Természetes számok kombinatorikája

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2011. március 26.

FELADAT

Pénztárcánkban van két 200 forintos, két 100 forintos, egy 50 forintos, négy 20 forintos, két 10 forintos és három 5 forintos.

FELADAT

Pénztárcánkban van két 200 forintos, két 100 forintos, egy 50 forintos, négy 20 forintos, két 10 forintos és három 5 forintos.

Hányféleképpen fizethetünk ki 215 forintot?

Bemelegítés

FELADAT

Pénztárcánkban van két 200 forintos, két 100 forintos, egy 50 forintos, négy 20 forintos, két 10 forintos és három 5 forintos.

Hányféleképpen fizethetünk ki 215 forintot?

Az azonos névértékű érmék megkülönböztethetetlenek.

Bemelegítés

FELADAT

Pénztárcánkban van két 200 forintos, két 100 forintos, egy 50 forintos, négy 20 forintos, két 10 forintos és három 5 forintos.

Hányféleképpen fizethetünk ki 215 forintot?

Az azonos névértékű érmék megkülönböztethetetlenek.

Pénztárcánkban lévő érmék:

$$200, 200, 100, 100, 50, 20, 20, 20, 20, 10, 10, 5, 5, 5.$$

Bemelegítés

FELADAT

Pénztárcánkban van két 200 forintos, két 100 forintos, egy 50 forintos, négy 20 forintos, két 10 forintos és három 5 forintos.

Hányféleképpen fizethetünk ki 215 forintot?

Az azonos névértékű érmék megkülönböztethetetlenek.

Pénztárcánkban lévő érmék:

$$200, 200, 100, 100, 50, 20, 20, 20, 20, 10, 10, 5, 5, 5.$$

NEM egy érmehalmaz, NEM egy számhalmaz.

FELADAT

Pénztárcánkban van két 200 forintos, két 100 forintos, egy 50 forintos, négy 20 forintos, két 10 forintos és három 5 forintos.

Hányféleképpen fizethetünk ki 215 forintot?

Az azonos névértékű érmék megkülönböztethetetlenek.

Pénztárcánkban lévő érmék:

$$200, 200, 100, 100, 50, 20, 20, 20, 20, 10, 10, 5, 5, 5.$$

NEM egy érmehalmaz, NEM egy számhalmaz.

$$\langle 200^2, 100^2, 50, 20^4, 10^2, 5^3 \rangle.$$

FELADAT

Pénztárcánkban van két 200 forintos, két 100 forintos, egy 50 forintos, négy 20 forintos, két 10 forintos és három 5 forintos.

Hányféleképpen fizethetünk ki 215 forintot?

Az azonos névértékű érmék megkülönböztethetetlenek.

Pénztárcánkban lévő érmék:

$$200, 200, 100, 100, 50, 20, 20, 20, 20, 10, 10, 5, 5, 5.$$

NEM egy érmehalmaz, NEM egy számhalmaz.

$$\langle 200^2, 100^2, 50, 20^4, 10^2, 5^3 \rangle.$$

Hány forint is van nálunk?

FELADAT

Pénztárcánkban van két 200 forintos, két 100 forintos, egy 50 forintos, négy 20 forintos, két 10 forintos és három 5 forintos.

Hányféleképpen fizethetünk ki 215 forintot?

Az azonos névértékű érmék megkülönböztethetetlenek.

Pénztárcánkban lévő érmék:

$$200, 200, 100, 100, 50, 20, 20, 20, 20, 10, 10, 5, 5, 5.$$

NEM egy érmehalmaz, NEM egy számhalmaz.

$$\langle 200^2, 100^2, 50, 20^4, 10^2, 5^3 \rangle.$$

Hány forint is van nálunk? 765 forint.

A bemelegítő feladat megoldása

A megoldás: A lehetőségek felsorolása.

A bemelegítő feladat megoldása

A megoldás: A lehetőségek felsorolása.

200

A bemelegítő feladat megoldása

A megoldás: A lehetőségek felsorolása.

$200 + 10$

A bemelegítő feladat megoldása

A megoldás: A lehetőségek felsorolása.

$200 + 10 + 5$.

200

A bemelegítő feladat megoldása

A megoldás: A lehetőségek felsorolása.

$200 + 10 + 5.$

$200 + 5 + 5 + 5.$

A bemelegítő feladat megoldása

A megoldás: A lehetőségek felsorolása.

$200 + 10 + 5.$

$200 + 5 + 5 + 5.$

$100 + 100$

A bemelegítő feladat megoldása

A megoldás: A lehetőségek felsorolása.

$200 + 10 + 5$.

$200 + 5 + 5 + 5$.

$100 + 100 + 10 + 5$.

$100 + 100 + 5 + 5 + 5$.

A bemelegítő feladat megoldása

A megoldás: A lehetőségek felsorolása.

200 +10 +5.

200 +5+5+5.

100+100+10+5.

100+100+5+5+5.

100+50

A bemelegítő feladat megoldása

A megoldás: A lehetőségek felsorolása.

200 +10 +5.

200 +5+5+5.

100+100+10+5.

100+100+5+5+5.

100+50 +20+20+20

A bemelegítő feladat megoldása

A megoldás: A lehetőségek felsorolása.

200 +10 +5.

200 +5+5+5.

100+100+10+5.

100+100+5+5+5.

100+50 +20+20+20 +5.

A bemelegítő feladat megoldása

A megoldás: A lehetőségek felsorolása.

200 +10 +5.

200 +5+5+5.

100+100+10+5.

100+100+5+5+5.

100+50 +20+20+20 +5.

100+50+20+20

A bemelegítő feladat megoldása

A megoldás: A lehetőségek felsorolása.

$200 + 10 + 5$.

$200 + 5 + 5 + 5$.

$100 + 100 + 10 + 5$.

$100 + 100 + 5 + 5 + 5$.

$100 + 50 + 20 + 20 + 20 + 5$.

$100 + 50 + 20 + 20 + 10 + 10 + 5$.

$100 + 50 + 20 + 20 + 10 + 5 + 5 + 5$.

A bemelegítő feladat megoldása

A megoldás: A lehetőségek felsorolása.

$200 + 10 + 5.$

$200 + 5 + 5 + 5.$

$100 + 100 + 10 + 5.$

$100 + 100 + 5 + 5 + 5.$

$100 + 50 + 20 + 20 + 20 + 5.$

$100 + 50 + 20 + 20 + 10 + 10 + 5.$

$100 + 50 + 20 + 20 + 10 + 5 + 5 + 5.$

100

A bemelegítő feladat megoldása

A megoldás: A lehetőségek felsorolása.

$200 + 10 + 5$.

$200 + 5 + 5 + 5$.

$100 + 100 + 10 + 5$.

$100 + 100 + 5 + 5 + 5$.

$100 + 50 + 20 + 20 + 20 + 5$.

$100 + 50 + 20 + 20 + 10 + 10 + 5$.

$100 + 50 + 20 + 20 + 10 + 5 + 5 + 5$.

$100 + 20 + 20 + 20 + 20 + 10 + 10 + 5 + 5 + 5$.

A bemelegítő feladat megoldása

A megoldás: A lehetőségek felsorolása.

200 +10 +5.

200 +5+5+5.

100+100+10+5.

100+100+5+5+5.

100+50 +20+20+20 +5.

100+50+20+20 +10+10+5.

100+50+20+20 +10+5+5+5.

100 +20+20+20+20+10+10+5+5+5.

Lehetséges hibák:

A bemelegítő feladat megoldása

A megoldás: A lehetőségek felsorolása.

200 +10 +5.

200 +5+5+5.

100+100+10+5.

100+100+5+5+5.

100+50 +20+20+20 +5.

100+50+20+20 +10+10+5.

100+50+20+20 +10+5+5+5.

100 +20+20+20+20+10+10+5+5+5.

Lehetséges hibák:

- Kihagyunk egy objektumot.

A bemelegítő feladat megoldása

A megoldás: A lehetőségek felsorolása.

200 +10 +5.

200 +5+5+5.

100+100+10+5.

100+100+5+5+5.

100+50 +20+20+20 +5.

100+50+20+20 +10+10+5.

100+50+20+20 +10+5+5+5.

100 +20+20+20+20+10+10+5+5+5.

Lehetséges hibák:

- Kihagyunk egy objektumot.
- Többször sorolunk fel egy objektumot.

Kiindulás: Adott egy „helyzet”. Például:

Kiindulás: Adott egy „helyzet”. Például:

- Adott tárgyakból válasszunk ki néhányat.

Kiindulás: Adott egy „helyzet”. Például:

- Adott tárgyakból válasszunk ki néhányat.
- Osszunk szét dolgokat.

A kombinatorika kezdete

Kiindulás: Adott egy „helyzet”. Például:

- Adott tárgyakból válasszunk ki néhányat.
- Osszunk szét dolgokat.
- Színezzünk ki objektumokat.

A kombinatorika kezdete

Kiindulás: Adott egy „helyzet”. Például:

- Adott tárgyakból válasszunk ki néhányat.
- Osszunk szét dolgokat.
- Színezzünk ki objektumokat.
- Rakjunk sorba bizonyos dolgokat, bizonyos feltételek szerint.

Kiindulás: Adott egy „helyzet”. Például:

- Adott tárgyakból válasszunk ki néhányat.
- Osszunk szét dolgokat.
- Színezzünk ki objektumokat.
- Rakjunk sorba bizonyos dolgokat, bizonyos feltételek szerint.

KÉRDÉS

Hányféle lehetőség áll előttünk?

Kiindulás: Adott egy „helyzet”. Például:

- Adott tárgyakból válasszunk ki néhányat.
- Osszunk szét dolgokat.
- Színezzünk ki objektumokat.
- Rakjunk sorba bizonyos dolgokat, bizonyos feltételek szerint.

KÉRDÉS

Hányféle lehetőség áll előttünk?

A természetes MEGOLDÁS

A lehetőségek egy jól választott rendező elv szerinti, szisztematikus felsorolása.

És valami teljesen más: Polinomok, bevezető feladat

Feladat

Végezzük el az alábbi polinom szorzást:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$$

És valami teljesen más: Polinomok, bevezető feladat

Feladat

Végezzük el az alábbi polinom szorzást:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$$

Megoldás

$(1+x)(1+x^2) = 1+x+x^2+x^3,$

És valami teljesen más: Polinomok, bevezető feladat

Feladat

Végezzük el az alábbi polinom szorzást:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$$

Megoldás

$(1+x)(1+x^2) = 1+x+x^2+x^3,$
$(1+x+x^2+x^3)(1+x^4) = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7,$

Feladat

Végezzük el az alábbi polinom szorzást:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$$

Megoldás

$(1+x)(1+x^2)=1+x+x^2+x^3,$
$(1+x+x^2+x^3)(1+x^4)=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7,$

$$\begin{aligned}(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)(1+x^8) &= \\ &1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+ \\ &+x^8+x^9+x^{10}+x^{11}+x^{12}+x^{13}+x^{14}+x^{15}.\end{aligned}$$

Második megoldás

Feladat

Végezzük el az alábbi polinom szorzást:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$$

Második megoldás

Feladat

Végezzük el az alábbi polinom szorzást:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$$

II. Megoldás

$K = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$

Második megoldás

Feladat

Végezzük el az alábbi polinom szorzást:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$$

II. Megoldás

$K = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$
$(1-x)K = (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$

Feladat

Végezzük el az alábbi polinom szorzást:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$$

II. Megoldás

$K = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$

$(1-x)K = (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$

Feladat

Végezzük el az alábbi polinom szorzást:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$$

II. Megoldás

$K = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$

$(1-x)K = (1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$

Feladat

Végezzük el az alábbi polinom szorzást:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$$

II. Megoldás

$K=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$

$(1-x)K=(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$

Második megoldás

Feladat

Végezzük el az alábbi polinom szorzást:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$$

II. Megoldás

$K = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$

$(1-x)K = (1-x^4)(1+x^4)(1+x^8).$

Feladat

Végezzük el az alábbi polinom szorzást:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$$

II. Megoldás

$K=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$.

$(1-x)K=\color{red}{(1-x^4)(1+x^4)}(1+x^8)$.

Második megoldás

Feladat

Végezzük el az alábbi polinom szorzást:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$$

II. Megoldás

$K = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$

$(1-x)K = (1-x^8)(1+x^8).$

Második megoldás

Feladat

Végezzük el az alábbi polinom szorzást:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$$

II. Megoldás

$K = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$

$(1-x)K = (1-x^8)(1+x^8).$

Második megoldás

Feladat

Végezzük el az alábbi polinom szorzást:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$$

II. Megoldás

$K = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$

$(1-x)K = 1 - x^{16}.$

Második megoldás

Feladat

Végezzük el az alábbi polinom szorzást:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$$

II. Megoldás

$K=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$

$(1-x)K=1-x^{16}.$

Második megoldás

Feladat

Végezzük el az alábbi polinom szorzást:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$$

II. Megoldás

$K = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$

$$(1-x)K = (1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+ \\ +x^8+x^9+x^{10}+x^{11}+x^{12}+x^{13}+x^{14}+x^{15}).$$

Második megoldás

Feladat

Végezzük el az alábbi polinom szorzást:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$$

II. Megoldás

$K = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$

$$K = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+$$
$$+x^8+x^9+x^{10}+x^{11}+x^{12}+x^{13}+x^{14}+x^{15}.$$

ALAPELV: Ha számokkal sokat számoltunk, akkor betűkkel is tudunk úgy bánni mintha számokkal dolgoznánk.

ALAPELV: Ha számokkal sokat számoltunk, akkor betűkkel is tudunk úgy bánni mintha számokkal dolgoznánk.

$$(a+b)(x+y) =$$

ALAPELV: Ha számokkal sokat számoltunk, akkor betűkkel is tudunk úgy bánni mintha számokkal dolgoznánk.

$$(a+b)(x+y) = a(x+y) + b(x+y) =$$

ALAPELV: Ha számokkal sokat számoltunk, akkor betűkkel is tudunk úgy bánni mintha számokkal dolgoznánk.

$$(a+b)(x+y) = a(x+y) + b(x+y) = ax + ay + bx + by.$$

ALAPELV: Ha számokkal sokat számoltunk, akkor betűkkel is tudunk úgy bánni mintha számokkal dolgoznánk.

$$(a+b)(x+y) = a(x+y) + b(x+y) = ax + ay + bx + by.$$

SZABÁLY

Betűszámtan-ban többtagú kifejezések szorzása úgy történik, hogy az ÖSSZES LEHETSÉGES MÓDON kiválasztunk egy-egy tagot a tényekzőkből, ezeket összeszorozzuk, az így kapott szorzatokat összeadjuk.

Példák

$$(a+b)(x+y) = ax + ay + bx + by.$$

Példák

$$(a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by.$$

Példák

$$(a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by.$$

Példák

$$(a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by.$$

Példák

$$(a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by.$$

$$(a+b)(x+y) = ax + ay + bx + by.$$

Példák

$$(a+b)(x+y) = ax + ay + bx + by.$$

$$(1+x)(1+x)(1+x) = 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot x + 1\cdot x\cdot 1 + 1\cdot x\cdot x + x\cdot 1\cdot 1 + x\cdot 1\cdot x + x\cdot x\cdot 1 + x\cdot x\cdot x.$$

Példák

$$(a+b)(x+y) = ax + ay + bx + by.$$

$$\begin{aligned}(1+x)(1+x)(1+x) = {} & 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot x + 1\cdot x\cdot 1 + 1\cdot x\cdot x + \\ & x\cdot 1\cdot 1 + x\cdot 1\cdot x + x\cdot x\cdot 1 + x\cdot x\cdot x.\end{aligned}$$

Példák

$$(a+b)(x+y) = ax + ay + bx + by.$$

$$\begin{aligned}(1+x)(1+x)(1+x) = {} & 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot x + 1\cdot x\cdot 1 + 1\cdot x\cdot x + \\ & x\cdot 1\cdot 1 + x\cdot 1\cdot x + x\cdot x\cdot 1 + x\cdot x\cdot x.\end{aligned}$$

Példák

$$(a+b)(x+y) = ax + ay + bx + by.$$

$$\begin{aligned}(1+x)(1+x)(1+x) = {} & 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot x + 1\cdot x\cdot 1 + 1\cdot x\cdot x + \\ & x\cdot 1\cdot 1 + x\cdot 1\cdot x + x\cdot x\cdot 1 + x\cdot x\cdot x.\end{aligned}$$

Példák

$$(a+b)(x+y) = ax + ay + bx + by.$$

$$\begin{aligned}(1+x)(1+x)(1+x) = {} & 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot x + 1\cdot x\cdot 1 + 1\cdot x\cdot x + \\ & x\cdot 1\cdot 1 + x\cdot 1\cdot x + x\cdot x\cdot 1 + x\cdot x\cdot x.\end{aligned}$$

Példák

$$(a+b)(x+y) = ax + ay + bx + by.$$

$$\begin{aligned}(1+x)(1+x)(1+x) = {} & 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot x + 1\cdot x\cdot 1 + 1\cdot x\cdot x + \\ & x\cdot 1\cdot 1 + x\cdot 1\cdot x + x\cdot x\cdot 1 + x\cdot x\cdot x.\end{aligned}$$

Példák

$$(a+b)(x+y) = ax + ay + bx + by.$$

$$(1+x)(1+x)(1+x) = 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot x + 1\cdot x\cdot 1 + 1\cdot x\cdot x + x\cdot 1\cdot 1 + x\cdot 1\cdot x + x\cdot x\cdot 1 + x\cdot x\cdot x.$$

Példák

$$(a+b)(x+y) = ax + ay + bx + by.$$

$$(1+x)(1+x)(1+x) = 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot x + 1\cdot x\cdot 1 + 1\cdot x\cdot x + x\cdot 1\cdot 1 + x\cdot 1\cdot x + x\cdot x\cdot 1 + x\cdot x\cdot x.$$

Példák

$$(a+b)(x+y) = ax + ay + bx + by.$$

$$(1+x)(1+x)(1+x) = 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot x + 1\cdot x\cdot 1 + 1\cdot x\cdot x + x\cdot 1\cdot 1 + x\cdot 1\cdot x + x\cdot x\cdot 1 + x\cdot x\cdot x.$$

Példák

$$(a+b)(x+y) = ax + ay + bx + by.$$

$$\begin{aligned}(1+x)(1+x)(1+x) &= 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot x + 1\cdot x\cdot 1 + 1\cdot x\cdot x +\\ &\quad x\cdot 1\cdot 1 + x\cdot 1\cdot x + x\cdot x\cdot 1 + x\cdot x\cdot x =\\ &= 1 + 3x + 3x^2 + x^3.\end{aligned}$$

Egy további példa

$$(1+x^{200}+x^{400})(1+x^{100}+x^{200})(1+x^{50})(1+x^{20}+x^{40}+x^{60}+x^{80})\cdot$$

$$\cdot(1+x^{10}+x^{20})(1+x^{5}+x^{10}+x^{15})=$$

Egy további példa

$$(1+x^{200}+x^{400})(1+x^{100}+x^{200})(1+x^{50})(1+x^{20}+x^{40}+x^{60}+x^{80})$$

$$\cdot(1+x^{10}+x^{20})(1+x^{5}+x^{10}+x^{15}) =$$

$$1 + \quad \ldots$$

$$\ldots \quad + \quad 8\cdot \quad x^{215} + \quad \ldots$$

$$\ldots \quad + \quad 1\cdot \quad x^{765}.$$

Egy további példa

$$(1+x^{200}+x^{400})(1+x^{100}+x^{200})(1+x^{50})(1+x^{20}+x^{40}+x^{60}+x^{80})$$

$$\cdot(1+x^{10}+x^{20})(1+x^{5}+x^{10}+x^{15}) =$$

$$1+ \qquad \ldots$$

$$+x^{200}\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot x^{10}\cdot x^{5}+$$

$$\ldots \qquad + \quad 1\cdot \quad x^{765}.$$

Egy további példa

$$(1+x^{200}+x^{400})(1+x^{100}+x^{200})(1+x^{50})(1+x^{20}+x^{40}+x^{60}+x^{80})$$

$$\cdot(1+x^{10}+x^{20})(1+x^{5}+x^{15})=$$

$$1+\qquad\dots$$

$$+x^{215}+x^{200}\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot x^{5+5+5}+$$

$$\dots\qquad+\quad 1\cdot\quad x^{765}.$$

Egy további példa

$$(1+x^{200}+x^{400})(1+x^{100}+x^{200})(1+x^{50})(1+x^{20}+x^{40}+x^{60}+x^{80})$$

$$\cdot(1+x^{10}+x^{20})(1+x^{5}+x^{10}+x^{15}) =$$

$$1+ \qquad \ldots$$

$$+2x^{215}+1\cdot x^{100+100}\cdot 1\cdot 1\cdot x^{10}\cdot x^{5}+$$

$$\ldots \qquad + \quad 1\cdot \quad x^{765}.$$

Egy további példa

$$(1+x^{200}+x^{400})(1+x^{100}+x^{200})(1+x^{50})(1+x^{20}+x^{40}+x^{60}+x^{80})$$

$$\cdot(1+x^{10}+x^{20})(1+x^{5}+x^{15}) =$$

$$1+ \qquad \dots$$

$$+3x^{215} + 1\cdot x^{100+100}\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot x^{5+5+5} +$$

$$\dots \qquad + \quad 1\cdot \quad x^{765}.$$

Egy további példa

$$(1+x^{200}+x^{400})(1+x^{100}+x^{200})(1+x^{50})(1+x^{20}+x^{40}+x^{60}+x^{80})$$

$$\cdot(1+x^{10}+x^{20})(1+x^{5}+x^{10}+x^{15}) =$$

$$1 + \quad \ldots$$

$$+4x^{215} + 1 \cdot x^{100} \cdot x^{50} \cdot x^{20+20+20} \cdot 1 \cdot x^{5} +$$

$$\ldots \quad + \quad 1 \cdot \quad x^{765}.$$

Egy további példa

$$(1+x^{200}+x^{400})(1+x^{100}+x^{200})(1+x^{50})(1+x^{20}+x^{40}+x^{60}+x^{80})$$

$$\cdot(1+x^{10}+x^{20})(1+x^{5}+x^{10}+x^{15}) =$$

$$1+ \qquad \ldots$$

$$+5x^{215}+1\cdot x^{100}\cdot x^{50}\cdot x^{20+20}\cdot x^{10+10}\cdot x^{5}+$$

$$\ldots \qquad + \quad 1\cdot \quad x^{765}.$$

Egy további példa

$$(1+x^{200}+x^{400})(1+x^{100}+x^{200})(1+x^{50})(1+x^{20}+x^{40}+x^{60}+x^{80})$$

$$\cdot(1+x^{10}+x^{20})(1+x^{5}+x^{10}+x^{15})=$$

$$1+\quad\ldots$$

$$+6x^{215}+1\cdot x^{100}\cdot x^{50}\cdot x^{20+20}\cdot x^{10+10}\cdot x^{5}+$$

$$\ldots\quad+\quad 1\cdot\quad x^{765}.$$

Egy további példa

$$(1+x^{200}+x^{400})(1+x^{100}+x^{200})(1+x^{50})(1+x^{20}+x^{40}+x^{60}+x^{80})$$

$$\cdot(1+x^{10}+x^{20})(1+x^{5}+x^{10}+x^{15}) =$$

$$1+ \qquad \ldots$$

$$+7x^{215}+1\cdot x^{100}\cdot 1\cdot x^{20+20+20+20}\cdot x^{10+10}\cdot x^{5+5+5}+$$

$$\ldots \qquad + \quad 1\cdot \quad x^{765}.$$

Egy további példa

$$(1+x^{200}+x^{400})(1+x^{100}+x^{200})(1+x^{50})(1+x^{20}+x^{40}+x^{60}+x^{80})$$

$$\cdot(1+x^{10}+x^{20})(1+x^{5}+x^{10}+x^{15}) =$$

$$1+ \quad \dots$$

$$+8x^{215}+$$

$$\dots \quad + \quad 1\cdot \quad x^{765}.$$

Egy további példa

$$(1+x^{200}+x^{400})(1+x^{100}+x^{200})(1+x^{50})(1+x^{20}+x^{40}+x^{60}+x^{80})$$

$$\cdot(1+x^{10}+x^{20})(1+x^{5}+x^{10}+x^{15})=$$

$$1+ \quad \ldots$$

$$+8\cdot x^{215}+$$

$$\ldots \quad + \quad 1\cdot \quad x^{765}.$$

Egy további példa

$$(1+x^{200}+x^{400})(1+x^{100}+x^{200})(1+x^{50})(1+x^{20}+x^{40}+x^{60}+x^{80})$$

$$\cdot(1+x^{10}+x^{20})(1+x^{5}+x^{10}+x^{15}) =$$

$$1 + \quad \ldots$$

$$+8\cdot x^{215}+$$

$$\ldots \quad + \quad 1\cdot \quad x^{765}.$$

Kettes számrendszer

A kettes számrendszer alaptétele

Minden természetes szám egyértelműen írható fel mint különböző kettő hatványok összege. (Az összegben a tagok sorrendje NEM SZÁMÍT.)

A kettes számrendszer alaptétele

(i) Minden természetes szám felírható mint különböző kettő hatványok összege.

(ii) Minden természetes szám csak egyféleképpen írható fel mint különböző kettő hatványok összege.

A kettes számrendszer alaptétele

(i) Minden természetes szám felírható mint különböző kettő hatványok összege.

(ii) Minden természetes szám csak egyféleképpen írható fel mint különböző kettő hatványok összege.

Bizonyítás

Csak azt igazoljuk, hogy minden 16-nál kisebb szám egyértelműen írható fel, mint $\{1, 2, 4, 8\}$ különböző elemeinek összege.

A kettes számrendszer alaptétele

(i) Minden természetes szám felírható mint különböző kettő hatványok összege.

(ii) Minden természetes szám csak egyféleképpen írható fel mint különböző kettő hatványok összege.

Bizonyítás

Csak azt igazoljuk, hogy minden 16-nál kisebb szám egyértelműen írható fel, mint $\{1, 2, 4, 8\}$ különböző elemeinek összege.

$$\begin{aligned}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8) = \\ 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+ \\ +x^8+x^9+x^{10}+x^{11}+x^{12}+x^{13}+x^{14}+x^{15}.\end{aligned}$$

És valami teljesen más: Multihalmazok

Definíció

A egy alaphalmaz. Egy μ multihalmaz A felett

$$\mu : A \longrightarrow \mathbb{N}.$$

És valami teljesen más: Multihalmazok

Definíció

A egy alaphalmaz. Egy μ multihalmaz A felett

$$\mu : A \longrightarrow \mathbb{N}.$$

Elnevezések:

És valami teljesen más: Multihalmazok

Definíció

A egy alaphalmaz. Egy μ multihalmaz A felett

$$\mu : A \longrightarrow \mathbb{N}.$$

Elnevezések:

- $\mu(a)$ az a objektum multiplicitása μ-ben

És valami teljesen más: Multihalmazok

Definíció

A egy alaphalmaz. Egy μ multihalmaz A felett

$$\mu : A \longrightarrow \mathbb{N}.$$

Elnevezések:

- $\mu(a)$ az a objektum multiplicitása μ-ben
- a elem benne van μ-ben, ha $\mu(a) > 0$

És valami teljesen más: Multihalmazok

Definíció

A egy alaphalmaz. Egy μ multihalmaz A felett

$$\mu : A \rightarrow \mathbb{N}.$$

Elnevezések:

- $\mu(a)$ az a objektum multiplicitása μ-ben
- a elem benne van μ-ben, ha $\mu(a) > 0$
- μ elemszáma $|\mu| = \sum_{a:a\in A} \mu(a)$

És valami teljesen más: Multihalmazok

Definíció

A egy alaphalmaz. Egy μ multihalmaz A felett

$$\mu : A \longrightarrow \mathbb{N}.$$

Elnevezések:

- $\mu(a)$ az a objektum multiplicitása μ-ben
- a elem benne van μ-ben, ha $\mu(a) > 0$
- μ elemszáma $|\mu| = \sum_{a:a\in A} \mu(a)$
- $\mu \subset \nu$, ha minden A-beli a elemre $\mu(a) \leq \nu(a)$

És valami teljesen más: Multihalmazok

Definíció

A egy alaphalmaz. Egy μ multihalmaz A felett

$$\mu : A \to \mathbb{N}.$$

Elnevezések:

- $\mu(a)$ az a objektum multiplicitása μ-ben
- a elem benne van μ-ben, ha $\mu(a) > 0$
- μ elemszáma $|\mu| = \sum_{a:a\in A} \mu(a)$
- $\mu \subset \nu$, ha minden A-beli a elemre $\mu(a) \leq \nu(a)$
- $\mu \cap \nu$, az a legbővebb multihalmaz, ami mindkettőben benne van

Definíció

A egy alaphalmaz. Egy μ multihalmaz A felett

$$\mu : A \longrightarrow \mathbb{N}.$$

Elnevezések:

- $\mu(a)$ az a objektum multiplicitása μ-ben
- a elem benne van μ-ben, ha $\mu(a) > 0$
- μ elemszáma $|\mu| = \sum_{a:a\in A} \mu(a)$
- $\mu \subset \nu$, ha minden A-beli a elemre $\mu(a) \leq \nu(a)$
- $\mu \cap \nu$, az a legbővebb multihalmaz, ami mindkettőben benne van
- $\mu \cup \nu$, az a legszűkebb multihalmaz, ami mindkettőt tartalmazza

Példa

$\pi(n)$ az n-et kiadó prímtényezők.

Példa

$\pi(n)$ az n-et kiadó prímtényezők.

$n = 12$,

Példa

$\pi(n)$ az n-et kiadó prímtényezők.

$n = 12, \qquad 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3,$

Példa

$\pi(n)$ az n-et kiadó prímtényezők.

$n = 12, \qquad 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3, \qquad \pi(12) = \langle 2^2, 3 \rangle.$

Példa

$\pi(n)$ az n-et kiadó prímtényezők.

$n = 12, \qquad 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3, \qquad \pi(12) = \langle 2^2, 3 \rangle.$

$n = 504,$

Példa

$\pi(n)$ az n-et kiadó prímtényezők.

$n = 12, \qquad 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3, \qquad \pi(12) = \langle 2^2, 3 \rangle.$

$n = 504, \qquad 504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7,$

Példa

$\pi(n)$ az n-et kiadó prímtényezők.

$n = 12, \qquad 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3, \qquad \pi(12) = \langle 2^2, 3 \rangle.$

$n = 504, \qquad 504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7, \qquad \pi(504) = \langle 2^3, 3^2, 7 \rangle.$

Példa

$\pi(n)$ az n-et kiadó prímtényezők.

$n = 12, \qquad 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3, \qquad \pi(12) = \langle 2^2, 3 \rangle.$

$n = 504, \qquad 504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7, \qquad \pi(504) = \langle 2^3, 3^2, 7 \rangle.$

$n = 2646,$

Példa

$\pi(n)$ az n-et kiadó prímtényezők.

$n = 12, \qquad 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3, \qquad \pi(12) = \langle 2^2, 3\rangle.$
$n = 504, \qquad 504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7, \qquad \pi(504) = \langle 2^3, 3^2, 7\rangle.$
$n = 2646, \qquad 2646 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7,$

Példa

$\pi(n)$ az n-et kiadó prímtényezők.

$n = 12, \qquad 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3, \qquad \pi(12) = \langle 2^2, 3 \rangle.$
$n = 504, \qquad 504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7, \qquad \pi(504) = \langle 2^3, 3^2, 7 \rangle.$
$n = 2646, \qquad 2646 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7, \qquad \pi(2646) = \langle 2^2, 3^3, 7 \rangle.$

Példa

$\pi(n)$ az n-et kiadó prímtényezők.

$n = 12, \qquad 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3, \qquad \pi(12) = \langle 2^2, 3 \rangle.$
$n = 504, \qquad 504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7, \qquad \pi(504) = \langle 2^3, 3^2, 7 \rangle.$
$n = 2646, \qquad 2646 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7, \qquad \pi(2646) = \langle 2^2, 3^3, 7 \rangle.$

- $p \in \pi(n)$ akkor és csak akkor, ha $p | n$.

Példa

$\pi(n)$ az n-et kiadó prímtényezők.

$n = 12, \qquad 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3, \qquad \pi(12) = \langle 2^2, 3 \rangle.$
$n = 504, \qquad 504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7, \qquad \pi(504) = \langle 2^3, 3^2, 7 \rangle.$
$n = 2646, \qquad 2646 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7, \qquad \pi(2646) = \langle 2^2, 3^3, 7 \rangle.$

- $p \in \pi(n)$ akkor és csak akkor, ha $p | n$.
- $\pi(n) \subset \pi(m)$ akkor és csak akkor,

Példa

$\pi(n)$ az n-et kiadó prímtényezők.

$n = 12, \qquad 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3, \qquad \pi(12) = \langle 2^2, 3 \rangle.$
$n = 504, \qquad 504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7, \qquad \pi(504) = \langle 2^3, 3^2, 7 \rangle.$
$n = 2646, \qquad 2646 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7, \qquad \pi(2646) = \langle 2^2, 3^3, 7 \rangle.$

- $p \in \pi(n)$ akkor és csak akkor, ha $p|n$.
- $\pi(n) \subset \pi(m)$ akkor és csak akkor, ha n osztója m-nek, akkor és csak akkor,

Példa

$\pi(n)$ az n-et kiadó prímtényezők.

$n = 12, \qquad 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3, \qquad \pi(12) = \langle 2^2, 3 \rangle.$
$n = 504, \qquad 504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7, \qquad \pi(504) = \langle 2^3, 3^2, 7 \rangle.$
$n = 2646, \qquad 2646 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7, \qquad \pi(2646) = \langle 2^2, 3^3, 7 \rangle.$

- $p \in \pi(n)$ akkor és csak akkor, ha $p|n$.
- $\pi(n) \subset \pi(m)$ akkor és csak akkor, ha n osztója m-nek, akkor és csak akkor, ha m többszöröse n-nek.

Kérdés

- Hányféleképpen választhatunk ki k objektumot n fajta tárgyból, ha mindegyik fajtából tetszőlegesen sok (MGEKÜLÖNBÖTETHETETLEN) van?

Kérdés

- Hányféleképpen választhatunk ki k objektumot n fajta tárgyból, ha mindegyik fajtából tetszőlegesen sok (MGEKÜLÖNBÖTETHETETLEN) van?
- Hányféleképpen választhatunk ki k elemet n fajta tárgyból, ha mindegyik választás után visszatesszük a kiválasztott tárgyat (újból választható lesz)? A választás SORRENDje NEM SZÁMÍT.

Multihalmazok és kombinatorika: Ismétléses kombinációk

Kérdés

- Hányféleképpen választhatunk ki k objektumot n fajta tárgyból, ha mindegyik fajtából tetszőlegesen sok (MGEKÜLÖNBÖTETHETETLEN) van?
- Hányféleképpen választhatunk ki k elemet n fajta tárgyból, ha mindegyik választás után visszatesszük a kiválasztott tárgyat (újból választható lesz)? A választás SORRENDje NEM SZÁMÍT.
- Hány k elemű multihalmaz van egy n elemű halmaz felett?

Kérdés

- Hányféleképpen választhatunk ki k objektumot n fajta tárgyból, ha mindegyik fajtából tetszőlegesen sok (MGEKÜLÖNBÖTETHETETLEN) van?
- Hányféleképpen választhatunk ki k elemet n fajta tárgyból, ha mindegyik választás után visszatesszük a kiválasztott tárgyat (újból választható lesz)? A választás SORRENDje NEM SZÁMÍT.
- Hány k elemű multihalmaz van egy n elemű halmaz felett?

Definíció ($n \geq 1$)

A válasz:

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right).$$

Tétel

(i) $\left(\!\binom{1}{k}\!\right) = 1,$

Rekurzió

Tétel

(i) $\left(\!\binom{1}{k}\!\right) = 1, \qquad \left(\!\binom{n}{0}\!\right) = 1,$

Rekurzió

Tétel

(i) $\left(\!\binom{1}{k}\!\right) = 1, \qquad \left(\!\binom{n}{0}\!\right) = 1,$

(ii)
$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right).$$

Rekurzió

Tétel

(i) $\left(\!\binom{1}{k}\!\right) = 1, \qquad \left(\!\binom{n}{0}\!\right) = 1,$

(ii)
$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right).$$

Bizonyítás

Az n objektum között az egyiket emeljük ki:

Rekurzió

Tétel

(i) $\left(\!\binom{1}{k}\!\right) = 1, \qquad \left(\!\binom{n}{0}\!\right) = 1,$

(ii)
$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right).$$

Bizonyítás

Az n objektum között az egyiket emeljük ki: könyv.

Tétel

(i) $\left(\!\binom{1}{k}\!\right) = 1, \qquad \left(\!\binom{n}{0}\!\right) = 1,$

(ii)

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right).$$

Bizonyítás

Az n objektum között az egyiket emeljük ki: könyv.
Hány kiválasztás van, ahol sose választjuk ki a könyvet?

Tétel

(i) $\left(\!\binom{1}{k}\!\right) = 1, \qquad \left(\!\binom{n}{0}\!\right) = 1,$

(ii)

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right).$$

Bizonyítás

Az n objektum között az egyiket emeljük ki: könyv.
Hány kiválasztás van, ahol sose választjuk ki a könyvet?

$$\left(\!\binom{n-1}{k}\!\right).$$

Tétel

(i) $\left(\!\binom{1}{k}\!\right) = 1, \qquad \left(\!\binom{n}{0}\!\right) = 1,$

(ii)

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right).$$

Bizonyítás

Az n objektum között az egyiket emeljük ki: könyv.
Hány kiválasztás van, ahol sose választjuk ki a könyvet?

$$\left(\!\binom{n-1}{k}\!\right).$$

Hány kiválasztás van, ahol valamikor kiválasztjuk a könyvet?

Tétel

(i) $\left(\!\binom{1}{k}\!\right) = 1, \qquad \left(\!\binom{n}{0}\!\right) = 1,$

(ii)
$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right).$$

Bizonyítás

Az n objektum között az egyiket emeljük ki: könyv.
Hány kiválasztás van, ahol sose választjuk ki a könyvet?
$$\left(\!\binom{n-1}{k}\!\right).$$
Hány kiválasztás van, ahol valamikor kiválasztjuk a könyvet?
$$\left(\!\binom{n}{k-1}\!\right).$$

Az $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ számok

Az $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ számok

A táblázat

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1								
3	1								
4	1								
5	1								
6	1								
7	1								
8	1								
9	1								

Az $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ számok

A táblázat

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1								
3	1								
4	1								
5	1								
6	1								
7	1								
8	1								
9	1								

Az $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ számok

A táblázat

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2							
3	1								
4	1								
5	1								
6	1								
7	1								
8	1								
9	1								

Az $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ számok

A táblázat

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2							
3	1								
4	1								
5	1								
6	1								
7	1								
8	1								
9	1								

Az $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ számok

A táblázat

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3						
3	1								
4	1								
5	1								
6	1								
7	1								
8	1								
9	1								

Az $\left(\binom{n}{k}\right)$ számok

A táblázat

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3						
3	1								
4	1								
5	1								
6	1								
7	1								
8	1								
9	1								

Az $\left(\binom{n}{k}\right)$ számok

A táblázat

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3						
3	1	3							
4	1								
5	1								
6	1								
7	1								
8	1								
9	1								

Az $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ számok

A táblázat

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4					
3	1	3							
4	1								
5	1								
6	1								
7	1								
8	1								
9	1								

Az $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ számok

A táblázat

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4					
3	1	3	6						
4	1	4							
5	1								
6	1								
7	1								
8	1								
9	1								

Az $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ számok

A táblázat

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5				
3	1	3	6	10					
4	1	4	10						
5	1	5							
6	1								
7	1								
8	1								
9	1								

Az $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ számok

A táblázat

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6			
3	1	3	6	10	15				
4	1	4	10	20					
5	1	5	15						
6	1	6							
7	1								
8	1								
9	1								

Az $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ számok

A táblázat

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1	3	6	10	15	21	28	36	45
4	1	4	10	20	35	56	84	120	165
5	1	5	15	35	70	126	210	330	495
6	1	6	21	56	126	252	462	792	1287
7	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003
8	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435
9	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870

Az $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ számok

A táblázat

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1	3	6	10	15	21	28	36	45
4	1	4	10	20	35	56	84	120	165
5	1	5	15	35	70	126	210	330	495
6	1	6	21	56	126	252	462	792	1287
7	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003
8	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435
9	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870

Tétel

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Egy másik rekurzió

Tétel

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right) + \left(\!\binom{n-1}{k-1}\!\right) + \ldots + \left(\!\binom{n-1}{0}\!\right).$$

Egy másik rekurzió

Tétel

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right) + \left(\!\binom{n-1}{k-1}\!\right) + \ldots + \left(\!\binom{n-1}{0}\!\right).$$

Bizonyítás

Az n objektum között az egyiket emeljük ki:

Egy másik rekurzió

Tétel

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n-1}{k-1}\!\!\right) + \ldots + \left(\!\!\binom{n-1}{0}\!\!\right).$$

Bizonyítás

Az n objektum között az egyiket emeljük ki: könyv.

Egy másik rekurzió

Tétel

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right) + \left(\!\binom{n-1}{k-1}\!\right) + \ldots + \left(\!\binom{n-1}{0}\!\right).$$

Bizonyítás

Az n objektum között az egyiket emeljük ki: könyv.
Hány kiválasztás van, ahol pontosan i-szer választjuk ki a könyvet?

$$\left(\!\binom{n-1}{k-i}\!\right).$$

Egy másik rekurzió

Tétel

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right) + \left(\!\binom{n-1}{k-1}\!\right) + \ldots + \left(\!\binom{n-1}{0}\!\right).$$

Bizonyítás

Az n objektum között az egyiket emeljük ki: könyv.
Hány kiválasztás van, ahol pontosan i-szer választjuk ki a könyvet?

$$\left(\!\binom{n-1}{k-i}\!\right).$$

Újból a táblázat

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1								
3	1								

Egy másik rekurzió

Tétel

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right) + \left(\!\binom{n-1}{k-1}\!\right) + \ldots + \left(\!\binom{n-1}{0}\!\right).$$

Bizonyítás

Az n objektum között az egyiket emeljük ki: könyv.
Hány kiválasztás van, ahol pontosan i-szer választjuk ki a könyvet?

$$\left(\!\binom{n-1}{k-i}\!\right).$$

Újból a táblázat

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1								
3	1								

Egy másik rekurzió

Tétel

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right) + \left(\!\binom{n-1}{k-1}\!\right) + \ldots + \left(\!\binom{n-1}{0}\!\right).$$

Bizonyítás

Az n objektum között az egyiket emeljük ki: könyv.
Hány kiválasztás van, ahol pontosan i-szer választjuk ki a könyvet?

$$\left(\!\binom{n-1}{k-i}\!\right).$$

Újból a táblázat

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2							
3	1								

Egy másik rekurzió

Tétel

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n-1}{k-1}\!\!\right) + \ldots + \left(\!\!\binom{n-1}{0}\!\!\right).$$

Bizonyítás

Az n objektum között az egyiket emeljük ki: könyv.
Hány kiválasztás van, ahol pontosan i-szer választjuk ki a könyvet?

$$\left(\!\!\binom{n-1}{k-i}\!\!\right).$$

Újból a táblázat

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1								

Egy másik rekurzió

Tétel

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n-1}{k-1}\!\!\right) + \ldots + \left(\!\!\binom{n-1}{0}\!\!\right).$$

Bizonyítás

Az n objektum között az egyiket emeljük ki: könyv.
Hány kiválasztás van, ahol pontosan i-szer választjuk ki a könyvet?

$$\left(\!\!\binom{n-1}{k-i}\!\!\right).$$

Újból a táblázat

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1	3							

Egy másik rekurzió

Tétel

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right) + \left(\!\binom{n-1}{k-1}\!\right) + \ldots + \left(\!\binom{n-1}{0}\!\right).$$

Bizonyítás

Az n objektum között az egyiket emeljük ki: könyv.
Hány kiválasztás van, ahol pontosan i-szer választjuk ki a könyvet?

$$\left(\!\binom{n-1}{k-i}\!\right).$$

Újból a táblázat

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1	3	6						

Egy másik rekurzió

Tétel

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right) + \left(\!\binom{n-1}{k-1}\!\right) + \ldots + \left(\!\binom{n-1}{0}\!\right).$$

Bizonyítás

Az n objektum között az egyiket emeljük ki: könyv.
Hány kiválasztás van, ahol pontosan i-szer választjuk ki a könyvet?

$$\left(\!\binom{n-1}{k-i}\!\right).$$

Újból a táblázat

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1	3	6	10					

Egy másik rekurzió

Tétel

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n-1}{k-1}\!\!\right) + \ldots + \left(\!\!\binom{n-1}{0}\!\!\right).$$

Bizonyítás

Az n objektum között az egyiket emeljük ki: könyv.
Hány kiválasztás van, ahol pontosan i-szer választjuk ki a könyvet?

$$\left(\!\!\binom{n-1}{k-i}\!\!\right).$$

Újból a táblázat

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1	3	6	10	15				

Egy másik rekurzió

Tétel

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n-1}{k-1}\!\!\right) + \ldots + \left(\!\!\binom{n-1}{0}\!\!\right).$$

Bizonyítás

Az n objektum között az egyiket emeljük ki: könyv.
Hány kiválasztás van, ahol pontosan i-szer választjuk ki a könyvet?

$$\left(\!\!\binom{n-1}{k-i}\!\!\right).$$

Újból a táblázat

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1	3	6	10	15	21			

Egy másik rekurzió

Tétel

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n-1}{k-1}\!\!\right) + \ldots + \left(\!\!\binom{n-1}{0}\!\!\right).$$

Bizonyítás

Az n objektum között az egyiket emeljük ki: könyv.
Hány kiválasztás van, ahol pontosan i-szer választjuk ki a könyvet?

$$\left(\!\!\binom{n-1}{k-i}\!\!\right).$$

Újból a táblázat

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1	3	6	10	15	21	28		

Egy másik rekurzió

Tétel

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n-1}{k-1}\!\!\right) + \ldots + \left(\!\!\binom{n-1}{0}\!\!\right).$$

Bizonyítás

Az n objektum között az egyiket emeljük ki: könyv.
Hány kiválasztás van, ahol pontosan i-szer választjuk ki a könyvet?

$$\left(\!\!\binom{n-1}{k-i}\!\!\right).$$

Újból a táblázat

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1	3	6	10	15	21	28	36	

Egy másik rekurzió

Tétel

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right) + \left(\!\binom{n-1}{k-1}\!\right) + \ldots + \left(\!\binom{n-1}{0}\!\right).$$

Bizonyítás

Az n objektum között az egyiket emeljük ki: könyv.

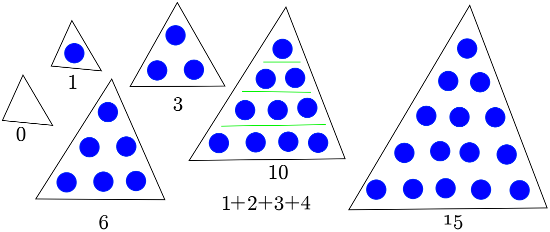
Hány kiválasztás van, ahol pontosan i-szer választjuk ki a könyvet?

$$\left(\!\binom{n-1}{k-i}\!\right).$$

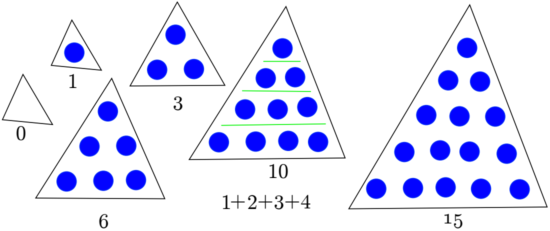
Újból a táblázat

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1	3	6	10	15	21	28	36	45

Háromszögszámok



Háromszögszámok

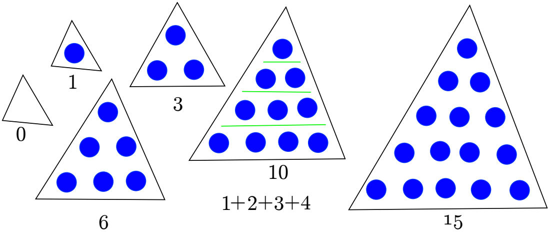


Definíció

Az n paraméterű háromszögszám

$$1+2+3+\ldots+n = \left(\!\!\binom{3}{n-1}\!\!\right) = \binom{n+1}{2} = \frac{n^2+n}{2}.$$

Háromszögszámok



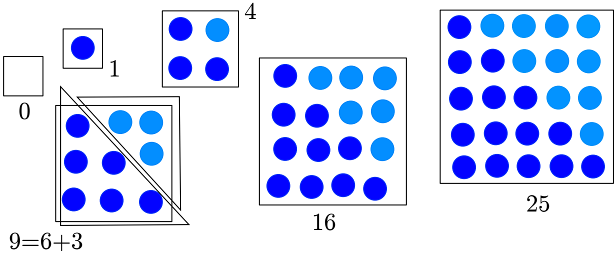
Definíció

Az n paraméterű háromszögszám

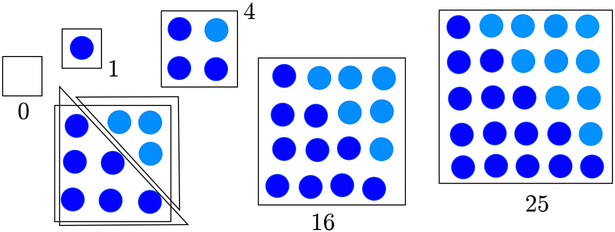
$$1+2+3+\ldots+n=\left(\!\!\binom{3}{n-1}\!\!\right)=\binom{n+1}{2}=\frac{n^2+n}{2}.$$

Jelölés: $\triangle_{n}$.

Négyzetszámok



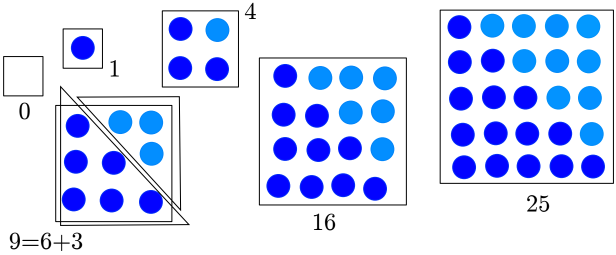
Négyzetszámok



Definíció

Az n paraméterű négyzetszám

$$n + n - 1 = n^2.$$



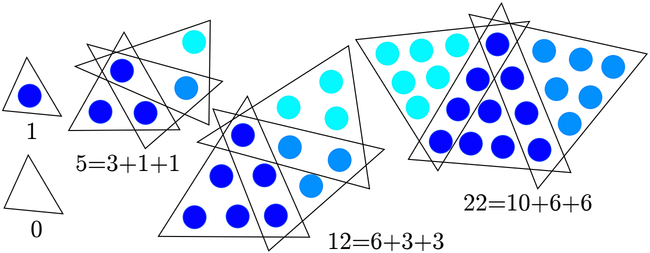
Definíció

Az n paraméterű négyzetszám

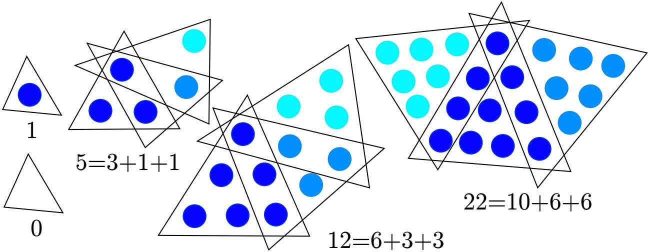
$$\triangle_{n} + \triangle_{n-1} = n^2.$$

Jelölés: $\boxed{n}$.

Ötszögszámok



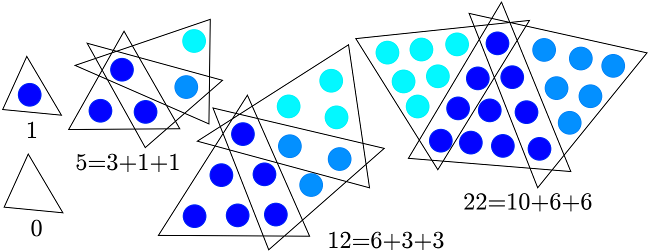
Ötszögszámok



Definíció

Az n paraméterű ötszögszám

$$\triangle_{n} + \triangle_{n-1} + \triangle_{n-1} = \frac{3n^2 - n}{2}.$$



Definíció

Az n paraméterű ötszögszám

$$\triangle_{n} + \triangle_{n-1} + \triangle_{n-1} = \frac{3n^2 - n}{2}.$$

Jelölés: n.

Ötszögszámok

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	0	1	5	12	22	35	51	70	92	145	176

Ötszögszámok

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	0	1	5	12	22	35	51	70	92	145	176

n nem-negatív

Ötszögszámok

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	0	1	5	12	22	35	51	70	92	145	176

n nem-negatív ???

Ötszögszámok

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	0	1	5	12	22	35	51	70	92	145	176

n nem-negatív ??? NEM.

n	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
n	40	26	15	7	2	0	1	5	12	22	35

Összefüggések

Tétel

$$0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \left(\!\!\binom{4}{n-1}\!\!\right)$$

Összefüggések

Tétel

$$\triangle_{0} + \triangle_{1} + \triangle_{2} + \triangle_{3} + \ldots + \triangle_{n} = \left(\!\!\binom{4}{n-1}\!\!\right)$$

Tétel'

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \ldots + \binom{n+1}{2} = \binom{n+2}{3}$$

Összefüggések

Tétel

$$\triangle 0 + \triangle 1 + \triangle 2 + \triangle 3 + \ldots + \triangle n = \left(\!\!\binom{4}{n-1}\!\!\right)$$

Tétel'

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \ldots + \binom{n+1}{2} = \binom{n+2}{3}$$

Következmény

$$\boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3} + \ldots + \boxed{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Definíció

AZ n SZÁM EGY PARTÍCIÓJA

- Természetes számok összegeként való felírása, ahol a tagok sorrendje nem számít.

Definíció

AZ n SZÁM EGY PARTÍCIÓJA

- Természetes számok összegeként való felírása, ahol a tagok sorrendje nem számít.
- Természetes számok összegeként való felírása, ahol a tagok csökkenő/nem növekvő sorrendben vannak.

Definíció

AZ n SZÁM EGY PARTÍCIÓJA

- Természetes számok összegeként való felírása, ahol a tagok sorrendje nem számít.
- Természetes számok összegeként való felírása, ahol a tagok csökkenő/nem növekvő sorrendben vannak.
- Természetes számok egy multihalmaza, amely elemeinek összege n.

Természetes számok partíciói

Definíció

AZ n SZÁM EGY PARTÍCIÓJA

- Természetes számok összegeként való felírása, ahol a tagok sorrendje nem számít.
- Természetes számok összegeként való felírása, ahol a tagok csökkenő/nem növekvő sorrendben vannak.
- Természetes számok egy multihalmaza, amely elemeinek összege n.

Jelölés

$$\lambda \vdash n.$$

6 partíciói

6

6 partíciói

$$6$$
$$5+1$$

6 partíciói

$$6$$
$$5+1$$
$$4+2$$

6 partíciói

$$6$$
$$5+1$$
$$4+2$$
$$4+1+1$$

6 partíciói

$$6$$
$$5+1$$
$$4+2$$
$$4+1+1$$
$$3+3$$

6 partíciói

$$6$$
$$5+1$$
$$4+2$$
$$4+1+1$$
$$3+3$$
$$3+2+1$$

6 partíciói

$$6$$
$$5+1$$
$$4+2$$
$$4+1+1$$
$$3+3$$
$$3+2+1$$
$$3+1+1+1$$

6 partíciói

$$6$$
$$5+1$$
$$4+2$$
$$4+1+1$$
$$3+3$$
$$3+2+1$$
$$3+1+1+1$$
$$2+2+2$$

6 partíciói

$$6$$
$$5+1$$
$$4+2$$
$$4+1+1$$
$$3+3$$
$$3+2+1$$
$$3+1+1+1$$
$$2+2+2$$
$$2+2+1+1$$

6 partíciói

$$6$$
$$5+1$$
$$4+2$$
$$4+1+1$$
$$3+3$$
$$3+2+1$$
$$3+1+1+1$$
$$2+2+2$$
$$2+2+1+1$$
$$2+1+1+1+1$$

6 partíciói

$$
\begin{gathered}
6\\
5+1\\
4+2\\
4+1+1\\
3+3\\
3+2+1\\
3+1+1+1\\
2+2+2\\
2+2+1+1\\
2+1+1+1+1\\
1+1+1+1+1+1
\end{gathered}
$$

8 partíciói

8

8 partíciói

8 $\qquad\qquad$ $7+1$

8 partíciói

$$8 \qquad\qquad 7+1$$
$$6+2$$

8 partíciói

$$8 \qquad\qquad 7+1$$
$$6+2 \qquad\qquad 6+1+1$$

8 partíciói

8	$7+1$
$6+2$	$6+1+1$
$5+3$	$5+2+1$

8 partíciói

$$8 \qquad 7+1$$
$$6+2 \qquad 6+1+1$$
$$5+3 \qquad 5+2+1$$
$$5+1+1+1$$

8 partíciói

$$8 \qquad 7+1$$
$$6+2 \qquad 6+1+1$$
$$5+3 \qquad 5+2+1$$
$$5+1+1+1 \qquad 4+4$$

8 partíciói

$$8$$
$$6+2$$
$$5+3$$
$$5+1+1+1$$
$$4+3+1$$

$$7+1$$
$$6+1+1$$
$$5+2+1$$
$$4+4$$

8 partíciói

$$8$$
$$6+2$$
$$5+3$$
$$5+1+1+1$$
$$4+3+1$$

$$7+1$$
$$6+1+1$$
$$5+2+1$$
$$4+4$$
$$4+2+2$$

8 partíciói

$$8$$
$$6+2$$
$$5+3$$
$$5+1+1+1$$
$$4+3+1$$
$$4+2+1+1$$

$$7+1$$
$$6+1+1$$
$$5+2+1$$
$$4+4$$
$$4+2+2$$

8 partíciói

$$8$$
$$6+2$$
$$5+3$$
$$5+1+1+1$$
$$4+3+1$$
$$4+2+1+1$$

$$7+1$$
$$6+1+1$$
$$5+2+1$$
$$4+4$$
$$4+2+2$$
$$4+1+1+1+1$$

8 partíciói

$$8$$
$$6+2$$
$$5+3$$
$$5+1+1+1$$
$$4+3+1$$
$$4+2+1+1$$
$$3+3+2$$

$$7+1$$
$$6+1+1$$
$$5+2+1$$
$$4+4$$
$$4+2+2$$
$$4+1+1+1+1$$

8 partíciói

$$8$$
$$6+2$$
$$5+3$$
$$5+1+1+1$$
$$4+3+1$$
$$4+2+1+1$$
$$3+3+2$$

$$7+1$$
$$6+1+1$$
$$5+2+1$$
$$4+4$$
$$4+2+2$$
$$4+1+1+1+1$$
$$3+3+1+1$$

8 partíciói

$$8$$
$$6+2$$
$$5+3$$
$$5+1+1+1$$
$$4+3+1$$
$$4+2+1+1$$
$$3+3+2$$
$$3+2+2+1$$

$$7+1$$
$$6+1+1$$
$$5+2+1$$
$$4+4$$
$$4+2+2$$
$$4+1+1+1+1$$
$$3+3+1+1$$

8 partíciói

$$\begin{array}{cc}
8 & 7+1 \\
6+2 & 6+1+1 \\
5+3 & 5+2+1 \\
5+1+1+1 & 4+4 \\
4+3+1 & 4+2+2 \\
4+2+1+1 & 4+1+1+1+1 \\
3+3+2 & 3+3+1+1 \\
3+2+2+1 & 3+2+1+1+1
\end{array}$$

$$8$$
$$6+2$$
$$5+3$$
$$5+1+1+1$$
$$4+3+1$$
$$4+2+1+1$$
$$3+3+2$$
$$3+2+2+1$$
$$3+1+1+1+1+1$$

$$7+1$$
$$6+1+1$$
$$5+2+1$$
$$4+4$$
$$4+2+2$$
$$4+1+1+1+1$$
$$3+3+1+1$$
$$3+2+1+1+1$$

8 partíciói

$$8$$
$$6+2$$
$$5+3$$
$$5+1+1+1$$
$$4+3+1$$
$$4+2+1+1$$
$$3+3+2$$
$$3+2+2+1$$
$$3+1+1+1+1+1$$

$$7+1$$
$$6+1+1$$
$$5+2+1$$
$$4+4$$
$$4+2+2$$
$$4+1+1+1+1$$
$$3+3+1+1$$
$$3+2+1+1+1$$
$$2+2+2+2$$

8 partíciói

$$8$$
$$6+2$$
$$5+3$$
$$5+1+1+1$$
$$4+3+1$$
$$4+2+1+1$$
$$3+3+2$$
$$3+2+2+1$$
$$3+1+1+1+1+1$$
$$2+2+2+1+1$$

$$7+1$$
$$6+1+1$$
$$5+2+1$$
$$4+4$$
$$4+2+2$$
$$4+1+1+1+1$$
$$3+3+1+1$$
$$3+2+1+1+1$$
$$2+2+2+2$$

8 partíciói

$$8$$
$$6+2$$
$$5+3$$
$$5+1+1+1$$
$$4+3+1$$
$$4+2+1+1$$
$$3+3+2$$
$$3+2+2+1$$
$$3+1+1+1+1+1$$
$$2+2+2+1+1$$

$$7+1$$
$$6+1+1$$
$$5+2+1$$
$$4+4$$
$$4+2+2$$
$$4+1+1+1+1$$
$$3+3+1+1$$
$$3+2+1+1+1$$
$$2+2+2+2$$
$$2+2+1+1+1+1+1$$

8 partíciói

$$8$$
$$6+2$$
$$5+3$$
$$5+1+1+1$$
$$4+3+1$$
$$4+2+1+1$$
$$3+3+2$$
$$3+2+2+1$$
$$3+1+1+1+1+1$$
$$2+2+2+1+1$$
$$2+1+1+1+1+1+1$$

$$7+1$$
$$6+1+1$$
$$5+2+1$$
$$4+4$$
$$4+2+2$$
$$4+1+1+1+1$$
$$3+3+1+1$$
$$3+2+1+1+1$$
$$2+2+2+2$$
$$2+2+1+1+1+1+1$$

8 partíciói

8	$7+1$
$6+2$	$6+1+1$
$5+3$	$5+2+1$
$5+1+1+1$	$4+4$
$4+3+1$	$4+2+2$
$4+2+1+1$	$4+1+1+1+1$
$3+3+2$	$3+3+1+1$
$3+2+2+1$	$3+2+1+1+1$
$3+1+1+1+1+1$	$2+2+2+2$
$2+2+2+1+1$	$2+2+1+1+1+1$
$2+1+1+1+1+1+1$	$1+1+1+1+1+1+1+1$

A $p(n)$ számok

Definíció

- $p(n)$ az n szám partícióinak száma.

A $p(n)$ számok

Definíció

- $p(n)$ az n szám partícióinak száma.
- Legyen $P(n) = \{\lambda : \lambda \vdash n\}$.

A $p(n)$ számok

Definíció

- $p(n)$ az n szám partícióinak száma.
- Legyen $P(n) = \{\lambda : \lambda \vdash n\}$.
  Legyen $p(n) = |P(n)|$.

A $p(n)$ számok

Definíció

- $p(n)$ az n szám partícióinak száma.
- Legyen $P(n) = \{\lambda : \lambda \vdash n\}$.
  Legyen $p(n) = |P(n)|$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p(n)	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42

Végtelen polinomok ???

Polinomok definíciója

VÉGES sok monom összege.

Végtelen polinomok ???

Polinomok definíciója

VÉGES sok monom összege.

Monom $\equiv$ Egytagú kifejezés

Polinom $\equiv$ Többtagú kifejezés

Végtelen polinomok ???

Polinomok definíciója

VÉGES sok monom összege.

Monom	$\equiv$	Egytagú kifejezés
Polinom	$\equiv$	Többtagú kifejezés

Formális hatványsorok definíciója

Monomok összege.

Újból egy polinom szorzás

Feladat

Írjuk fel a következő polinom-szorzat első KILENC (fokszám szerinti növekvő sorrendben) monomját

$$
\begin{aligned}
&(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+\ldots)\cdot \\
&\quad\cdot(1+x^2+x^4+x^6+x^8+\ldots)\cdot(1+x^3+x^6+x^9+\ldots)\cdot \\
&\quad\cdot(1+x^4+x^8+x^{12}+\ldots)\cdot(1+x^5+x^{10}+\ldots)\cdot \\
&\quad\cdot(1+x^6+x^{12}+\ldots)\cdot\cdot(1+x^7+x^{14}+\ldots)\cdot \\
&\quad\cdot(1+x^8+x^{16}+\ldots)\cdot(1+x^9+x^{18}+\ldots)\cdot\ldots
\end{aligned}
$$

Újból egy polinom szorzás

Feladat

Írjuk fel a következő polinom-szorzat első KILENC (fokszám szerinti növekvő sorrendben) monomját

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+\dots)\cdot$$
$$\cdot(1+x^2+x^4+x^6+x^8+\dots)\cdot(1+x^3+x^6+x^9+\dots)\cdot$$
$$\cdot(1+x^4+x^8+x^{12}+\dots)\cdot(1+x^5+x^{10}+\dots)\cdot$$
$$\cdot(1+x^6+x^{12}+\dots)\cdot\cdot(1+x^7+x^{14}+\dots)\cdot$$
$$\cdot(1+x^8+x^{16}+\dots)\cdot(1+x^9+x^{18}+\dots)\cdot\dots$$

Megoldás

$$1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+11x^6+15x^7+22x^8+\dots$$

$p(n)$ számok generátorfüggvénye

Euler tétele

$$
\begin{aligned}
p(0) &+ p(1)x + p(2)x^2 + p(3)x^3 + p(4)x^4 + p(5)x^5 + \ldots = \\
&= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + \ldots)\cdot \\
&\quad \cdot (1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \ldots) \cdot (1 + x^3 + x^6 + x^9 + \ldots)\cdot \\
&\quad \cdot (1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \ldots) \cdot (1 + x^5 + x^{10} + \ldots)\cdot \\
&\quad \cdot (1 + x^6 + x^{12} + \ldots) \cdot \cdot (1 + x^7 + x^{14} + \ldots)\cdot \\
&\quad \cdot (1 + x^8 + x^{16} + \ldots) \cdot (1 + x^9 + x^{18} + \ldots) \cdot \ldots = \\
&= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^4} \cdot \ldots \\
&= \frac{1}{(1-x)\cdot(1-x^2)\cdot(1-x^3)\cdot(1-x^4)\cdot\ldots}
\end{aligned}
$$

Mi is volt az előző tört nevezője?

Mi is volt az előző tört nevezője?

$$(1-x)\cdot(1-x^2)\cdot(1-x^3)\cdot(1-x^4)\cdot(1-x^5)\cdot(1-x^6)\cdot(1-x^7)\cdot\ldots$$

Mi is volt az előző tört nevezője?

$$(1-x)\cdot(1-x^2)\cdot(1-x^3)\cdot(1-x^4)\cdot(1-x^5)\cdot(1-x^6)\cdot(1-x^7)\cdot\ldots$$

FELADAT

Fejtsük ki a szorzat tagjait x^{50} monomig bezárólag.

Mi is volt az előző tört nevezője?

$$(1-x)\cdot(1-x^2)\cdot(1-x^3)\cdot(1-x^4)\cdot(1-x^5)\cdot(1-x^6)\cdot(1-x^7)\cdot\ldots$$

FELADAT

Fejtsük ki a szorzat tagjait x^{50} monomig bezárólag.

Megoldás

$$1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+\ldots$$

Egy újabb Euler-tétel

Euler tétele

$$(1-x)\cdot(1-x^2)\cdot(1-x^3)\cdot(1-x^4)\cdot(1-x^5)\cdot(1-x^6)\cdot\ldots=$$

Egy újabb Euler-tétel

Euler tétele

$$(1-x)\cdot(1-x^2)\cdot(1-x^3)\cdot(1-x^4)\cdot(1-x^5)\cdot(1-x^6)\cdot\ldots =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n x^{n} \ .$$

Euler tétele

$$(1-x)\cdot(1-x^2)\cdot(1-x^3)\cdot(1-x^4)\cdot(1-x^5)\cdot(1-x^6)\cdot\ldots =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n x^{n}\ .$$

Bizonyítás

Egyetemi tananyag.

6 partíciói különböző tagokkal

$$6$$
$$5+1$$
$$4+2$$
$$4+1+1$$
$$3+3$$
$$3+2+1$$
$$3+1+1+1$$
$$2+2+2$$
$$2+2+1+1$$
$$2+1+1+1+1$$
$$1+1+1+1+1+1$$

6 partíciói különböző tagokkal

$$6$$
$$5+1$$
$$4+2$$
$$4+1+1$$
$$3+3$$
$$3+2+1$$
$$3+1+1+1$$
$$2+2+2$$
$$2+2+1+1$$
$$2+1+1+1+1$$
$$1+1+1+1+1+1$$

4 darab

6 partíciói páratlan tagokkal

$$6$$
$$5 + 1$$
$$4 + 2$$
$$4 + 1 + 1$$
$$3 + 3$$
$$3 + 2 + 1$$
$$3 + 1 + 1 + 1$$
$$2 + 2 + 2$$
$$2 + 2 + 1 + 1$$
$$2 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

6 partíciói páratlan tagokkal

$$6$$
$$5+1$$
$$4+2$$
$$4+1+1$$
$$3+3$$
$$3+2+1$$
$$3+1+1+1$$
$$2+2+2$$
$$2+2+1+1$$
$$2+1+1+1+1$$
$$1+1+1+1+1+1$$

4 darab

8 partíciói különböző tagokkal

$$8$$
$$6+2$$
$$5+3$$
$$5+1+1+1$$
$$4+3+1$$
$$4+2+1+1$$
$$3+3+2$$
$$3+2+2+1$$
$$3+1+1+1+1+1$$
$$2+2+2+1+1$$
$$2+1+1+1+1+1+1$$

$$7+1$$
$$6+1+1$$
$$5+2+1$$
$$4+4$$
$$4+2+2$$
$$4+1+1+1+1$$
$$3+3+1+1$$
$$3+2+1+1+1$$
$$2+2+2+2$$
$$2+2+1+1+1+1$$
$$1+1+1+1+1+1+1+1$$

8 partíciói különböző tagokkal

8	$7+1$
$6+2$	$6+1+1$
$5+3$	$5+2+1$
$5+1+1+1$	$4+4$
$4+3+1$	$4+2+2$
$4+2+1+1$	$4+1+1+1+1$
$3+3+2$	$3+3+1+1$
$3+2+2+1$	$3+2+1+1+1$
$3+1+1+1+1+1$	$2+2+2+2$
$2+2+2+1+1$	$2+2+1+1+1+1$
$2+1+1+1+1+1+1$	$1+1+1+1+1+1+1+1$

6 darab

8 partíciói páratlan tagokkal

8	$7+1$
$6+2$	$6+1+1$
$5+3$	$5+2+1$
$5+1+1+1$	$4+4$
$4+3+1$	$4+2+2$
$4+2+1+1$	$4+1+1+1+1$
$3+3+2$	$3+3+1+1$
$3+2+2+1$	$3+2+1+1+1$
$3+1+1+1+1+1$	$2+2+2+2$
$2+2+2+1+1$	$2+2+1+1+1+1$
$2+1+1+1+1+1+1$	$1+1+1+1+1+1+1+1$

8 partíciói páratlan tagokkal

8	$7+1$
$6+2$	$6+1+1$
$5+3$	$5+2+1$
$5+1+1+1$	$4+4$
$4+3+1$	$4+2+2$
$4+2+1+1$	$4+1+1+1+1$
$3+3+2$	$3+3+1+1$
$3+2+2+1$	$3+2+1+1+1$
$3+1+1+1+1+1$	$2+2+2+2$
$2+2+2+1+1$	$2+2+1+1+1+1$
$2+1+1+1+1+1+1$	$1+1+1+1+1+1+1+1$

6 darab

Újabb Euler-tétel

Euler tétele

- Egy tetszőleges n számnak a páratlan tagokra történő partícióinak száma megegyezik a különböző tagokra történő partícióinak számával.

Újabb Euler-tétel

Euler tétele

- Egy tetszőleges n számnak a páratlan tagokra történő partícióinak száma megegyezik a különböző tagokra történő partícióinak számával.
- Legyen $P_{\text{kül}}(n) = \{\lambda : \lambda \vdash n \ \lambda \text{ tagjai különbözőek}\}$.
  Legyen $P_{\text{páratlan}}(n) = \{\lambda : \lambda \vdash n \ \lambda \text{ tagjai páratlanok}\}$.

Újabb Euler-tétel

Euler tétele

- Egy tetszőleges n számnak a páratlan tagokra történő partícióinak száma megegyezik a különböző tagokra történő partícióinak számával.
- Legyen $P_{\text{kül}}(n) = \{\lambda : \lambda \vdash n\ \lambda \text{ tagjai különbözőek}\}$.
  Legyen $P_{\text{páratlan}}(n) = \{\lambda : \lambda \vdash n\ \lambda \text{ tagjai páratlanok}\}$.

  Legyen $p_{\text{kül}}(n) = |P_{\text{kül}}(n)|$ és $p_{\text{ptlan}}(n) = |P_{\text{ptlan}}(n)|$.

Újabb Euler-tétel

Euler tétele

- Egy tetszőleges n számnak a páratlan tagokra történő partícióinak száma megegyezik a különböző tagokra történő partícióinak számával.
- Legyen $P_{\text{kül}}(n) = \{\lambda : \lambda \vdash n\ \lambda \text{ tagjai különbözőek}\}$.
  Legyen $P_{\text{páratlan}}(n) = \{\lambda : \lambda \vdash n\ \lambda \text{ tagjai páratlanok}\}$.

  Legyen $p_{\text{kül}}(n) = |P_{\text{kül}}(n)|$ és $p_{\text{ptlan}}(n) = |P_{\text{ptlan}}(n)|$.

  Ekkor tetszőleges n természetes szám esetén

$$p_{\text{kül}}(n) = p_{\text{ptlan}}(n).$$

Bizonyítás: példa, $n = 8$

$P_{\text{ptlan}}(8)$:

$$7 + 1$$

$$5 + 3$$

$$5 + 1 + 1 + 1$$

$$3 + 3 + 1 + 1$$

$$3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

Bizonyítás: példa, $n = 8$

$P_{\text{ptlan}}(8)$:

$$7 + 1$$

$$5 + 3$$

$$5 + 3 \times 1$$

$$2 \times 3 + 2 \times 1$$

$$3 + 5 \times 1$$

$$8 \times 1$$

Bizonyítás: példa, $n = 8$

$P_{\text{ptlan}}(8)$:

$$7 + 1$$

$$5 + 3$$

$$5 + (2 + 1) \times 1$$

$$2 \times 3 + 2 \times 1$$

$$3 + (2^2 + 1) \times 1$$

$$2^3 \times 1$$

Bizonyítás: példa, $n = 8$

$P_{\text{kül}}(8)$:

$$7 + 1$$

$$5 + 3$$

$$5 + 2 \cdot 1 + 1$$

$$2 \cdot 3 + 2 \cdot 1$$

$$3 + 2^2 \cdot 1 + 1$$

$$2^3 \cdot 1$$

Bizonyítás: példa, $n = 8$

$P_{\text{kül}}(8)$:

$$7 + 1$$

$$5 + 3$$

$$5 + 2 + 1$$

$$6 + 2$$

$$3 + 4 + 1$$

$$8$$

Köszönöm a figyelmet