei 2-blokkosak.

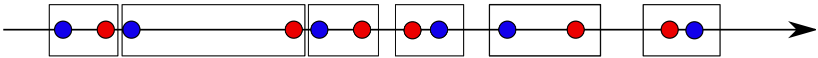
Levezető tétel II.

Tétel II.

Legyen $p, q \in \mathbb{R}[x]^{=n}_{\text{valós, fő}}$. Akövetkezők ekvivalensek:

(i) Minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ esetén $\alpha p + \beta q \in \mathbb{R}[x]_{\text{valós}}$.

(ii) p és q gyökei 2-blokkosak.



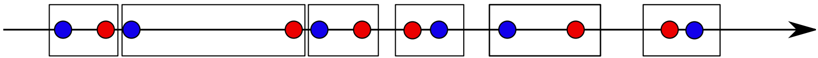
Levezető tétel II.

Tétel II.

Legyen $p, q \in \mathbb{R}[x]^{=n}_{\text{valós, fő}}$. Akövetkezők ekvivalensek:

(i) Minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ esetén $\alpha p + \beta q \in \mathbb{R}[x]_{\text{valós}}$.

(ii) p és q gyökei 2-blokkosak.



Ekkor

$$\min\{\text{max-gyök } p, \text{max-gyök } q\} \le \text{max-gyök } (\alpha p + \beta q).$$

Köszönöm a figyelmet!