Rekurziók

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2015. január 12.

Mi is az a rekurzió?

Mi is az a rekurzió?

Mi is az a rekurzió?

Egy végtelen matematikai objektum kigöngyölítési módszere?

Mi is az a rekurzió? II

Mi is az a rekurzió? II

Az alappélda

Az alappélda

FELADAT

Hányféleképpen lehet kiparkettázni 2×2015 méretű táblát 2015 darab dominóval?

Fibonacci-számok

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1,$$

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2,$$

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2, 3,$$

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2, 3, 5,$$

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8,$$

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,$$

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,$$

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,$$

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,$$

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,$$

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 143,$$

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 143, \ldots$$

Egy újabb feladat

FELADAT (Zeckendorf)

Minden természetes szám egyértelműen írható fel

$$\gamma_n F_n + \gamma_{n-1} F_{n-1} + \ldots + \gamma_i F_i + \ldots + \gamma_1 F_1$$

alakban, ahol

- $\gamma_i \in \{0, 1\}$,
- $\gamma_n = 1$,
- $(\gamma_{i+1}, \gamma_i) \neq (1, 1)$.

Egy újabb feladat

FELADAT (Zeckendorf)

Minden természetes szám egyértelműen írható fel

$$\gamma_n F_n + \gamma_{n-1} F_{n-1} + \ldots + \gamma_i F_i + \ldots + \gamma_1 F_1$$

alakban, ahol

- $\gamma_i \in \{0, 1\}$,
- $\gamma_n = 1$,
- $(\gamma_{i+1}, \gamma_i) \neq (1, 1)$.

$$2015 = 1597 + 377 + 34 + 5 + 2.$$

Egy újabb feladat

FELADAT (Zeckendorf)

Minden természetes szám egyértelműen írható fel

$$\gamma_n F_n + \gamma_{n-1} F_{n-1} + \ldots + \gamma_i F_i + \ldots + \gamma_1 F_1$$

alakban, ahol

- $\gamma_i \in \{0, 1\}$,
- $\gamma_n = 1$,
- $(\gamma_{i+1}, \gamma_i) \neq (1, 1)$.

$$2015 = 1597 + 377 + 34 + 5 + 2.$$

$$2015 = F_{16} + F_{13} + F_8 + F_4 + F_2.$$

Egy újabb feladat

FELADAT (Zeckendorf)

Minden természetes szám egyértelműen írható fel

$$\gamma_n F_n + \gamma_{n-1} F_{n-1} + \ldots + \gamma_i F_i + \ldots + \gamma_1 F_1$$

alakban, ahol

- $\gamma_i \in \{0, 1\}$,
- $\gamma_n = 1$,
- $(\gamma_{i+1}, \gamma_i) \neq (1, 1)$.

$$2015 = 1597 + 377 + 34 + 5 + 2.$$

$$2015 = F_{16} + F_{13} + F_8 + F_4 + F_2.$$

$$2015 = 1001000010001010_{\text{Fibonacci}}.$$

FELADAT

Minden természetes szám egyértelműen írható fel

$$\gamma_n 2^n + \gamma_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + \gamma_i 2^i + \ldots + \gamma_1 2^1 + \gamma_0 2^0$$

alakban, ahol

- $\gamma_i \in \{0, 1\}$,
- $\gamma_n = 1$,

Egy ki nem mondott feladat

FELADAT

Minden természetes szám egyértelműen írható fel

$$\gamma_n 2^n + \gamma_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + \gamma_i 2^i + \ldots + \gamma_1 2^1 + \gamma_0 2^0$$

alakban, ahol

- $\gamma_i \in \{0, 1\}$,
- $\gamma_n = 1$,

$$2015 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1.$$

FELADAT

Minden természetes szám egyértelműen írható fel

$$\gamma_n 2^n + \gamma_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + \gamma_i 2^i + \ldots + \gamma_1 2^1 + \gamma_0 2^0$$

alakban, ahol

- $\gamma_i \in \{0, 1\}$,
- $\gamma_n = 1$,

$$2015 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1.$$

$$2015 = 11111011111_2$$

Nagyon hasonlóak

FELADAT

Bizonyítsuk be, hogy

$$F_n = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\rceil .$$

Nagyon hasonlóak

FELADAT

Bizonyítsuk be, hogy

$$F_n = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\rceil .$$

FELADAT

Hány *n*-jegyű

- bináris szám van?
- Fibonacci-számrendszerbeli szám van?

Probléma

Adjunk JÓ eljárást Fibonacci-számrendszerben felírt számok összeadására, kivonására, szorzására.

A második alappélda: A Pascal-háromszög

A második alappélda: A Pascal-háromszög

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & & 1 & & & \\ & & 1 & & & & & & 1 & & \\ & 1 & & & & & & & & 1 & \\ 1 & & & & & & & & & & 1 \end{array}$$

A második alappélda: A Pascal-háromszög

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1						1		
	1								1	
1										1

A második alappélda: A Pascal-háromszög

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \color{red}{3} & & & & 1 & & \\
 & 1 & & & & & & & & 1 & \\
1 & & & & & & & & & & 1
\end{array}
$$

A második alappélda: A Pascal-háromszög

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 1

1 1

A második alappélda: A Pascal-háromszög

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 1

1 1

A második alappélda: A Pascal-háromszög

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & & & 1 & \\
1 & & & & & & & & & & 1
\end{array}$$

A második alappélda: A Pascal-háromszög

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

A második alappélda: A Pascal-háromszög

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Binomiális együtthatók rekurziója

Binomiális együtthatók rekurziója

Definíció

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$$

Ha $\binom{n}{m}$ nem a Pascal hármszög szélén van, akkor

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}.$$

FELADAT

Az összes lehetséges módon kitöltjük az ötöslottó szelvényét (minden lehetséges kitöltés külön szelvény).

FELADAT

Az összes lehetséges módon kitöltjük az ötöslottó szelvényét (minden lehetséges kitöltés külön szelvény).
Páros vagy páratlan szelvényünk lesz-e?

Kérdések

FELADAT

Az összes lehetséges módon kitöltjük az ötöslottó szelvényét (minden lehetséges kitöltés külön szelvény).
Páros vagy páratlan szelvényünk lesz-e?

FELADAT

$\binom{1995}{1365}$ páros vagy páratlan? És $\binom{1995}{682}$?

FELADAT

Az összes lehetséges módon kitöltjük az ötöslottó szelvényét (minden lehetséges kitöltés külön szelvény).
Páros vagy páratlan szelvényünk lesz-e?

FELADAT

$\binom{1995}{1365}$ páros vagy páratlan? És $\binom{1995}{682}$?

KÉRDÉS

Hogyan dönthető el, hogy adott $\binom{n}{m}$ binomiális együttható páros-e?

A BINÁRIS Pascal-háromszög

A BINÁRIS Pascal-háromszög

					1					
				1		1				
			1				1			
		1						1		
	1								1	
1										1

A BINÁRIS Pascal-háromszög

					1					
				1		1				
			1		0		1			
		1						1		
	1								1	
1										1

A BINÁRIS Pascal-háromszög

					1					
				1		1				
			1		0		1			
		1		1				1		
	1								1	
1										1

A BINÁRIS Pascal-háromszög

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 0 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \color{red}{1} & & 1 & & \\
 & 1 & & & & & & & & 1 & \\
1 & & & & & & & & & & 1
\end{array}$$

A BINÁRIS Pascal-háromszög

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 0 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & \color{red}{0} & & & & & & 1 & \\
1 & & & & & & & & & & 1
\end{array}
$$

A BINÁRIS Pascal-háromszög

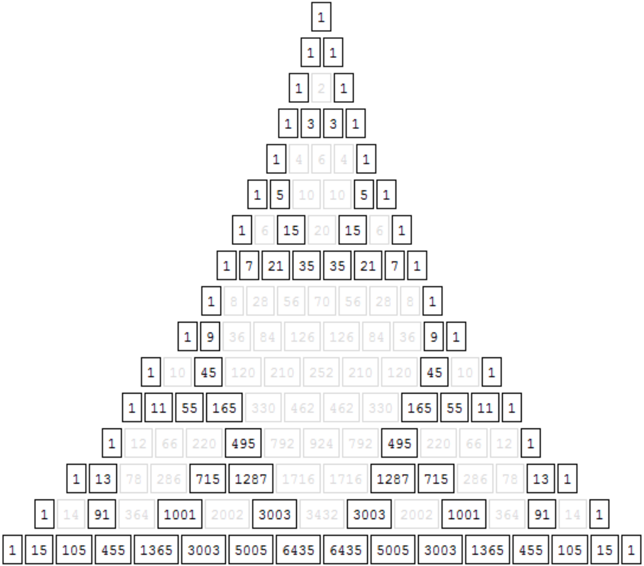
$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 0 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 0 & & \color{red}{0} & & & & 1 & \\
1 & & & & & & & & & & 1
\end{array}
$$

A BINÁRIS Pascal-háromszög

					1					
				1		1				
			1		0		1			
		1		1		1		1		
	1		0		0		0		1	
1		1		0		0		1		1

A BINÁRIS Pascal-háromszög

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 0 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 & \\
1 & & 1 & & 0 & & 0 & & 1 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$


1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1
1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1

Feladat

- $$\binom{2n}{2\ell+1} \equiv 0 \pmod 2,$$

Újabb feladatok

Feladat

- $$\binom{2n}{2\ell+1} \equiv 0 \pmod{2},$$

- $$\binom{2n}{2\ell} \equiv \binom{n}{\ell} \pmod{2},$$

Újabb feladatok

Feladat

- $$\binom{2n}{2\ell+1} \equiv 0 \pmod 2,$$
- $$\binom{2n}{2\ell} \equiv \binom{n}{\ell} \pmod 2,$$
- $$\binom{2n+1}{2\ell} \equiv \binom{n}{\ell} \pmod 2,$$

Újabb feladatok

Feladat

- $$\binom{2n}{2\ell+1} \equiv 0 \pmod 2,$$
- $$\binom{2n}{2\ell} \equiv \binom{n}{\ell} \pmod 2,$$
- $$\binom{2n+1}{2\ell} \equiv \binom{n}{\ell} \pmod 2,$$
- $$\binom{2n+1}{2\ell+1} \equiv \binom{n}{\ell} \pmod 2,$$

Újabb feladatok

Feladat

- $$\binom{2n}{2\ell+1} \equiv 0 \pmod 2,$$
- $$\binom{2n}{2\ell} \equiv \binom{n}{\ell} \pmod 2,$$
- $$\binom{2n+1}{2\ell} \equiv \binom{n}{\ell} \pmod 2,$$
- $$\binom{2n+1}{2\ell+1} \equiv \binom{n}{\ell} \pmod 2,$$
- $$\binom{2n+\alpha}{2\ell+\beta} \equiv \binom{n}{\ell}\binom{\alpha}{\beta} \pmod 2.$$

Egy tétel

Egy tétel

Tétel, Lucas 1878

Legyen $n = {n_s n_{s-1} \dots n_1 n_0}_{\mathbf{2}}$ és ${\ell_s \ell_{s-1} \dots \ell_1 \ell_0}_{\mathbf{2}}$. Ekkor

$$\binom{n}{\ell} \equiv \binom{n_s}{\ell_s} \cdot \binom{n_{s-1}}{\ell_{s-1}} \cdot \ldots \cdot \binom{n_1}{\ell_1} \cdot \binom{n_0}{\ell_0} \pmod 2.$$

Egy tétel

Tétel, Lucas 1878

Legyen $n = {n_s n_{s-1} \dots n_1 n_0}_{\mathbf{2}}$ és ${\ell_s \ell_{s-1} \dots \ell_1 \ell_0}_{\mathbf{2}}$. Ekkor

$$\binom{n}{\ell} \equiv \binom{n_s}{\ell_s} \cdot \binom{n_{s-1}}{\ell_{s-1}} \cdot \ldots \cdot \binom{n_1}{\ell_1} \cdot \binom{n_0}{\ell_0} \pmod 2.$$

$n_i, \ell_j \in \{0,1\}$, így $\binom{n_i}{\ell_j} \in \{\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{1}{0}, \binom{1}{1}\} = \{0,1\}$

Egy tétel

Tétel, Lucas 1878

Legyen $n = {n_s n_{s-1} \dots n_1 n_0}_{\mathbf{2}}$ és ${\ell_s \ell_{s-1} \dots \ell_1 \ell_0}_{\mathbf{2}}$. Ekkor

$$\binom{n}{\ell} \equiv \binom{n_s}{\ell_s} \cdot \binom{n_{s-1}}{\ell_{s-1}} \cdot \ldots \cdot \binom{n_1}{\ell_1} \cdot \binom{n_0}{\ell_0} \pmod 2.$$

$n_i, \ell_j \in \{0,1\}$, így $\binom{n_i}{\ell_j} \in \{\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{1}{0}, \binom{1}{1}\} = \{0,1\}$

Lucas tétele újból

$$\binom{{n_s n_{s-1} \dots n_1 n_0}_{\mathbf{2}}}{{\ell_s \ell_{s-1} \dots \ell_1 \ell_0}_{\mathbf{2}}}$$

akkor és csak akkor páros, ha egy alsó 1-est fed egy 0.

Példák

Példák

$$\binom{2015}{1365} = \binom{11111011111_2}{10101010101_2} \equiv \binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{0}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1} = 1 \pmod{2}.$$

Példák

$$\binom{2015}{1365} = \binom{11111011111_2}{10101010101_2} \equiv \binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{0}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1} = 1 \pmod 2.$$

$$\binom{2015}{682} = \binom{11111011111_2}{01010101010_2} \equiv \binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{0}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0} = 0 \pmod 2.$$

Példák

$$\binom{2015}{1365} = \binom{11111011111_2}{10101010101_2} \equiv \binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{0}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1} = 1 \pmod 2.$$

$$\binom{2015}{682} = \binom{11111011111_2}{01010101010_2} \equiv \binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{0}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0} = 0 \pmod 2.$$

FELADAT

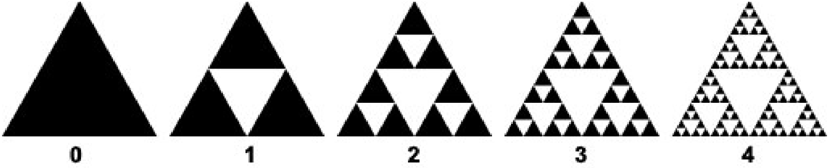
A Pascal-háromszög n indexű sorában lévő számok

$$\left\{\binom{n}{\ell}\right\}_{\ell=0}^{n}$$

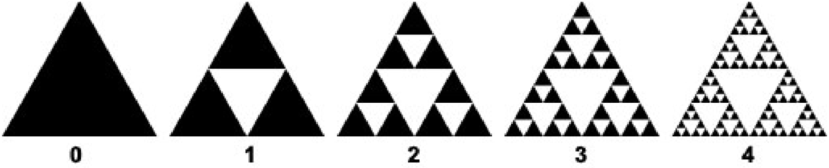
akkor és csak akkor mind páratlanok, ha n egy $2^k - 1 = 11\ldots11_2$ alakú szám.

Geometriai analóg: Sierpinski-háromszög

Geometriai analóg: Sierpinski-háromszög

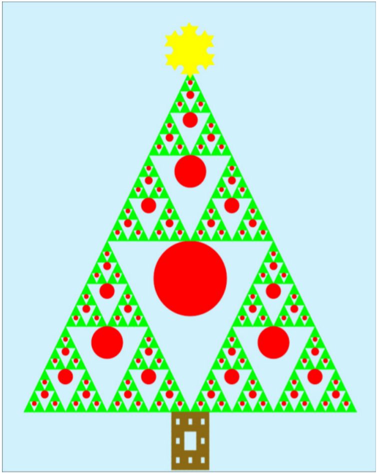


Geometriai analóg: Sierpinski-háromszög



Egy alkalmazás

Egy alkalmazás



Kellemes ünnepeket kíván a
Bolyai Intézet!

Mi is az a rekurzió? Douglas Hofstadter I.

Mi is az a rekurzió? Douglas Hofstadter I.

Akhilleusz: Ó, nagyon-nagyon köszönöm, Szellem. De kíváncsi lettem valamire. Mielőtt elmondanám a kívánságomat, elárulná, hogy ki – vagy mi – az ÚR?

Szellem: Szívesen. Az ÚR egy rövidítés., ami azt jelenti, hogy „ÚR Rajtunk". A „Rajtunk" szó itt a Szellemeket, Meta-Szellemeket, Meta-Meta-Szellemeket stb. jelenti. Típustalan szó.

Akhilleusz: De... de hogy szerepelhet az „ÚR" a saját rövidítésében? Ez értelmetlen!

Szellem: Ó, ön nem ismeri a rekurzív mozaikszavakat? Azt hittem, mindenki ismeri őket. Tudja, az „ÚR" azt jelenti, hogy „ÚR Rajtunk" , ami úgy fejthető ki, hogy „ÚR ÚR Rajtunk", ez viszont úgy fejthető ki, hogy „ÚR ÚR ÚR Rajtunk", ez viszont tovább bővíthető... Olyan messzire mehetünk, amennyire csak akarunk.

Akhilleusz: De ennek soha nincs vége!

Mi is az a rekurzió? Douglas Hofstadter II.

Mi is az a rekurzió? Douglas Hofstadter II.

Néha úgy tűnik, hogy a rekurzió nagyon közelről súrolja a paradoxont. Vannak például *rekurzív definíciók*. Egy ilyen definíció azt a benyomást keltheti a figyelmetlen szemlélőben, hogy *saját magával* definiálunk valamit. Ez körkörös lenne és végtelen regresszióhoz vezetne, ha ugyan nem valódi paradoxonhoz. Valójában egy rekurzív definíció (helyes megfogalmazás esetén) sohasem vezet végtelen regresszióhoz vagy paradoxonhoz. Ez azért van így, mert a rekurzív definíció sohasem saját magával definiál valamit, hanem saját maga *egyszerűbb változataival*. Hogy ezen mit értek, az hamarosan világosabb lesz, ha már mutattam néhány példát a rekurzív definíciókra.

D.R. Hoftadter – *Gödel, Esher, Bach*, Typotex, Budapest 1998. (113., 127., 137-138. oldal)

Hofstadter Q-sorozat

Egy kaotikus sorozat

A számelméleti rekurzióra adott utolsó példánk egy kis rejtély. Vizsgáljuk meg a következő rekurzív függvénydefiníciót:

$$Q(n) = Q(n - Q(n-1)) + Q(n - Q(n-2)) \qquad \text{ha } n>2$$

$$Q(1) = Q(2) = 1$$

Egy kaotikus sorozat

A számelméleti rekurzióra adott utolsó példánk egy kis rejtély. Vizsgáljuk meg a következő rekurzív függvénydefiníciót:

$$Q(n) = Q(n - Q(n-1)) + Q(n - Q(n-2)) \qquad \text{ha } n>2$$

$$Q(1) = Q(2) = 1$$

$$1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 10, 9, 10, \ldots$$

Hofstadter Q-sorozat

Hofstadter Q-sorozat

Ez annyiban hasonlít a Fibonacci-féle definícióhoz, hogy minden új érték az előző két érték összege – de nem a *közvetlenül* megelőző két értéké. A közvetlenül megelőző két érték csupán azt közli, hogy *milyen messze kell visszalépni* ahhoz, hogy megkapjuk azokat az új számokat, amelyek összeadásával az új érték megkapható! Az első 17 Q-szám a következő:

$$1,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 5,\quad 6,\quad 6,\quad 6,\quad 8,\quad 8,\quad 8,\quad 10,\quad \underbrace{9,\quad 10,}_{\text{milyen messze mozogjunk balra}} \ldots$$

$$5 + 6 = \underbrace{11}_{\text{új tag}}$$

Ha a következő tagot szeretnénk megkapni, akkor (a három ponttól) balra kell mennünk 10, illetve 9 taggal; ekkor az 5-höz és a 6-hoz érünk, ahogy ezt a nyilak mutatják. Összegük – 11 – adja az új értéket, Q(18)-at. Furcsa ez az eljárás, ahol az ismert Q-számok listáját használjuk fel önmaga kiterjesztéséhez. Az eredményül kapott sorozat enyhén szólva szeszélyes.

A matematikában már nincs új?

EGY PROBLÉMA

Jól definiált a Q-sorozat?

Definíció, $\{T(n)\}_{n=0}^{\infty}$ Conway $10.000-os sorozata

$$T(1) = T(2) = 1,$$

Ha $T(n)$-hez van két megelőző tag, akkor

$$T(n) = T(T(n-1)) + T(n - T(n-1)).$$

Definíció, $\{T(n)\}_{n=0}^{\infty}$ Conway $10.000-os sorozata

$$T(1) = T(2) = 1,$$

Ha $T(n)$-hez van két megelőző tag, akkor

$$T(n) = T(T(n-1)) + T(n - T(n-1)).$$

$$1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 7, \ldots$$

Conway tétele

(i) $T(n+1) - T(n) \in \{0, 1\}$, speciálisan $T(n) \nearrow$.

(ii)
$$\frac{T(n)}{n} \to \frac{1}{2}.$$

Conway tétele

(i) $T(n+1) - T(n) \in \{0, 1\}$, speciálisan $T(n) \nearrow$.

(ii)
$$\frac{T(n)}{n} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Conway kérdése

Mi az a legkisebb τ, hogy $\tau \leq n$ esetén

$$\left| T(n) - \frac{n}{2} \right| \leq \frac{1}{20}?$$

Egy szelídebb meta-Fibonacci sorozat

Definíció

$$m(1) = 1, m(2) = 2,$$

$$m(n) = m(n - m(n-1)) + m(n-1-m(n-2)).$$

Egy szelídebb meta-Fibonacci sorozat

Definíció

$$m(1) = 1, m(2) = 2,$$

$$m(n) = m(n - m(n-1)) + m(n - 1 - m(n-2)).$$

$$1, 2,$$

Egy szelídebb meta-Fibonacci sorozat

Definíció

$$m(1) = 1, m(2) = 2,$$

$$m(n) = m(n - m(n-1)) + m(n - 1 - m(n-2)).$$

$$1, 2, 2,$$

Definíció

$$m(1) = 1, m(2) = 2,$$

$$m(n) = m(n - m(n-1)) + m(n - 1 - m(n-2)).$$

$$1, 2, 2, 3,$$

Egy szelídebb meta-Fibonacci sorozat

Definíció

$$m(1) = 1, m(2) = 2,$$

$$m(n) = m(n - m(n - 1)) + m(n - 1 - m(n - 2)).$$

$1, 2, 2, 3, 4,$

Definíció

$$m(1) = 1, m(2) = 2,$$

$$m(n) = m(n - m(n-1)) + m(n - 1 - m(n-2)).$$

$$1, 2, 2, 3, 4, 4,$$

Egy szelídebb meta-Fibonacci sorozat

Definíció

$$m(1) = 1, m(2) = 2,$$

$$m(n) = m(n - m(n-1)) + m(n - 1 - m(n-2)).$$

$$1, 2, 2, 3, 4, 4, 4,$$

Egy szelídebb meta-Fibonacci sorozat

Definíció

$$m(1) = 1, m(2) = 2,$$

$$m(n) = m(n - m(n - 1)) + m(n - 1 - m(n - 2)).$$

$1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5,$

Egy szelídebb meta-Fibonacci sorozat

Definíció

$$m(1) = 1, m(2) = 2,$$

$$m(n) = m(n - m(n-1)) + m(n - 1 - m(n-2)).$$

$$1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6,$$

Egy szelídebb meta-Fibonacci sorozat

Definíció

$$m(1) = 1, m(2) = 2,$$

$$m(n) = m(n - m(n-1)) + m(n - 1 - m(n-2)).$$

$1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6,$

Egy szelídebb meta-Fibonacci sorozat

Definíció

$$m(1) = 1, m(2) = 2,$$

$$m(n) = m(n - m(n-1)) + m(n-1-m(n-2)).$$

1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7,

Egy szelídebb meta-Fibonacci sorozat

Definíció

$$m(1) = 1, m(2) = 2,$$

$$m(n) = m(n - m(n-1)) + m(n-1-m(n-2)).$$

1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8,

Egy szelídebb meta-Fibonacci sorozat

Definíció

$$m(1) = 1, m(2) = 2,$$

$$m(n) = m(n - m(n-1)) + m(n - 1 - m(n-2)).$$

$$1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, \ldots$$

And now for something completely different!

FELADAT

Mi 2 legmagasabb kitevős hatványa, amivel osztható a 2015! szám?

And now for something completely different!

FELADAT

Mi 2 legmagasabb kitevős hatványa, amivel osztható a 2015! szám?

FELADAT

Mi 2 legmagasabb kitevős hatványa, amivel osztható az n! szám?

And now for something completely different!

FELADAT

Mi 2 legmagasabb kitevős hatványa, amivel osztható a 2015! szám?

FELADAT

Mi 2 legmagasabb kitevős hatványa, amivel osztható az n! szám?

FELADAT

Mi 2 legmagasabb kitevős hatványa, amivel osztható a $(2n)$! szám?

Inverz probléma

Inverz probléma

FELADAT

Adott k kitevő. Határozzuk meg azt a legkisebb n-et, hogy

$$2^k | (2n)!$$

teljesüljön.

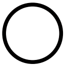
FELADAT

Adott k kitevő. Határozzuk meg azt a legkisebb n-et, hogy

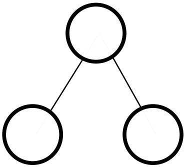
$$2^k | (2n)!$$

teljesüljön.

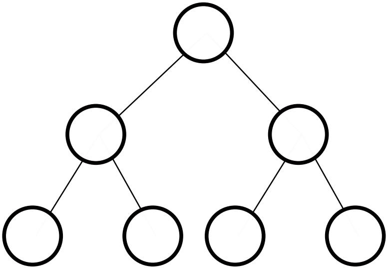
k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2n	2	4	4	6	8	8	8	10	12	12	14	16
n	1	2	2	3	4	4	4	5	6	6	7	8



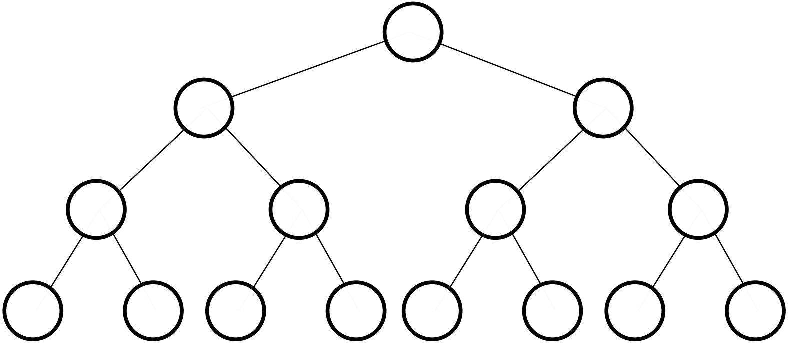
Egy fa



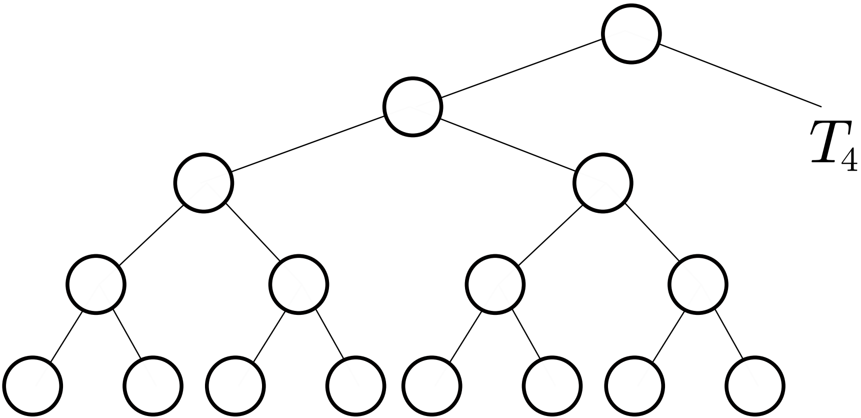
Egy fa



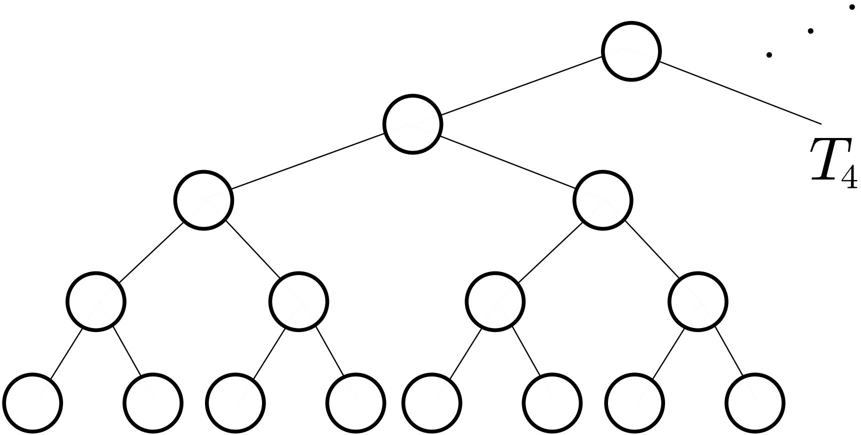
Egy fa



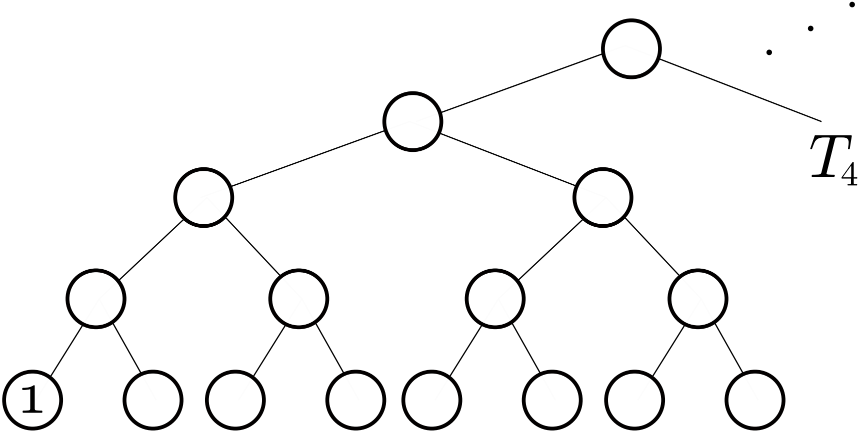
Egy fa



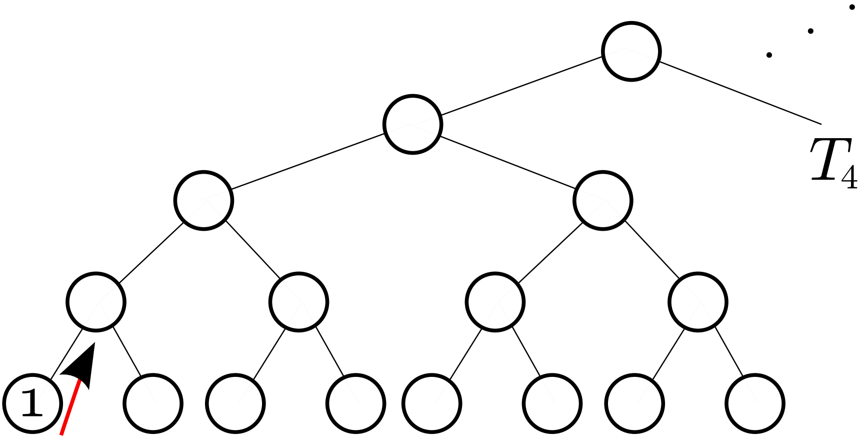
Egy fa



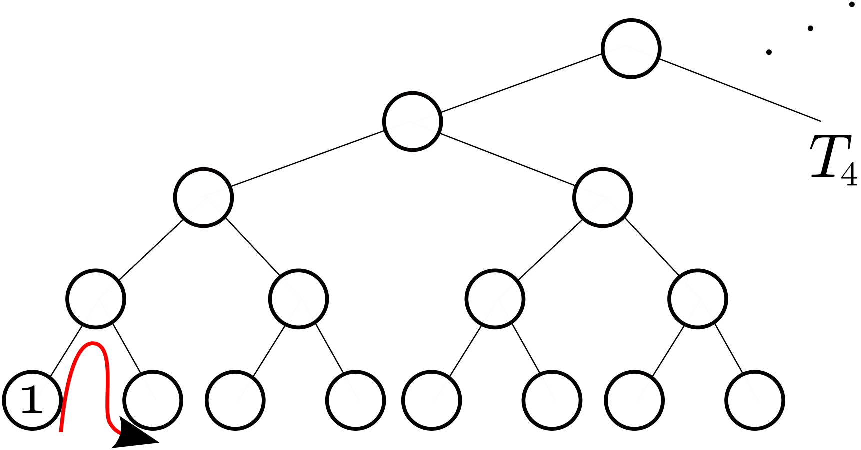
Egy fa

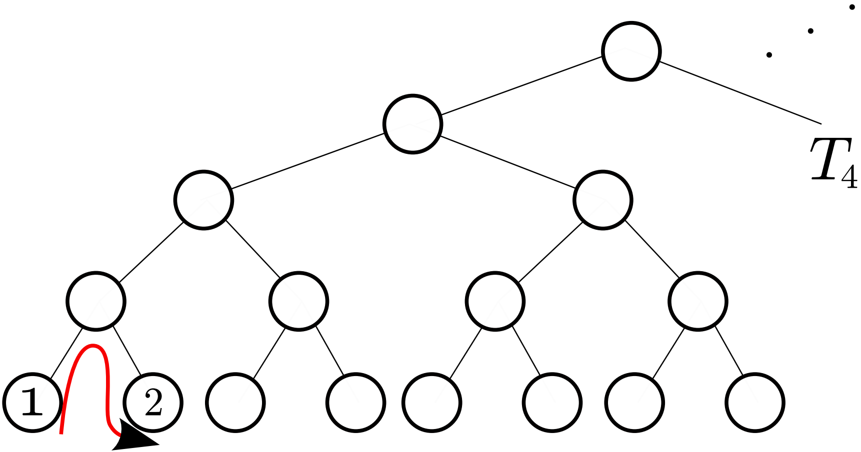


Egy fa



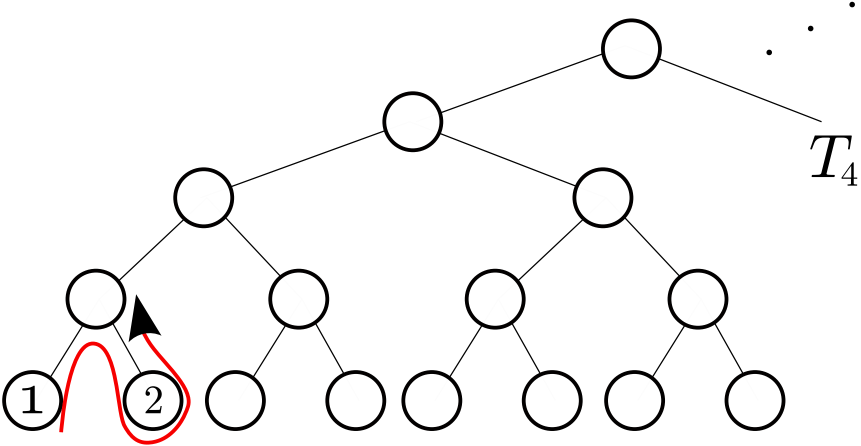
Egy fa



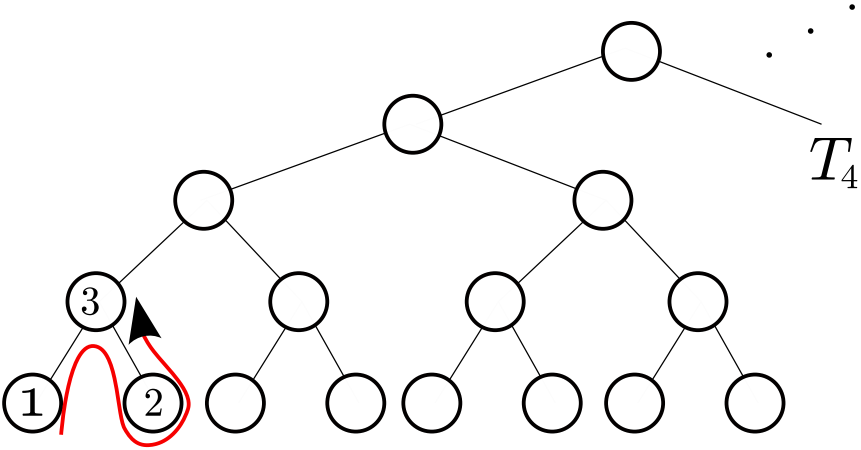


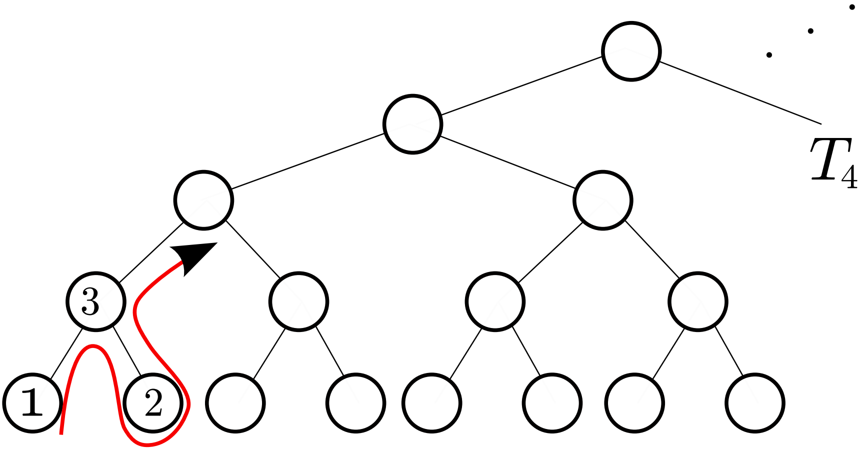
T_4
1
2

Egy fa

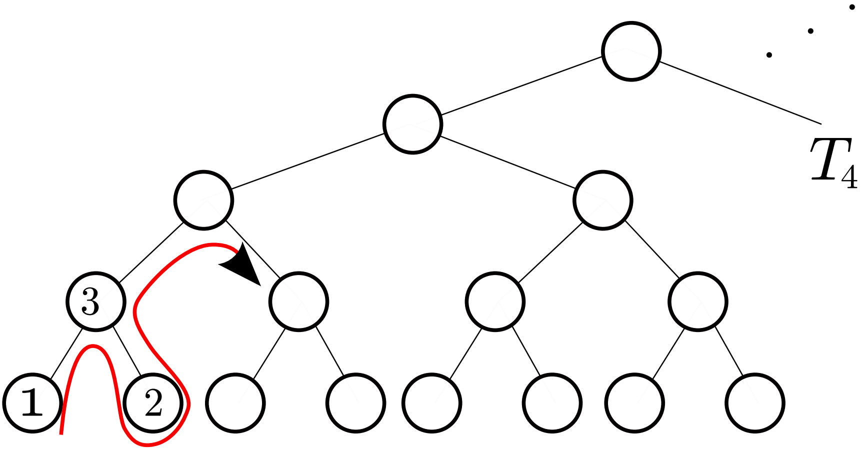


Egy fa

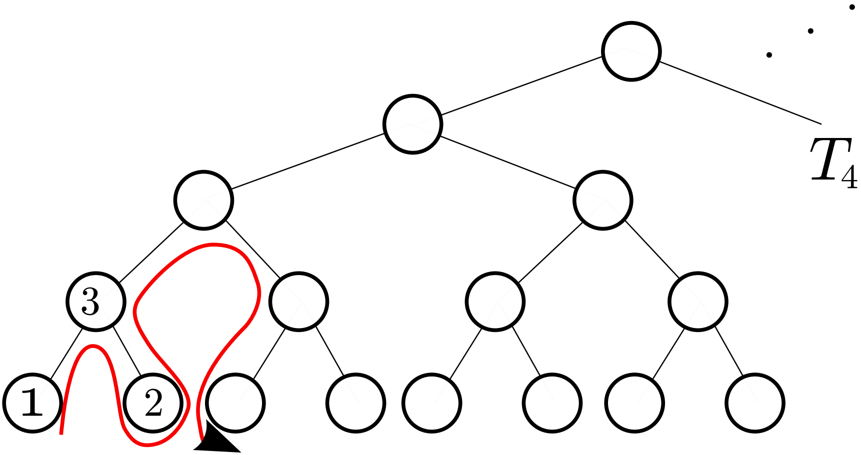



3
1
2
T_4

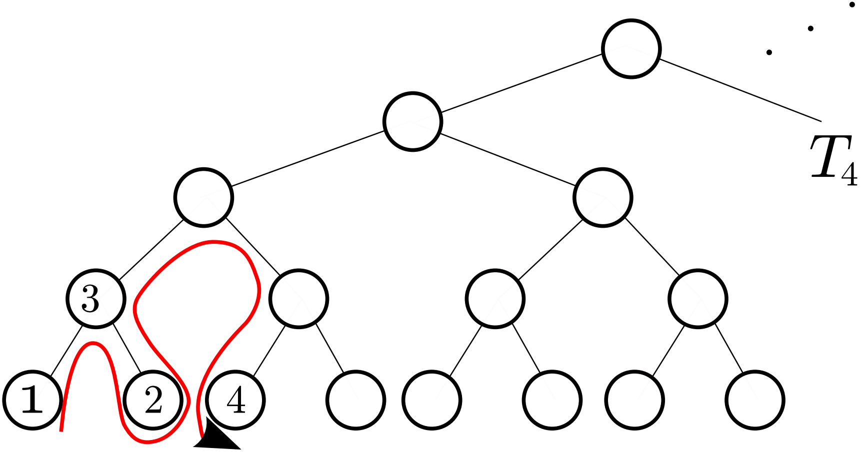
Egy fa



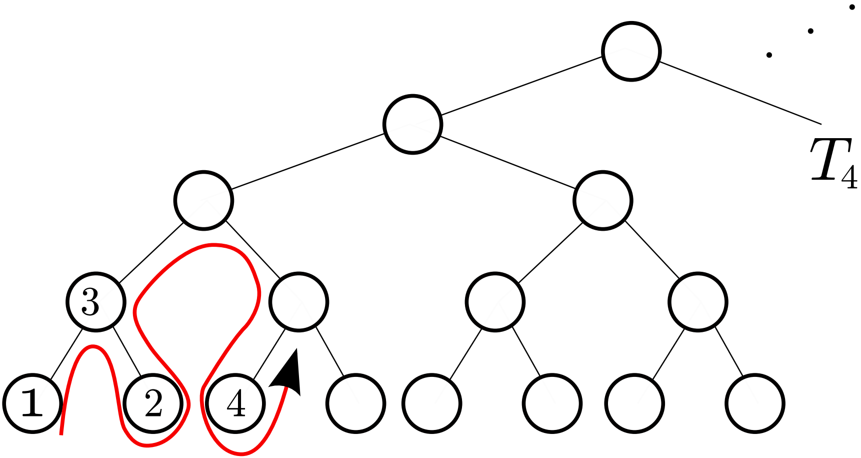
Egy fa



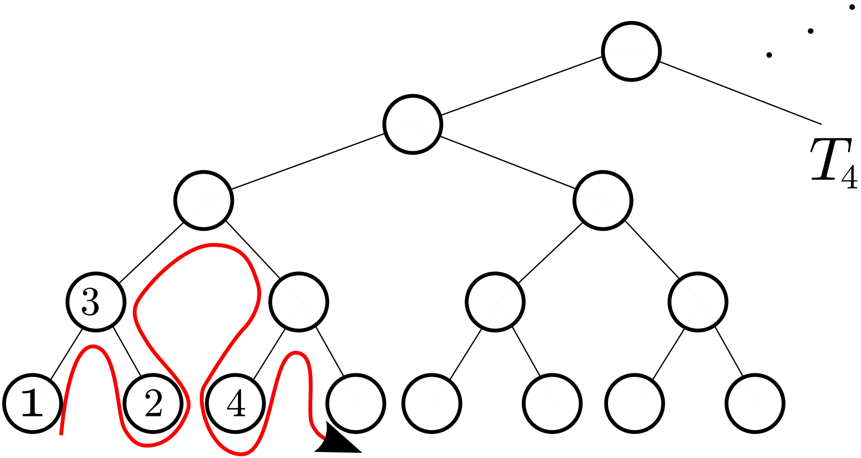
Egy fa



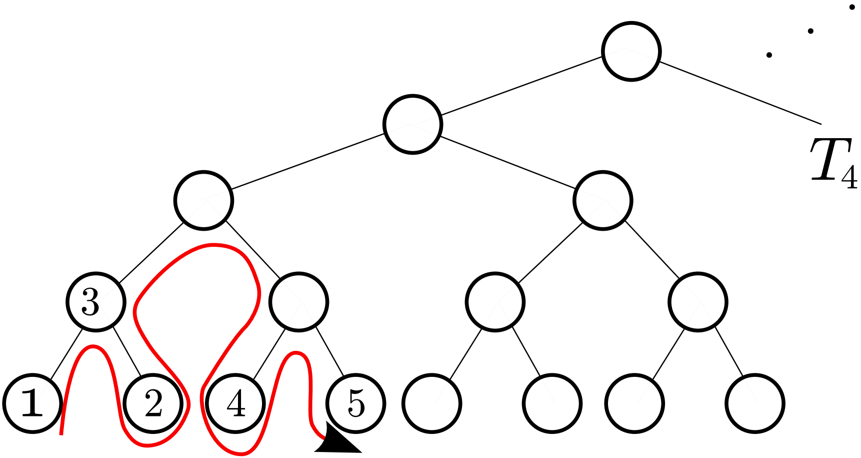
Egy fa



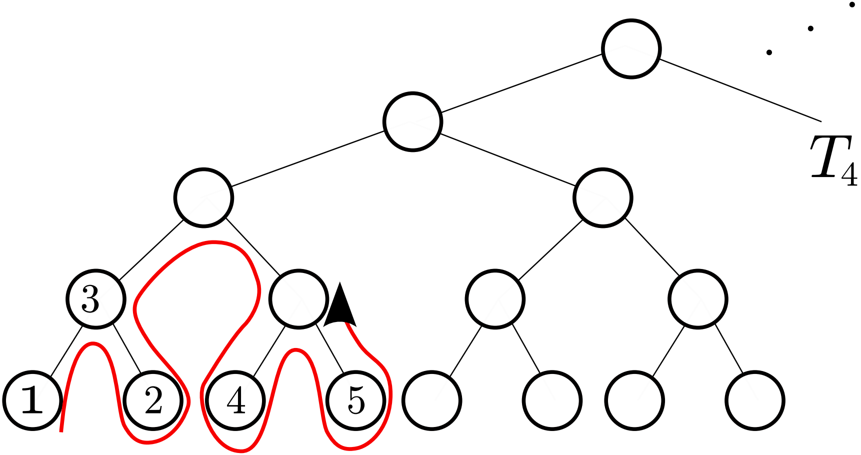
Egy fa



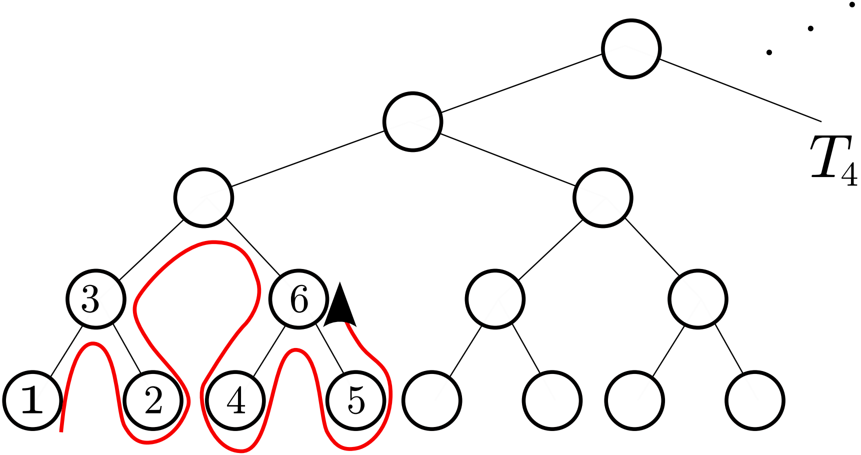
Egy fa



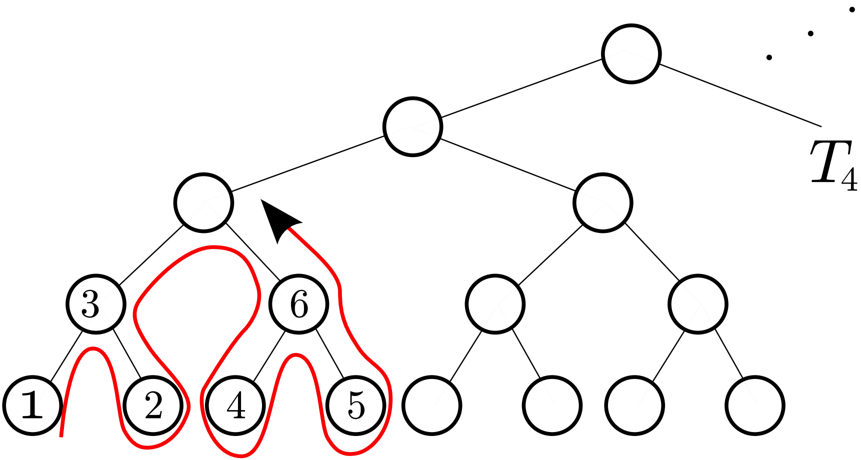
Egy fa



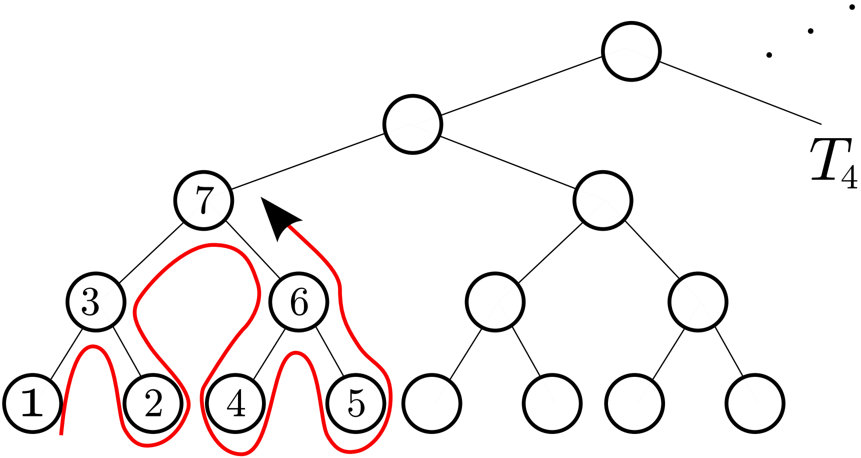
Egy fa



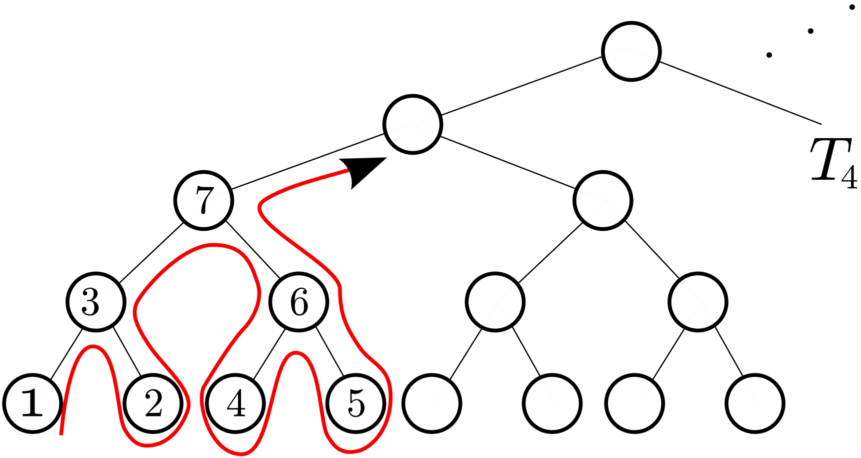
Egy fa



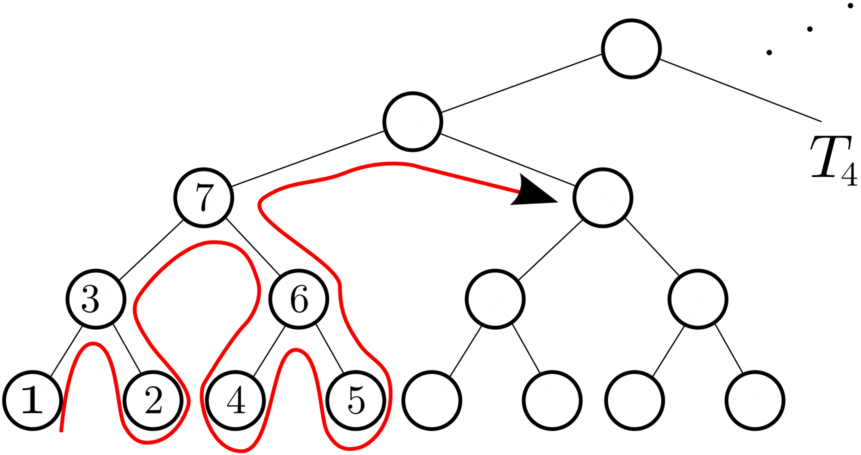
Egy fa



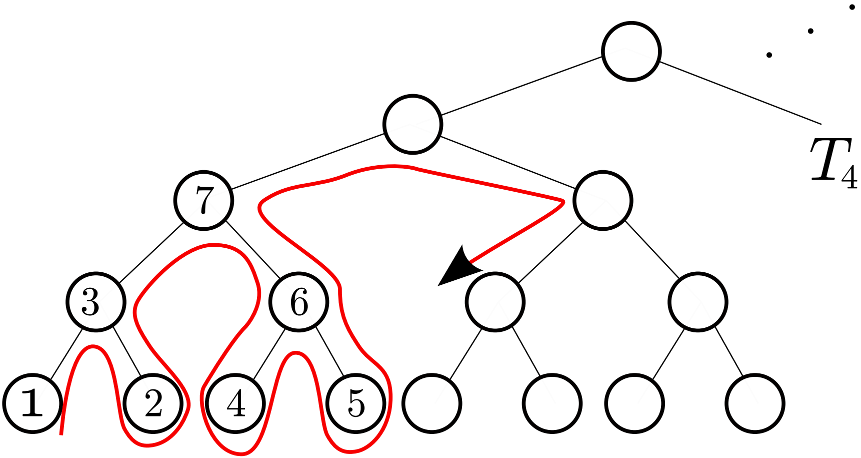
Egy fa



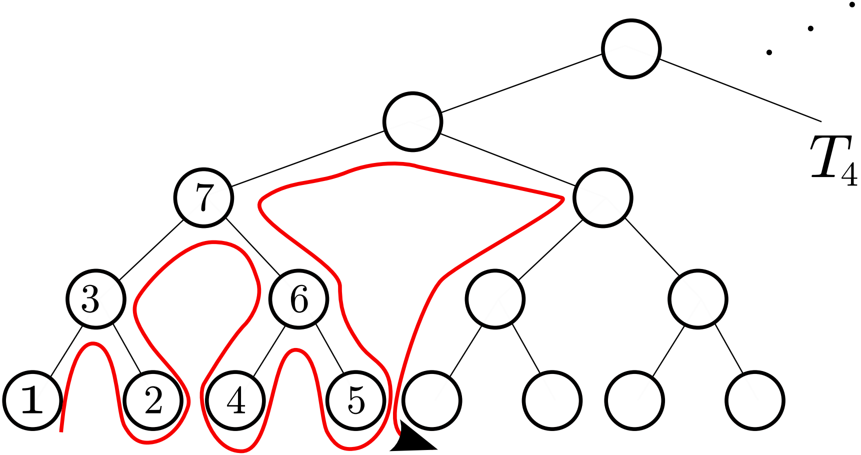
Egy fa

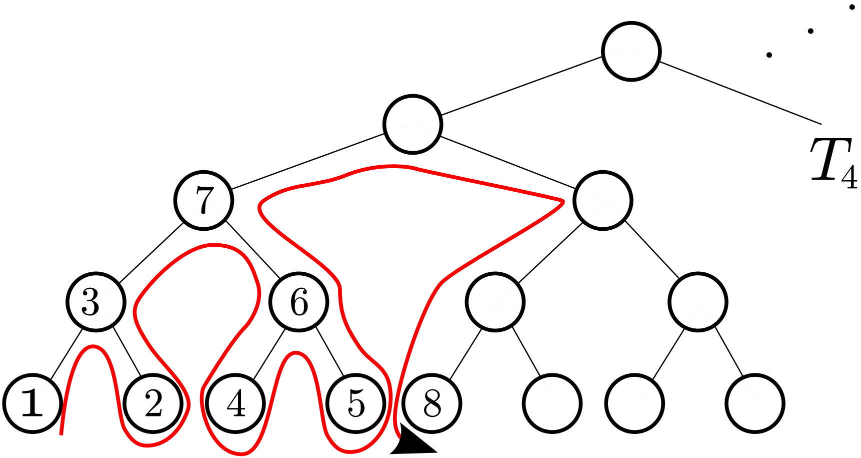


Egy fa

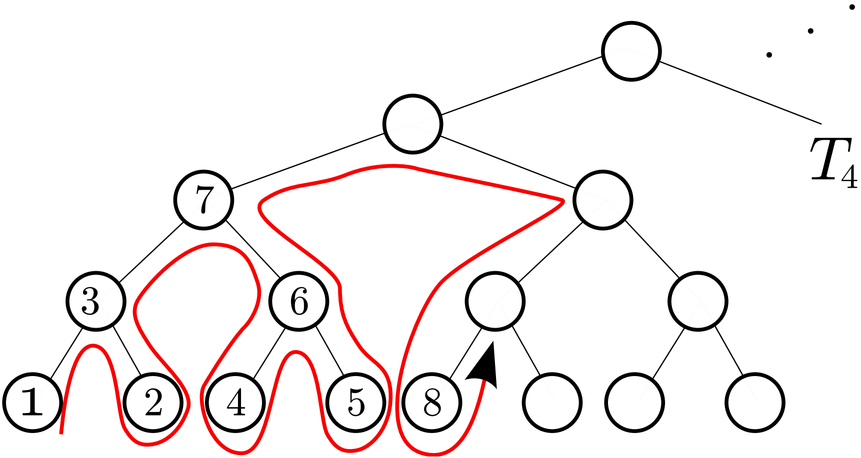


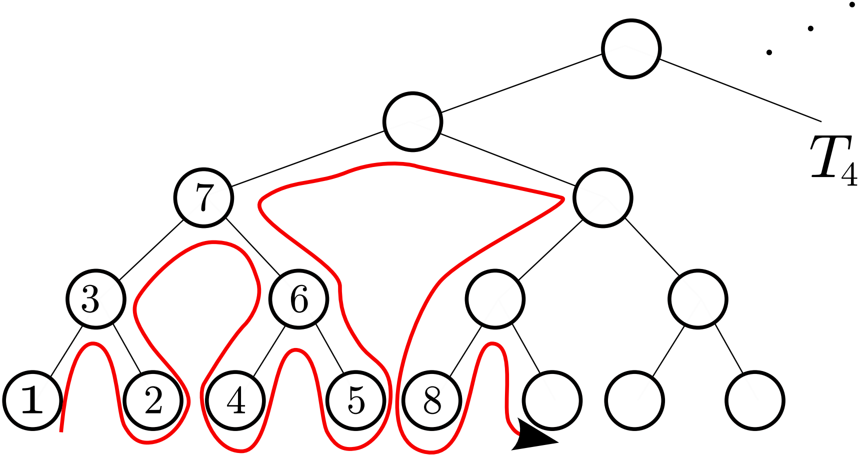
Egy fa



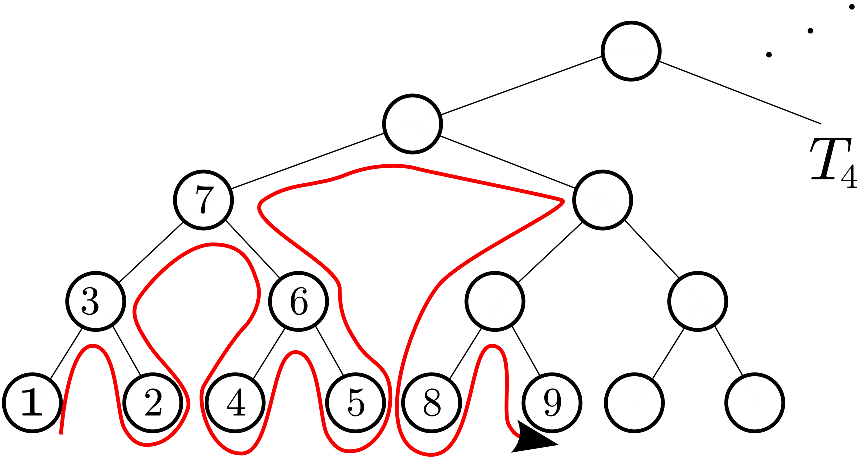

7
3
6
1
2
4
5
8
T_4

Egy fa

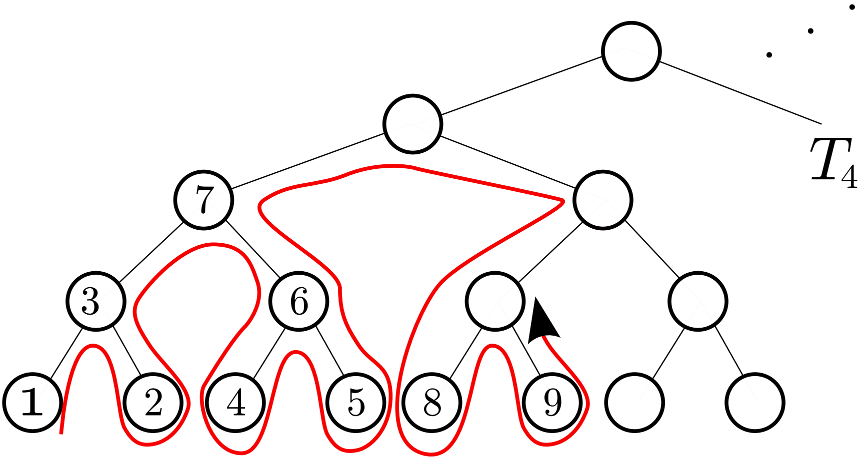


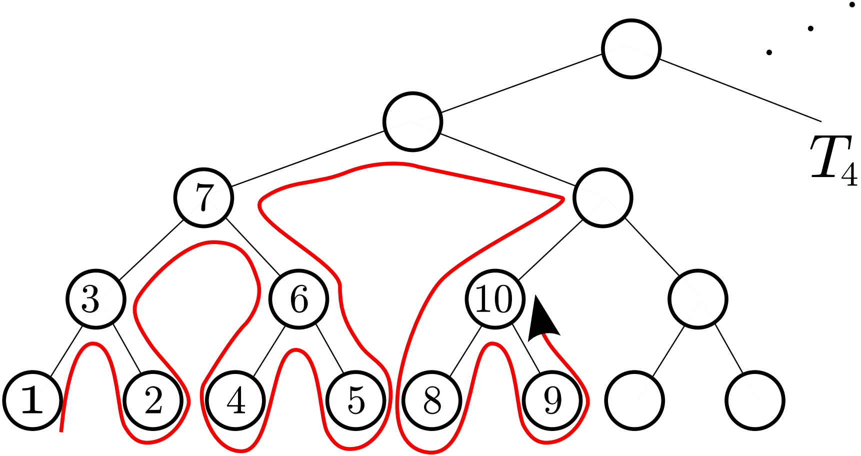

7
3
6
1
2
4
5
8
T_4

Egy fa

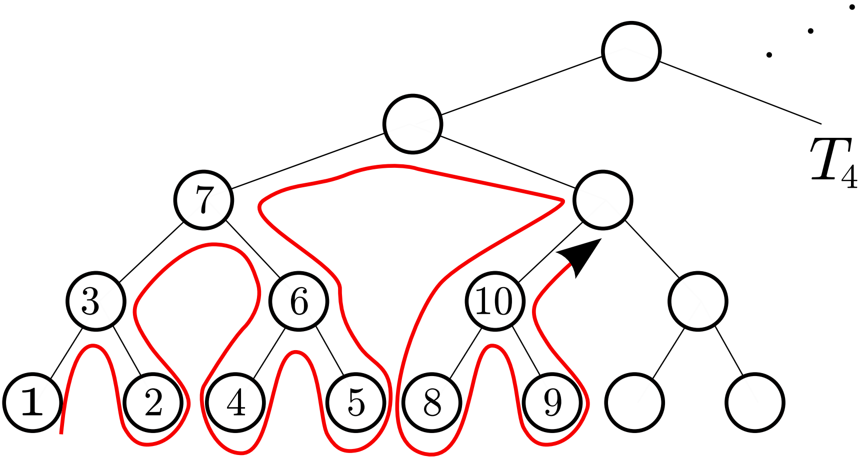


Egy fa

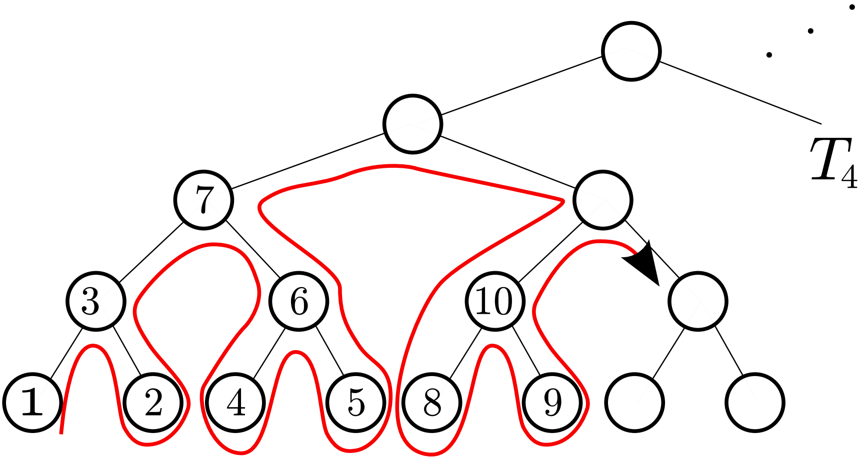



7
3
6
10
1
2
4
5
8
9
T_4

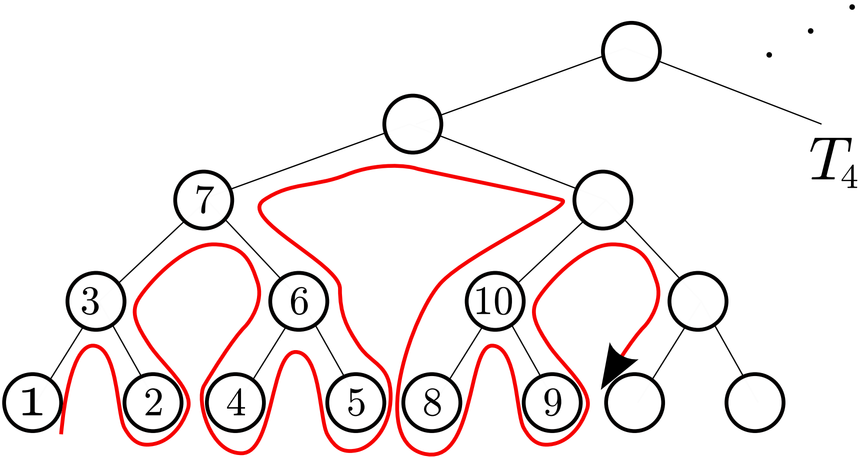
Egy fa



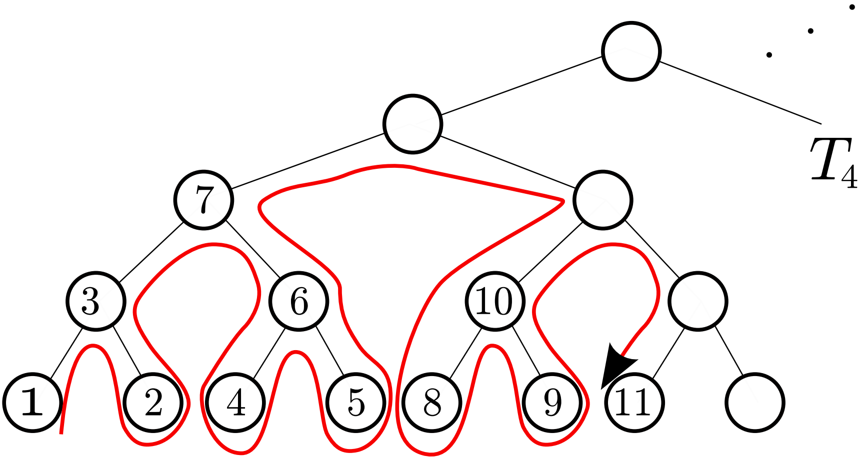
Egy fa



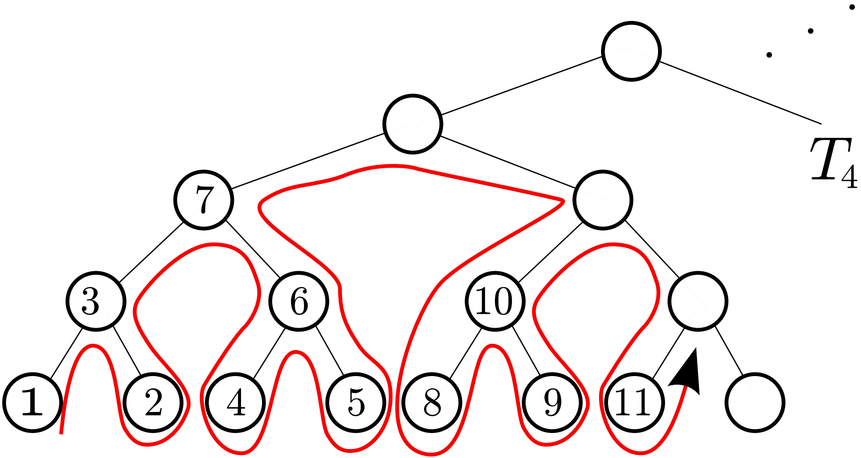
Egy fa



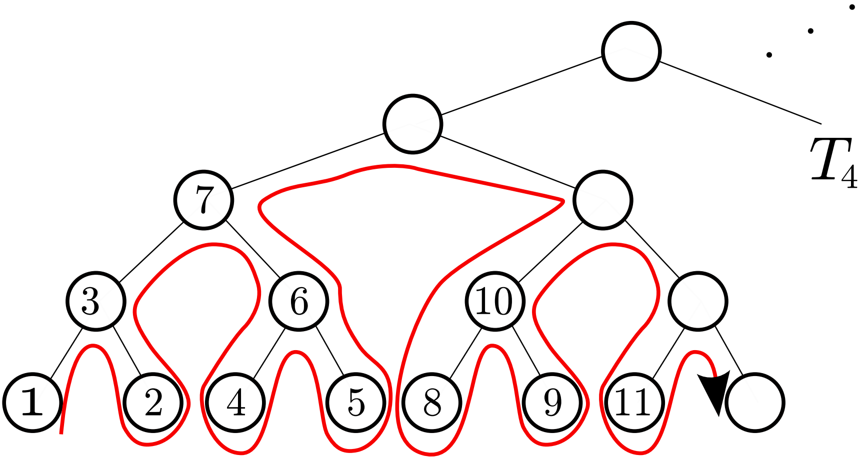
Egy fa



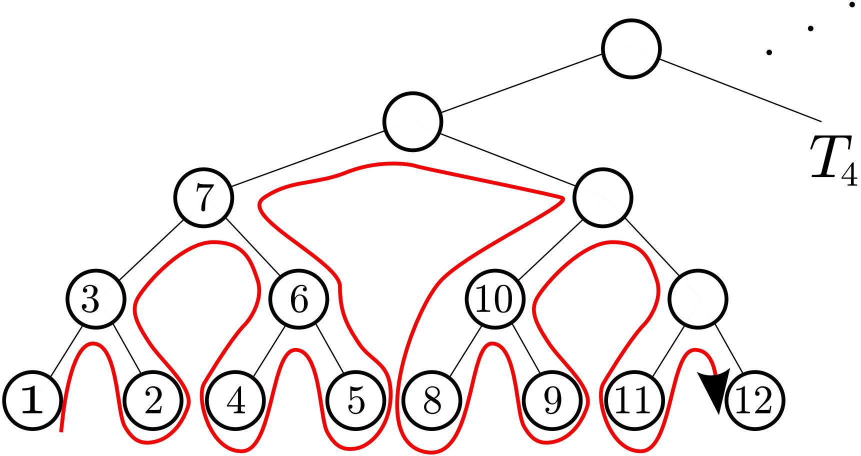
Egy fa



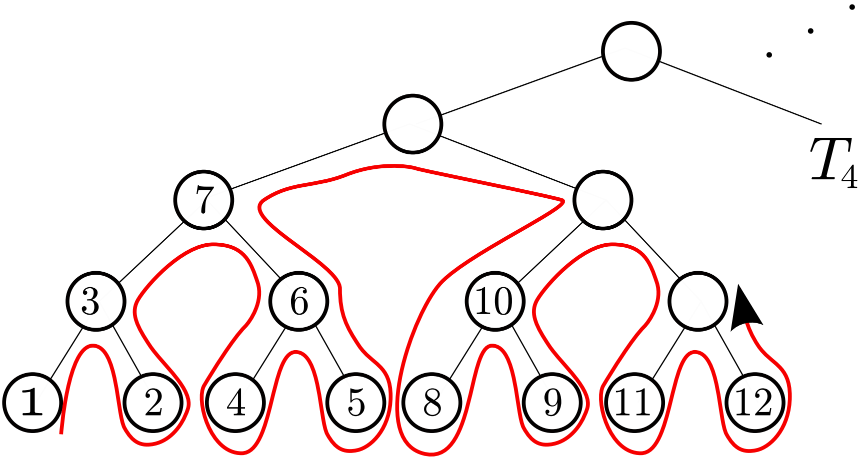
Egy fa



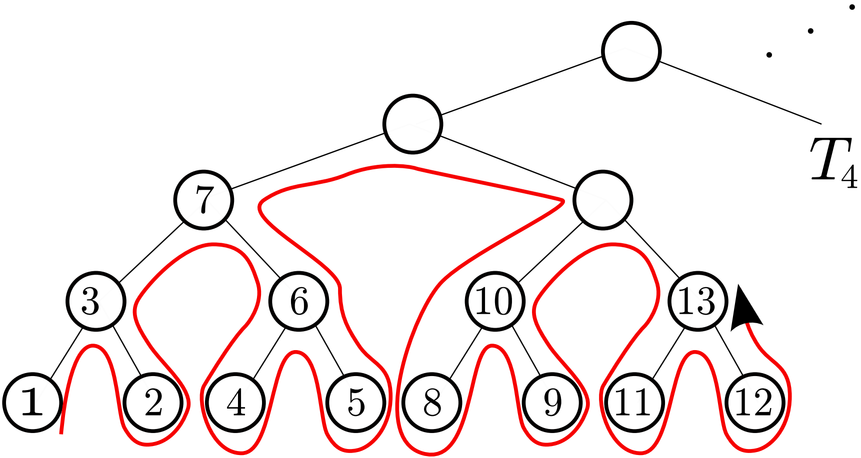
Egy fa



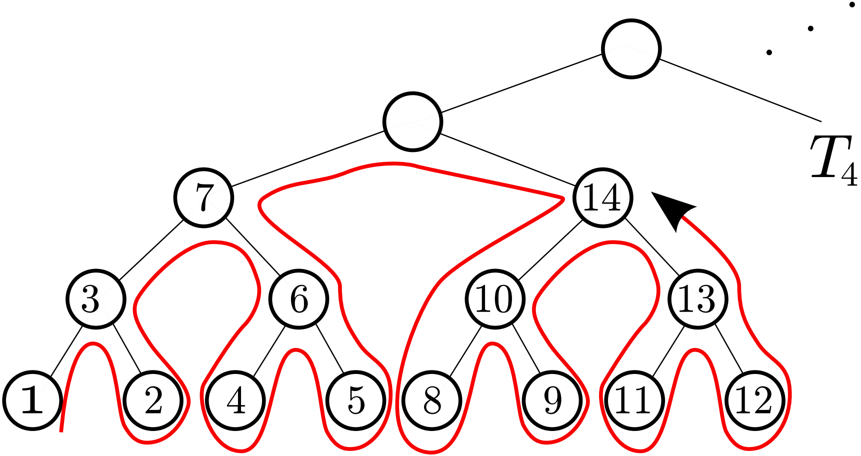
Egy fa



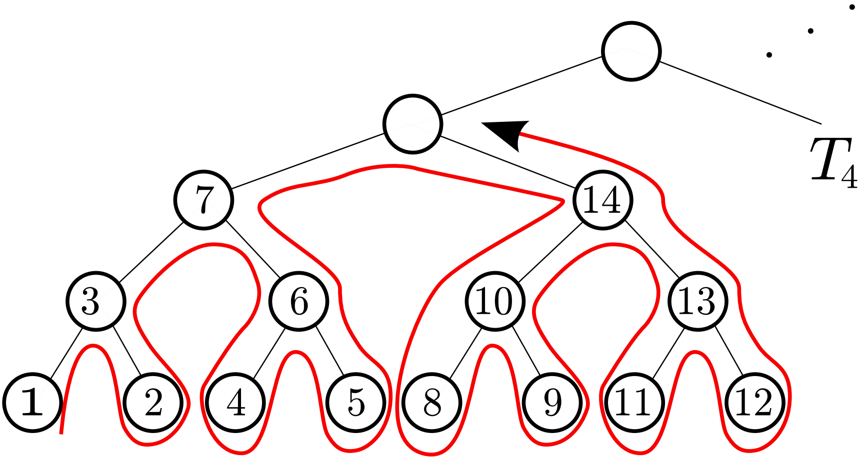
Egy fa

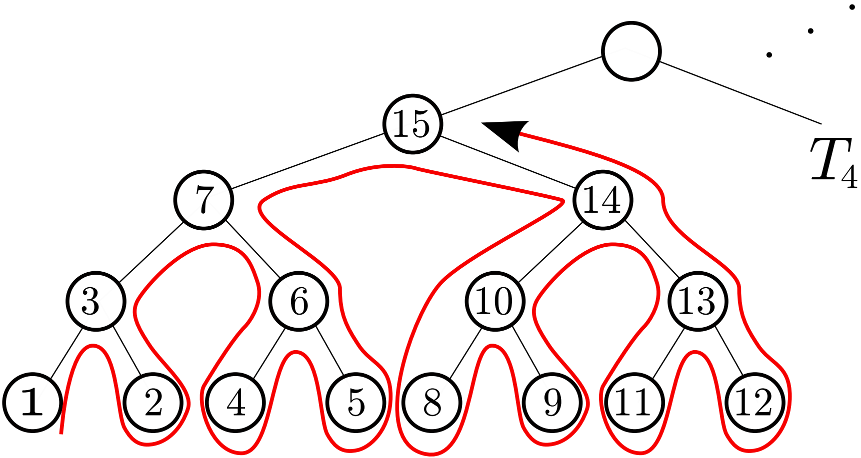


Egy fa

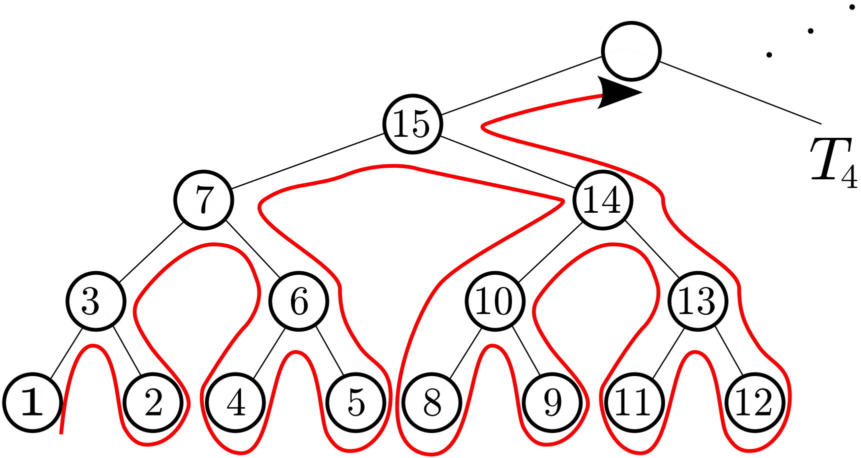


Egy fa

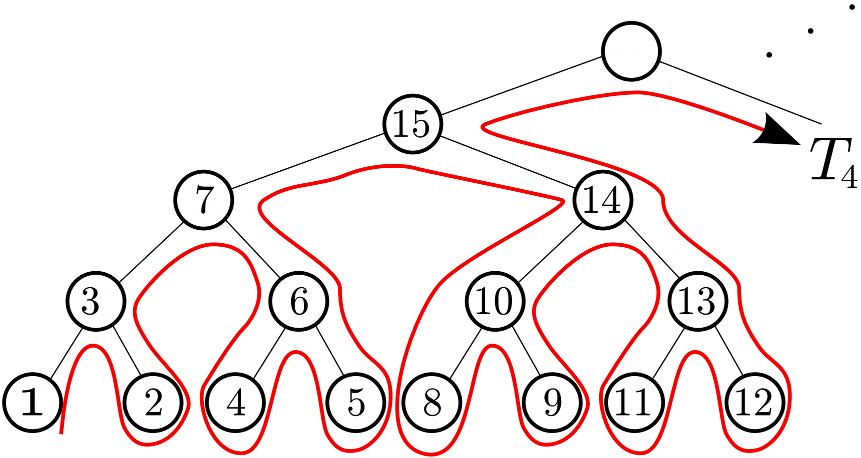



15
7
14
3
6
10
13
1
2
4
5
8
9
11
12
T_4

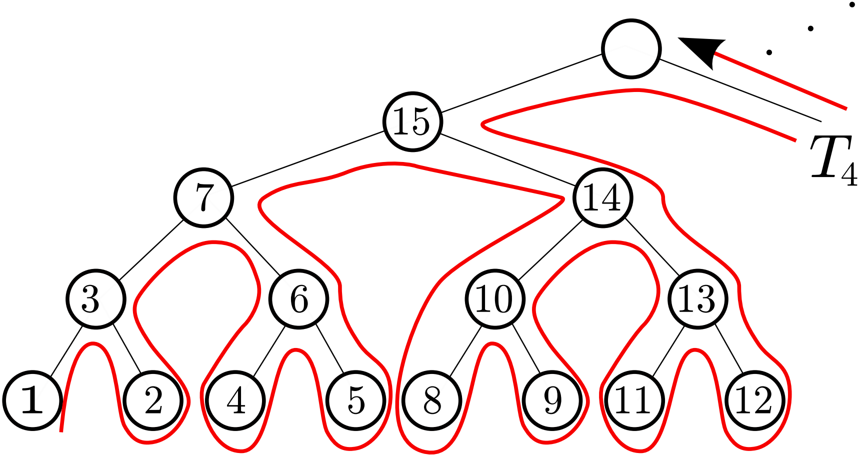
Egy fa



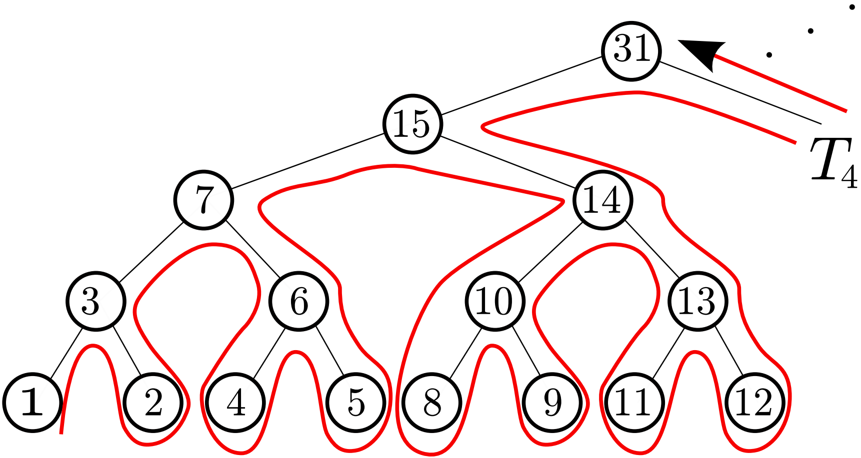
Egy fa



Egy fa



Egy fa



Egy újabb(?) függvény

Egy újabb(?) függvény

Definíció

Legyen $M(k)$ a fenti számozott fa $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$ csúcsai alatt lévő levelek száma.

Egy újabb(?) függvény

Definíció

Legyen $M(k)$ a fenti számozott fa $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$ csúcsai alatt lévő levelek száma.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
M(k)	1	2	2	3	4	4	4	5	6	6	7	8

Minden út Rómába vezet

FELADAT

(a) A rekurzióval definiált $m(n)$ sorozat,

(b) az inverz probléma megoldása,

(c) a fával definiált $M(n)$ sorozat

UGYANAZ!

Vissza a számrendszerekhez

FELADAT

Minden természetes szám egyértelműen írható fel

$$\gamma_n(2^n-1)+\gamma_{n-1}(2^{n-1}-1)+\ldots+\gamma_i(2^i-1)+\ldots+\gamma_1(2^1-1)$$

alakban, ahol

- $\gamma_i\in\{0,1,2\}$,
- $\gamma_n\in\{1,2\}/\gamma_n\neq 0$,
- $\gamma_i=2$ esetén $0=\gamma_{i-1}=\gamma_{i-2}=\ldots$.

Vissza Rómába

FELADAT

Legyen
$k=\gamma_n(2^n-1)+\gamma_{n-1}(2^{n-1}-1)+\ldots+\gamma_i(2^i-1)+\ldots+\gamma_1(2^1-1)$
az előző „fura” számrendszerben. Azaz

$$k=\gamma_n\gamma_{n-1}\gamma_{n-2}\cdots\gamma_2\gamma_{1\,\text{fura}}.$$

Ekkor

$$M(k)=\gamma_n\gamma_{n-1}\gamma_{n-2}\cdots\gamma_2\gamma_{1\,\mathbf{2}}.$$

FELADAT

Legyen
$k = \gamma_n(2^n - 1) + \gamma_{n-1}(2^{n-1} - 1) + \ldots + \gamma_i(2^i - 1) + \ldots + \gamma_1(2^1 - 1)$
az előző „fura” számrendszerben. Azaz

$$k = \gamma_n\gamma_{n-1}\gamma_{n-2}\cdots\gamma_2\gamma_1{}_{\mathsf{fura}}.$$

Ekkor

$$M(k) = \gamma_n\gamma_{n-1}\gamma_{n-2}\cdots\gamma_2\gamma_1{}_{\mathbf{2}}.$$

$$2015 = 1023 + 511 + 255 + 127 + 63 + 31 + 3 + 2 \cdot 1.$$

FELADAT

Legyen
$k = \gamma_n(2^n - 1) + \gamma_{n-1}(2^{n-1} - 1) + \ldots + \gamma_i(2^i - 1) + \ldots + \gamma_1(2^1 - 1)$
az előző „fura” számrendszerben. Azaz

$$k = {\gamma_n\gamma_{n-1}\gamma_{n-2}\cdots\gamma_2\gamma_1}_{\text{fura}}.$$

Ekkor

$$M(k) = {\gamma_n\gamma_{n-1}\gamma_{n-2}\cdots\gamma_2\gamma_1}_{\mathbf{2}}.$$

$$2015 = 1023 + 511 + 255 + 127 + 63 + 31 + 3 + 2 \cdot 1.$$

$$2015 = 1111110012_{\text{fura}}.$$

FELADAT

Legyen
$k = \gamma_n(2^n - 1) + \gamma_{n-1}(2^{n-1} - 1) + \ldots + \gamma_i(2^i - 1) + \ldots + \gamma_1(2^1 - 1)$
az előző „fura" számrendszerben. Azaz

$$k = {\gamma_n\gamma_{n-1}\gamma_{n-2}\cdots\gamma_2\gamma_1}_{\mathsf{fura}}.$$

Ekkor

$$M(k) = {\gamma_n\gamma_{n-1}\gamma_{n-2}\cdots\gamma_2\gamma_1}_{\mathbf{2}}.$$

$$2015 = 1023 + 511 + 255 + 127 + 63 + 31 + 3 + 2 \cdot 1.$$

$$2015 = 1111110012_{\mathsf{fura}}.$$

$$M(2015) = 1111110012_2 = 1012.$$

FELADAT

Legyen
$k = \gamma_n(2^n - 1) + \gamma_{n-1}(2^{n-1} - 1) + \ldots + \gamma_i(2^i - 1) + \ldots + \gamma_1(2^1 - 1)$
az előző „fura” számrendszerben. Azaz

$$k = \gamma_n\gamma_{n-1}\gamma_{n-2}\cdots\gamma_2\gamma_{1\,\mathrm{fura}}.$$

Ekkor

$$M(k) = \gamma_n\gamma_{n-1}\gamma_{n-2}\cdots\gamma_2\gamma_{1\,\mathbf{2}}.$$

$$2015 = 1023 + 511 + 255 + 127 + 63 + 31 + 3 + 2 \cdot 1.$$

$$2015 = 1111110012_{\mathrm{fura}}.$$

$$M(2015) = 1111110012_2 = 1012.$$

$$2^{2015} | 2024! \qquad DE \qquad 2^{2015} \not| 2023!.$$

Feladat

FELADAT

Igazoljuk, hogy

(i)

$$m(n) \geq \frac{n}{2},$$

(ii)

$$\left| m(n) - \frac{n}{2} \right| \leq \frac{\log_2 n}{2},$$

feltéve, hogy n „nagy”.

Mi az „adószámuk” ezeknek a sorozatoknak?

Mi az „adószámuk” ezeknek a sorozatoknak?

Hofstadter Q: A005185

Mi az „adószámuk” ezeknek a sorozatoknak?

Hofstadter Q: A005185

Conway \$10.000: A004001

Mi az „adószámuk” ezeknek a sorozatoknak?

Hofstadter Q: A005185

Conway \$10.000: A004001

$m(n)$: A046699

Mi az „adószámuk” ezeknek a sorozatoknak?

Hofstadter Q: A005185

Conway \$10.000: A004001

$m(n)$: A046699

Az inverz probléma megoldása: A007843

Mi az „adószámuk” ezeknek a sorozatoknak?

Hofstadter Q: A005185

Conway \$10.000: A004001

$m(n)$: A046699

Az inverz probléma megoldása: A007843

Online Encyclopedia of Integer Sequences

Neil Sloan: OEIS

http://oeis.org/

Szünet: Nagy számokról

Szünet: Nagy számokról

- A legnagyobb címletű pénz.

- A legnagyobb címletű pénz.

- A legnagyobb címletű pénz.

10^{20} pengő (1946).

- A legnagyobb címletű pénz.

10^{20} pengő (1946).

- Eddington-szám: A protonok száma az univerzumban.

- A legnagyobb címletű pénz.

10^{20} pengő (1946).

- Eddington-szám: A protonok száma az univerzumban.
  "I believe there are 15,747,724,136,275,002,577,605,653,961,181,555,468,044, 717,914,527,116,709,366,231,425,076,185,631,031,296 protons in the universe and the same number of electrons. (1938)"

Szünet: Nagy számokról

- A legnagyobb címletű pénz.

10^{20} pengő (1946).

- Eddington-szám: A protonok száma az univerzumban.
  "I believe there are
  15,747,724,136,275,002,577,605,653,961,181,555,468,044,
  717,914,527,116,709,366,231,425,076,185,631,031,296
  protons in the universe and the same number of electrons.
  (1938)"
- A matematikusok tudnak ennél is nagyobbat:

- A legnagyobb címletű pénz.

10^{20} pengő (1946).

- Eddington-szám: A protonok száma az univerzumban.
  "I believe there are
  15,747,724,136,275,002,577,605,653,961,181,555,468,044,
  717,914,527,116,709,366,231,425,076,185,631,031,296
  protons in the universe and the same number of electrons.
  (1938)"
- A matematikusok tudnak ennél is nagyobbat:

$$10^{100}$$

Kasner (1938).

Szünet: Nagy számokról, 10^{100}

Szünet: Nagy számokról, 10^{100}

1938 Kasner megkérdezi 9 éves unokahugát (Milton Sirotta) hogyan lehetne elnevezni ezt a számot (egy 1-es, amit 100 darab 0 jegy követ). A válasz:

1938 Kasner megkérdezi 9 éves unokahugát (Milton Sirotta) hogyan lehetne elnevezni ezt a számot (egy 1-es, amit 100 darab 0 jegy követ). A válasz: googol.

1938 Kasner megkérdezi 9 éves unokahugát (Milton Sirotta) hogyan lehetne elnevezni ezt a számot (egy 1-es, amit 100 darab 0 jegy követ). A válasz: googol.

1997 Sean Anderson és Larry Page gondolkodnak mi legyen a vállalkozásuk neve.

1938 Kasner megkérdezi 9 éves unokahugát (Milton Sirotta) hogyan lehetne elnevezni ezt a számot (egy 1-es, amit 100 darab 0 jegy követ). A válasz: googol.

1997 Sean Anderson és Larry Page gondolkodnak mi legyen a vállalkozásuk neve. Megállapodnak a “googol” szóban.

1938 Kasner megkérdezi 9 éves unokahugát (Milton Sirotta) hogyan lehetne elnevezni ezt a számot (egy 1-es, amit 100 darab 0 jegy követ). A válasz: googol.

1997 Sean Anderson és Larry Page gondolkodnak mi legyen a vállalkozásuk neve. Megállapodnak a "googol" szóban. Sean Anderson leül a gépe elé és lefoglalja a "google.com" domain nevet.

Szünet: Nagy számokról, 10^{100}

1938 Kasner megkérdezi 9 éves unokahugát (Milton Sirotta) hogyan lehetne elnevezni ezt a számot (egy 1-es, amit 100 darab 0 jegy követ). A válasz: googol.

1997 Sean Anderson és Larry Page gondolkodnak mi legyen a vállalkozásuk neve. Megállapodnak a "googol" szóban. Sean Anderson leül a gépe elé és lefoglalja a "google.com" domain nevet.

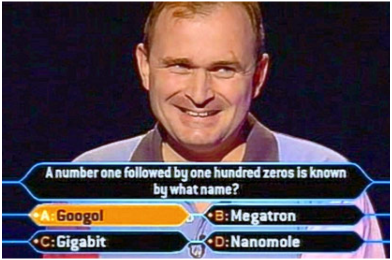
2001 Ingram eljut a "Legyen ön is milliomos" vetélkedő döntő kérdéséhez.

Szünet: Nagy számokról, 10^{100}

1938 Kasner megkérdezi 9 éves unokahugát (Milton Sirotta) hogyan lehetne elnevezni ezt a számot (egy 1-es, amit 100 darab 0 jegy követ). A válasz: googol.

1997 Sean Anderson és Larry Page gondolkodnak mi legyen a vállalkozásuk neve. Megállapodnak a "googol" szóban. Sean Anderson leül a gépe elé és lefoglalja a "google.com" domain nevet.

2001 Ingram eljut a "Legyen ön is milliomos" vetélkedő döntő kérdéséhez.



Szünet: Még nagyobb számok

Szünet: Még nagyobb számok

Definíció

$$\text{googolplex} = 10^{googol}$$

Szünet: Még nagyobb számok

Definíció

$$\text{googolplex} = 10^{googol}$$

Googleplex

Ackermann-számok

$A(n, m)$ Ackermann-számok

$$A(1, m) = 2m, A(n + 1, 1) = 2,$$

Ha nem a táblázat szélén vagyunk, akkor

$$A(n, m) = A(n - 1, A(n, m - 1)).$$

$A(n, m)$ Ackermann-számok

$$A(1, m) = 2m, A(n+1, 1) = 2,$$

Ha nem a táblázat szélén vagyunk, akkor

$$A(n, m) = A(n-1, A(n, m-1)).$$

Peremfeltétel $A(n, m)$-re:

n\m	1	2	3	4	5	6
1	2	4	6	8	10	12
2	2					
3	2					
4	2					
5	2					
6	2					

Kérdések

Kérdés

Határozzuk meg $A(4,4)$-et.

Kérdések

Kérdés

Határozzuk meg $A(4,4)$-et.

Fogos kérdés

Határozzuk meg $A(5,5)$-öt.

Kérdések

Kérdés

Határozzuk meg $A(4,4)$-et.

Fogos kérdés

Határozzuk meg $A(5,5)$-öt.

A „millió fontos” kérdés

Határozzuk meg $A(6,6)$-ot.

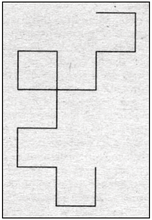
And now for something completely different!

And now for something completely different!

Jurrasic park,

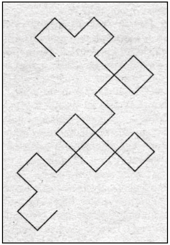
Fejezetek/iterációk

FIRST ITERATION



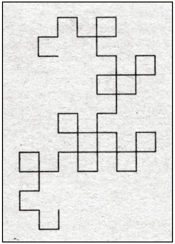
"At the earliest drawings of the fractal curve few clues to the underlying mathematical structure will be seen."
IAN MALCOLM

SECOND ITERATION



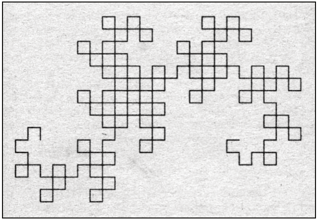
"With subsequent drawings of the fractal curve, sudden changes may appear."
IAN MALCOLM

THIRD ITERATION



"Details emerge more clearly as the fractal curve is redrawn."
IAN MALCOLM

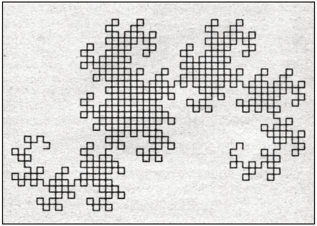
FOURTH ITERATION



"Inevitably, underlying instabilities begin to appear."
IAN MALCOLM

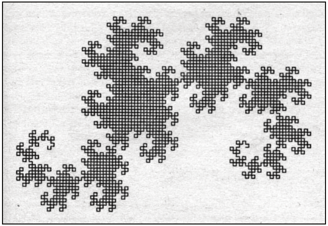
Jurrasic park, Iterációk

FIFTH ITERATION



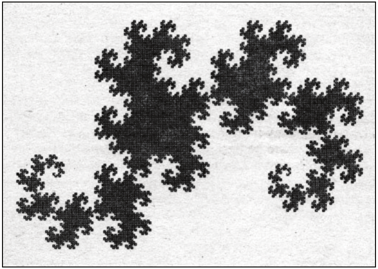
"Flaws in the system will now become severe."
IAN MALCOLM

SIXTH ITERATION



"System recovery may prove impossible."
IAN MALCOLM

SEVENTH ITERATION



"Increasingly, the mathematics will demand the courage to face its implications."
IAN MALCOLM

Papírhajtogatás a NASA-nál (1966)

Papírhajtogatás a NASA-nál (1966)

John E. Heighway fogott egy papírszalagot és bal végét a jobb végéhez hajtotta.

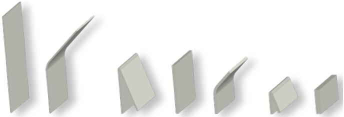
Papírhajtogatás a NASA-nál (1966)

John E. Heighway fogott egy papírszalagot és bal végét a jobb végéhez hajtotta. És újból megcsinálta ezt.

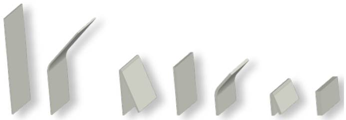
Papírhajtogatás a NASA-nál (1966)

John E. Heighway fogott egy papírszalagot és bal végét a jobb végéhez hajtotta. És újból megcsinálta ezt. És újból megcsinálta ezt.

John E. Heighway fogott egy papírszalagot és bal végét a jobb végéhez hajtotta. És újból megcsinálta ezt. És újból megcsinálta ezt.

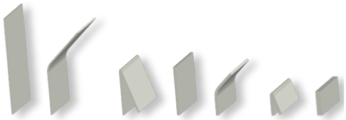


John E. Heighway fogott egy papírszalagot és bal végét a jobb végéhez hajtotta. És újból megcsinálta ezt. És újból megcsinálta ezt.

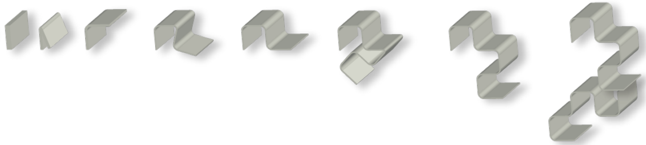


Majd széthajtotta a papírcsíkot.

John E. Heighway fogott egy papírszalagot és bal végét a jobb végéhez hajtotta. És újból megcsinálta ezt. És újból megcsinálta ezt.



Majd széthajtotta a papírcsíkot.



Szünet

Szünet

A valóságban fizikailag hányszor hajtható végre a Heighway-hajtás?

Szünet

A valóságban fizikailag hányszor hajtható végre a Heighway-hajtás?

Pontosabb hányszor tudták megcsinálni azt, azok akik nagyon akarták?

A valóságban fizikailag hányszor hajtható végre a Heighway-hajtás?

Pontosabb hányszor tudták megcsinálni azt, azok akik nagyon akarták?

Tippeljünk!

Szünet

A valóságban fizikailag hányszor hajtható végre a Heighway-hajtás?

Pontosabb hányszor tudták megcsinálni azt, azok akik nagyon akarták?

Tippeljünk!

A legjobb tippért jutalom jár!

Szünet

A valóságban fizikailag hányszor hajtható végre a Heighway-hajtás?

Pontosabb hányszor tudták megcsinálni azt, azok akik nagyon akarták?

Tippeljünk!

A legjobb tippért jutalom jár!

Logikai fajáték.

A válasz

13

A kihajtogatott papír kódolása

A kihajtogatott papír kódolása

$$D_4 = \vee, \vee, \wedge, \vee, \vee, \wedge, \wedge, \vee, \vee, \vee, \wedge, \wedge, \vee, \wedge, \wedge$$

Rekurziók D_n-re

Hajtunk egyet, majd még $n-1$-et

Rekurziók D_n-re

Hajtunk egyet, majd még $n-1$-et

$$D_n = D_{n-1} \vee -\overleftarrow{D_{n-1}}.$$

Hajtunk egyet, majd még $n-1$-et

$$D_n = D_{n-1} \vee -\overleftarrow{D_{n-1}}.$$

$n-1$ hajtást végzünk, majd még egyet

Rekurziók D_n-re

Hajtunk egyet, majd még $n-1$-et

$$D_n = D_{n-1} \vee -\overleftarrow{D_{n-1}}.$$

$n-1$ hajtást végzünk, majd még egyet

Ha

$$D_{n-1} = d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 d_7 d_8 d_9 \ldots,$$

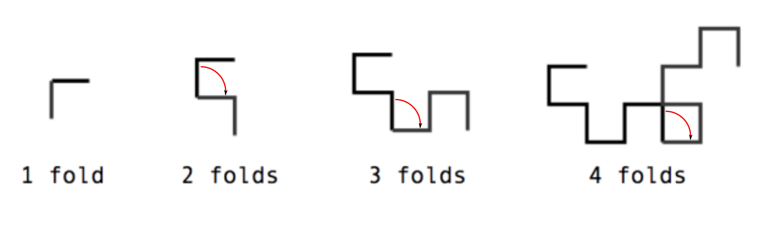
akkor

$$D_n = \vee d_1 \wedge d_2 \vee d_3 \wedge d_4 \vee d_5 \wedge d_6 \vee d_7 \wedge d_8 \vee d_9 \ldots$$

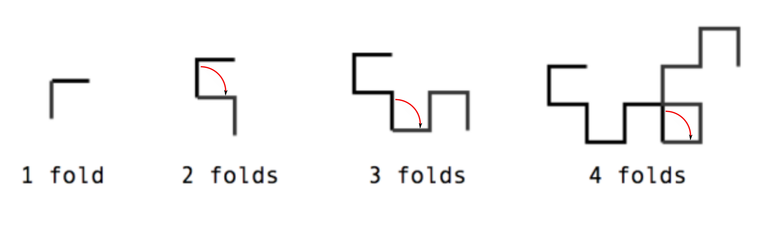
Rekurziók a sárkánygörbére

Első rekurzió

Első rekurzió



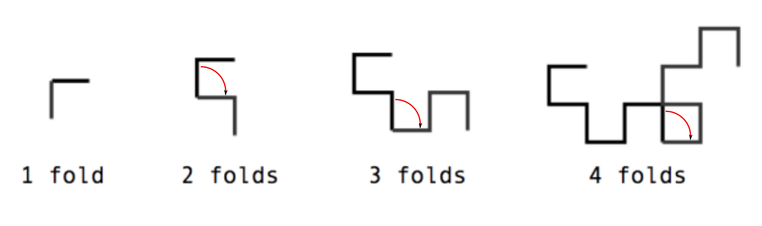
Első rekurzió



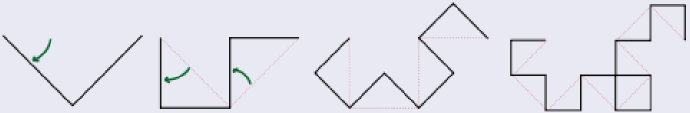
Második rekurzió

Rekurziók a sárkánygörbére

Első rekurzió



Második rekurzió



A sárkánygörbe főtétele

A fenti görbesorozat határértéke D^{∞}, D_{∞}, a sárkánygörbe

A fenti görbesorozat határértéke D^∞, D_∞, a sárkánygörbe

Davis—Knuth-tétel

(i) A D^∞ sárkánygörbe lekerekített változata nem metszi át önmagát.

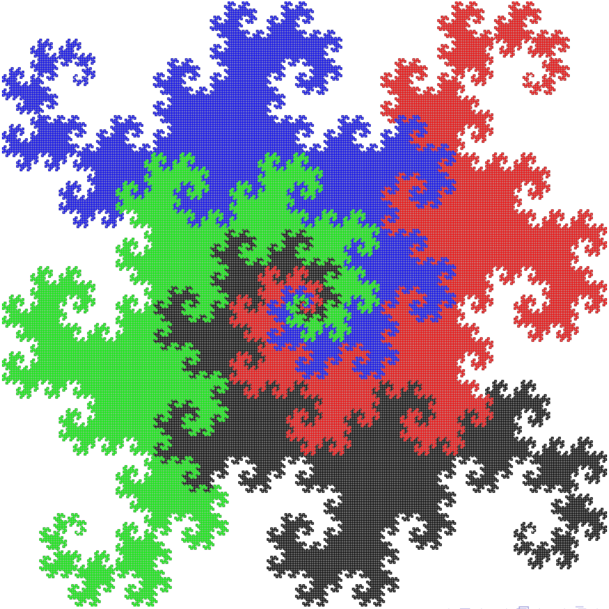
A fenti görbesorozat határértéke D^∞, D_∞, a sárkánygörbe

Davis—Knuth-tétel

(i) A D^∞ sárkánygörbe lekerekített változata nem metszi át önmagát.

(ii) A D^∞ sárkánygörbe és 90°-, 180°-, 270°-kal elforgatott példánya egyszeresen lefedi a végtelen négyzethálót alkotó egységszakaszokat.

A sárkánygörbe főtétele látványosan

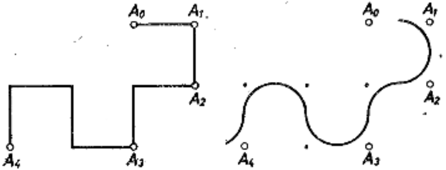


Bizonyítsuk be!

A sárkánygörbe

Hátsó borítónkon levő vonal a következőképpen készült. Kiindultunk egy A_0A_1 szakaszból (1. ábra). A szakaszt A_1 körül pozitív irányban 90°-kal elforgatjuk, kapjuk az $A_0A_1A_2$ töröttvonalat. Ezt A_2 körül pozitív irányban 90°-kal elforgatjuk, kapjuk az $A_0A_1A_2A_3$ töröttvonalat stb., egészen A_{12}-ig. Ezután a töröttvonal sarkait „lekerekítettük" (2. ábra). Ezt a „kerekded" vonalat azután A_0 körül 4-szer 90°-kal elforgatva kapjuk a sárkánygörbét.

A görbe nem metszi magát — legalábbis addig nem, ameddig felrajzoltuk —, és az A_0 körüli részt egészen kitölti. Igaz marad-e ez mindig? Mindazok, akik bizonyítják, hogy így van vagy bizonyítják, hogy nincs így és bizonyításukat legkésőbb március 15-ig a szerkesztőség címére (Budapest Postafiók 129, 1443) elküldik, egy-egy TÁBLA CSOKOLÁDÉT kapnak. Feltéve, hogy a bizonyításuk jó! Cs. L.



1. ábra *2. ábra*

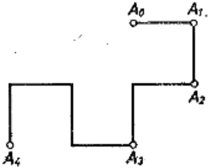
61

Bizonyítsuk be!

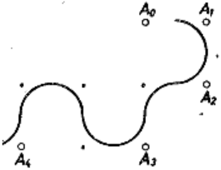
A sárkánygörbe

Hátsó borítónkon levő vonal a következőképpen készült. Kiindultunk egy A_0A_1 szakaszból (1. ábra). A szakaszt A_1 körül pozitív irányban 90°-kal elforgatjuk, kapjuk az $A_0A_1A_2$ töröttvonalat. Ezt A_2 körül pozitív irányban 90°-kal elforgatjuk, kapjuk az $A_0A_1A_2A_3$ töröttvonalat stb., egészen A_{12}-ig. Ezután a töröttvonal sarkait „lekerekítettük" (2. ábra). Ezt a „kerekded" vonalat azután A_0 körül 4-szer 90°-kal elforgatva kapjuk a sárkánygörbét.

A görbe nem metszi magát — legalábbis addig nem, ameddig felrajzoltuk —, és az A_0 körüli részt egészen kitölti. Igaz marad-e ez mindig? Mindazok, akik bizonyítják, hogy így van vagy bizonyítják, hogy nincs így és bizonyításukat legkésőbb március 15-ig a szerkesztőség címére (Budapest Postafiók 129, 1443) elküldik, egy-egy TÁBLA CSOKOLÁDÉT kapnak. Feltéve, hogy a bizonyításuk jó! Cs. L.



1. ábra



2. ábra

61

KÖMAL 1979, 2. szám (február)

Egy alkalmazás

Egy alkalmazás

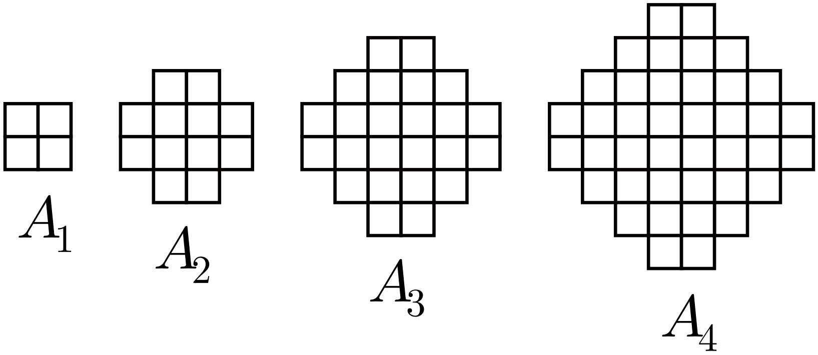
Egy középiskolás feladat

FELADAT

Egy 2048×2048 méretű tábláról egy tetszőleges mezőt letörlünk. Igazoljuk, hogy a maradék mezők L-alakú triominóval kiparkattázhatók.

Azték gyémánt

Azték gyémánt



A kérdés

A kérdés

Hány parkettázása van A_n-nek dominókkal?

A kérdés

Hány parkettázása van A_n-nek dominókkal?

A választ nevezzük el a_n-nek.

Egy sejtés

Egy sejtés

Első néhány elem kiszámolása és fejvakarás

$$a_n = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} = 2^{\Delta(n)}?$$

Egy sejtés

Első néhány elem kiszámolása és fejvakarás

$$a_n = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} = 2^{\Delta(n)}?$$

Elkies—Kuperberg—Larsen—Propp-tétel (1992)

Egy rekurzió

Kuo 1998

$$2 \cdot a_n^2 = a_{n+1} a_{n-1}.$$

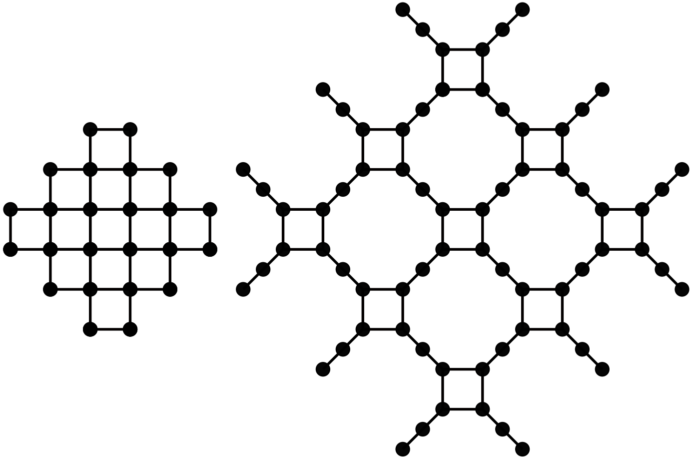
Egy másik rekurzió I.

Egy másik rekurzió I.

Teljes párosításokat számolunk gráfokban.

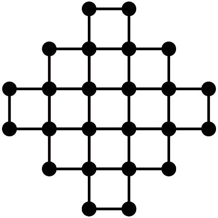
Egy másik rekurzió I.

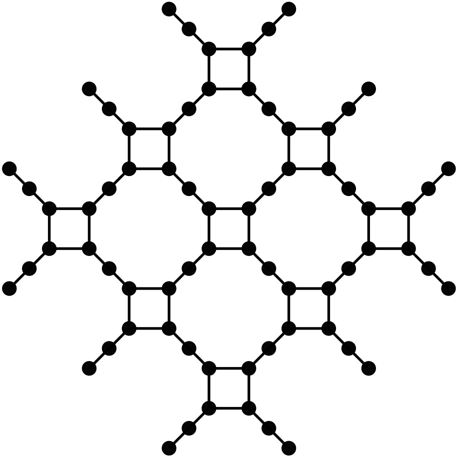
Teljes párosításokat számolunk gráfokban.



Egy másik rekurzió I.

Teljes párosításokat számolunk gráfokban.





A két oldalon lévő gráfban ugyanannyi teljes párosítás van.

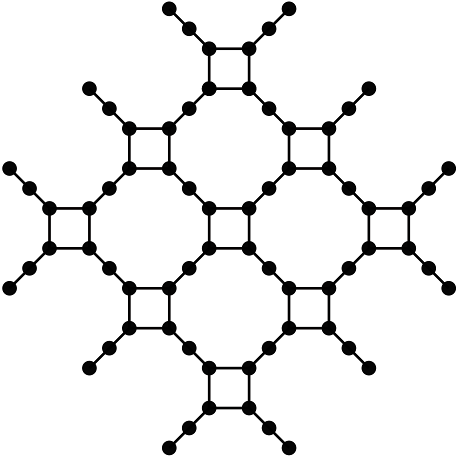
Egy másik rekurzió II.

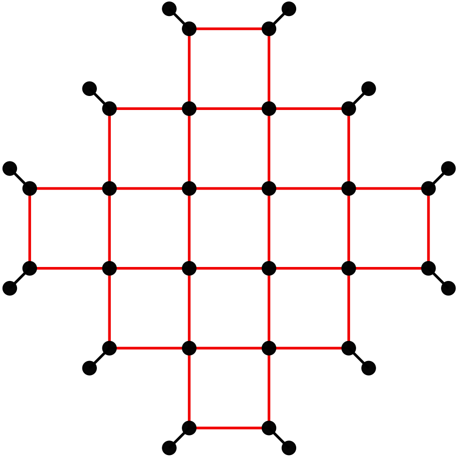
Egy másik rekurzió II.

A piros élek súlya $1/2$. Egy teljes párosítás hozzájárulása az összeszámoláshoz a benne lévő élek súlya.

Egy másik rekurzió II.

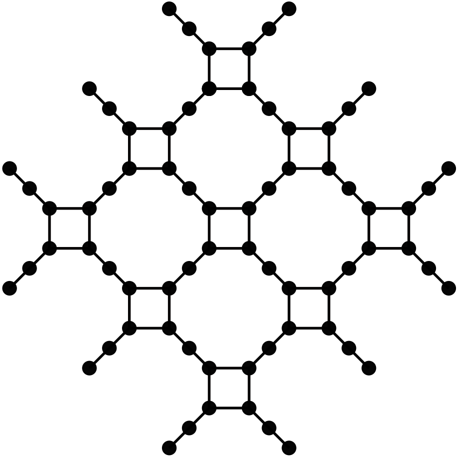
A piros élek súlya 1/2. Egy teljes párosítás hozzájárulása az összeszámoláshoz a benne lévő élek súlya.

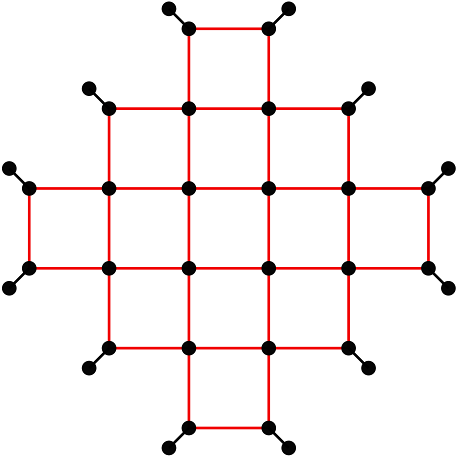




Egy másik rekurzió II.

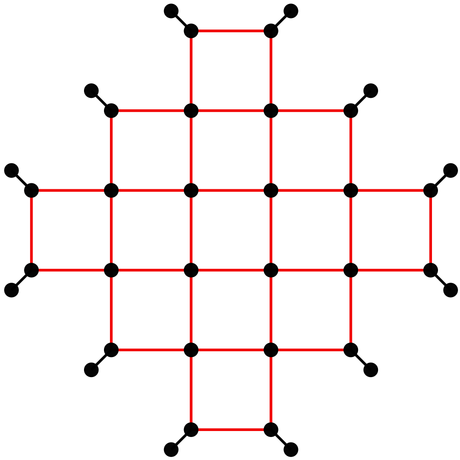
A piros élek súlya $1/2$. Egy teljes párosítás hozzájárulása az összeszámoláshoz a benne lévő élek súlya.

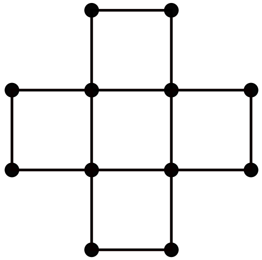


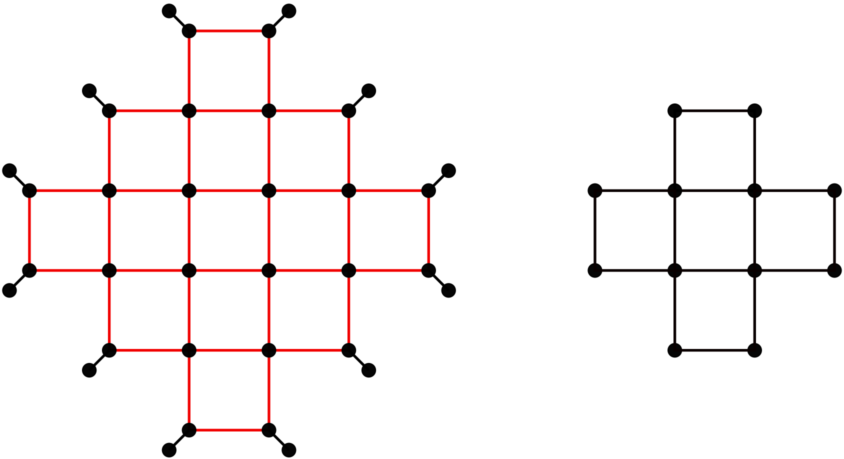


A bal oldalon lévő gráfban az eredmény 2^9-szerese a jobb oldalihoz képest.

Egy másik rekurzió III.







A jobb oldalon lévő gráfban az eredmény 2^6-szorosa a bal oldalihoz képest.

A másik rekurzió

Kuo 1998

$$a_n = 2^n \cdot a_{n-1}.$$

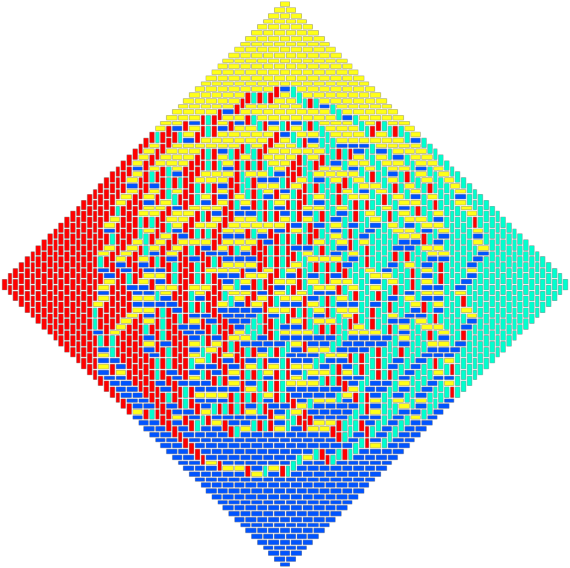
Egy középiskolás feladat

FELADAT

Az azték-gyémánt tetszőleges dominó parkettázásában található két dominó, amelyek a hosszú oldaluknál illeszkednek.

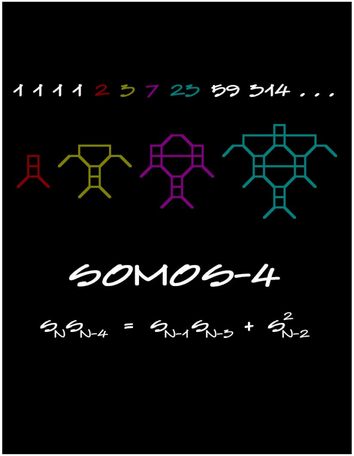
Egy véletlen parkettázás

Egy véletlen parkettázás

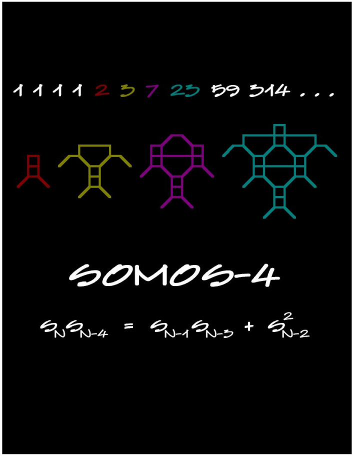


Egy Harvard T-shirt

Egy Harvard T-shirt

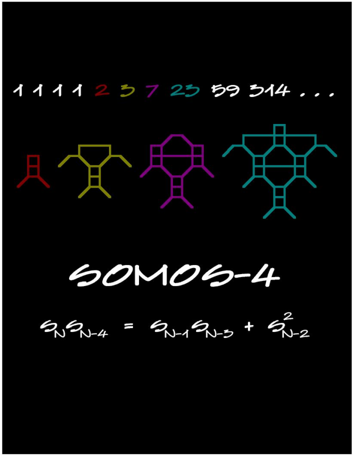


Egy Harvard T-shirt



A006720

Egy Harvard T-shirt



A006720

http://faculty.uml.edu/jpropp/reach/shirt.html

Köszönöm a figyelmet!