

# Véges ponthalmazok és az általuk meghatározott távolságok

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2019. március 23.

# A kezdet

# A kezdet



# A kezdet



Erdős Pál

Budapest, 1913. március 26. – Varsó, 1996. szeptember 20.



## ON SETS OF DISTANCES OF $n$ POINTS

P. ERDÖS, Stanford University

**1. The function  $f(n)$ .** Let  $[P_n]$  be the class of all planar subsets  $P_n$  of  $n$  points and denote by  $f(n)$  the minimum number of different distances determined by its  $n$  points for  $P_n$  an element of  $\{P_n\}$ . Clearly,  $f(3) = 1$  (with the three points forming the vertices of an equilateral triangle)  $f(4) = 2$ ,  $f(5) = 2$ . The following theorem establishes rough bounds for arbitrary  $n$ . Though I have sought to improve this result for many years, I have not been able to do so.

**THEOREM 1.** *The minimum number  $f(n)$  of distances determined by  $n$  points of a plane satisfies the inequalities*

$$(n - 3/4)^{1/2} - 1/2 \leq f(n) \leq cn/(\log n)^{1/2}.$$

*Proof.* Let  $P_1$  be an arbitrary vertex of the least convex polygon determined by the  $n$  points, and denote by  $K$  the number of different distances occurring









Pintér Lajos

Arad, 1929. május 29. — Szeged, 2019. január 6.

## Definíció

Legyen  $\mathcal{P}$  egy  $n$  elemű ponthalmaz a síkon. Vegyünk két különböző pontot  $\mathcal{P}$ -ből és határozzuk meg távolságukat. A kapott  $\binom{n}{2}$  pozitív szám a *ponthalmazunk meghatározott távolságai*.

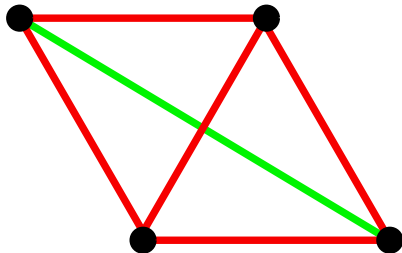
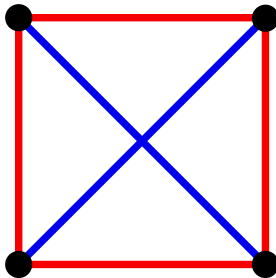
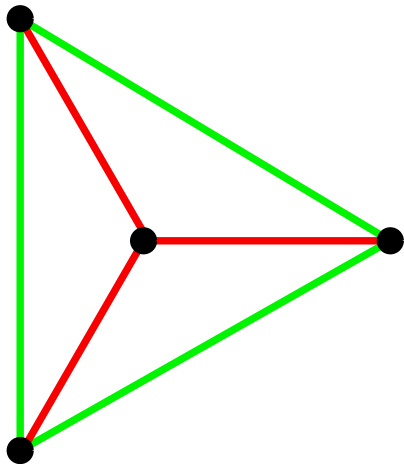
## Definíció

Legyen  $\mathcal{P}$  egy  $n$  elemű ponthalmaz a síkon. Vegyünk két különböző pontot  $\mathcal{P}$ -ből és határozzuk meg távolságukat. A kapott  $\binom{n}{2}$  pozitív szám a *ponthalmazunk meghatározott távolságai*.

A távolságok nem szükségszerűen különbözők. Igazából a realizált értékek bizonyos multiplicitással értendők.

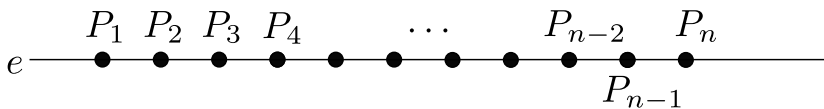
# Példa 0

# Példa 0

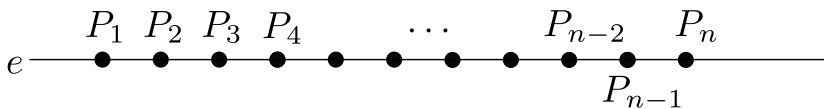


A számegyenes  $1, 2, \dots, n$  pontjai.

A számegyenes  $1, 2, \dots, n$  pontjai.



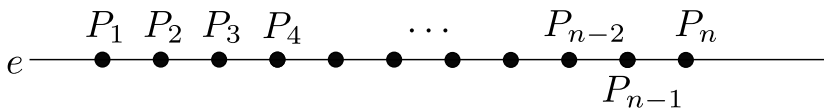
A számegyenes  $1, 2, \dots, n$  pontjai.



$n - 1$  különböző távolság:  $1, 2, \dots, n - 1$ .



A számegyenes  $1, 2, \dots, n$  pontjai.

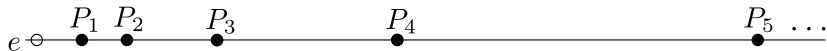


$n - 1$  különböző távolság:  $1, 2, \dots, n - 1$ .

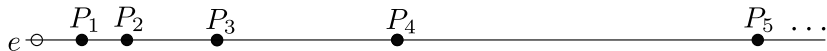
Az  $i$  távolság multiplicitása  $n - i$ .

A számegegyenes  $1, 2, 4, 8, \dots, 2^{n-1}$  pontjai.

A számegyenes  $1, 2, 4, 8, \dots, 2^{n-1}$  pontjai.

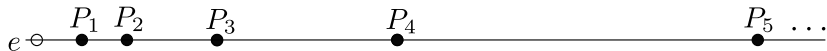


A számegyenes  $1, 2, 4, 8, \dots, 2^{n-1}$  pontjai.



$\binom{n}{2}$  különböző távolság. (Miért?)

A számegyenes  $1, 2, 4, 8, \dots, 2^{n-1}$  pontjai.



$\binom{n}{2}$  különböző távolság. (Miért?)

Mindegyik távolság multiplicitása 1.

Az egyenest kiaknáztuk.

Az egyenest kiaknáztuk.

Az egyenesen  $n$  pont mindig legalább  $n - 1$  távolságot meghatároz.  
(Miért?)

Az egyenest kiaknáztuk.

Az egyenesen  $n$  pont mindig legalább  $n - 1$  távolságot meghatároz.  
(Miért?)

Ez a minimális távolság szám meg is valósítható.



Az egyenest kiaknáztuk.

Az egyenesen  $n$  pont mindig legalább  $n - 1$  távolságot meghatároz.  
(Miért?)

Ez a minimális távolság szám meg is valósítható.

A maximális távolság szám /  $\binom{n}{2}$  is megvalósítható.

Az egyenest kiaknáztuk.

Az egyenesen  $n$  pont mindig legalább  $n - 1$  távolságot meghatároz.  
(Miért?)

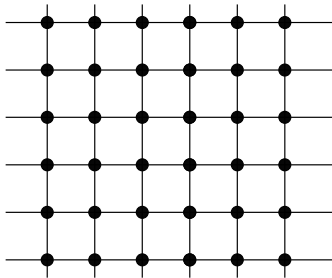
Ez a minimális távolság szám meg is valósítható.

A maximális távolság szám/ $\binom{n}{2}$  is megvalósítható.

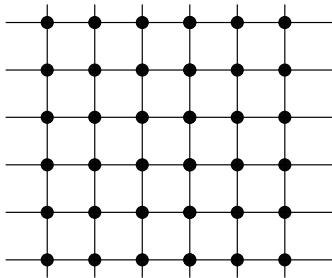
Az érdekes kérdés: Lépünk ki a síkba! Konstruáljunk olyan ponthalmazt, amely minél kevesebb távolságot tartalmaz.

$6 \times 6$  négyzetrács 36 pontja.

$6 \times 6$  négyzetrács 36 pontja.

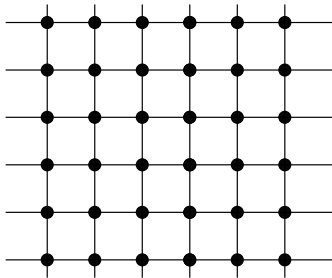


$6 \times 6$  négyzetrács 36 pontja.



Különböző távolságok száma?

$6 \times 6$  négyzetrács 36 pontja.

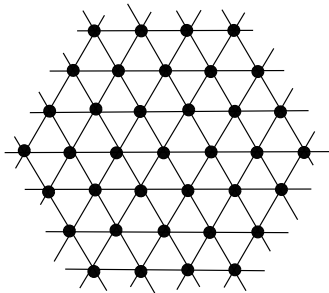


Különböző távolságok száma?

Multiplicitások?

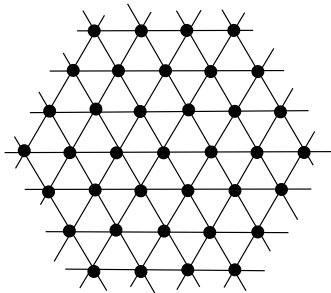
Egy háromszögrács pontjai.

Egy háromszögrács pontjai.



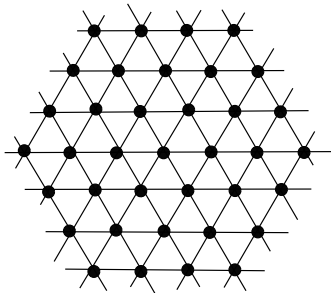


Egy háromszögrács pontjai.



Különböző távolságok száma?

Egy háromszögrács pontjai.



Különböző távolságok száma?

Multiplicitások?

## Definíció

$$\text{KülTáv}(\mathcal{P}) = |\{d : d \text{ egy meghatározott távolság } \mathcal{P}\text{-ben}\}|.$$

## Definíció

$$\text{KülTáv}(\mathcal{P}) = |\{d : d \text{ egy meghatározott távolság } \mathcal{P}\text{-ben}\}|.$$

## Definíció

$$\text{KülTáv}(n) = \min\{\text{KülTáv}(\mathcal{P}) : |\mathcal{P}| = n\}.$$

## Tétel

$$\frac{1}{2}\sqrt{n} \leq \text{KülTáv}(n).$$

Legyen  $\mathcal{P}$  egy tetszőleges  $n$  elemű ponthalmaz a síkon. Legyen  $\Delta$  a különböző távolságok száma.

Legyen  $\mathcal{P}$  egy tetszőleges  $n$  elemű ponthalmaz a síkon. Legyen  $\Delta$  a különböző távolságok száma.

Legyen  $A$  egy pont  $\mathcal{P}$ -ből. Rajzoljunk  $A$  körül  $\Delta$  darab koncentrikus kört, amelyek sugarai a  $\mathcal{P}$  által meghatározott távolságok. Így ez a  $\Delta$  darab kör lefedi az  $A$ -tól különböző  $n - 1$  pontot.

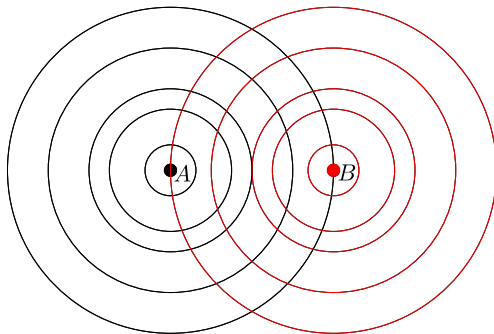
Legyen  $\mathcal{P}$  egy tetszőleges  $n$  elemű ponthalmaz a síkon. Legyen  $\Delta$  a különböző távolságok száma.

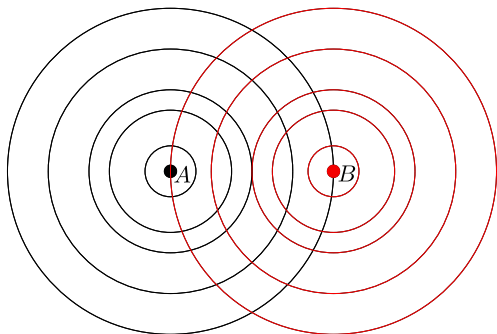
Legyen  $A$  egy pont  $\mathcal{P}$ -ből. Rajzoljunk  $A$  körül  $\Delta$  darab koncentrikus kört, amelyek sugarai a  $\mathcal{P}$  által meghatározott távolságok. Így ez a  $\Delta$  darab kör lefedi az  $A$ -tól különböző  $n - 1$  pontot.

Legyen  $B$  egy  $A$ -tól különböző pont  $\mathcal{P}$ -ből. Ismételjük meg  $B$  körül is a fentieket.



# Bizonyítás (folytatás)





Mindkét  $\Delta$  körből álló rendszer lefedi az  $A$ -tól és  $B$ -től különböző  $n - 2$  pontot. Azaz

$$n - 2 \leq 2 \cdot \Delta^2.$$

Tétel (Guth–Katz 2015, Erdős Pál 1946)

$$\frac{1}{100} \frac{n}{\log n} \leq \text{KülTáv}(n) \leq 100 \frac{n}{\sqrt{\log n}}.$$

## Definíció

$$\text{EgyTáv}(\mathcal{P}) = |\{\{A, B\} \subset \mathcal{P} : d(A, B) = 1\}|.$$

## Definíció

$$\text{EgyTáv}(\mathcal{P}) = |\{\{A, B\} \subset \mathcal{P} : d(A, B) = 1\}|.$$

## Definíció

$$\text{EgyTáv}(n) = \max\{\text{KülTáv}(\mathcal{P}) : |\mathcal{P}| = n\}.$$

## Definíció

Legyen  $\mathcal{P}$  egy véges ponthalmaz. Pontjainkat csúcsoknak vesszük és két csúcsot akkor és csak akkor kötünk össze, ha egységtávolságra vannak egymástól. A kapott egyszerű gráfot a ponthalmaz egységtávolság-gráfjának nevezzük és  $U_{\mathcal{P}}$ -vel jelöljük.

## Lemma

Egy síkbeli ponthalmaz egységtávolság gráfja nem tartalmaz négy páronként összekötött pontot/négy elemű klikket.

Indirekt módszer: Tegyük fel, hogy mégis van négy páronként összekötött pontunk  $A$ ,  $B$ ,  $C$  és  $D$ . A maradék csak „ellentmondás vadászat”.



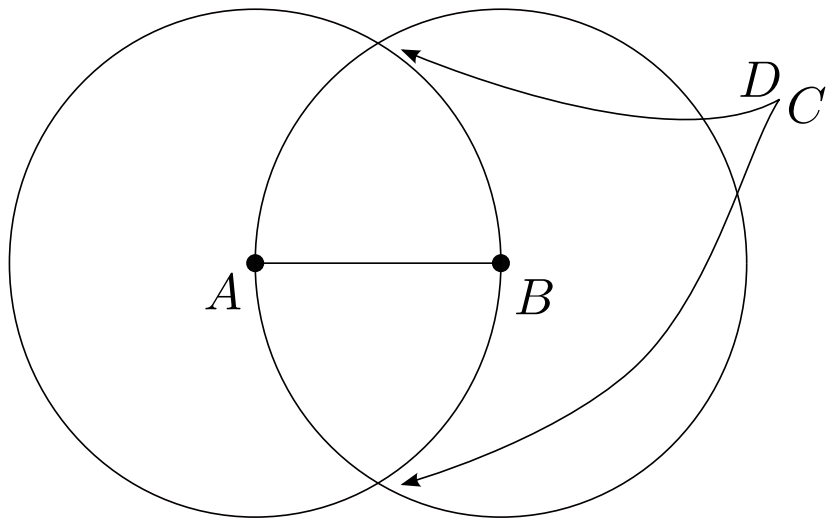
Indirekt módszer: Tegyük fel, hogy mégis van négy páronként összekötött pontunk  $A$ ,  $B$ ,  $C$  és  $D$ . A maradék csak „ellentmondás vadászat”.

$A$  és  $B$  összekötött, tehát egységtávolságra vannak.

Indirekt módszer: Tegyük fel, hogy mégis van négy páronként összekötött pontunk  $A$ ,  $B$ ,  $C$  és  $D$ . A maradék csak „ellentmondás vadászat”.

$A$  és  $B$  összekötött, tehát egységtávolságra vannak.

Hol lehet  $C$  és  $D$ ? Éppen van nekik hely. DE!!!



## Egy szabadulószoba honlapja

Van négy hajóm egymástól mind 100–100 méterre, egy három evezősoros gálya, egy két árbócos vitorlás, és egy csatahajó. Mi a negyedik?

## Egy szabadulószoza honlapja

Van négy hajóm egymástól mind 100–100 méterre, egy három evezősoros gálya, egy két árbócos vitorlás, és egy csatahajó. Mi a negyedik?

## ELTE szakdolgozat

A tengeren négy hajó halad együtt, közel egymáshoz: bármely két hajó távolsága 3 km. A hajók között van teherszállító, olajszállító és utasszállító hajó. Milyen hajó a negyedik?

## Egy matematikai kérdés

Hány éle lehet egy  $n$  pontú egyszerű gráfnak, ha nincs benne négy páronként összekötött csúcs?

1. Válasz: „Sok.”

1. Válasz: „Sok.”

2. válasz (Turán Pál): [Az egyszerűség kedvéért tegyük fel  $3|n$ .]  
Osszuk három egyenlő elemszámú halmazba/részbe a csúcsokat.  
Két csúcs akkor és csak akkor összekötött, ha különböző részhez tartoznak. Ez  $n^2/3$  él, ennyi élünk lehet. Több NEM.



## OKTV II. forduló, 1980

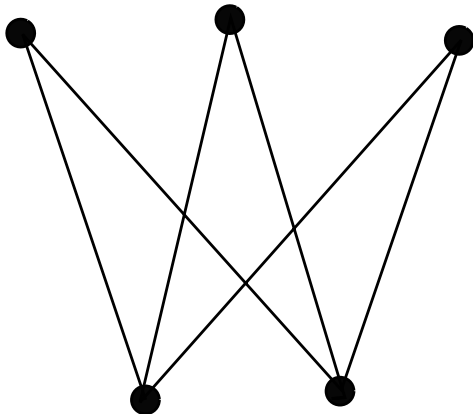
Egy kétkarú mérlegen  $kn + 1$  darab golyó tömegét hasonlítjuk össze ( $k, n$  pozitív egészek). A golyókat minden lehetséges párosításban a mérlegre téve azt tapasztaljuk, hogy a mérleg

$$b = \binom{k}{2}n^2 + (k - 1)n + 1$$

esetben billen ki (a feltett két golyó különböző tömegű; egy golyópárt csak egyszer helyezünk rá a mérlegre). Bizonyítsuk be, hogy a golyók között van legalább  $k + 1$  különböző tömegű! Igaz-e ez az állítás akkor is, ha a mérleg csak  $b - 1$  esetben billen ki?

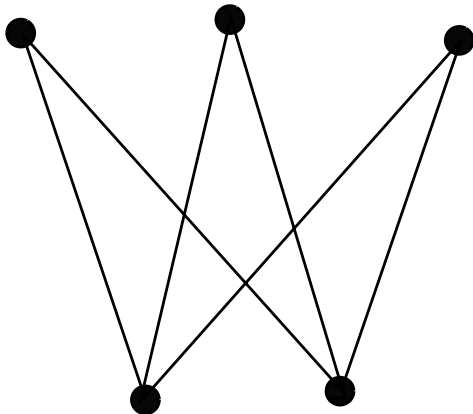
Egy síkbeli ponthalmaz egységtávolság gráfja nem tartalmaz  $K_{2,3}$  részgráfot.

Egy síkbeli ponthalmaz egységtávolság gráfja nem tartalmaz  $K_{2,3}$  részgráfot.



# Vissza a matematikai nyelvezethez

Egy síkbeli ponthalmaz egységtávolság gráfja nem tartalmaz  $K_{2,3}$  részgráfot.



„Három ház—kettő kút” gráf.

## Tétel

Legyen  $G$  egy  $n$  csúcsú egyszerű gráf, amely nem tartalmaz  $K_{2,3}$  részgráfot. Ekkor  $G$  éleinek száma legfeljebb

$$2 \cdot n^{3/2}.$$

Hány egy csúcsból induló élpár lehet  $G$ -ben?

Hány egy csúcsból induló élpár lehet  $G$ -ben?

Pontosan

$$\sum_{v:v \in V} \binom{d(v)}{2}.$$

Hány egy csúcsból induló élpár lehet  $G$ -ben?

Pontosan

$$\sum_{v:v \in V} \binom{d(v)}{2}.$$

Legfeljebb

$$2 \cdot \binom{n}{2}.$$



Geometriai motiváció.

Geometriai motiváció.

Kombinatorikus kérdés.

Geometriai motiváció.

Kombinatorikus kérdés.

A kombinatorikus kérdés megoldása a kombinatorikán belül.

Geometriai motiváció.

Kombinatorikus kérdés.

A kombinatorikus kérdés megoldása a kombinatorikán belül.

A kombinatorikus válasz geometriai értelmezése.

Geometriai motiváció.

Kombinatorikus kérdés.

A kombinatorikus kérdés megoldása a kombinatorikán belül.

A kombinatorikus válasz geometriai értelmezése.

## Tétel

Egy  $n$  elemű síkbeli ponthalmaz legfeljebb  $2n^{3/2}$  egységtávolságot határoz meg.

Tétel (Erdős Pál 1946, Spencer–Szemerédi–Trotter 1984)

$$\frac{1}{100} n^{1+1/\log \log n} \leq \text{EgyTáv}(n) \leq 100n^{4/3}.$$

## Probléma (Hadwiger—Nelson)

Színezzük ki a sík pontjait minél kevesebb színnel úgy hogy az egységtávolságra lévő pontpárok két különböző színt kapjanak.

## Probléma (Hadwiger—Nelson)

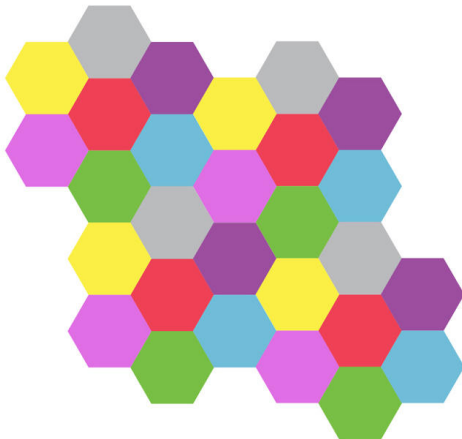
Színezzük ki a sík pontjait minél kevesebb színnel úgy hogy az egységtávolságra lévő pontpárok két különböző színt kapjanak.

Erdős Pál, Leo és William Moser, Hugo Hadwiger, Martin Gardner, Heiko Harborth, Solomon W. Golomb, Edward Nelson (1950, egyetemi hallgató), John Isbell, Victor Klee, William T. Tutte, ...



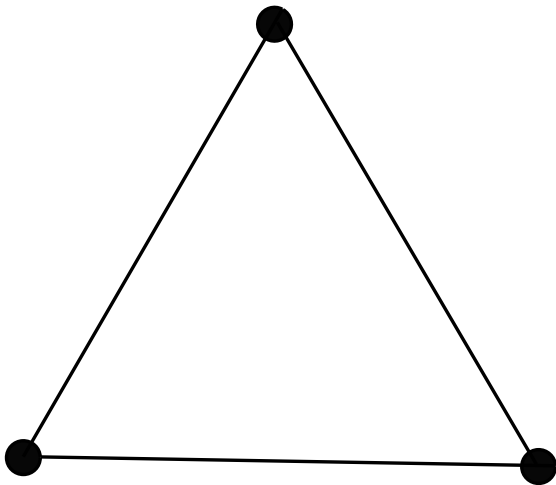
Bizonyítás:

Bizonyítás:

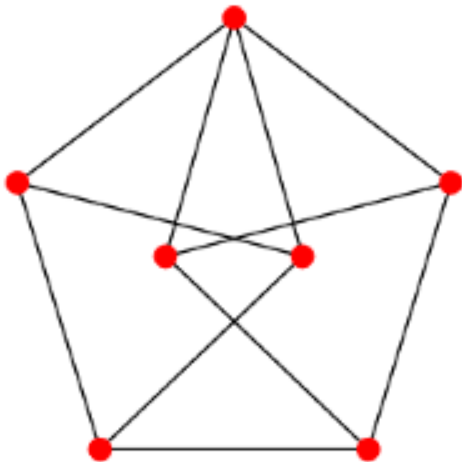


Bizonyítás:

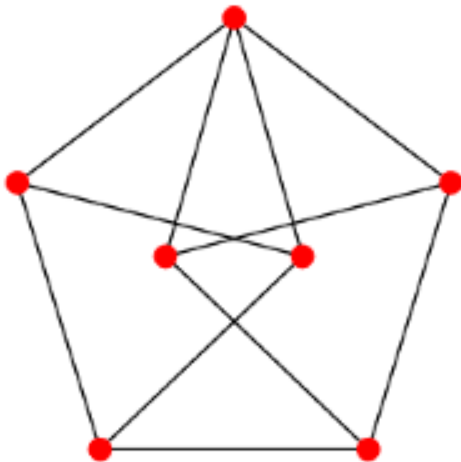
Bizonyítás:



# Három szín nem elég



# Három szín nem elég



Moser—Moser-orsó.

Nem bizonyítjuk.

Nem bizonyítjuk.

Friss.



Nem bizonyítjuk.

Friss.

Aubrey de Grey, 2018. április 8.

A sík kromatikus száma legalább 5.

Nem bizonyítjuk.

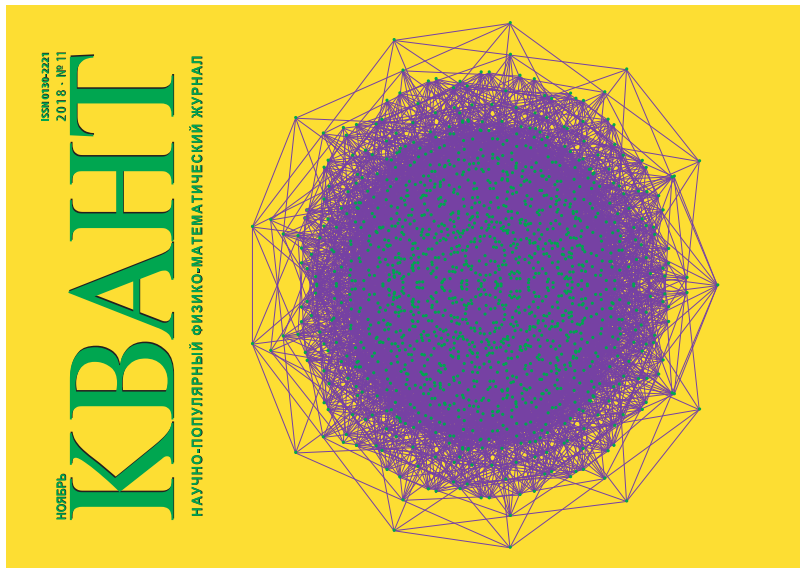
Friss.

Aubrey de Grey, 2018. április 8.

A sík kromatikus száma legalább 5.

Igazából nem értjük a bizonyítást.

# Pintér Tanár úr másik kedvenc lapja



# Merre tovább?

Sok kérdés marad azoknak is, akik még csak az általános iskolai padokat koptatják.

Köszönöm a figyelmet!