Sorbaállítások összeszámlálása

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2010. július 7.

Sorbaállítások, bevezetés

Feladat

Adott három tárgy. Hányféleképpen rakhatók sorba?

Sorbaállítások, bevezetés

Feladat

Adott három tárgy. Hányféleképpen rakhatók sorba?

Definíció

Egy n elemű halmaz elemeit az összes módon állítsuk sorba. Jelölje S_n a lehetőségek számát.

Sorbaállítások, bevezetés

Feladat

Adott három tárgy. Hányféleképpen rakhatók sorba?

Definíció

Egy n elemű halmaz elemeit az összes módon állítsuk sorba. Jelölje S_n a lehetőségek számát.

Feladat'

Határozzuk meg S_3 értékét.

Feladat

Adott három tárgy. Hányféleképpen rakhatók sorba?

Definíció

Egy n elemű halmaz elemeit az összes módon állítsuk sorba. Jelölje S_n a lehetőségek számát.

Feladat'

Határozzuk meg S_3 értékét.

Feladat$^+$

Adott három tárgy. Soroljuk fel lehetséges sorbaállításaikat és számoljuk meg őket.

Sorbaállítások, felsorolások

$A \quad B \quad C$

Sorbaállítások, felsorolások

$A \quad B \quad C$

$A \quad C \quad B$

Sorbaállítások, felsorolások

$A \quad B \quad C$

$A \quad C \quad B$

$B \quad A \quad C$

$A \quad B \quad C$

$A \quad C \quad B$

$B \quad A \quad C$

$C \quad A \quad B$

Sorbaállítások, felsorolások

$A \quad B \quad C$

$A \quad C \quad B$

$B \quad A \quad C$

$C \quad A \quad B$

$B \quad C \quad A$

Sorbaállítások, felsorolások

$A \quad B \quad C$

$A \quad C \quad B$

$B \quad A \quad C$

$C \quad A \quad B$

$B \quad C \quad A$

$C \quad B \quad A$

Sorbaállítások, felsorolások

$$A \quad B \quad C$$

$$A \quad C \quad B$$

$$B \quad A \quad C$$

$$C \quad A \quad B$$

$$B \quad C \quad A$$

$$C \quad B \quad A$$

$$S_3 = 6$$

Tétel

$$S_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Sorbaállítások, alaptétel

Tétel

$$S_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Bizonyítás

Csoportosítsuk/generáljuk a sorbaállításokat aszerint, hogy hol van az 'n' szám.

Sorbaállítások, alaptétel

Tétel

$$S_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Bizonyítás

Csoportosítsuk/generáljuk a sorbaállításokat aszerint, hogy hol van az 'n' szám.

HA n az i-edik pozícióban áll, akkor

Sorbaállítások, alaptétel

Tétel

$$S_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Bizonyítás

Csoportosítsuk/generáljuk a sorbaállításokat aszerint, hogy hol van az 'n' szám.

HA n az i-edik pozícióban áll, akkor

- Sorbaállítjuk a $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ halmaz elemeit.

Sorbaállítások, alaptétel

Tétel

$$S_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Bizonyítás

Csoportosítsuk/generáljuk a sorbaállításokat aszerint, hogy hol van az 'n' szám.

HA n az i-edik pozícióban áll, akkor

- Sorbaállítjuk a $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ halmaz elemeit.
- Az $i-1$-edik és i-edik szám közé *beszúrjuk* 'n'-et.

Tétel

$$S_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Bizonyítás

Csoportosítsuk/generáljuk a sorbaállításokat aszerint, hogy hol van az 'n' szám.

HA n az i-edik pozícióban áll, akkor

- Sorbaállítjuk a $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ halmaz elemeit.
- Az $i-1$-edik és i-edik szám közé *beszúrjuk* 'n'-et.

Összesen S_{n-1} lehetőség.

Sorbaállítások, alaptétel

Tétel

$$S_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Bizonyítás

Csoportosítsuk/generáljuk a sorbaállításokat aszerint, hogy hol van az 'n' szám.

HA n az i-edik pozícióban áll, akkor

- Sorbaállítjuk a $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ halmaz elemeit.
- Az $i-1$-edik és i-edik szám közé *beszúrjuk* 'n'-et.

Összesen S_{n-1} lehetőség.

$$S_n = n \cdot S_{n-1}$$

Sorbaállítások, alaptétel

Tétel

$$S_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Bizonyítás

Csoportosítsuk/generáljuk a sorbaállításokat aszerint, hogy hol van az 'n' szám.

HA n az i-edik pozícióban áll, akkor

- Sorbaállítjuk a $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ halmaz elemeit.
- Az $i-1$-edik és i-edik szám közé *beszúrjuk* 'n'-et.

Összesen S_{n-1} lehetőség.

$$S_n = n \cdot S_{n-1}$$

Teljes indukció adja a tétel állítását.

Sorbaállítások, faktoriális

Jelölés

n! az első n pozitív egész szorzatát jelöli.

Sorbaállítások, faktoriális

Jelölés

$n!$ az első n pozitív egész szorzatát jelöli.

Megállapodás

Az egy tényezős szorzat értéke az egyetlen tényezője.
Az üres (0 darab tényezős) szorzat értéke 1.

Sorbaállítások, faktoriális

Jelölés

n! az első n pozitív egész szorzatát jelöli.

Megállapodás

Az egy tényezős szorzat értéke az egyetlen tényezője.
Az üres (0 darab tényezős) szorzat értéke 1.

Példa

$$0! = 1, 1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, 6! = 720, 7! = 5040,$$

$$20! = 2,432,902,008,176,640,000$$

Vigyázat, csalunk!

$$n!$$

nagyon EGYSZERŰEN néz ki:

$n!$

nagyon EGYSZERŰEN néz ki: n tényezős szorzat, a tényezők egyszerűek.

Vigyázat, csalunk!

$$n!$$

nagyon EGYSZERŰEN néz ki: n tényezős szorzat, a tényezők egyszerűek.
Jelölése n és egy FELKIÁLTÓJEL.

Vigyázat, csalunk!

$$n!$$

nagyon EGYSZERŰEN néz ki: n tényezős szorzat, a tényezők egyszerűek.
Jelölése n és egy FELKIÁLTÓJEL. Egyszerűen néz ki, akárcsak

$$2^n$$

$$n!$$

nagyon EGYSZERŰEN néz ki: n tényezős szorzat, a tényezők egyszerűek.
Jelölése n és egy FELKIÁLTÓJEL. Egyszerűen néz ki, akárcsak

$$2^n$$

Hány számjegye van 2^{1000}-nak?

Vigyázat, csalunk!

$$n!$$

nagyon EGYSZERŰEN néz ki: n tényezős szorzat, a tényezők egyszerűek.
Jelölése n és egy FELKIÁLTÓJEL. Egyszerűen néz ki, akárcsak

$$2^n$$

Hány számjegye van 2^{1000}-nak? És hány $1000!$-nak?

Vigyázat, csalunk!

$$n!$$

nagyon EGYSZERŰEN néz ki: n tényezős szorzat, a tényezők egyszerűek.
Jelölése n és egy FELKIÁLTÓJEL. Egyszerűen néz ki, akárcsak

$$2^n$$

Hány számjegye van 2^{1000}-nak? És hány $1000!$-nak?

- Első kérdéshez segítség:

Vigyázat, csalunk!

$$n!$$

nagyon EGYSZERŰEN néz ki: n tényezős szorzat, a tényezők egyszerűek.
Jelölése n és egy FELKIÁLTÓJEL. Egyszerűen néz ki, akárcsak

$$2^n$$

Hány számjegye van 2^{1000}-nak? És hány $1000!$-nak?

- Első kérdéshez segítség: LOGARITMUS fogalma.

Vigyázat, csalunk!

$$n!$$

nagyon EGYSZERŰEN néz ki: n tényezős szorzat, a tényezők egyszerűek.
Jelölése n és egy FELKIÁLTÓJEL. Egyszerűen néz ki, akárcsak

$$2^n$$

Hány számjegye van 2^{1000}-nak? És hány $1000!$-nak?

- Első kérdéshez segítség: LOGARITMUS fogalma. (Középiskolás tananyag.)

Vigyázat, csalunk!

$$n!$$

nagyon EGYSZERŰEN néz ki: n tényezős szorzat, a tényezők egyszerűek.
Jelölése n és egy FELKIÁLTÓJEL. Egyszerűen néz ki, akárcsak

$$2^n$$

Hány számjegye van 2^{1000}-nak? És hány $1000!$-nak?

- Első kérdéshez segítség: LOGARITMUS fogalma. (Középiskolás tananyag.)
- Második kérdéshez segítség:

Vigyázat, csalunk!

$$n!$$

nagyon EGYSZERŰEN néz ki: n tényezős szorzat, a tényezők egyszerűek.
Jelölése n és egy FELKIÁLTÓJEL. Egyszerűen néz ki, akárcsak

$$2^n$$

Hány számjegye van 2^{1000}-nak? És hány $1000!$-nak?

- Első kérdéshez segítség: LOGARITMUS fogalma. (Középiskolás tananyag.)
- Második kérdéshez segítség: Stirling-formula.

Vigyázat, csalunk!

$$n!$$

nagyon EGYSZERŰEN néz ki: n tényezős szorzat, a tényezők egyszerűek.
Jelölése n és egy FELKIÁLTÓJEL. Egyszerűen néz ki, akárcsak

$$2^n$$

Hány számjegye van 2^{1000}-nak? És hány $1000!$-nak?

- Első kérdéshez segítség: LOGARITMUS fogalma. (Középiskolás tananyag.)
- Második kérdéshez segítség: Stirling-formula. (Egyetemi anyag.)

A faktoriális függvény elemi becslései

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{2} \leq 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

A faktoriális függvény elemi becslései

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{2} \leq 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \leq n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n \cdot n = n^n.$$

A faktoriális függvény elemi becslései

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{2} \leq 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \leq n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n \cdot n = n^n.$$

Feladat

$$(n/2)^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq n^n.$$

A faktoriális függvény elemi becslései

$$n \leq 1 \cdot n,$$

$$n \leq 2 \cdot (n-1),$$

$$n \leq 3 \cdot (n-2),$$

A faktoriális függvény elemi becslései

$$n \leq 4 \cdot (n - 3),$$

A faktoriális függvény elemi becslései

$$n^{n/2} \leq 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

A faktoriális függvény elemi becslései

$$n^{n/2} \leq 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \leq \left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

A faktoriális függvény elemi becslései

$$n^{n/2} \leq 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \leq \left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{n} \right)^n = \left(\frac{n+1}{2} \right)^n.$$

Feladat

$$n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2} \right)^n.$$

A faktoriális függvény elemi becslései

$$n^{n/2} \leq 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \leq \left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Feladat

$$n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Stirling-formula

$$n! \sim \sqrt{2\pi} \cdot \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}.$$

Egy fontos megjegyzés

Kérdés

Hányféleképpen állhat kilenc ember egy 3×3-es alakzatba?

Egy fontos megjegyzés

Kérdés

Hányféleképpen állhat kilenc ember egy 3×3-es alakzatba?

Kérdés

Hányféleképpen ülhet le kilenc ember egy asztalhoz rakott kilenc székre? (A székek megkülönböztethetők.)

Egy fontos megjegyzés

Kérdés

Hányféleképpen állhat kilenc ember egy 3×3-es alakzatba?

Kérdés

Hányféleképpen ülhet le kilenc ember egy asztalhoz rakott kilenc székre? (A székek megkülönböztethetők.)

Kérdés

Kilenc embernek kell kilenc hegy tetejére felmászni úgy, hogy mindegyik hegyen egy-egy ember legyen. Hányféleképpen „oszthatják el egymás közt” a hegyeket?

Egy fontos megjegyzés

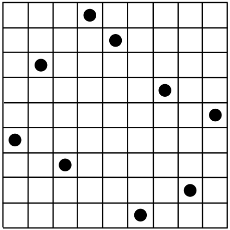
Kérdés

Hányféleképpen rakhatunk le kilenc bástyát egy 9×9-es sakktáblára, hogy egyik se üsse a másikat?

Egy fontos megjegyzés

Kérdés

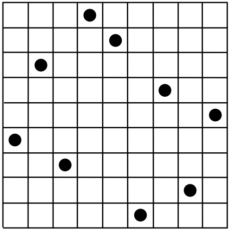
Hányféleképpen rakhatunk le kilenc bástyát egy 9×9-es sakktáblára, hogy egyik se üsse a másikat?



Egy fontos megjegyzés

Kérdés

Hányféleképpen rakhatunk le kilenc bástyát egy 9×9-es sakktáblára, hogy egyik se üsse a másikat?

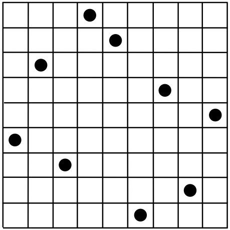


A válasz,

Egy fontos megjegyzés

Kérdés

Hányféleképpen rakhatunk le kilenc bástyát egy 9×9-es sakktáblára, hogy egyik se üsse a másikat?

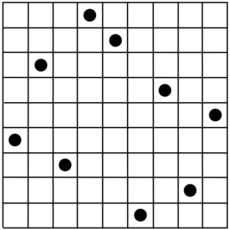


A válasz,mindegyik kérdésre

Egy fontos megjegyzés

Kérdés

Hányféleképpen rakhatunk le kilenc bástyát egy 9×9-es sakktáblára, hogy egyik se üsse a másikat?



A válasz,mindegyik kérdésre

$$9!$$

Vége az előadásnak?

Vége az előadásnak?

Nem.

Vége az előadásnak?

Nem.

Mi van, ha SPECIÁLIS feltételeket teszünk a sorbaállításokra?

Egy szakköri feladat

Feladat

Hányféleképpen állíthatjuk sorba $\{1, 2, \ldots, n\}$ elemeit úgy, hogy semelyik (közbülső) számot ne fogja közre két nála kisebb szám?

Egy szakköri feladat

Feladat

Hányféleképpen állíthatjuk sorba $\{1, 2, \dots, n\}$ elemeit úgy, hogy semelyik (közbülső) számot ne fogja közre két nála kisebb szám?

Példa

$n = 4$:

$$1234, 2134, 3124, 3214, 4123, 4213, 4312, 4321$$

Egy szakköri feladat

Feladat

Hányféleképpen állíthatjuk sorba $\{1, 2, \ldots, n\}$ elemeit úgy, hogy semelyik (közbülső) számot ne fogja közre két nála kisebb szám?

Példa

$n = 4$:

$$1234, 2134, 3124, 3214, 4123, 4213, 4312, 4321$$

Észrevétel

- n-nek, a legnagyobb számnak mindig a szélen kell állni.

Egy szakköri feladat

Feladat

Hányféleképpen állíthatjuk sorba $\{1, 2, \ldots, n\}$ elemeit úgy, hogy semelyik (közbülső) számot ne fogja közre két nála kisebb szám?

Példa

$n = 4$:

$$1234, 2134, 3124, 3214, 4123, 4213, 4312, 4321$$

Észrevétel

- n-nek, a legnagyobb számnak mindig a szélen kell állni.
- A többi szám sorrendje is teljesíti a feltételt.

A megoldás

Megoldás

2^{n-1} a feltételeknek megfelelő sorbaállítás van.

A megoldás

Megoldás

2^{n-1} a feltételeknek megfelelő sorbaállítás van.

Bizonyítás

- Legyen M_n a jó sorbaállítások száma.

A megoldás

Megoldás

2^{n-1} a feltételeknek megfelelő sorbaállítás van.

Bizonyítás

- Legyen M_n a jó sorbaállítások száma.
- Ekkor $M_1 = 1, M_2 = 2$.

A megoldás

Megoldás

2^{n-1} a feltételeknek megfelelő sorbaállítás van.

Bizonyítás

- Legyen M_n a jó sorbaállítások száma.
- Ekkor $M_1 = 1, M_2 = 2$.
- Az észrevétel alapján $M_n = 2 \cdot M_{n-1}$

Cikk-cakk sorbaállítások

Definíció

Egy sorbaállítás cikk-cakk, ha semelyik három egymásutáni eleme sem monoton.

Cikk-cakk sorbaállítások

Definíció

Egy sorbaállítás cikk-cakk, ha semelyik három egymásutáni eleme sem monoton.

Példa

$$1, 5,$$

Cikk-cakk sorbaállítások

Definíció

Egy sorbaállítás cikk-cakk, ha semelyik három egymásutáni eleme sem monoton.

Példa

$$1, 5, 4,$$

Cikk-cakk sorbaállítások

Definíció

Egy sorbaállítás cikk-cakk, ha semelyik három egymásutáni eleme sem monoton.

Példa

$$1, 5, 4, 8,$$

Cikk-cakk sorbaállítások

Definíció

Egy sorbaállítás cikk-cakk, ha semelyik három egymásutáni eleme sem monoton.

Példa

$$1, 5, 4, 8, 7,$$

Cikk-cakk sorbaállítások

Definíció

Egy sorbaállítás cikk-cakk, ha semelyik három egymásutáni eleme sem monoton.

Példa

$$1, 5, 4, 8, 7, 9,$$

Cikk-cakk sorbaállítások

Definíció

Egy sorbaállítás cikk-cakk, ha semelyik három egymásutáni eleme sem monoton.

Példa

$$1, 5, 4, 8, 7, 9, 2,$$

Cikk-cakk sorbaállítások

Definíció

Egy sorbaállítás cikk-cakk, ha semelyik három egymásutáni eleme sem monoton.

Példa

$$1, 5, 4, 8, 7, 9, 2, 6,$$

Cikk-cakk sorbaállítások

Definíció

Egy sorbaállítás cikk-cakk, ha semelyik három egymásutáni eleme sem monoton.

Példa

$$1, 5, 4, 8, 7, 9, 2, 6, 3$$

Cikk-cakk sorbaállítások

Definíció

Egy sorbaállítás cikk-cakk, ha semelyik három egymásutáni eleme sem monoton.

Példa

$$1, 5, 4, 8, 7, 9, 2, 6, 3$$

$$7, 3,$$

Definíció

Egy sorbaállítás cikk-cakk, ha semelyik három egymásutáni eleme sem monoton.

Példa

$$1, 5, 4, 8, 7, 9, 2, 6, 3$$

$$7, 3, 5,$$

Cikk-cakk sorbaállítások

Definíció

Egy sorbaállítás cikk-cakk, ha semelyik három egymásutáni eleme sem monoton.

Példa

$$1, 5, 4, 8, 7, 9, 2, 6, 3$$

$$7, 3, 5, 2,$$

Cikk-cakk sorbaállítások

Definíció

Egy sorbaállítás cikk-cakk, ha semelyik három egymásutáni eleme sem monoton.

Példa

$$1, 5, 4, 8, 7, 9, 2, 6, 3$$

$$7, 3, 5, 2, 8,$$

Cikk-cakk sorbaállítások

Definíció

Egy sorbaállítás cikk-cakk, ha semelyik három egymásutáni eleme sem monoton.

Példa

$$1, 5, 4, 8, 7, 9, 2, 6, 3$$

$$7, 3, 5, 2, 8, 4,$$

Definíció

Egy sorbaállítás cikk-cakk, ha semelyik három egymásutáni eleme sem monoton.

Példa

$$1, 5, 4, 8, 7, 9, 2, 6, 3$$

$$7, 3, 5, 2, 8, 4, 9,$$

Cikk-cakk sorbaállítások

Definíció

Egy sorbaállítás cikk-cakk, ha semelyik három egymásutáni eleme sem monoton.

Példa

$$1, 5, 4, 8, 7, 9, 2, 6, 3$$

$$7, 3, 5, 2, 8, 4, 9, 1,$$

Cikk-cakk sorbaállítások

Definíció

Egy sorbaállítás cikk-cakk, ha semelyik három egymásutáni eleme sem monoton.

Példa

$$1, 5, 4, 8, 7, 9, 2, 6, 3$$

$$7, 3, 5, 2, 8, 4, 9, 1, 6$$

Cikk-cakk sorbaállítások

Definíció

Egy sorbaállítás cikk-cakk, ha semelyik három egymásutáni eleme sem monoton.

Példa

$$1, 5, 4, 8, 7, 9, 2, 6, 3$$

$$7, 3, 5, 2, 8, 4, 9, 1, 6$$

Észrevétel

Vannak $\vee$-cikk-cakk és vannak $\wedge$-cikk-cakk sorbaállítások,

Definíció

Egy sorbaállítás cikk-cakk, ha semelyik három egymásutáni eleme sem monoton.

Példa

$$1, 5, 4, 8, 7, 9, 2, 6, 3$$

$$7, 3, 5, 2, 8, 4, 9, 1, 6$$

Észrevétel

Vannak $\vee$-cikk-cakk és vannak $\wedge$-cikk-cakk sorbaállítások, ha $n \geq 2$

Egy észrevétel

Lemma

Ha $n \geq 2$, akkor ugyanannyi $\vee$-cikk-cakk és $\wedge$-cikk-cakk sorbaállítás van.

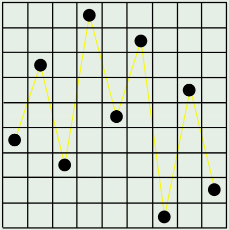
Egy észrevétel

Lemma

Ha $n \geq 2$, akkor ugyanannyi $\vee$-cikk-cakk és $\wedge$-cikk-cakk sorbaállítás van.

Bizonyítás

Vegyük egy $\wedge$-cikk-cakk sorbaállítás sakktábla leírását:



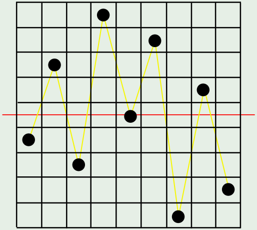
Egy észrevétel

Lemma

Ha $n \geq 2$, akkor ugyanannyi $\vee$-cikk-cakk és $\wedge$-cikk-cakk sorbaállítás van.

Bizonyítás

Vegyük egy $\wedge$-cikk-cakk sorbaállítás sakktábla leírását:



Vegyünk fel egy vízszintes egyenest.

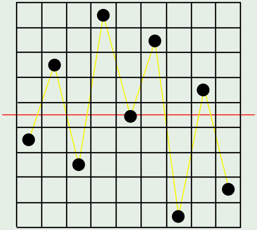
Egy észrevétel

Lemma

Ha $n \geq 2$, akkor ugyanannyi $\vee$-cikk-cakk és $\wedge$-cikk-cakk sorbaállítás van.

Bizonyítás

Vegyük egy $\wedge$-cikk-cakk sorbaállítás sakktábla leírását:



Tükrözzük rá a táblát.

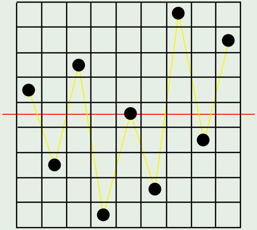
Egy észrevétel

Lemma

Ha $n \geq 2$, akkor ugyanannyi $\vee$-cikk-cakk és $\wedge$-cikk-cakk sorbaállítás van.

Bizonyítás

Vegyük egy $\wedge$-cikk-cakk sorbaállítás sakktábla leírását:



Egy $\vee$-cikk-cakk PÁRja a kiinduló sorbaállításnak:

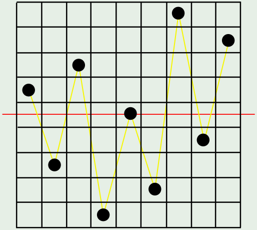
Egy észrevétel

Lemma

Ha $n \geq 2$, akkor ugyanannyi $\vee$-cikk-cakk és $\wedge$-cikk-cakk sorbaállítás van.

Bizonyítás

Vegyük egy $\wedge$-cikk-cakk sorbaállítás sakktábla leírását:



Egy $\vee$-cikk-cakk PÁRja a kiinduló sorbaállításnak: Az állítás igaz.

Definíció (Leonard Euler)

Legyen E_n az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz $\vee$-cikk-cakk sorbállításainak száma, ha $n \geq 2$. $E_0 = E_1 = 1$.

Euler-számok

Definíció (Leonard Euler)

Legyen E_n az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz $\vee$-cikk-cakk sorbállításainak száma, ha $n \geq 2$. $E_0 = E_1 = 1$.

Euler-számok

Definíció (Leonard Euler)

Legyen E_n az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz $\vee$-cikk-cakk sorbállításainak száma, ha $n \geq 2$. $E_0 = E_1 = 1$.

Elnevezés

$\{E_n\}_{k=0}^{\infty}$: Euler-számok

Euler-számok, rekurzió

Az n pozíciója szerint csoportosítjuk/generáljuk a sorrendeket.

Az n pozíciója szerint csoportosítjuk/generáljuk a sorrendeket.

HA n az i-edik pozícióban áll, akkor

Az n pozíciója szerint csoportosítjuk/generáljuk a sorrendeket.

HA n az i-edik pozícióban áll, akkor

- Kiválasztjuk az $i-1$ darab 'n' előtt álló számot a $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ halmazból.

Az n pozíciója szerint csoportosítjuk/generáljuk a sorrendeket.

HA n az i-edik pozícióban áll, akkor

- Kiválasztjuk az $i-1$ darab 'n' előtt álló számot a $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ halmazból.
- Ezeket cikk-cakk-$\wedge$ sorrendben 'n' elé írjuk.

Euler-számok, rekurzió

Az n pozíciója szerint csoportosítjuk/generáljuk a sorrendeket.

HA n az i-edik pozícióban áll, akkor

- Kiválasztjuk az $i-1$ darab 'n' előtt álló számot a $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ halmazból.
- Ezeket cikk-cakk-$\wedge$ sorrendben 'n' elé írjuk.
- A maradék ($n-i$ darab számot) $\wedge$-cikk-cakk sorrendben a sor végére írjuk.

Az n pozíciója szerint csoportosítjuk/generáljuk a sorrendeket.

HA n az i-edik pozícióban áll, akkor

- Kiválasztjuk az $i-1$ darab 'n' előtt álló számot a $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ halmazból.
- Ezeket cikk-cakk-$\wedge$ sorrendben 'n' elé írjuk.
- A maradék ($n-i$ darab számot) $\wedge$-cikk-cakk sorrendben a sor végére írjuk.

Összesen

$$\binom{n-1}{i-1}$$

Euler-számok, rekurzió

Az n pozíciója szerint csoportosítjuk/generáljuk a sorrendeket.

HA n az i-edik pozícióban áll, akkor

- Kiválasztjuk az $i-1$ darab 'n' előtt álló számot a $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ halmazból.
- Ezeket cikk-cakk-$\wedge$ sorrendben 'n' elé írjuk.
- A maradék ($n-i$ darab számot) $\wedge$-cikk-cakk sorrendben a sor végére írjuk.

Összesen

$$\binom{n-1}{i-1} \cdot E_{i-1}$$

Euler-számok, rekurzió

Az n pozíciója szerint csoportosítjuk/generáljuk a sorrendeket.

HA n az i-edik pozícióban áll, akkor

- Kiválasztjuk az $i-1$ darab 'n' előtt álló számot a $\{1, 2, \dots, n-1\}$ halmazból.
- Ezeket cikk-cakk-$\wedge$ sorrendben 'n' elé írjuk.
- A maradék ($n-i$ darab számot) $\wedge$-cikk-cakk sorrendben a sor végére írjuk.

Összesen

$$\binom{n-1}{i-1} \cdot E_{i-1} \cdot E_{n-i}$$

Euler-számok, rekurzió

Az n pozíciója szerint csoportosítjuk/generáljuk a sorrendeket.

HA n az i-edik pozícióban áll, akkor

- Kiválasztjuk az $i-1$ darab 'n' előtt álló számot a $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ halmazból.
- Ezeket cikk-cakk-$\wedge$ sorrendben 'n' elé írjuk.
- A maradék ($n-i$ darab számot) $\wedge$-cikk-cakk sorrendben a sor végére írjuk.

Összesen

$$\binom{n-1}{i-1} \cdot E_{i-1} \cdot E_{n-i}$$

lehetőség.

Euler-számok, rekurzió

Az n pozíciója szerint csoportosítjuk/generáljuk a sorrendeket.

HA n az i-edik pozícióban áll, akkor

- Kiválasztjuk az $i-1$ darab 'n' előtt álló számot a $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ halmazból.
- Ezeket cikk-cakk-$\wedge$ sorrendben 'n' elé írjuk.
- A maradék ($n-i$ darab számot) $\wedge$-cikk-cakk sorrendben a sor végére írjuk.

Összesen

$$\binom{n-1}{i-1} \cdot E_{i-1} \cdot E_{n-i}$$

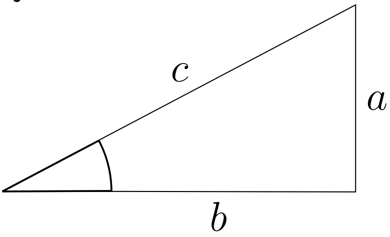
lehetőség.

Tétel

$$2E_n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} E_{i-1} \cdot E_{n-i}, \qquad \text{ha } n \geq 2.$$

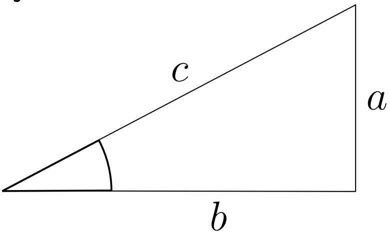
Képezzünk hányadosakat az alábbi derékszögű háromszög oldalainak hosszát jelölő a, b és c betűkből.

Képezzünk hányadosakat az alábbi derékszögű háromszög oldalainak hosszát jelölő a, b és c betűkből.



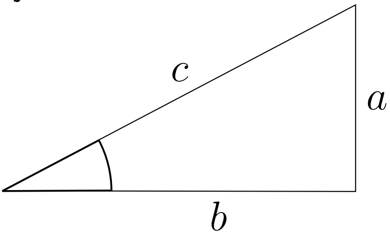
Egy kis kitérő

Képezzünk hányadosakat az alábbi derékszögű háromszög oldalainak hosszát jelölő *a*, *b* és *c* betűkből.



Egy betű önmagával osztását érdektelennek nevezzük.

Képezzünk hányadosakat az alábbi derékszögű háromszög oldalainak hosszát jelölő a, b és c betűkből.



Egy betű önmagával osztását érdektelennek nevezzük.

Kérdés

Hányféle nem érdektelen módon tehetjük meg ezt?

Két elfelejtett szögfüggvény

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha \qquad\qquad \frac{b}{c} = \cos\alpha$$

Két elfelejtett szögfüggvény

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha \qquad \frac{b}{c} = \cos\alpha$$

$$\frac{a}{b} = tg\ \alpha \qquad \frac{b}{a} = ctg\ \alpha$$

Két elfelejtett szögfüggvény

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha \qquad \frac{b}{c} = \cos\alpha$$

$$\frac{a}{b} = tg\ \alpha \qquad \frac{b}{a} = ctg\ \alpha$$

$$\frac{c}{b} = sec\ \alpha \qquad \frac{c}{a} = cosec\ \alpha$$

"BIZONYOS függvények BIZONYOS környezetben felírhatók VÉGTELEN POLINOMként."

Példa

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \dots$$

“BIZONYOS függvények BIZONYOS környezetben felírhatók VÉGTELEN POLINOMként.”

Példa

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10} + \dots$$

Egy kis analízis

“BIZONYOS függvények BIZONYOS környezetben felírhatók VÉGTELEN POLINOMként.”

Példa

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10} + \dots$$

És a többi szögfüggvény?

"BIZONYOS függvények BIZONYOS környezetben felírhatók VÉGTELEN POLINOMként."

Példa

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10} + \dots$$

És a többi szögfüggvény? Jó kérdés!

"BIZONYOS függvények BIZONYOS környezetben felírhatók VÉGTELEN POLINOMként."

Példa

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10} + \dots$$

És a többi szögfüggvény? Jó kérdés!

Tétel

$$tg\ x = x + \frac{E_3}{3!}x^3 + \frac{E_5}{5!}x^5 + \frac{E_7}{7!}x^7 + \frac{E_9}{9!}x^9 + \frac{E_{11}}{11!}x^{11} + \dots$$

"BIZONYOS függvények BIZONYOS környezetben felírhatók VÉGTELEN POLINOMként."

Példa

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10} + \dots$$

És a többi szögfüggvény? Jó kérdés!

Tétel

$$tg\ x = x + \frac{E_3}{3!}x^3 + \frac{E_5}{5!}x^5 + \frac{E_7}{7!}x^7 + \frac{E_9}{9!}x^9 + \frac{E_{11}}{11!}x^{11} + \dots$$

$$sec\ x = 1 + \frac{E_2}{2!}x^2 + \frac{E_4}{4!}x^4 + \frac{E_6}{6!}x^6 + \frac{E_8}{8!}x^8 + \frac{E_{10}}{10!}x^{10} + \dots$$

Trigonometrikus alaptétel

$$sec^2\ x = 1 + tg^2\ x$$

Kombinatorikus trigonometria

Trigonometrikus alaptétel

$$sec^2\ x = 1 + tg^2\ x$$

Kombinatorikus trigonometrikus alaptétel

Ha $n \geq 1$, akkor

$$\sum_{i,j \in 2\mathbb{N}: i+j=n} \frac{E_i}{i!}\frac{E_j}{j!} = \sum_{i,j \in 2\mathbb{N}+1: i+j=n} \frac{E_i}{i!}\frac{E_j}{j!}$$

Kombinatorikus trigonometria

Trigonometrikus alaptétel

$$sec^2\ x = 1 + tg^2\ x$$

Kombinatorikus trigonometrikus alaptétel

Ha $n \geq 1$, akkor

$$\sum_{i,j \in 2\mathbb{N}: i+j=n} \binom{n}{i} E_i E_j = \sum_{i,j \in 2\mathbb{N}+1: i+j=n} \binom{n}{i} E_i E_j$$

Az alaptétel bizonyítása

$$\sum_{i,j \in 2\mathbb{N}: i+j=n} \binom{n}{i} E_i E_j$$

megszámolja:

Az alaptétel bizonyítása

$$\sum_{i,j\in 2\mathbb{N}:i+j=n} \binom{n}{i} E_i E_j$$

megszámolja: hány olyan cikk-cakk sorbaállítása van $\{1, 2, \ldots, n+1\}$-nek, amelyben '$n+1$' pozíciója páratlan.

Az alaptétel bizonyítása

$$\sum_{i,j\in 2\mathbb{N}:i+j=n} \binom{n}{i} E_i E_j$$

megszámolja: hány olyan cikk-cakk sorbaállítása van $\{1, 2, \ldots, n+1\}$-nek, amelyben '$n+1$' pozíciója páratlan.

$$\sum_{i,j\in 2\mathbb{N}+1:i+j=n} \binom{n}{i} E_i E_j$$

megszámolja:

Az alaptétel bizonyítása

$$\sum_{i,j\in 2\mathbb{N}:i+j=n} \binom{n}{i} E_i E_j$$

megszámolja: hány olyan cikk-cakk sorbaállítása van $\{1, 2, \ldots, n+1\}$-nek, amelyben '$n+1$' pozíciója páratlan.

$$\sum_{i,j\in 2\mathbb{N}+1:i+j=n} \binom{n}{i} E_i E_j$$

megszámolja: hány olyan cikk-cakk sorbaállítása van $\{1, 2, \ldots, n+1\}$-nek, amelyben '$n+1$' pozíciója páros.

Az alaptétel bizonyítása

$$\sum_{i,j \in 2\mathbb{N}: i+j=n} \binom{n}{i} E_i E_j$$

megszámolja: hány olyan cikk-cakk sorbaállítása van $\{1, 2, \ldots, n+1\}$-nek, amelyben '$n+1$' pozíciója páratlan.

$$\sum_{i,j \in 2\mathbb{N}+1: i+j=n} \binom{n}{i} E_i E_j$$

megszámolja: hány olyan cikk-cakk sorbaállítása van $\{1, 2, \ldots, n+1\}$-nek, amelyben '$n+1$' pozíciója páros.

Egyik oldal a $\vee$-cikk-cakk, a másik a $\wedge$-cikk-cakk sorbaállítások száma.

Az alaptétel bizonyítása

$$\sum_{i,j \in 2\mathbb{N}: i+j=n} \binom{n}{i} E_i E_j$$

megszámolja: hány olyan cikk-cakk sorbaállítása van $\{1, 2, \ldots, n+1\}$-nek, amelyben '$n+1$' pozíciója páratlan.

$$\sum_{i,j \in 2\mathbb{N}+1: i+j=n} \binom{n}{i} E_i E_j$$

megszámolja: hány olyan cikk-cakk sorbaállítása van $\{1, 2, \ldots, n+1\}$-nek, amelyben '$n+1$' pozíciója páros.

Egyik oldal a $\vee$-cikk-cakk, a másik a $\wedge$-cikk-cakk sorbaállítások száma. Tehát a két oldal egyenlő.

Egy új fajta feltétel

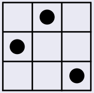
Kérdés

Hány olyan sorbaállítása van $\{1, 2, \ldots, n\}$ elemeinek, amely nem

tartalmaz

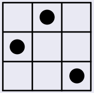
Egy új fajta feltétel

Kérdés

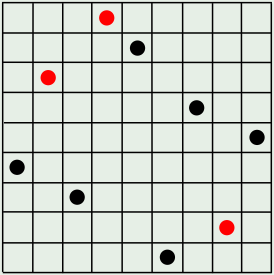
Hány olyan sorbaállítása van $\{1, 2, \ldots, n\}$ elemeinek, amely nem tartalmaz  TÍPUSÚ részt?

Egy új fajta feltétel

Kérdés

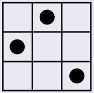
Hány olyan sorbaállítása van $\{1, 2, \ldots, n\}$ elemeinek, amely nem tartalmaz  TÍPUSÚ részt?

Példa

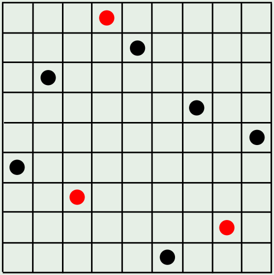


Egy új fajta feltétel

Kérdés

Hány olyan sorbaállítása van $\{1, 2, \ldots, n\}$ elemeinek, amely nem tartalmaz  TÍPUSÚ részt?

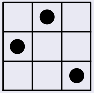
Példa



Egy új fajta feltétel

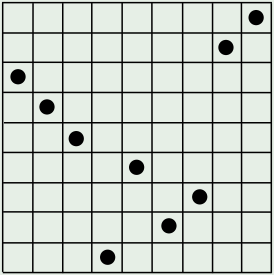
Kérdés

Hány olyan sorbaállítása van $\{1, 2, \ldots, n\}$ elemeinek, amely nem tartalmaz



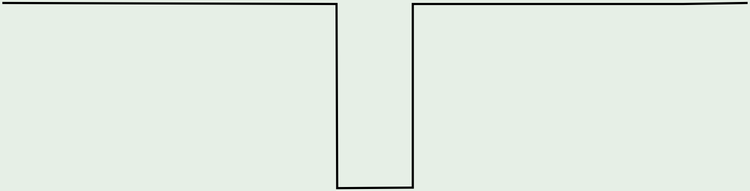
TÍPUSÚ részt?

Példa

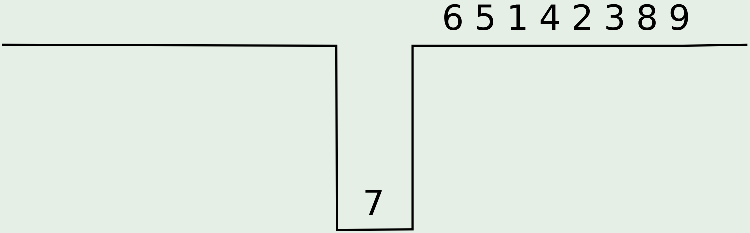


Példa verem rendezésre

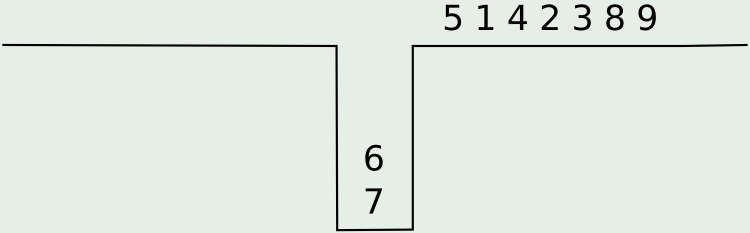
7 6 5 1 4 2 3 8 9



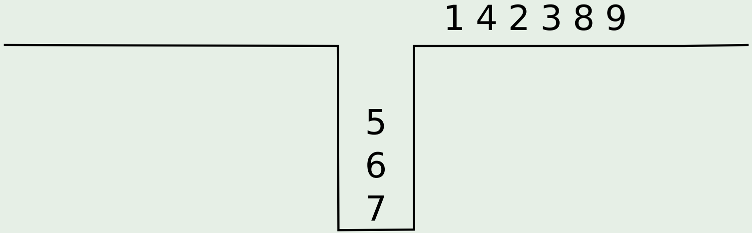
Példa verem rendezésre



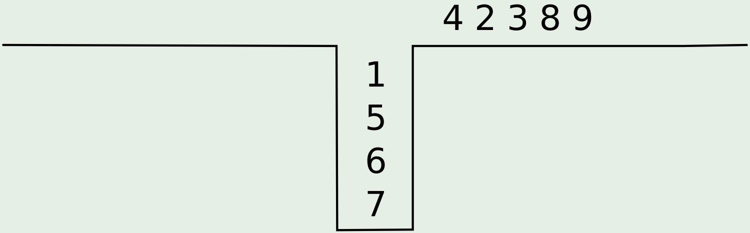
Példa verem rendezésre



Példa verem rendezésre

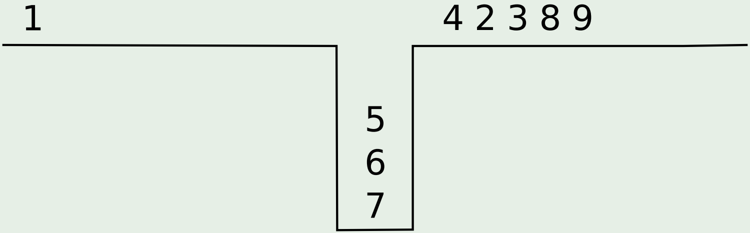


Példa verem rendezésre



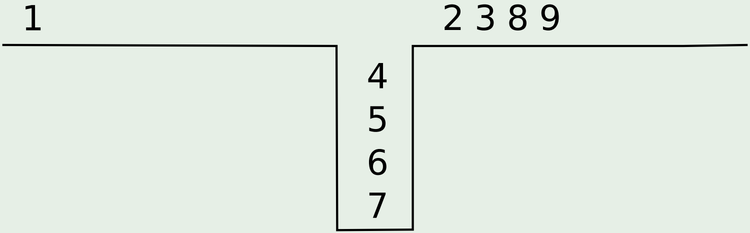
Valami teljesen más: Rendezés veremmel

Példa verem rendezésre

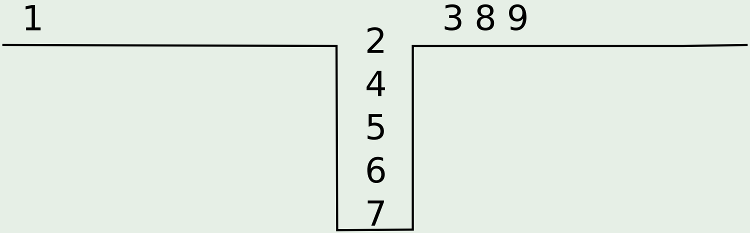


Valami teljesen más: Rendezés veremmel

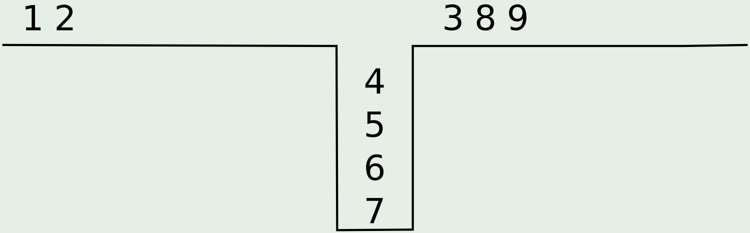
Példa verem rendezésre



Példa verem rendezésre

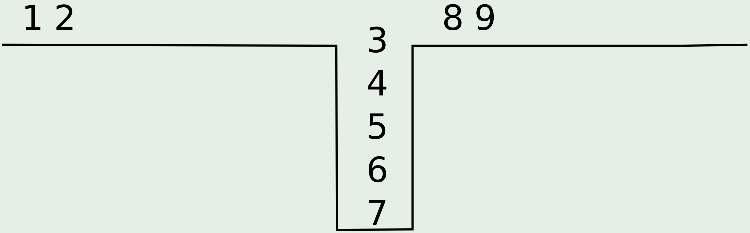


Példa verem rendezésre



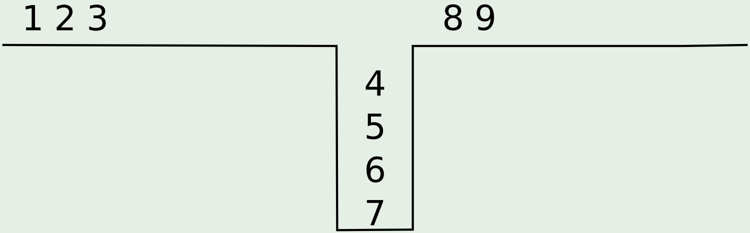
Valami teljesen más: Rendezés veremmel

Példa verem rendezésre

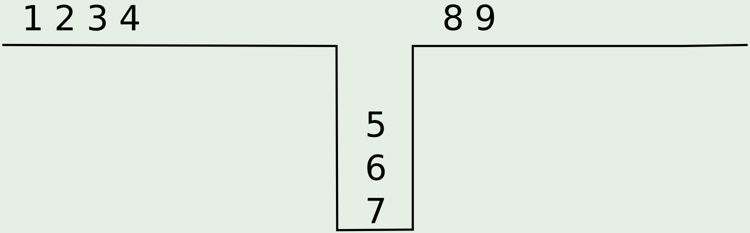


Valami teljesen más: Rendezés veremmel

Példa verem rendezésre



Példa verem rendezésre



Valami teljesen más: Rendezés veremmel

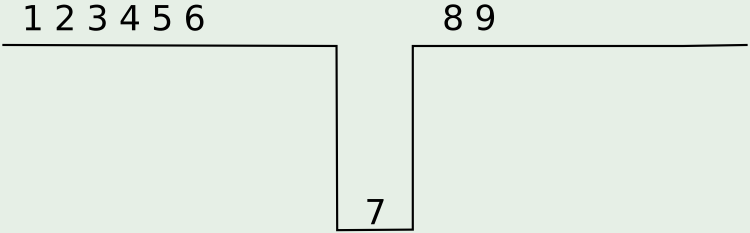
Példa verem rendezésre

1 2 3 4 5 8 9

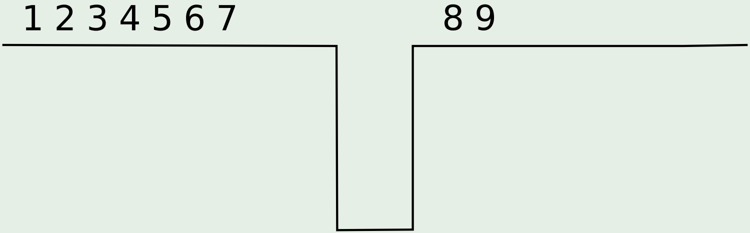
6
7

Valami teljesen más: Rendezés veremmel

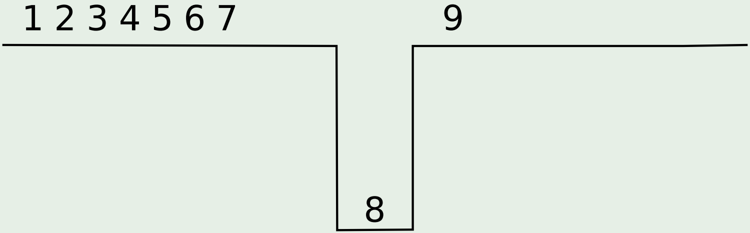
Példa verem rendezésre



Példa verem rendezésre

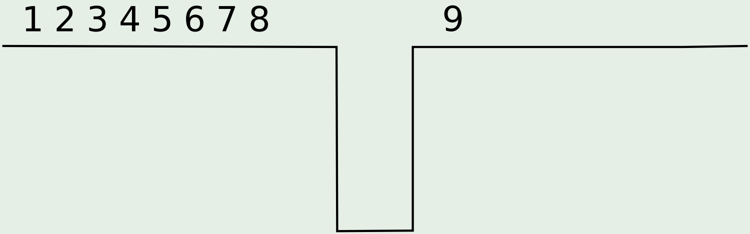


Példa verem rendezésre



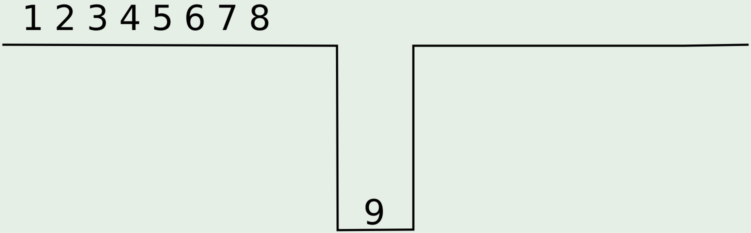
Valami teljesen más: Rendezés veremmel

Példa verem rendezésre



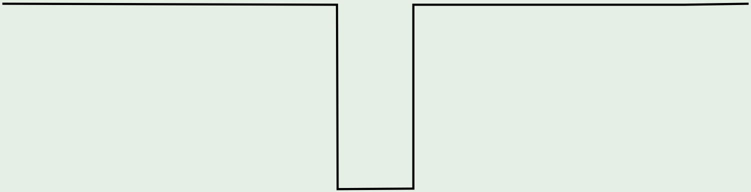
Valami teljesen más: Rendezés veremmel

Példa verem rendezésre



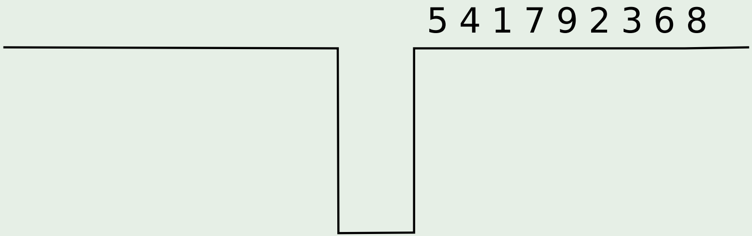
Példa verem rendezésre

1 2 3 4 5 6 7 8 9



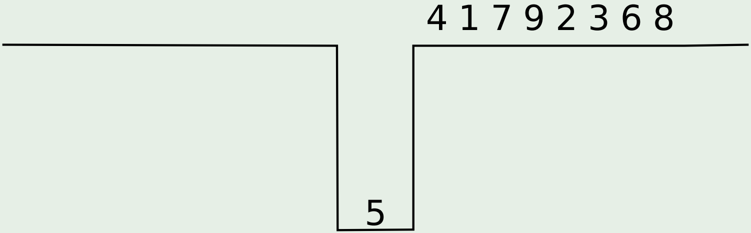
Valami teljesen más: Rendezés veremmel

Példa NEM verem rendezhető sorbaállításra



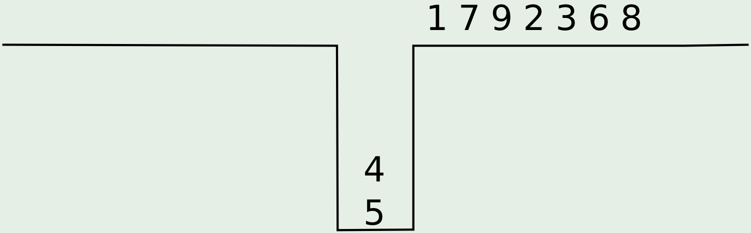
Valami teljesen más: Rendezés veremmel

Példa NEM verem rendezhető sorbaállításra

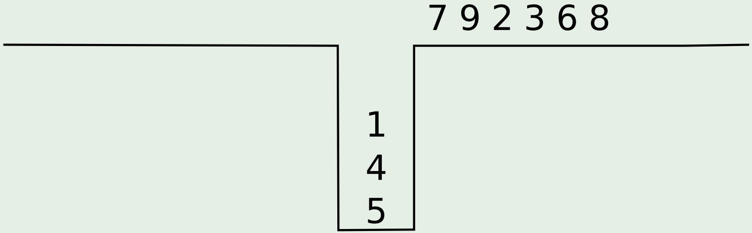


Valami teljesen más: Rendezés veremmel

Példa NEM verem rendezhető sorbaállításra

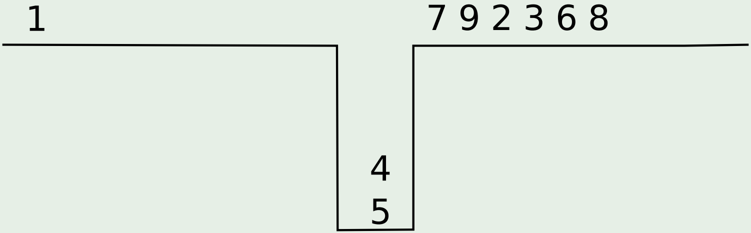


Példa NEM verem rendezhető sorbaállításra



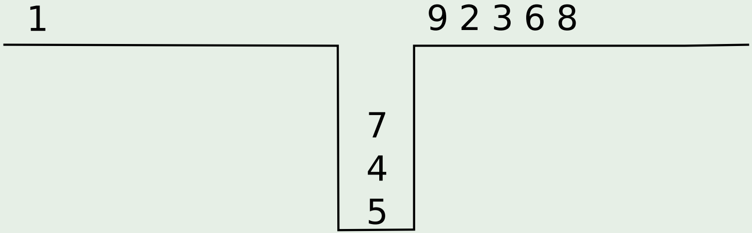
Valami teljesen más: Rendezés veremmel

Példa NEM verem rendezhető sorbaállításra

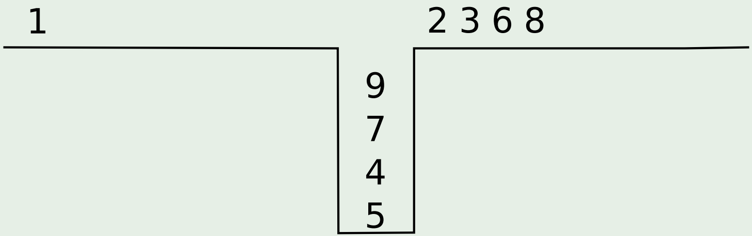


Valami teljesen más: Rendezés veremmel

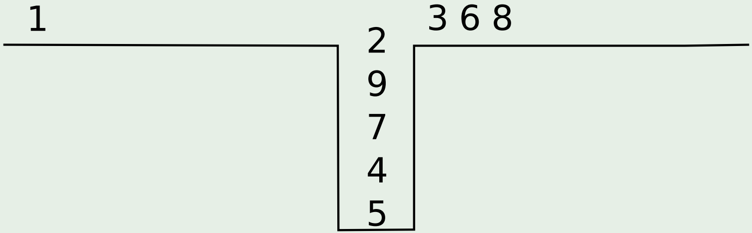
Példa NEM verem rendezhető sorbaállításra



Példa NEM verem rendezhető sorbaállításra



Példa NEM verem rendezhető sorbaállításra



Valami teljesen más: Rendezés veremmel

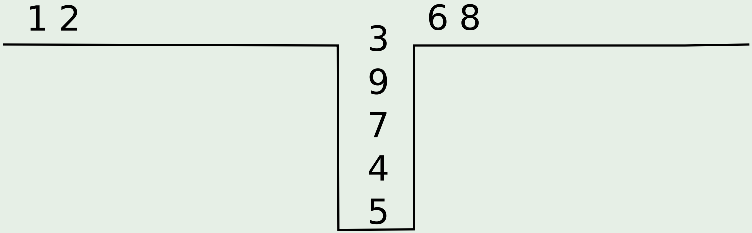
Példa NEM verem rendezhető sorbaállításra

1 2 3 6 8

9
7
4
5

Valami teljesen más: Rendezés veremmel

Példa NEM verem rendezhető sorbaállításra



Valami teljesen más: Rendezés veremmel

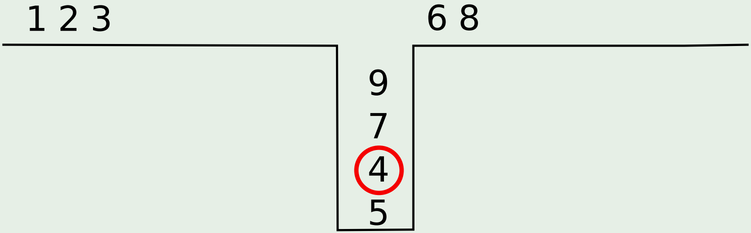
Példa NEM verem rendezhető sorbaállításra

1 2 3 6 8

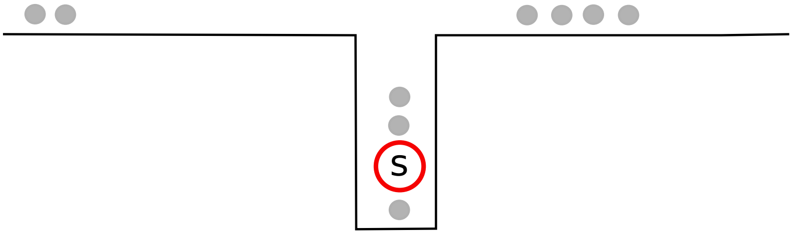
9
7
4
5

Valami teljesen más: Rendezés veremmel

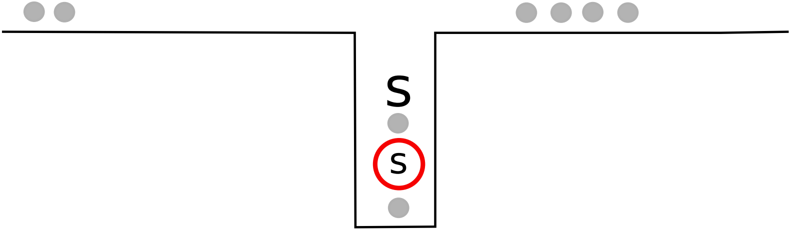
Példa NEM verem rendezhető sorbaállításra



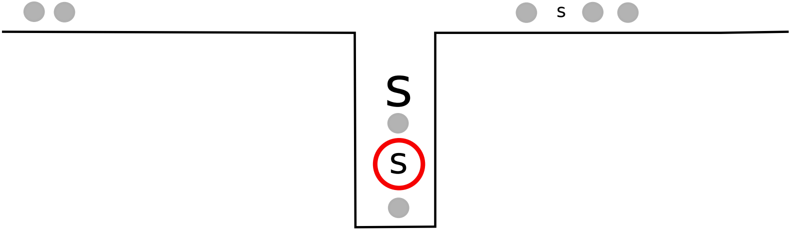
Mi okozza, hogy egy sorrend nem verem rendezhető?



Mi okozza, hogy egy sorrend nem verem rendezhető?



Mi okozza, hogy egy sorrend nem verem rendezhető?



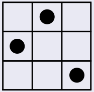
Tényleg valami teljesen más?

Lemma

Egy sorba állítás akkor és csak akkor verem-rendezhető,

Tényleg valami teljesen más?

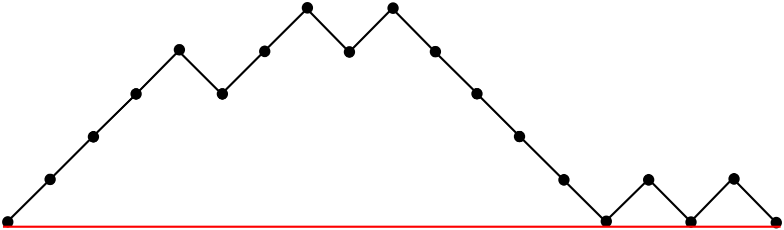
Lemma

Egy sorba állítás akkor és csak akkor verem-rendezhető, ha nem tartalmaz  TÍPUSÚ részt.

A verem magasság változása:

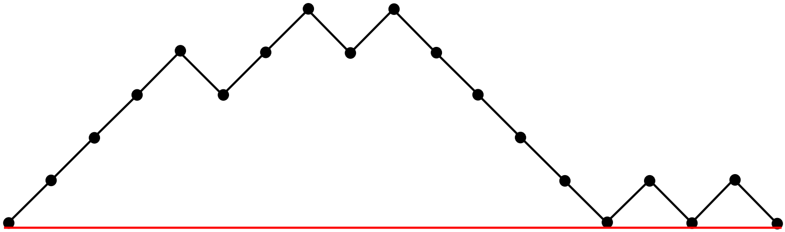
Verem-rendezhető-sorbaállítások kódolása

A verem magasság változása:



Verem-rendezhető-sorbaállítások kódolása

A verem magasság változása:



Észrevétel

A verem-magasság-diagram egyértelműen leír/kódol egy verem-rendezhető-sorozatot.

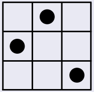
Catalan-listák

Definíció: $\mathcal{C}_n$ Catalan-listák

- Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz verem-rendezhető-sorbaállításai

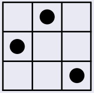
Catalan-listák

Definíció: $\mathcal{C}_n$ Catalan-listák

- Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz verem-rendezhető-sorbaállításai
- Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz azon sorbaállításai, amelyek nem tartalmaznak  TÍPUSÚ részt

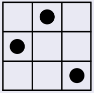
Catalan-listák

Definíció: $\mathcal{C}_n$ Catalan-listák

- Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz verem-rendezhető-sorbaállításai
- Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz azon sorbaállításai, amelyek nem tartalmaznak  TÍPUSÚ részt
- Dyck-utak $2n$ lépessel

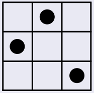
Catalan-listák

Definíció: $\mathcal{C}_n$ Catalan-listák

- Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz verem-rendezhető-sorbaállításai
- Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz azon sorbaállításai, amelyek nem tartalmaznak  TÍPUSÚ részt
- Dyck-utak $2n$ lépessel
- $2n$ ember áll sorba a mozi pénztárnál, hogy vegyen egy-egy 1000 forintos jegyet,

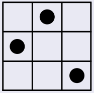
Catalan-listák

Definíció: $\mathcal{C}_n$ Catalan-listák

- Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz verem-rendezhető-sorbaállításai
- Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz azon sorbaállításai, amelyek nem tartalmaznak  TÍPUSÚ részt
- Dyck-utak $2n$ lépessel
- $2n$ ember áll sorba a mozi pénztárnál, hogy vegyen egy-egy 1000 forintos jegyet,
    - felüknél 1000 forintos van, másik felüknél 2000 forintos,

Catalan-listák

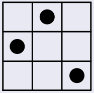
Definíció: $\mathcal{C}_n$ Catalan-listák

- Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz verem-rendezhető-sorbaállításai
- Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz azon sorbaállításai, amelyek nem tartalmaznak  TÍPUSÚ részt
- Dyck-utak $2n$ lépessel
- $2n$ ember áll sorba a mozi pénztárnál, hogy vegyen egy-egy 1000 forintos jegyet,
    - felüknél 1000 forintos van, másik felüknél 2000 forintos,
    - a pénztárban nincs apró a nyitáskor

Catalan-listák

Definíció: $\mathcal{C}_n$ Catalan-listák

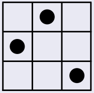
- Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz verem-rendezhető-sorbaállításai
- Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz azon sorbaállításai, amelyek nem

  tartalmaznak  TÍPUSÚ részt
- Dyck-utak $2n$ lépessel
- $2n$ ember áll sorba a mozi pénztárnál, hogy vegyen egy-egy 1000 forintos jegyet,
  - felüknél 1000 forintos van, másik felüknél 2000 forintos,
  - a pénztárban nincs apró a nyitáskor

  Gördülékeny a kiszolgálást megengedő sorok (csak az embereknél lévő pénz névértéke számít)

Catalan-listák

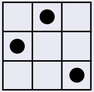
Definíció: $\mathcal{C}_n$ Catalan-listák

- Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz verem-rendezhető-sorbaállításai
- Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz azon sorbaállításai, amelyek nem tartalmaznak  TÍPUSÚ részt
- Dyck-utak $2n$ lépessel
- $2n$ ember áll sorba a mozi pénztárnál, hogy vegyen egy-egy 1000 forintos jegyet,
    - felüknél 1000 forintos van, másik felüknél 2000 forintos,
    - a pénztárban nincs apró a nyitáskor

  Gördülékeny a kiszolgálást megengedő sorok (csak az embereknél lévő pénz névértéke számít)
- Helyes kezdő/csukó zárójel-sorozatok

Catalan-listák

Definíció: $\mathcal{C}_n$ Catalan-listák

- Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz verem-rendezhető-sorbaállításai
- Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz azon sorbaállításai, amelyek nem tartalmaznak  TÍPUSÚ részt
- Dyck-utak $2n$ lépessel
- $2n$ ember áll sorba a mozi pénztárnál, hogy vegyen egy-egy 1000 forintos jegyet,
  - felüknél 1000 forintos van, másik felüknél 2000 forintos,
  - a pénztárban nincs apró a nyitáskor

  Gördülékeny a kiszolgálást megengedő sorok (csak az embereknél lévő pénz névértéke számít)
- Helyes kezdő/csukó zárójel-sorozatok
- Egy konvex $n + 2$-szög háromszögekre bontása egymást nem metsző átlókkal.

Catalan-számok

A fenti listák — közös paraméter értékre — ugyanolyan hosszúak.

A fenti listák — közös paraméter értékre — ugyanolyan hosszúak.

Definíció: Catalan számok

$$C_n = |\mathcal{L}_n|$$

Catalan-számok története

Catalan-számok története

Segner János András
1704, Pozsony — 1777

Segner János András
1704, Pozsony — 1777

Tétel (Segner, 1758)

Rekurzió egy sorozatra, ami Euler egy kérdését válaszolja meg.

Segner János András
1704, Pozsony — 1777

Tétel (Segner, 1758)

Rekurzió egy sorozatra, ami Euler egy kérdését válaszolja meg.

Eugène Charles Catalan (1814 — 1894)

Segner János András
1704, Pozsony — 1777

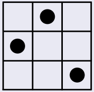
Tétel (Segner, 1758)

Rekurzió egy sorozatra, ami Euler egy kérdését válaszolja meg.

Eugène Charles Catalan (1814 — 1894)
Richard Stanley honlapja
http://www-math.mit.edu/˜rstan/ec/

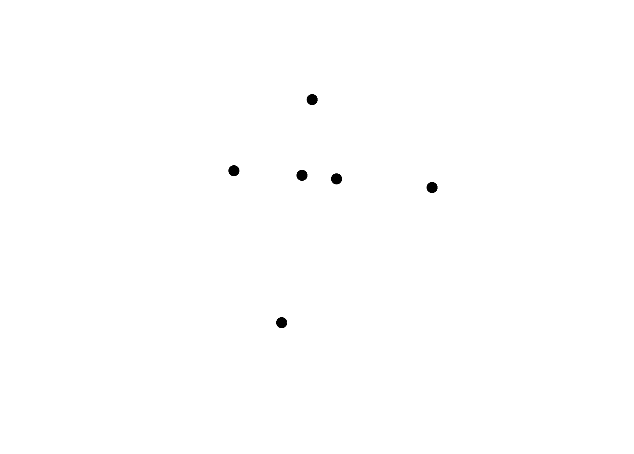
A Tétel

Tétel

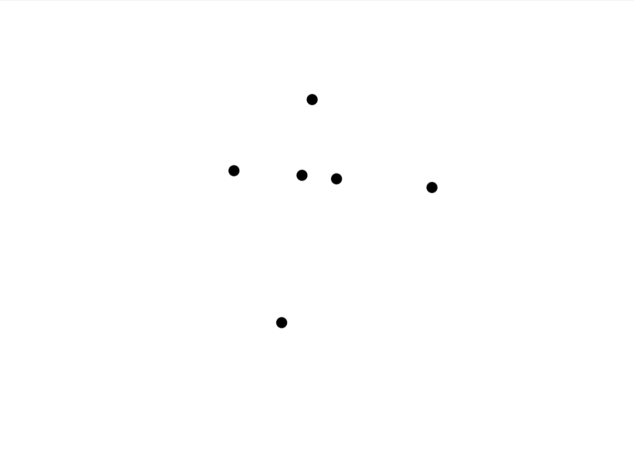
A tiltott  nélküli sorbaállítások száma

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

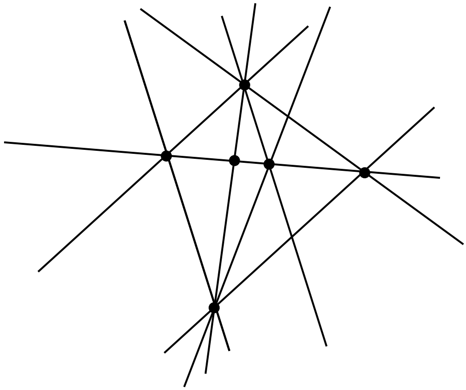
Adott n pont a síkon.



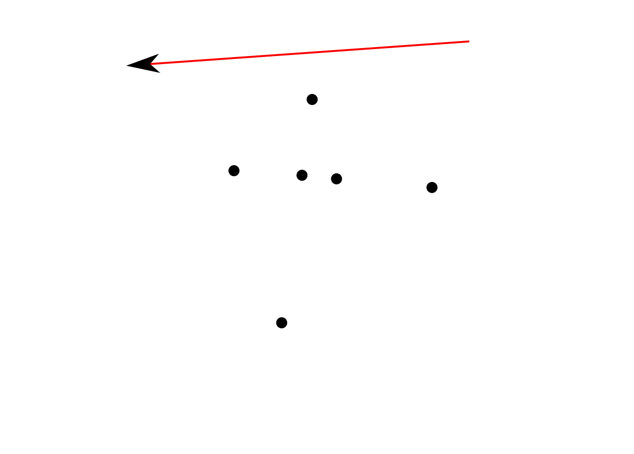
Meghatároznak $\binom{n}{2}$ pontpárt.



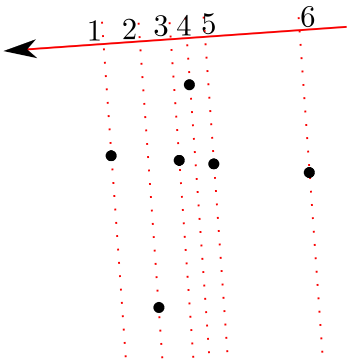
Meghatároznak LEGFELJEBB $\binom{n}{2}$ egyenest.



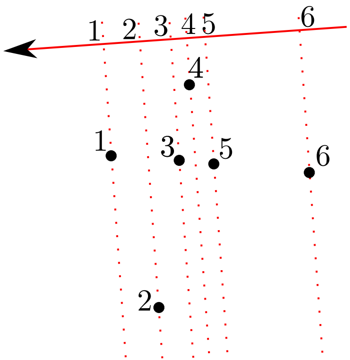
t: egyik meghatározott egyenesre SEM MERŐLEGES tengely.



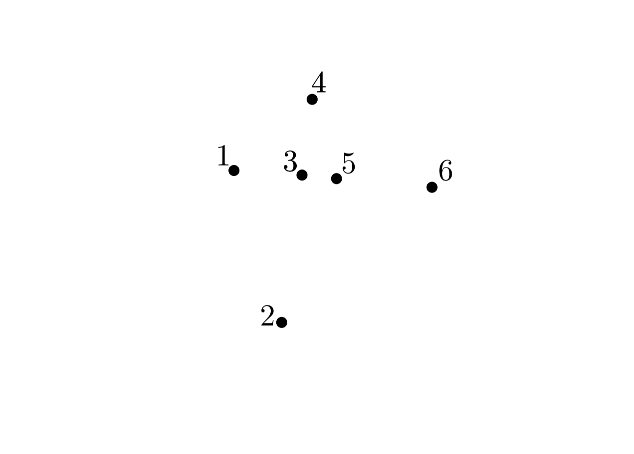
Vetítsük pontjainkat *t*-re: n KÜLÖNBÖZŐ vetület.



A vetületek sorbaállítják ponthalmazunkat!

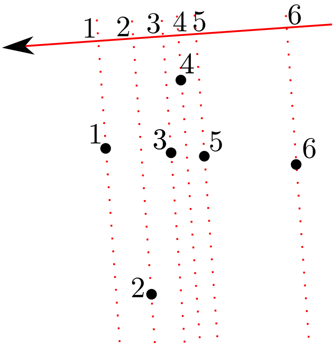


"Nevek" a pontok számára.



t forgassuk és nézzük a sorrend változását.

Példa a tengely forgatására és a rendezés változására

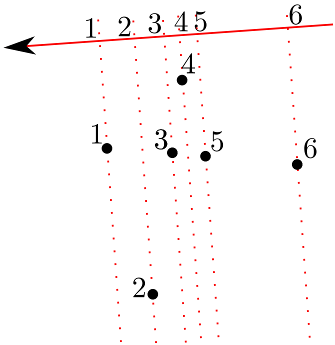


654321

Az előző sorbaállítás változása

t forgassuk és nézzük a sorrend változását.

Példa a tengely forgatására és a rendezés változására

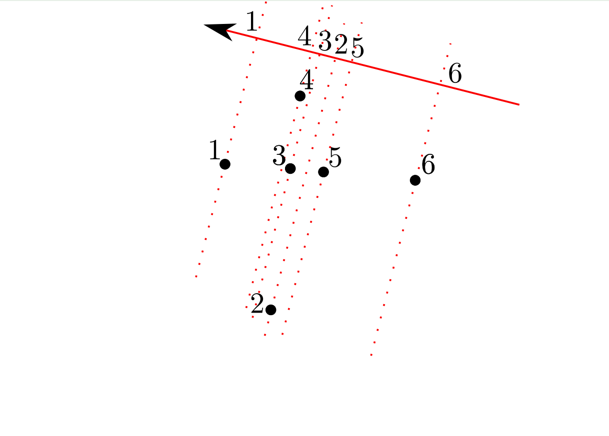


654321

Az előző sorbaállítás változása

t forgassuk és nézzük a sorrend változását.

Példa a tengely forgatására és a rendezés változására

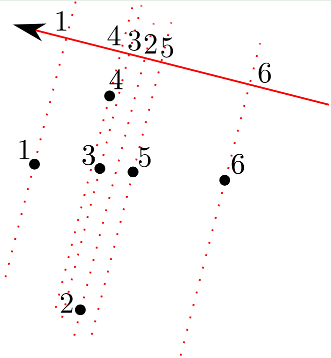


652341

Az előző sorbaállítás változása

t forgassuk és nézzük a sorrend változását.

Példa a tengely forgatására és a rendezés változására

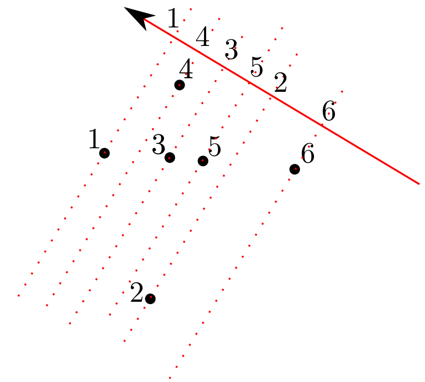


652341

Az előző sorbaállítás változása

t forgassuk és nézzük a sorrend változását.

Példa a tengely forgatására és a rendezés változására

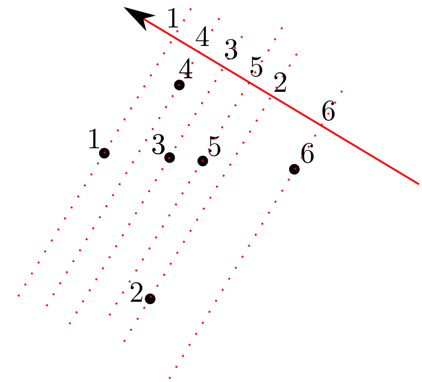


625341

Az előző sorbaállítás változása

t forgassuk és nézzük a sorrend változását.

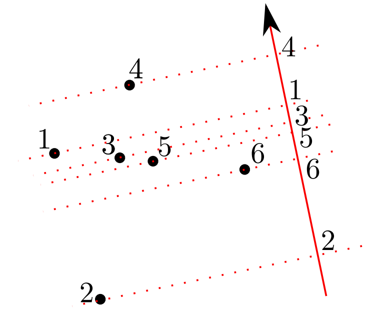
Példa a tengely forgatására és a rendezés változására



625341

t forgassuk és nézzük a sorrend változását.

Példa a tengely forgatására és a rendezés változására

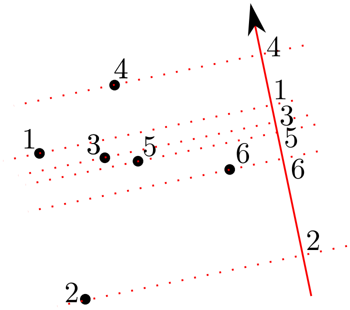


265314

Az előző sorbaállítás változása

t forgassuk és nézzük a sorrend változását.

Példa a tengely forgatására és a rendezés változására

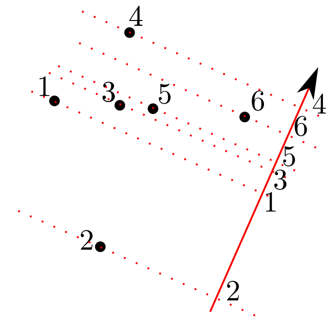


265314

Az előző sorbaállítás változása

t forgassuk és nézzük a sorrend változását.

Példa a tengely forgatására és a rendezés változására

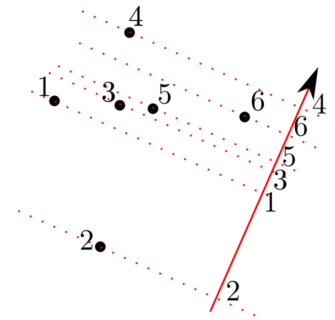


213564

Az előző sorbaállítás változása

t forgassuk és nézzük a sorrend változását.

Példa a tengely forgatására és a rendezés változására

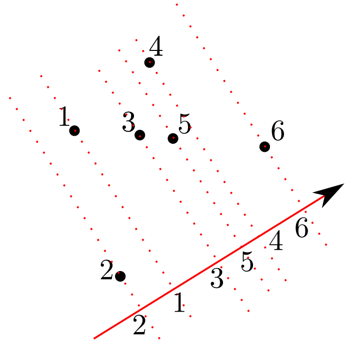


213564

Az előző sorbaállítás változása

t forgassuk és nézzük a sorrend változását.

Példa a tengely forgatására és a rendezés változására

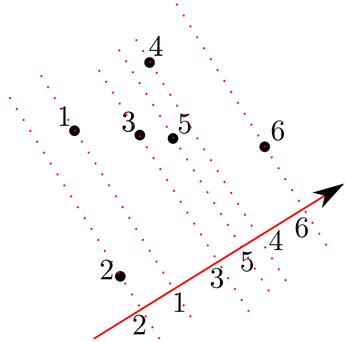


213546

Az előző sorbaállítás változása

t forgassuk és nézzük a sorrend változását.

Példa a tengely forgatására és a rendezés változására

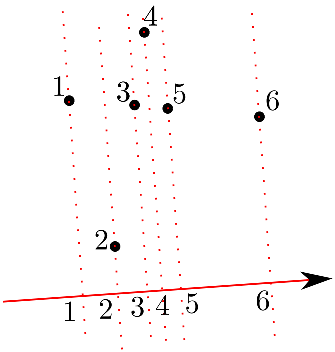


213546

Az előző sorbaállítás változása

t forgassuk és nézzük a sorrend változását.

Példa a tengely forgatására és a rendezés változására

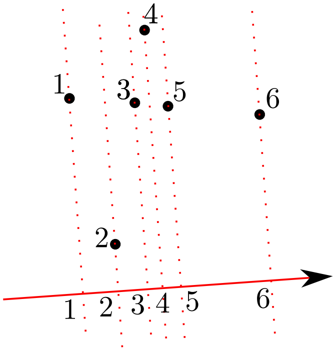


123456

Az előző sorbaállítás változása

t forgassuk és nézzük a sorrend változását.

Példa a tengely forgatására és a rendezés változására



123456

Általánosított síkbeli ponthalmazok

0 Vegyük az $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ „fordított” sorrendet.

... Számaink közül egymás mellett elhelyezkedők csökkenő BLOKKJÁT fordítsuk meg. Ha egy pillanatban több megfordítandó DISZJUNKT blokkunk van, akkor egy lépésen belül PÁRHUZAMOSAN megfordíthatjuk őket.

Cél Ilyen lépésekkel érjük el „rendezett sorrendet”.

Általánosított síkbeli ponthalmazok

0 Vegyük az $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ „fordított" sorrendet.

... Számaink közül egymás mellett elhelyezkedők csökkenő BLOKKJÁT fordítsuk meg. Ha egy pillanatban több megfordítandó DISZJUNKT blokkunk van, akkor egy lépésen belül PÁRHUZAMOSAN megfordíthatjuk őket.

Cél Ilyen lépésekkel érjük el „rendezett sorrendet".

Példa

987654321

Általánosított síkbeli ponthalmazok

0 Vegyük az $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ „fordított” sorrendet.

... Számaink közül egymás mellett elhelyezkedők csökkenő BLOKKJÁT fordítsuk meg. Ha egy pillanatban több megfordítandó DISZJUNKT blokkunk van, akkor egy lépésen belül PÁRHUZAMOSAN megfordíthatjuk őket.

Cél Ilyen lépésekkel érjük el „rendezett sorrendet”.

Példa

987654321

Általánosított síkbeli ponthalmazok

0 Vegyük az $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ „fordított” sorrendet.

... Számaink közül egymás mellett elhelyezkedők csökkenő BLOKKJÁT fordítsuk meg. Ha egy pillanatban több megfordítandó DISZJUNKT blokkunk van, akkor egy lépésen belül PÁRHUZAMOSAN megfordíthatjuk őket.

Cél Ilyen lépésekkel érjük el „rendezett sorrendet”.

Példa

967854312

Általánosított síkbeli ponthalmazok

0 Vegyük az $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ „fordított” sorrendet.

… Számaink közül egymás mellett elhelyezkedők csökkenő BLOKKJÁT fordítsuk meg. Ha egy pillanatban több megfordítandó DISZJUNKT blokkunk van, akkor egy lépésen belül PÁRHUZAMOSAN megfordíthatjuk őket.

Cél Ilyen lépésekkel érjük el „rendezett sorrendet”.

Példa

967854312

Általánosított síkbeli ponthalmazok

- 0 Vegyük az $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ „fordított” sorrendet.
- … Számaink közül egymás mellett elhelyezkedők csökkenő BLOKKJÁT fordítsuk meg. Ha egy pillanatban több megfordítandó DISZJUNKT blokkunk van, akkor egy lépésen belül PÁRHUZAMOSAN megfordíthatjuk őket.
- Cél Ilyen lépésekkel érjük el „rendezett sorrendet”.

Példa

967813452

Általánosított síkbeli ponthalmazok

0 Vegyük az $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ „fordított” sorrendet.

... Számaink közül egymás mellett elhelyezkedők csökkenő BLOKKJÁT fordítsuk meg. Ha egy pillanatban több megfordítandó DISZJUNKT blokkunk van, akkor egy lépésen belül PÁRHUZAMOSAN megfordíthatjuk őket.

Cél Ilyen lépésekkel érjük el „rendezett sorrendet”.

Példa

967813452

Általánosított síkbeli ponthalmazok

Általánosított síkbeli ponthalmazok

0 Vegyük az $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ „fordított” sorrendet.

... Számaink közül egymás mellett elhelyezkedők csökkenő BLOKKJÁT fordítsuk meg. Ha egy pillanatban több megfordítandó DISZJUNKT blokkunk van, akkor egy lépésen belül PÁRHUZAMOSAN megfordíthatjuk őket.

Cél Ilyen lépésekkel érjük el „rendezett sorrendet”.

Példa

967183452

Általánosított síkbeli ponthalmazok

Általánosított síkbeli ponthalmazok

0 Vegyük az $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ „fordított” sorrendet.

... Számaink közül egymás mellett elhelyezkedők csökkenő BLOKKJÁT fordítsuk meg. Ha egy pillanatban több megfordítandó DISZJUNKT blokkunk van, akkor egy lépésen belül PÁRHUZAMOSAN megfordíthatjuk őket.

Cél Ilyen lépésekkel érjük el „rendezett sorrendet”.

Példa

967183452

Általánosított síkbeli ponthalmazok

0 Vegyük az $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ „fordított” sorrendet.

... Számaink közül egymás mellett elhelyezkedők csökkenő BLOKKJÁT fordítsuk meg. Ha egy pillanatban több megfordítandó DISZJUNKT blokkunk van, akkor egy lépésen belül PÁRHUZAMOSAN megfordíthatjuk őket.

Cél Ilyen lépésekkel érjük el „rendezett sorrendet”.

Példa

697138425

Általánosított síkbeli ponthalmazok

- 0 Vegyük az $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ „fordított” sorrendet.
- … Számaink közül egymás mellett elhelyezkedők csökkenő BLOKKJÁT fordítsuk meg. Ha egy pillanatban több megfordítandó DISZJUNKT blokkunk van, akkor egy lépésen belül PÁRHUZAMOSAN megfordíthatjuk őket.
- Cél Ilyen lépésekkel érjük el „rendezett sorrendet”.

Példa

697138425

Általánosított síkbeli ponthalmazok

0 Vegyük az $n, n-1, n-2, \dots, 2, 1$ „fordított” sorrendet.

... Számaink közül egymás mellett elhelyezkedők csökkenő BLOKKJÁT fordítsuk meg. Ha egy pillanatban több megfordítandó DISZJUNKT blokkunk van, akkor egy lépésen belül PÁRHUZAMOSAN megfordíthatjuk őket.

Cél Ilyen lépésekkel érjük el „rendezett sorrendet”.

Példa

679134825

Általánosított síkbeli ponthalmazok

0 Vegyük az $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ „fordított” sorrendet.

... Számaink közül egymás mellett elhelyezkedők csökkenő BLOKKJÁT fordítsuk meg. Ha egy pillanatban több megfordítandó DISZJUNKT blokkunk van, akkor egy lépésen belül PÁRHUZAMOSAN megfordíthatjuk őket.

Cél Ilyen lépésekkel érjük el „rendezett sorrendet”.

Példa

679134825

Általánosított síkbeli ponthalmazok

Általánosított síkbeli ponthalmazok

0 Vegyük az $n, n-1, n-2, \dots, 2, 1$ „fordított” sorrendet.

... Számaink közül egymás mellett elhelyezkedők csökkenő BLOKKJÁT fordítsuk meg. Ha egy pillanatban több megfordítandó DISZJUNKT blokkunk van, akkor egy lépésen belül PÁRHUZAMOSAN megfordíthatjuk őket.

Cél Ilyen lépésekkel érjük el „rendezett sorrendet”.

Példa

671934285

Általánosított síkbeli ponthalmazok

Általánosított síkbeli ponthalmazok

0 Vegyük az $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ „fordított” sorrendet.

… Számaink közül egymás mellett elhelyezkedők csökkenő BLOKKJÁT fordítsuk meg. Ha egy pillanatban több megfordítandó DISZJUNKT blokkunk van, akkor egy lépésen belül PÁRHUZAMOSAN megfordíthatjuk őket.

Cél Ilyen lépésekkel érjük el „rendezett sorrendet”.

Példa

$6\,71|93|42|85$

Általánosított síkbeli ponthalmazok

Általánosított síkbeli ponthalmazok

0 Vegyük az $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ „fordított" sorrendet.

… Számaink közül egymás mellett elhelyezkedők csökkenő BLOKKJÁT fordítsuk meg. Ha egy pillanatban több megfordítandó DISZJUNKT blokkunk van, akkor egy lépésen belül PÁRHUZAMOSAN megfordíthatjuk őket.

Cél Ilyen lépésekkel érjük el „rendezett sorrendet".

Példa

617392458

Általánosított síkbeli ponthalmazok

Általánosított síkbeli ponthalmazok

- 0 Vegyük az $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ „fordított” sorrendet.
- … Számaink közül egymás mellett elhelyezkedők csökkenő BLOKKJÁT fordítsuk meg. Ha egy pillanatban több megfordítandó DISZJUNKT blokkunk van, akkor egy lépésen belül PÁRHUZAMOSAN megfordíthatjuk őket.
- Cél Ilyen lépésekkel érjük el „rendezett sorrendet”.

Példa

$61|73|92458$

Általánosított síkbeli ponthalmazok

0 Vegyük az $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ „fordított” sorrendet.

... Számaink közül egymás mellett elhelyezkedők csökkenő BLOKKJÁT fordítsuk meg. Ha egy pillanatban több megfordítandó DISZJUNKT blokkunk van, akkor egy lépésen belül PÁRHUZAMOSAN megfordíthatjuk őket.

Cél Ilyen lépésekkel érjük el „rendezett sorrendet”.

Példa

163729458

Általánosított síkbeli ponthalmazok

- 0 Vegyük az $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ „fordított” sorrendet.
- ... Számaink közül egymás mellett elhelyezkedők csökkenő BLOKKJÁT fordítsuk meg. Ha egy pillanatban több megfordítandó DISZJUNKT blokkunk van, akkor egy lépésen belül PÁRHUZAMOSAN megfordíthatjuk őket.
- Cél Ilyen lépésekkel érjük el „rendezett sorrendet”.

Példa

1 63|72|94 58

Általánosított síkbeli ponthalmazok

Általánosított síkbeli ponthalmazok

0 Vegyük az $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ „fordított” sorrendet.

... Számaink közül egymás mellett elhelyezkedők csökkenő BLOKKJÁT fordítsuk meg. Ha egy pillanatban több megfordítandó DISZJUNKT blokkunk van, akkor egy lépésen belül PÁRHUZAMOSAN megfordíthatjuk őket.

Cél Ilyen lépésekkel érjük el „rendezett sorrendet”.

Példa

136274958

Általánosított síkbeli ponthalmazok

Általánosított síkbeli ponthalmazok

0 Vegyük az $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ „fordított” sorrendet.

... Számaink közül egymás mellett elhelyezkedők csökkenő BLOKKJÁT fordítsuk meg. Ha egy pillanatban több megfordítandó DISZJUNKT blokkunk van, akkor egy lépésen belül PÁRHUZAMOSAN megfordíthatjuk őket.

Cél Ilyen lépésekkel érjük el „rendezett sorrendet”.

Példa

$$13\,62|74|95\,8$$

Általánosított síkbeli ponthalmazok

Általánosított síkbeli ponthalmazok

0 Vegyük az $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ „fordított” sorrendet.

... Számaink közül egymás mellett elhelyezkedők csökkenő BLOKKJÁT fordítsuk meg. Ha egy pillanatban több megfordítandó DISZJUNKT blokkunk van, akkor egy lépésen belül PÁRHUZAMOSAN megfordíthatjuk őket.

Cél Ilyen lépésekkel érjük el „rendezett sorrendet”.

Példa

132647598

Általánosított síkbeli ponthalmazok

Általánosított síkbeli ponthalmazok

0 Vegyük az $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ „fordított” sorrendet.

... Számaink közül egymás mellett elhelyezkedők csökkenő BLOKKJÁT fordítsuk meg. Ha egy pillanatban több megfordítandó DISZJUNKT blokkunk van, akkor egy lépésen belül PÁRHUZAMOSAN megfordíthatjuk őket.

Cél Ilyen lépésekkel érjük el „rendezett sorrendet”.

Példa

$1 32 | 64 | 75 | 98$

Általánosított síkbeli ponthalmazok

- 0 Vegyük az $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ „fordított” sorrendet.
- ... Számaink közül egymás mellett elhelyezkedők csökkenő BLOKKJÁT fordítsuk meg. Ha egy pillanatban több megfordítandó DISZJUNKT blokkunk van, akkor egy lépésen belül PÁRHUZAMOSAN megfordíthatjuk őket.
- Cél Ilyen lépésekkel érjük el „rendezett sorrendet”.

Példa

123465789

Általánosított síkbeli ponthalmazok

0 Vegyük az $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ „fordított" sorrendet.

... Számaink közül egymás mellett elhelyezkedők csökkenő BLOKKJÁT fordítsuk meg. Ha egy pillanatban több megfordítandó DISZJUNKT blokkunk van, akkor egy lépésen belül PÁRHUZAMOSAN megfordíthatjuk őket.

Cél Ilyen lépésekkel érjük el „rendezett sorrendet".

Példa

1234**65**789

Általánosított síkbeli ponthalmazok

Általánosított síkbeli ponthalmazok

0 Vegyük az $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ „fordított” sorrendet.

... Számaink közül egymás mellett elhelyezkedők csökkenő BLOKKJÁT fordítsuk meg. Ha egy pillanatban több megfordítandó DISZJUNKT blokkunk van, akkor egy lépésen belül PÁRHUZAMOSAN megfordíthatjuk őket.

Cél Ilyen lépésekkel érjük el „rendezett sorrendet”.

Példa

123456789

Tétel (Sylvester—Gallai-tétel)

Ha adott a síkon n NEM egy egyenesre eső pont, akkor BIZTOS meghatároznak olyan egyenest, ami közülük csak KETTŐN megy át.

Tétel (Sylvester—Gallai-tétel)

Ha adott a síkon n NEM egy egyenesre eső pont, akkor BIZTOS meghatároznak olyan egyenest, ami közülük csak KETTŐN megy át.

Sylvester—Gallai-tétel, sorbaállításos verzió

Adott egy általánosított ponthalmaz ami NEM egyetlen megfordítás. Ekkor BIZTOS lesz olyan lépésünk, amiben lesz KETTŐ hosszú blokk megfordítása.

Tétel (Sylvester—Gallai-tétel)

Ha adott a síkon n NEM egy egyenesre eső pont, akkor BIZTOS meghatároznak olyan egyenest, ami közülük csak KETTŐN megy át.

Sylvester—Gallai-tétel, sorbaállításos verzió

Adott egy általánosított ponthalmaz ami NEM egyetlen megfordítás. Ekkor BIZTOS lesz olyan lépésünk, amiben lesz KETTŐ hosszú blokk megfordítása.

Erősség

Az $n, n-1, n-2 \ldots, 2, 1$ sorrendnek van olyan rendezése csökkenő blokkok megfordításával, ami nem síkbeli ponthalmazból ered.

Erős Gallai-tétel bizonyítása: az ötlet

Észrevétel

AKADÁLY a 2-blokk nélküli rendezhetőségre:

$\wedge$-cikk-cakk-$\vee$ blokk, amit közvetlen az utolsó két (növekvő elemnél) nagyobb elem követ,

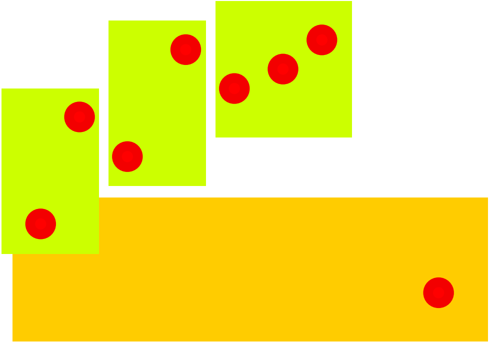
A blokk kezdő elemét követi nála kisebb elem is.

Észrevétel

AKADÁLY a 2-blokk nélküli rendezhetőségre:

$\wedge$-cikk-cakk-$\vee$ blokk, amit közvetlen az utolsó két (növekvő elemnél) nagyobb elem követ,

A blokk kezdő elemét követi nála kisebb elem is.



Erős Gallai-tétel bizonyítása

1. Észrevétel

Ha az $n, n-1, n-2 \ldots, 2, 1$ sorrendnek egy rendezésében az első lépés

- nem tartalmazza az utolsó elemet (nem a teljes blokk megfordítása),
- nem egy kettő hosszú blokk megfordítása,

akkor az AKADÁLY megjelenik.

Erős Gallai-tétel bizonyítása

1. Észrevétel

Ha az $n, n-1, n-2 \ldots, 2, 1$ sorrendnek egy rendezésében az első lépés

- nem tartalmazza az utolsó elemet (nem a teljes blokk megfordítása),
- nem egy kettő hosszú blokk megfordítása,

akkor az AKADÁLY megjelenik.

2. Észrevétel

Ha az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz egy sorbaállításában ott van az AKADÁLY és a következő lépés

- nem egy kettő hosszú blokk megfordítása,

akkor az AKADÁLY megmarad.

Az alaphelyzet: egy út és egy folyó

Út: Vízszintes egyenes (∞_{Ny}-∞_{K})

Az alaphelyzet: egy út és egy folyó

Út: Vízszintes egyenes (∞_{Ny}-∞_{K})

Folyó: Két irányban végtelen görbe (forrás: ∞_{DNy}, torkolat: ∞_{K})

Az alaphelyzet: egy út és egy folyó

Út: Vízszintes egyenes (∞_{Ny}-∞_{K})

Folyó: Két irányban végtelen görbe (forrás: ∞_{DNy}, torkolat: ∞_{K})

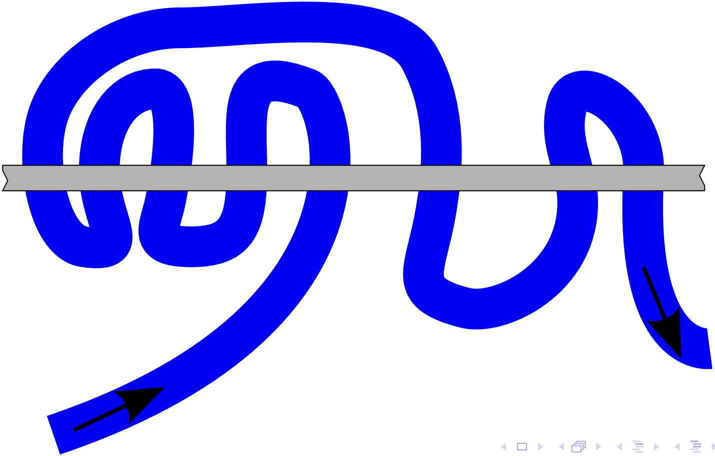
Találkozások: Hidak

Az alaphelyzet: egy út és egy folyó

Út: Vízszintes egyenes (∞_{Ny}-∞_{K})

Folyó: Két irányban végtelen görbe (forrás: ∞_{DNy}, torkolat: ∞_{K})

Találkozások: Hidak

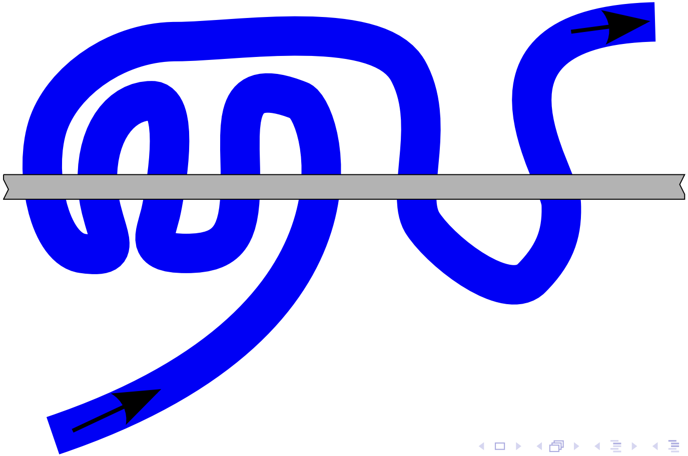


Az alaphelyzet: egy út és egy folyó

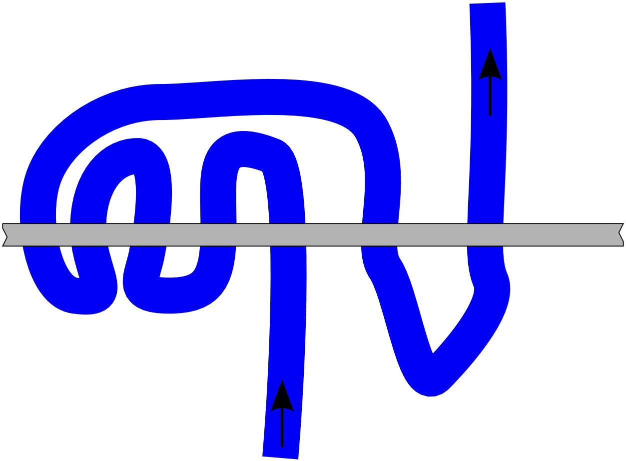
Út: Vízszintes egyenes (∞_{Ny}-∞_{K})

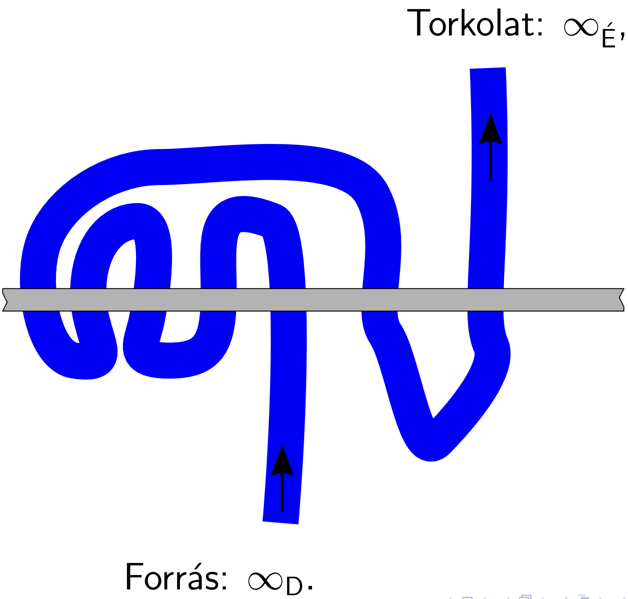
Folyó: Két irányban végtelen görbe (forrás: ∞_{DNy}, torkolat: ∞_{K})

Találkozások: Hidak

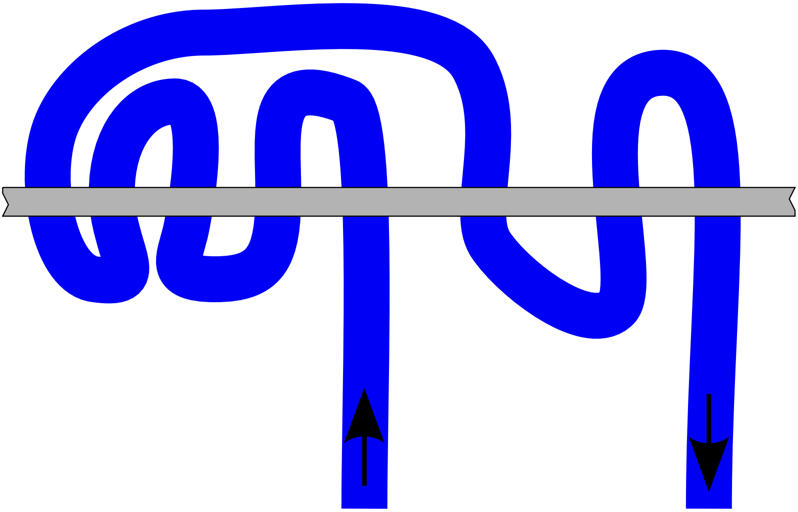


Az alaphelyzet: Páratlan sok híd

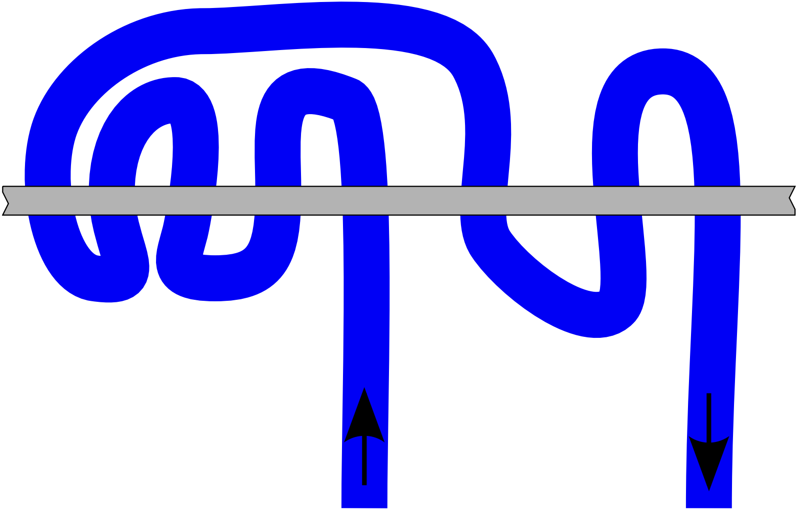



Torkolat: $\infty_{É}$,
Forrás: ∞_D.

Az alaphelyzet: Páros sok híd



Az alaphelyzet: Páros sok híd



Forrás: ∞_{D-}, Torkolat: ∞_{D+}.

Keresztelő

Keresztelő

Az alaphelyzetben szereplő egyenes és görbe: MEANDER

Az alaphelyzetben szereplő egyenes és görbe: MEANDER

A Mississippi folyó egy szakasza

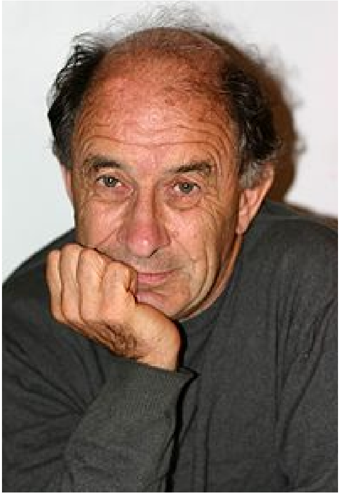
Még egy meander folyó

A Swanson folyó egy szakasza (Alaszka)

A matematikai szülők

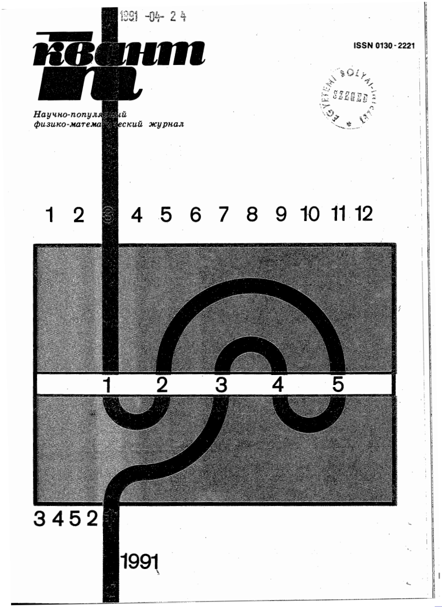
A matematikai szülők

Henri Poincaré
1854—1912



Vladimir Arnold
1937 — 2010. június 3.

A matematikai forrás


1991 -04- 24
Квант
ISSN 0130-2221
Научно-популярный физико-математический журнал
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
1 2 3 4 5
3 4 5 2 1
1991

Meander-sorbaállítások

- Vegyünk egy meandert.

Meander-sorbaállítások

- Vegyünk egy meandert.
- Az úton Ny-ról K-re haladva számozzuk meg a hidakat.

Meander-sorbaállítások

- Vegyünk egy meandert.
- Az úton Ny-ról K-re haladva számozzuk meg a hidakat.
- A folyón a forrástól a torkolatig utazva olvassuk el a sorrendet.

Meander-sorbaállítások

- Vegyünk egy meandert.
- Az úton Ny-ról K-re haladva számozzuk meg a hidakat.
- A folyón a forrástól a torkolatig utazva olvassuk el a sorrendet.
- Amit kapunk egy meander-sorbaállítás.

Meander-sorbaállítások

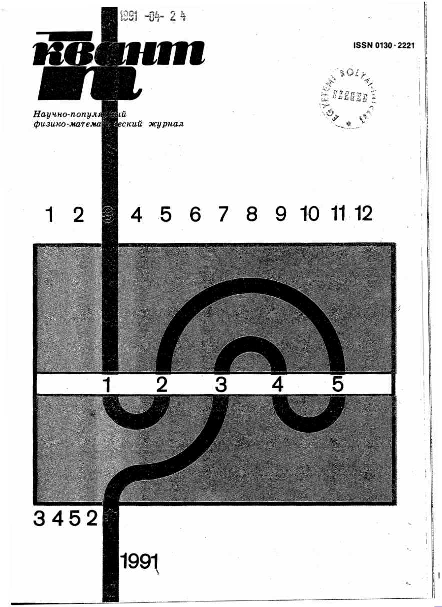
- Vegyünk egy meandert.
- Az úton Ny-ról K-re haladva számozzuk meg a hidakat.
- A folyón a forrástól a torkolatig utazva olvassuk el a sorrendet.
- Amit kapunk egy meander-sorbaállítás.

Definíció

$M(n) =$ Meander-sorbaállítások száma, ha n híd van.

Példa: 34521 egy Meander-sorbaállítás

Példa: 34521 egy Meander-sorbaállítás

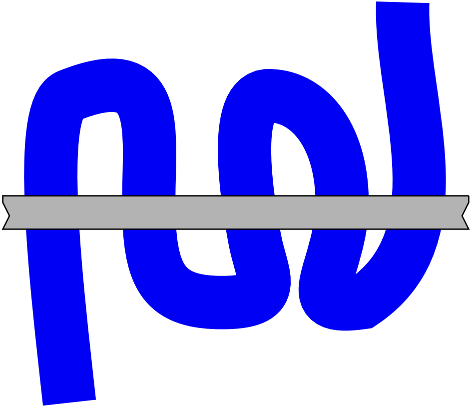


Példa: $M(5) = 8$

12345, 12543, 14325, 32145, 34521, 52341, 54123, 54321.

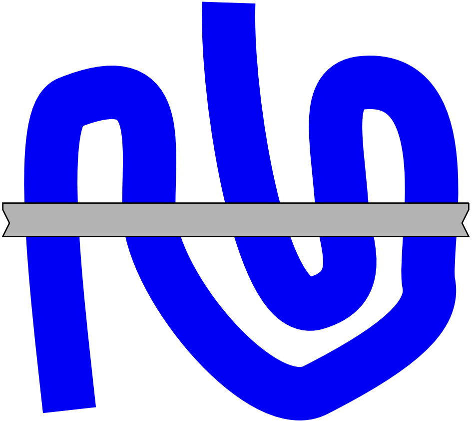
Példa: $M(5) = 8$

12345, 12543, 14325, 32145, 34521, 52341, 54123, 54321.

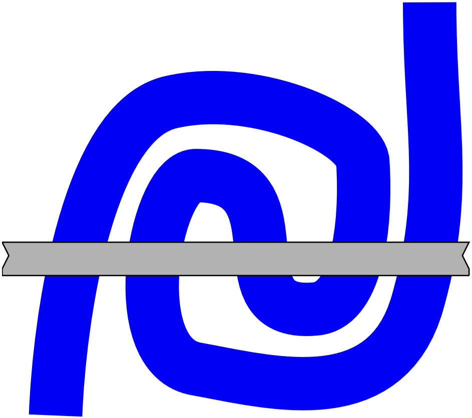


Példa: $M(5) = 8$

12345, 12543, 14325, 32145, 34521, 52341, 54123, 54321.

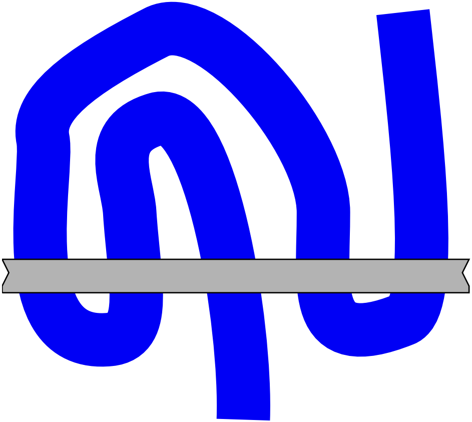


12345, 12543, 14325, 32145, 34521, 52341, 54123, 54321.



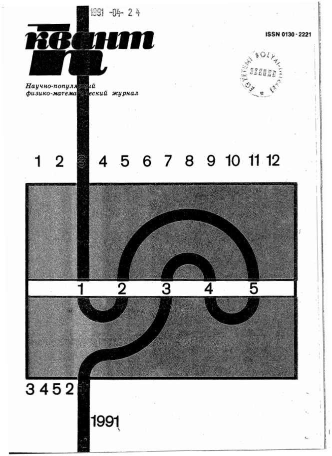
Példa: $M(5) = 8$

12345, 12543, 14325, 32145, 34521, 52341, 54123, 54321.



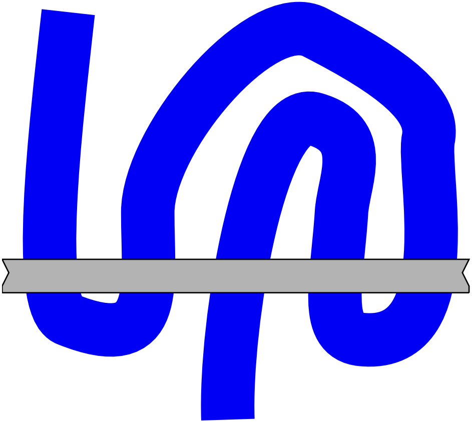
Példa: $M(5) = 8$

12345, 12543, 14325, 32145, 34521, 52341, 54123, 54321.

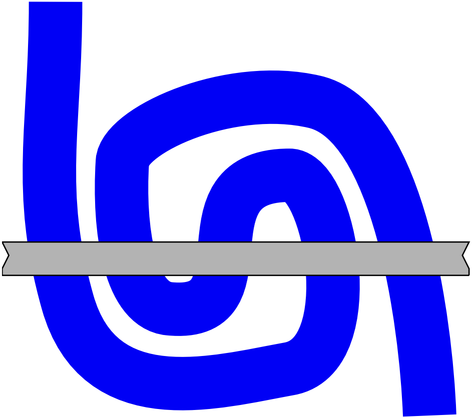


Példa: $M(5) = 8$

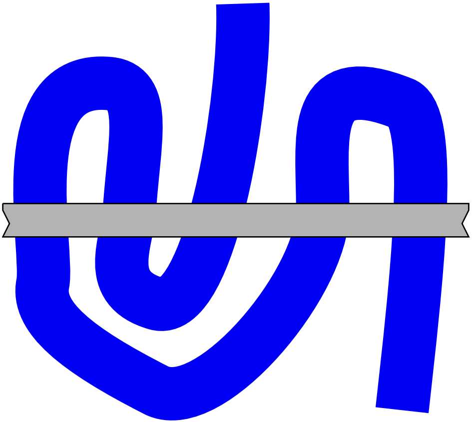
12345, 12543, 14325, 32145, 34521, 52341, 54123, 54321.



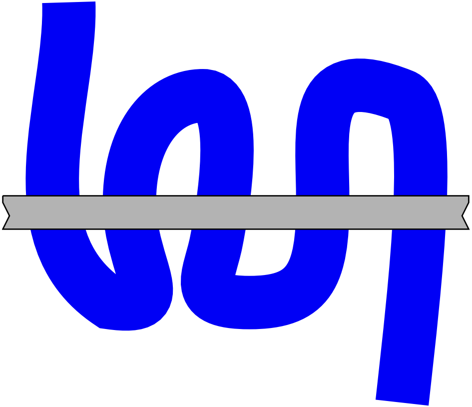
12345, 12543, 14325, 32145, 34521, 52341, 54123, 54321.



12345, 12543, 14325, 32145, 34521, 52341, 54123, 54321.



12345, 12543, 14325, 32145, 34521, 52341, 54123, 54321.



További példák

Az összes 5 hosszú meander-sorbaállítás:

$$12345, 12543, 14325, 32145, 34521, 52341, 54123, 54321.$$

További példák

Az összes 5 hosszú meander-sorbaállítás:

$$12345, 12543, 14325, 32145, 34521, 52341, 54123, 54321.$$

Az összes 6 hosszú meander-sorbaállítás ($M(6) = 14$):

$$123456, 123654, 125436, 143256, 145632, 163452, 165234,$$

$$165432, 321456, 321654, 345216, 523416, 541236, 543216.$$

További példák

Az összes 5 hosszú meander-sorbaállítás:

$$12345, 12543, 14325, 32145, 34521, 52341, 54123, 54321.$$

Az összes 6 hosszú meander-sorbaállítás ($M(6) = 14$):

$$123456, 123654, 125436, 143256, 145632, 163452, 165234,$$

$$165432, 321456, 321654, 345216, 523416, 541236, 543216.$$

Egy 22 hosszú meander-sorbaállítás:

$$9 \quad 16 \quad 13 \quad 12 \quad 19 \quad 18 \quad 17 \quad 20 \quad 11 \quad 14 \quad 15 \quad 10$$

$$21 \quad 6 \quad 3 \quad 2 \quad 7 \quad 8 \quad 1 \quad 4 \quad 5 \quad 22.$$

Hidak kategorizálása

Egy út-folyó talákozás/híd kétféle lehet:

A híd alatt a folyó

- vagy D-ről É-ra folyik,
- vagy É-ról D-re folyik.

1. észrevétel

Észrevétel

(i) A folyón utazva a hidak két kategóriája alternál,

1. észrevétel

Észrevétel

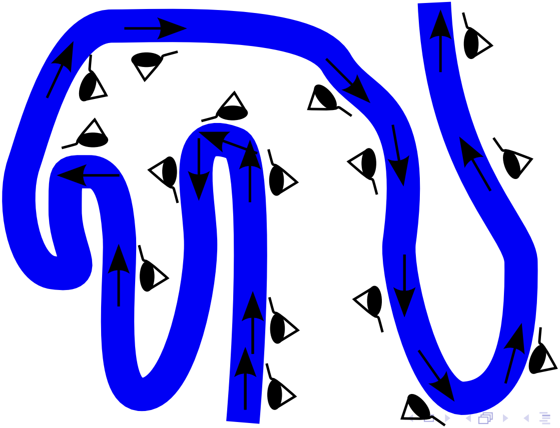
(i) A folyón utazva a hidak két kategóriája alternál,

(ii) Az úton utazva a hidak két kategóriája alternál.

Észrevétel

(i) A folyón utazva a hidak két kategóriája alternál,

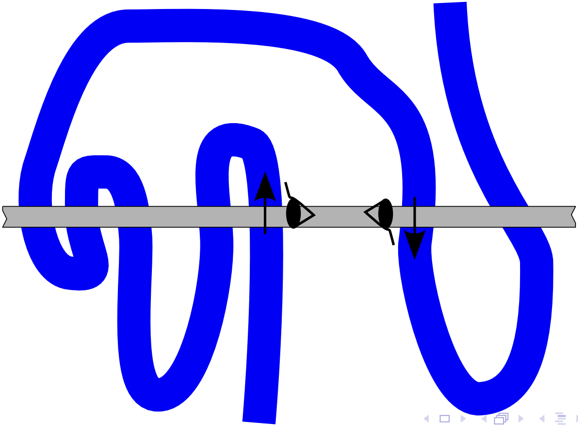
(ii) Az úton utazva a hidak két kategóriája alternál.



Észrevétel

(i) A folyón utazva a hidak két kategóriája alternál,

(ii) Az úton utazva a hidak két kategóriája alternál.



Észrevétel

(i) A folyón utazva az első híd kategóriája: alatta D-ről É-ra folyik a víz,

Észrevétel

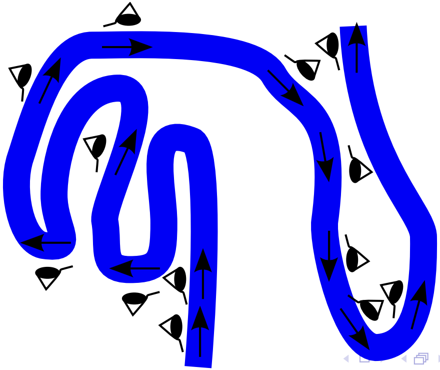
(i) A folyón utazva az első híd kategóriája: alatta D-ről É-ra folyik a víz,

(ii) Az úton utazva az első híd kategóriája: alatta D-ről É-ra folyik a víz.

Észrevétel

(i) A folyón utazva az első híd kategóriája: alatta D-ről É-ra folyik a víz,

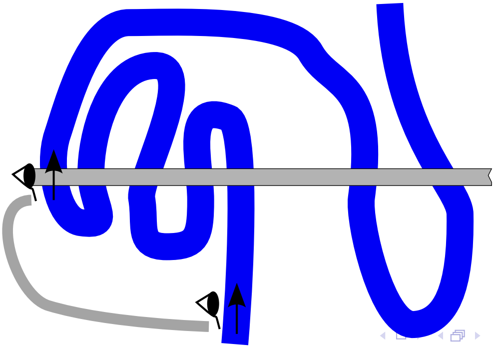
(ii) Az úton utazva az első híd kategóriája: alatta D-ről É-ra folyik a víz.



Észrevétel

(i) A folyón utazva az első híd kategóriája: alatta D-ről É-ra folyik a víz,

(ii) Az úton utazva az első híd kategóriája: alatta D-ről É-ra folyik a víz.



Az alaptulajdonság

Tétel

Minden meander-sorbállítás páratlan számmal kezdődik és paritás alternáló.

Egy jelölés

Definíció

$$\binom{n}{k}_{\text{meander}} = \text{azon } n \text{ hidas meander-sorbaállítások száma,}$$

$$\text{ahol az első szám } k.$$

Egy jelölés

Definíció

$$\binom{n}{k}_{\text{meander}} = \text{azon } n \text{ hidas meander-sorbaállítások száma,}$$

$$\text{ahol az első szám } k.$$

Észrevétel

$$\binom{n}{2\ell}_{\text{meander}} = 0.$$

Egy jelölés

Definíció

$$\binom{n}{k}_{\text{meander}} = \text{azon } n \text{ hidas meander-sorbaállítások száma,}$$

$$\text{ahol az első szám } k.$$

Észrevétel

$$\binom{n}{2\ell}_{\text{meander}} = 0.$$

Észrevétel

$$M(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}_{\text{meander}} = \sum_{\ell=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2\ell+1}_{\text{meander}}.$$

	$k=1$	3	5	7	9	11	$M(n)=$
$n=1$	1						1
$n=2$	1						1
$n=3$	1	1					2
$n=4$	2	1					3
$n=5$	3	2	3				8
$n=6$	8	3	3				14
$n=7$	14	7	7	14			42
$n=8$	42	14	11	14			81
$n=9$	81	36	28	36	81		262
$n=10$	262	81	57	57	81		538

Észrevétel

Ha n páratlan/$n = 2\nu + 1$, akkor $\binom{n}{k}_{\text{meander}} = \binom{n}{n+1-k}_{\text{meander}}$.

Észrevétel

Ha n páratlan$/n = 2\nu + 1$, akkor $\binom{n}{k}_{\text{meander}} = \binom{n}{n+1-k}_{\text{meander}}$.

Bizonyítás

Bal-jobb-felcserélő tükrözés.

Meanderek: Szimmetria, n páratlan

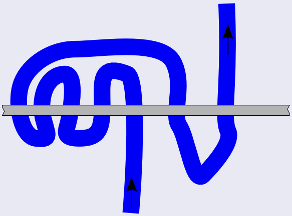
Észrevétel

Ha n páratlan/$n = 2\nu + 1$, akkor $\binom{n}{k}_{\text{meander}} = \binom{n}{n+1-k}_{\text{meander}}$.

Bizonyítás

Bal-jobb-felcserélő tükrözés.

EGY OBJEKTUM:



7 hidas, 5-tel kezdődő

MEANDER

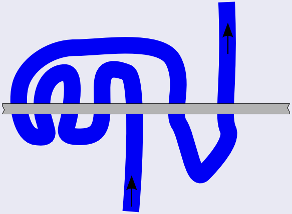
Észrevétel

Ha n páratlan$/n = 2\nu + 1$, akkor $\binom{n}{k}_{\text{meander}} = \binom{n}{n+1-k}_{\text{meander}}$.

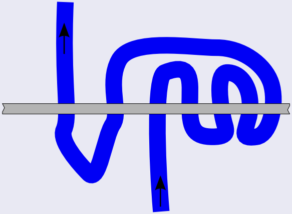
Bizonyítás

Bal-jobb-felcserélő tükrözés.

EGY OBJEKTUM: A PÁRJA:



7 hidas, 5-tel kezdődő



7 hidas, 3-mal kezdődő

MEANDER

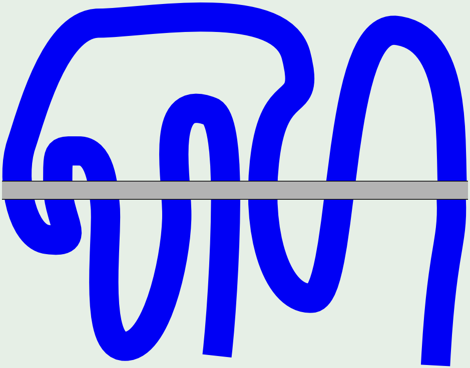
Észrevétel

Ha n páros/$n = 2\nu$, akkor a következők ekvivalensek:

Észrevétel

Ha n páros/$n = 2\nu$, akkor a következők ekvivalensek:

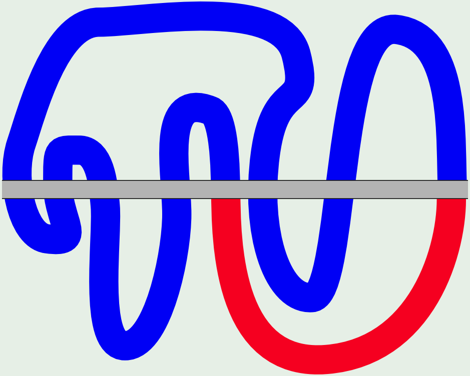
(i) Meander n híddal,



Észrevétel

Ha n páros/$n = 2\nu$, akkor a következők ekvivalensek:

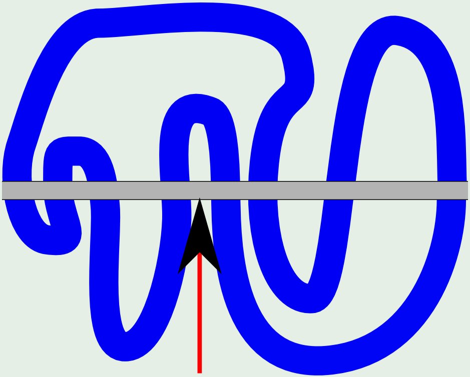
(ii) Záródó görbe n híddal és egy kijelölt „hassal”,



Észrevétel

Ha n páros/$n = 2\nu$, akkor a következők ekvivalensek:

(iii) Záródó görbe n híddal és egy „tartóval”.



Észrevétel

Ha n páros/$n = 2\nu$, akkor $\binom{n}{k}_{\text{meander}} = \binom{n}{n+2-k}_{\text{meander}}$, $k > 1$ esetén.

Észrevétel

Ha n páros$/n = 2\nu$, akkor $\binom{n}{k}_{\text{meander}} = \binom{n}{n+2-k}_{\text{meander}}$, $k > 1$ esetén.

Bizonyítás

Bal-jobb-felcserélő tükrözése a tartós záródó görbéknek.

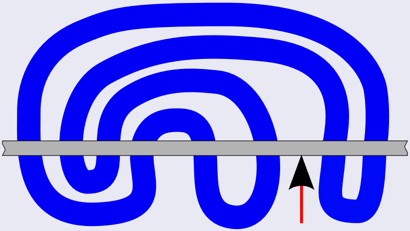
Észrevétel

Ha n páros/$n = 2\nu$, akkor $\binom{n}{k}_{\text{meander}} = \binom{n}{n+2-k}_{\text{meander}}$, $k > 1$ esetén.

Bizonyítás

Bal-jobb-felcserélő tükrözése a tartós záródó görbéknek.

EGY OBJEKTUM:



8 hidas, 7-tel kezdődő

MEANDER

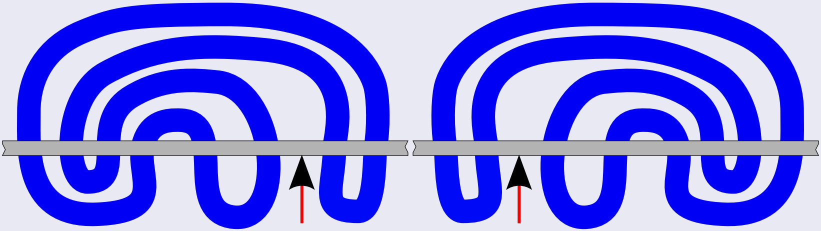
Észrevétel

Ha n páros/$n = 2\nu$, akkor $\binom{n}{k}_{\text{meander}} = \binom{n}{n+2-k}_{\text{meander}}$, $k > 1$ esetén.

Bizonyítás

Bal-jobb-felcserélő tükrözése a tartós záródó görbéknek.

EGY OBJEKTUM: A PÁRJA:



8 hidas, 7-tel kezdődő 8 hidas, 3-mal kezdődő

MEANDER

$M(n)$: paritás

Észrevétel

n páratlan $(n \geq 3)$ esetén a bal-jobb-felcserélő tükrözés párokba állítja a meander-sorbállításokat.

$M(n)$: paritás

Észrevétel

n páratlan $(n \geq 3)$ esetén a bal-jobb-felcserélő tükrözés párokba állítja a meander-sorbállításokat.

Tétel

$$M(2\ell + 1) \equiv 0 \pmod 2, \text{ ha } \ell \geq 1.$$

$M(n)$: paritás

Észrevétel

$n = 4k + 2$ esetén a bal-jobb-felcserélő tükrözés párokba állítja azokat a meander-sorbállításokat, amelyek nem 1-gyel kezdődnek.

$M(n)$: paritás

Észrevétel

$n = 4k + 2$ esetén a bal-jobb-felcserélő tükrözés párokba állítja azokat a meander-sorbállításokat, amelyek nem 1-gyel kezdődnek.

Tétel

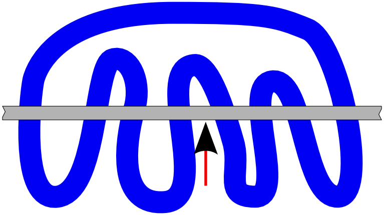
$$M(4\ell + 2) \equiv \binom{4\ell + 2}{1}_{\text{meander}} \pmod 2.$$

Észrevétel

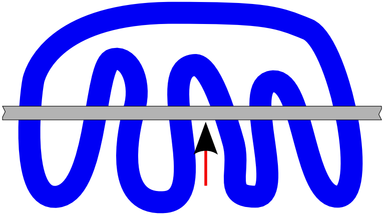
$n = 4k$ esetén a bal-jobb-felcserélő tükrözés párokba állítja azokat a meander-sorbállításokat, amelyek nem 1-gyel keződonek, DE lesz néhány sorbaállítás, amelyek párja önmaga.

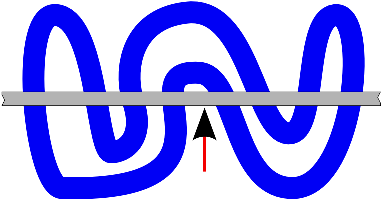
Példa: Szimmetrikus meanderek, $n = 8$

Példa: Szimmetrikus meanderek, $n = 8$

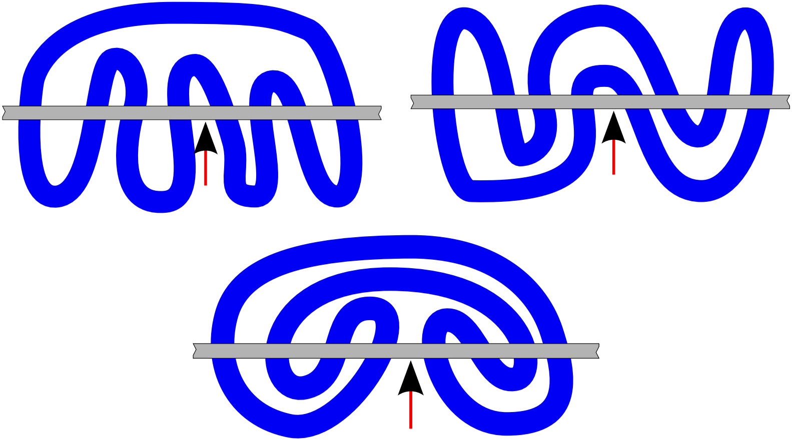


Példa: Szimmetrikus meanderek, $n = 8$





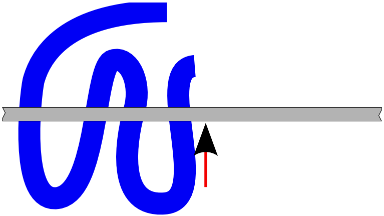
Példa: Szimmetrikus meanderek, $n = 8$



Példa: Szimmetrikus meanderek, $n = 8$

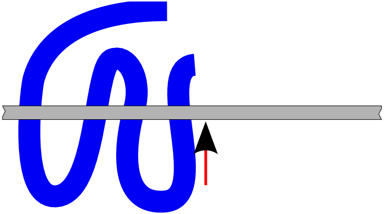
Persze ezeknek elég a FELÉT megadni:

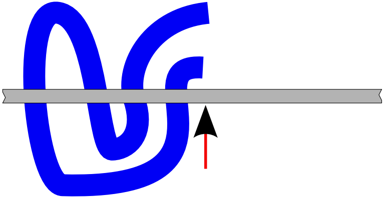
Persze ezeknek elég a FELÉT megadni:



Példa: Szimmetrikus meanderek, $n = 8$

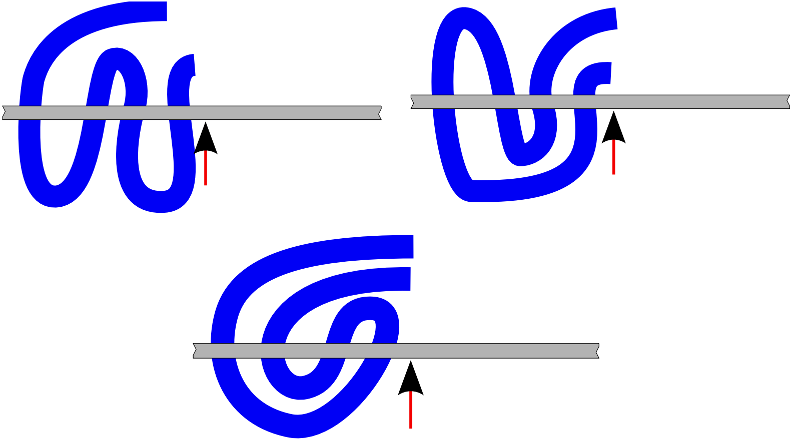
Persze ezeknek elég a FELÉT megadni:



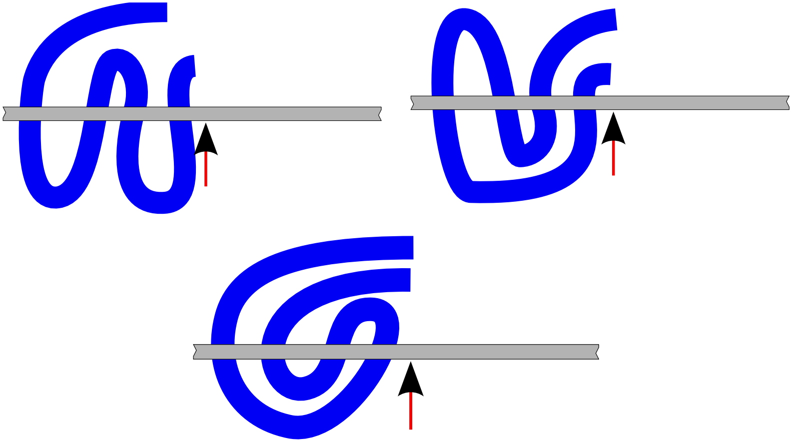


Példa: Szimmetrikus meanderek, $n = 8$

Persze ezeknek elég a FELÉT megadni:



Persze ezeknek elég a FELÉT megadni:



Ezek pedig az $n/2$ hidas meanderek!

Záró tételek

Lemma

$$\binom{n}{1}_{\text{meander}} = M(n-1), \text{ ha } n \geq 2.$$

Záró tételek

Lemma

$$\binom{n}{1}_{\text{meander}} = M(n-1), \text{ ha } n \geq 2.$$

Tétel

(i)

$$M(2\ell+1) \equiv 0 \pmod 2, \text{ ha } \ell \geq 1,$$

(ii)

$$M(4\ell+2) \equiv M(4\ell+1) \equiv 0 \pmod 2, \text{ ha } \ell \geq 1,$$

(iii)

$$M(4\ell) \equiv M(4\ell-1) + M(2\ell) \equiv M(2\ell) \pmod 2, \text{ ha } \ell \geq 1.$$

Záró tételek

Lemma

$$\binom{n}{1}_{\text{meander}} = M(n-1), \text{ ha } n \geq 2.$$

Tétel

(i)

$$M(2\ell+1) \equiv 0 \pmod 2, \text{ ha } \ell \geq 1,$$

(ii)

$$M(4\ell+2) \equiv M(4\ell+1) \equiv 0 \pmod 2, \text{ ha } \ell \geq 1,$$

(iii)

$$M(4\ell) \equiv M(4\ell-1) + M(2\ell) \equiv M(2\ell) \pmod 2, \text{ ha } \ell \geq 1.$$

Következmény

$M(n)$ pontosan akkor páratlan, ha n egy 2-hatvány.

Köszönöm a figyelmet!