

Legyünk igazságosak

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

~~2020. március 28.~~

2023. április 15.

Miért?

Miért?

Az igazságtalanság demotivál.

Az igazságtalanság demotivál.

Más indok nem is nagyon kell. A motiváció és a motiváció fenntartása az oktatás kulcskérdése.

Miért?

Az igazságtalanság demotivál.

Más indok nem is nagyon kell. A motiváció és a motiváció fenntartása az oktatás kulcskérdése.

Azért még egy indok jó lenne.

Az igazságtalanság demotivál.

Más indok nem is nagyon kell. A motiváció és a motiváció fenntartása az oktatás kulcskérdése.

Azért még egy indok jó lenne.

Az igazságosság vizsgálata érdekes matematikai fejtörőkhöz, sőt elméletekhez vezet.

Egy vicc

Egy nagy darab és egy kicsi ember együtt étterembe mennek és egy-egy halat rendelnek.

Egy nagy darab és egy kicsi ember együtt étterembe mennek és egy-egy halat rendelnek.

A pincér egy tálcán ki hoz két tányért, amin egy tányéron egy nagy hal, egy másik tányéron egy kis hal van. Majd a tálcát az asztal közepére helyezi.

Egy nagy darab és egy kicsi ember együtt étterembe mennek és egy-egy halat rendelnek.

A pincér egy tálcán ki hoz két tányért, amin egy tányéron egy nagy hal, egy másik tányéron egy kis hal van. Majd a tálcát az asztal közepére helyezi.

A nagy darab ember gondolkodás nélkül megfogja a nagy halas tányért és maga elé rakja.

Egy nagy darab és egy kicsi ember együtt étterembe mennek és egy-egy halat rendelnek.

A pincér egy tálcán ki hoz két tányért, amin egy tányéron egy nagy hal, egy másik tányéron egy kis hal van. Majd a tálcát az asztal közepére helyezi.

A nagy darab ember gondolkodás nélkül megfogja a nagy halas tányért és maga elé rakja.

A kis ember megjegyzi: „Ez nagyon nem volt fair.”

Egy nagy darab és egy kicsi ember együtt étterembe mennek és egy-egy halat rendelnek.

A pincér egy tálcán ki hoz két tányért, amin egy tányéron egy nagy hal, egy másik tányéron egy kis hal van. Majd a tálcát az asztal közepére helyezi.

A nagy darab ember gondolkodás nélkül megfogja a nagy halas tányért és maga elé rakja.

A kis ember megjegyzi: „Ez nagyon nem volt fair.”

A nagy ember visszaszól: „Jól van. Tegyük fel, hogy te választasz először. Melyiket vennéd el a fair módon?”

Egy nagy darab és egy kicsi ember együtt étterembe mennek és egy-egy halat rendelnek.

A pincér egy tálcán ki hoz két tányért, amin egy tányéron egy nagy hal, egy másik tányéron egy kis hal van. Majd a tálcát az asztal közepére helyezi.

A nagy darab ember gondolkodás nélkül megfogja a nagy halas tányért és maga elé rakja.

A kis ember megjegyzi: „Ez nagyon nem volt fair.”

A nagy ember visszaszól: „Jól van. Tegyük fel, hogy te választasz először. Melyiket vennéd el a fair módon?”

A kis ember elgondolkozik és kis idő után azt mondja: „A kicsit.”

Egy nagy darab és egy kicsi ember együtt étterembe mennek és egy-egy halat rendelnek.

A pincér egy tálcán ki hoz két tányért, amin egy tányéron egy nagy hal, egy másik tányéron egy kis hal van. Majd a tálcat az asztal közepére helyezi.

A nagy darab ember gondolkodás nélkül megfogja a nagy halas tányért és maga elé rakja.

A kis ember megjegyzi: „Ez nagyon nem volt fair.”

A nagy ember visszaszól: „Jól van. Tegyük fel, hogy te választasz először. Melyiket vennéd el a fair módon?”

A kis ember elgondolkozik és kis idő után azt mondja: „A kicsit.”

A nagy darab válasza: „Na ez történt.”

Az igazságosság etimológiája

Igazságos +:

Az igazságosság etimológiája

Igazságos +: méltó,

Az igazságosság etimológiája

Igazságos +: méltó, érdemes,

Az igazságosság etimológiája

Igazságos +: méltó, érdemes, megérdemelt

Az igazságosság etimológiája

Igazságos +: méltó, érdemes, megérdemelt

Igazságos –:

Az igazságosság etimológiája

Igazságos +: méltó, érdemes, megérdemelt

Igazságos –: egyoldalú,

Az igazságosság etimológiája

Igazságos +: méltó, érdemes, megérdemelt

Igazságos –: egyoldalú, elfogódott,

Az igazságosság etimológiája

Igazságos +: méltó, érdemes, megérdemelt

Igazságos -: egyoldalú, elfogódott, elfogult,

Az igazságosság etimológiája

Igazságos +: méltó, érdemes, megérdemelt

Igazságos –: egyoldalú, elfogódott, elfogult, méltánytalan,

Az igazságosság etimológiája

Igazságos +: méltó, érdemes, megérdemelt

Igazságos –: egyoldalú, elfogódott, elfogult, méltánytalan,
részhajló

Az igazságosság etimológiája

Igazságos +: méltó, érdeemes, megérdemelt

Igazságos –: egyoldalú, elfogódott, elfogult, méltánytalan,
részhajló

Igazságosság:

Az igazságosság etimológiája

Igazságos +: méltó, érdemes, megérdemelt

Igazságos –: egyoldalú, elfogódott, elfogult, méltánytalan, részrehajló

Igazságosság: korrektség,

Az igazságosság etimológiája

Igazságos +: méltó, érdemes, megérdemelt

Igazságos –: egyoldalú, elfogódott, elfogult, méltánytalan,
részhajló

Igazságosság: korrektség, pártatlanság,

Az igazságosság etimológiája

Igazságos +: méltó, érdemes, megérdemelt

Igazságos –: egyoldalú, elfogódott, elfogult, méltánytalan, részrehajló

Igazságosság: korrektség, pártatlanság, becsületesség,

Az igazságosság etimológiája

Igazságos +: méltó, érdemes, megérdemelt

Igazságos –: egyoldalú, elfogódott, elfogult, méltánytalan,
részhajló

Igazságosság: korrektség, pártatlanság, becsületesség, tökéletesség,

Az igazságosság etimológiája

Igazságos +: méltó, érdemes, megérdemelt

Igazságos –: egyoldalú, elfogódott, elfogult, méltánytalan,
részhajló

Igazságosság: korrektség, pártatlanság, becsületesség, tökéletesség,
szépség,

Az igazságosság etimológiája

Igazságos +: méltó, érdeemes, megérdemelt

Igazságos -: egyoldalú, elfogódott, elfogult, méltánytalan, részrehajló

Igazságosság: korrektség, pártatlanság, becsületesség, tökéletesség, szépség, méltányosság

Az igazságosság etimológiája

Igazságos +: méltó, érdeemes, megérdemelt

Igazságos -: egyoldalú, elfogódott, elfogult, méltánytalan,
részhajló

Igazságosság: korrektség, pártatlanság, becsületesség, tökéletesség,
szépség, méltányosság

Igazságos (angol):

Az igazságosság etimológiája

Igazságos +: méltó, érdeemes, megérdemelt

Igazságos –: egyoldalú, elfogódott, elfogult, méltánytalan, részrehajló

Igazságosság: korrektség, pártatlanság, becsületesség, tökéletesség, szépség, méltányosság

Igazságos (angol): honest,

Az igazságosság etimológiája

Igazságos +: méltó, érdeemes, megérdemelt

Igazságos -: egyoldalú, elfogódott, elfogult, méltánytalan, részrehajló

Igazságosság: korrektség, pártatlanság, becsületesség, tökéletesség, szépség, méltányosság

Igazságos (angol): honest, straight forward,

Az igazságosság etimológiája

Igazságos +: méltó, érdeemes, megérdemelt

Igazságos -: egyoldalú, elfogódott, elfogult, méltánytalan, részrehajló

Igazságosság: korrektség, pártatlanság, becsületesség, tökéletesség, szépség, méltányosság

Igazságos (angol): honest, straight forward, fair and square

Az igazságosság etimológiája

Igazságos +: méltó, érdeemes, megérdemelt

Igazságos -: egyoldalú, elfogódott, elfogult, méltánytalan, részrehajló

Igazságosság: korrektség, pártatlanság, becsületesség, tökéletesség, szépség, méltányosság

Igazságos (angol): honest, straight forward, fair and square

Igazságos (latin):

Az igazságosság etimológiája

Igazságos +: méltó, érdeemes, megérdemelt

Igazságos -: egyoldalú, elfogódott, elfogult, méltánytalan, részrehajló

Igazságosság: korrektség, pártatlanság, becsületesség, tökéletesség, szépség, méltányosság

Igazságos (angol): honest, straight forward, fair and square

Igazságos (latin): veritas, veritatis f

Az igazságosság etimológiája

Igazságos +: méltó, érdeemes, megérdemelt

Igazságos -: egyoldalú, elfogódott, elfogult, méltánytalan, részrehajló

Igazságosság: korrektség, pártatlanság, becsületesség, tökéletesség, szépség, méltányosság

Igazságos (angol): honest, straight forward, fair and square

Igazságos (latin): veritas, veritatis f (Amicus Plato, sed magis amica veritas.)

Az igazságosság etimológiája

Igazságos +: méltó, érdeemes, megérdemelt

Igazságos -: egyoldalú, elfogódott, elfogult, méltánytalan, részrehajló

Igazságosság: korrektség, pártatlanság, becsületesség, tökéletesség, szépség, méltányosság

Igazságos (angol): honest, straight forward, fair and square

Igazságos (latin): veritas, veritatis f (Amicus Plato, sed magis amica veritas.)

Érme/kocka dobásánál +:

Az igazságosság etimológiája

Igazságos +: méltó, érdeemes, megérdemelt

Igazságos –: egyoldalú, elfogódott, elfogult, méltánytalan, részrehajló

Igazságosság: korrektség, pártatlanság, becsületesség, tökéletesség, szépség, méltányosság

Igazságos (angol): honest, straight forward, fair and square

Igazságos (latin): veritas, veritatis f (Amicus Plato, sed magis amica veritas.)

Érme/kocka dobásánál +: szabályos,

Az igazságosság etimológiája

Igazságos +: méltó, érdeemes, megérdemelt

Igazságos -: egyoldalú, elfogódott, elfogult, méltánytalan, részrehajló

Igazságosság: korrektség, pártatlanság, becsületesség, tökéletesség, szépség, méltányosság

Igazságos (angol): honest, straight forward, fair and square

Igazságos (latin): veritas, veritatis f (Amicus Plato, sed magis amica veritas.)

Érme/kocka dobásánál +: szabályos, homogén

Az igazságosság etimológiája

Igazságos +: méltó, érdeemes, megérdemelt

Igazságos -: egyoldalú, elfogódott, elfogult, méltánytalan, részrehajló

Igazságosság: korrektség, pártatlanság, becsületesség, tökéletesség, szépség, méltányosság

Igazságos (angol): honest, straight forward, fair and square

Igazságos (latin): veritas, veritatis f (Amicus Plato, sed magis amica veritas.)

Érme/kocka dobásánál +: szabályos, homogén uniform

Az igazságosság etimológiája

Igazságos +: méltó, érdeemes, megérdemelt

Igazságos –: egyoldalú, elfogódott, elfogult, méltánytalan, részrehajló

Igazságosság: korrektség, pártatlanság, becsületesség, tökéletesség, szépség, méltányosság

Igazságos (angol): honest, straight forward, fair and square

Igazságos (latin): veritas, veritatis f (Amicus Plato, sed magis amica veritas.)

Érme/kocka dobásánál +: szabályos, homogén uniform

Érme/kocka dobásánál –:

Az igazságosság etimológiája

Igazságos +: méltó, érdeemes, megérdemelt

Igazságos -: egyoldalú, elfogódott, elfogult, méltánytalan, részrehajló

Igazságosság: korrektség, pártatlanság, becsületesség, tökéletesség, szépség, méltányosság

Igazságos (angol): honest, straight forward, fair and square

Igazságos (latin): veritas, veritatis f (Amicus Plato, sed magis amica veritas.)

Érme/kocka dobásánál +: szabályos, homogén uniform

Érme/kocka dobásánál -: cinkelt

Történeti példák: Ábrahám és Lót [Mózes I. könyve 13. rész]

Történeti példák: Ábrahám és Lót [Mózes I. könyve 13. rész]

8. Monda azért Ábrám Lótnak: Ne legyen versengés közöttem és közötted, se az én pásztoraim között és a te pásztoraid között: hiszen atyafiai vagyunk.

Történeti példák: Ábrahám és Lót [Mózes I. könyve 13. rész]

8. Monda azért Ábrám Lótnak: Ne legyen versengés közöttem és közötted, se az én pásztoraim között és a te pásztoraid között: hiszen atyafiak vagyunk.

9. Avagy nincsen-é előtted mind az egész föld? Válg el kérek, tőlem; ha te balra tartasz, én jobbra megyek; ha te jobbra menédsz, én balra térek.

Történeti példák: Ábrahám és Lót [Mózes I. könyve 13. rész]

8. Monda azért Ábrám Lótnak: Ne legyen versengés közöttem és közötted, se az én pásztoraim között és a te pásztoraid között: hiszen atyafiak vagyunk.
9. Avagy nincsen-é előtted mind az egész föld? Válg el kérlek, tőlem; ha te balra tartasz, én jobbra megyek; ha te jobbra menédesz, én balra térek.
10. Felemelé azért Lót az ő szemeit, és látá, hogy a Jordán egész melléke bővizű föld; mert minekelőtte elvesztette volna az Úr Sodomát és Gomorát, mind Czoárig olyan vala az, mint az Úr kertje, mint Égyiptom földje.

Történeti példák: Ábrahám és Lót [Mózes I. könyve 13. rész]

8. Monda azért Ábrám Lótnak: Ne legyen versengés közöttem és közötted, se az én pásztoraim között és a te pásztoraid között: hiszen atyafiak vagyunk.
9. Avagy nincsen-é előtted mind az egész föld? Válg el kérlek, tőlem; ha te balra tartasz, én jobbra megyek; ha te jobbra menédsz, én balra térek.
10. Felemelé azért Lót az ő szemeit, és látá, hogy a Jordán egész melléke bővizű föld; mert minekelőtte elvesztette volna az Úr Sodomát és Gomorát, mind Czoárig olyan vala az, mint az Úr kertje, mint Égyiptom földje.
11. És választá Lót magának a Jordán egész mellékét, és elköltözék Lót kelet felé: és elválának egymástól.

Történeti példák: Ábrahám és Lót [Mózes I. könyve 13. rész]

8. Monda azért Ábrám Lótnak: Ne legyen versengés közöttem és közötted, se az én pásztoraim között és a te pásztoraid között: hiszen atyafiak vagyunk.
9. Avagy nincsen-é előtted mind az egész föld? Válj el kérlek, tőlem; ha te balra tartasz, én jobbra megyek; ha te jobbra menédsz, én balra térek.
10. Felemelé azért Lót az ő szemeit, és látá, hogy a Jordán egész melléke bővizű föld; mert minekelőtte elvesztette volna az Úr Sodomát és Gomorát, mind Czoárig olyan vala az, mint az Úr kertje, mint Égyiptom földje.
11. És választá Lót magának a Jordán egész mellékét, és elköltözék Lót kelet felé: és elválának egymástól.
12. Ábrám lakozik vala a Kanaán földén, Lót pedig lakozik vala a Jordán-melléki városokban, és sátoroz vala Sodomáig.

Történeti példák: Salamoni döntés

Történeti példák: Salamoni döntés

Miután mindkét nő hosszan hajtogatta, hogy az élő gyerek a sajátja, a király hozatott egy kardot azzal, hogy ketté fogja vágatni az élő gyermeket, mert úgy lesz igazságos, ha a két nő a fele-felet kapja.

Történeti példák: Salamoni döntés

Miután mindkét nő hosszan hajtogatta, hogy az élő gyerek a sajátja, a király hozatott egy kardot azzal, hogy ketté fogja vágatni az élő gyermeket, mert úgy lesz igazságos, ha a két nő a fele-felet kapja.

„Se enyim, se tied ne legyen; vágjátok ketté” – egyezett bele az a nő, amelyiknek a fia meghalt, a gyerek anyja azonban ijedten tiltakozott, mondván hogy inkább adják az élő gyermeket annak, akié meghalt.

Történeti példák: Salamoni döntés

Miután mindkét nő hosszan hajtogatta, hogy az élő gyerek a sajátja, a király hozatott egy kardot azzal, hogy ketté fogja vágatni az élő gyermeket, mert úgy lesz igazságos, ha a két nő a fele-felet kapja.

„Se enyim, se tied ne legyen; vágjátok ketté” – egyezett bele az a nő, amelyiknek a fia meghalt, a gyerek anyja azonban ijedten tiltakozott, mondván hogy inkább adják az élő gyermeket annak, akié meghalt.

Ebből Salamon kitalálta, hogy mi az igazság, és a gyermeket visszaadta az igazi anyának.

Bemelegítő példa: Cinkelt érmével igazságos érme-feldobás

A probléma

Adott egy cinkelt érme.

A probléma

Adott egy cinkelt érme. p valószínűséggel FEJ,

A probléma

Adott egy cinkelt érme. p valószínűséggel FEJ, $1 - p$ valószínűséggel ÍRÁS.

A probléma

Adott egy cinkelt érme. p valószínűséggel FEJ, $1 - p$ valószínűséggel ÍRÁS. Feltesszük, hogy $p \neq \frac{1}{2}$, $0 \ll p \ll 1$.

A probléma

Adott egy cinkelt érme. p valószínűséggel FEJ, $1 - p$ valószínűséggel ÍRÁS. Feltesszük, hogy $p \neq \frac{1}{2}$, $0 \ll p \ll 1$.

Csupán ezen érme segítségével generáljunk egy igazságos (fifty-fifty) „érmédobást”.

A probléma

Adott egy cinkelt érme. p valószínűséggel FEJ, $1 - p$ valószínűséggel ÍRÁS. Feltesszük, hogy $p \neq \frac{1}{2}$, $0 \ll p \ll 1$.

Csupán ezen érme segítségével generáljunk egy igazságos (fifty-fifty) „érmédobást”.

Dobjuk fel az érmét egymásután kétszer.

A probléma

Adott egy cinkelt érme. p valószínűséggel FEJ, $1 - p$ valószínűséggel ÍRÁS. Feltesszük, hogy $p \neq \frac{1}{2}$, $0 \ll p \ll 1$.

Csupán ezen érme segítségével generáljunk egy igazságos (fifty-fifty) „érmédobást”.

Dobjuk fel az érmét egymásután kétszer.

$$\mathbb{P}(\text{FEJ}, \text{FEJ}) = p^2, \quad \mathbb{P}(\text{ÍRÁS}, \text{ÍRÁS}) = (1 - p)^2$$

A probléma

Adott egy cinkelt érme. p valószínűséggel FEJ, $1 - p$ valószínűséggel ÍRÁS. Feltesszük, hogy $p \neq \frac{1}{2}$, $0 \ll p \ll 1$.

Csupán ezen érme segítségével generáljunk egy igazságos (fifty-fifty) „érmédobást”.

Dobjuk fel az érmét egymásután kétszer.

$$\mathbb{P}(\text{FEJ}, \text{FEJ}) = p^2, \quad \mathbb{P}(\text{ÍRÁS}, \text{ÍRÁS}) = (1 - p)^2$$

$$\mathbb{P}(\text{FEJ}, \text{ÍRÁS}) = p(1 - p) = (1 - p)p = \mathbb{P}(\text{ÍRÁS}, \text{FEJ}).$$

Bemelegítő példa: A megoldás

Bemelegítő példa: A megoldás

- Dobjuk fel az érmét kétszer egymás után.

- Dobjuk fel az érmét kétszer egymás után.
- Ha mindkétszer ugyanaz jött ki (FEJ,FEJ vagy ÍRÁS,ÍRÁS), akkor ezt a két dobást „felejtsük el”. Kezdjük újra az eljárást.

Bemelegítő példa: A megoldás

- Dobjuk fel az érmét kétszer egymás után.
- Ha mindkétszer ugyanaz jött ki (FEJ,FEJ vagy ÍRÁS,ÍRÁS), akkor ezt a két dobást „felejtjük el”. Kezdjük újra az eljárást.
- Ha nem ugyanaz jött ki (ÍRÁS,FEJ vagy FEJ,ÍRÁS), akkor ezt a két dobás dönt el mindent:

- Dobjuk fel az érmét kétszer egymás után.
- Ha mindkétszer ugyanaz jött ki (FEJ,FEJ vagy ÍRÁS,ÍRÁS), akkor ezt a két dobást „felejtsük el”. Kezdjük újra az eljárást.
- Ha nem ugyanaz jött ki (ÍRÁS,FEJ vagy FEJ,ÍRÁS), akkor ezt a két dobás dönt el mindent: A két dobás eredménye közül az elsőt jelentsük be mint végkimenetel:
 - ÍRÁS,FEJ esetén "ÍRÁS" lesz az eredmény.
 - FEJ,ÍRÁS esetén "FEJ" lesz az eredmény.

A feladat [1990. évi Kürschák verseny]

100 gyerek között egy nem szabályos érme többszöri feldobásával szeretnénk egy ajándékot kisorsolni. A pénzdarabot k -szor feldobjuk, miután a dobássorozat minden egyes kimenetelére meghatároztuk, hogy az adott esetben ki nyer. Bizonyítsuk be, hogy a fej dobás p valószínűségét és k értékét alkalmasan megválasztva a 2^k kimenetelt fel lehet osztani a gyerekek közt úgy, hogy mindenki egyforma valószínűséggel nyerjen.

Észrevétel

A szabályos kocka igazságos:

Észrevétel

A szabályos kocka igazságos: Hat kimenetele lehet a feldobásának: 1, 2, 3, 4, 5 és 6.

Észrevétel

A szabályos kocka igazságos: Hat kimenetele lehet a feldobásának: 1, 2, 3, 4, 5 és 6. Mindegyik kimenetel ugyanolyan valószínűségű ($1/6$).

Észrevétel

A szabályos kocka igazságos: Hat kimenetele lehet a feldobásának: 1, 2, 3, 4, 5 és 6. Mindegyik kimenetel ugyanolyan valószínűségű ($1/6$).

Két szabályos kocka feldobása és a kijött számok összegzése nem igazságos:

Észrevétel

A szabályos kocka igazságos: Hat kimenetele lehet a feldobásának: 1, 2, 3, 4, 5 és 6. Mindegyik kimenetel ugyanolyan valószínűségű ($1/6$).

Két szabályos kocka feldobása és a kijött számok összegzése nem igazságos: 11 kimenetele lehet a feldobásának: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 és 12.

Észrevétel

A szabályos kocka igazságos: Hat kimenetele lehet a feldobásának: 1, 2, 3, 4, 5 és 6. Mindegyik kimenetel ugyanolyan valószínűségű ($1/6$).

Két szabályos kocka feldobása és a kijött számok összegzése nem igazságos: 11 kimenetele lehet a feldobásának: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 és 12. Az egyes kimenetek valószínűsége nagyban változik ($1/36$ - $1/6$).

Észrevétel

A szabályos kocka igazságos: Hat kimenetele lehet a feldobásának: 1, 2, 3, 4, 5 és 6. Mindegyik kimenetel ugyanolyan valószínűségű ($1/6$).

Két szabályos kocka feldobása és a kijött számok összegzése nem igazságos: 11 kimenetele lehet a feldobásának: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 és 12. Az egyes kimenetek valószínűsége nagyban változik ($1/36$ - $1/6$).

A probléma

Lehet-e cinkelni két dobókockát (esetleg a kettőt eltérő módon) úgy, hogy a feldobásuk és összegzés után igazságosan adja ki a lehetséges összegeket (mindegyik valószínűsége $1/11$)?

Cinkelt kockákból igazságos: A két cinkelt kocka

Cinkelt kockákból igazságos: A két cinkelt kocka

- Tegyük fel, hogy van két cinkelt kocka: X/ξ , Y/ζ .

Cinkelt kockákból igazságos: A két cinkelt kocka

- Tegyük fel, hogy van két cinkelt kocka: X/ξ , Y/ζ .
- $\mathbb{P}(X = 1) = p_1$, $\mathbb{P}(X = 2) = p_2$, $\mathbb{P}(X = 3) = p_3$,
 $\mathbb{P}(X = 4) = p_4$, $\mathbb{P}(X = 5) = p_5$, $\mathbb{P}(X = 6) = p_6$.

Cinkelt kockákból igazságos: A két cinkelt kocka

- Tegyük fel, hogy van két cinkelt kocka: X/ξ , Y/ζ .
- $\mathbb{P}(X = 1) = p_1$, $\mathbb{P}(X = 2) = p_2$, $\mathbb{P}(X = 3) = p_3$,
 $\mathbb{P}(X = 4) = p_4$, $\mathbb{P}(X = 5) = p_5$, $\mathbb{P}(X = 6) = p_6$.
- $\mathbb{P}(Y = 1) = q_1$, $\mathbb{P}(Y = 2) = q_2$, $\mathbb{P}(Y = 3) = q_3$, $\mathbb{P}(Y = 4) = q_4$,
 $\mathbb{P}(Y = 5) = q_5$, $\mathbb{P}(Y = 6) = q_6$.

Cinkelt kockákból igazságos: A két cinkelt kocka

- Tegyük fel, hogy van két cinkelt kocka: X/ξ , Y/ζ .
- $\mathbb{P}(X = 1) = p_1$, $\mathbb{P}(X = 2) = p_2$, $\mathbb{P}(X = 3) = p_3$,
 $\mathbb{P}(X = 4) = p_4$, $\mathbb{P}(X = 5) = p_5$, $\mathbb{P}(X = 6) = p_6$.
 $\mathbb{P}(Y = 1) = q_1$, $\mathbb{P}(Y = 2) = q_2$, $\mathbb{P}(Y = 3) = q_3$, $\mathbb{P}(Y = 4) = q_4$,
 $\mathbb{P}(Y = 5) = q_5$, $\mathbb{P}(Y = 6) = q_6$.
- $\mathbb{P}(X + Y = 1) = 0$, $\mathbb{P}(X + Y = 2) = p_1 q_1$,
 $\mathbb{P}(X + Y = 3) = p_1 q_2 + p_2 q_1$,
 $\mathbb{P}(X + Y = 4) = p_1 q_3 + p_2 q_2 + p_3 q_1$,
 $\mathbb{P}(X + Y = 5) = p_1 q_4 + p_2 q_3 + p_3 q_2 + p_4 q_1$,
 $\mathbb{P}(X + Y = 6) = p_1 q_5 + p_2 q_4 + p_3 q_3 + p_4 q_2 + p_5 q_1$,
 $\mathbb{P}(X + Y = 7) = p_1 q_6 + p_2 q_5 + p_3 q_4 + p_4 q_3 + p_5 q_2 + p_6 q_1$,
 $\mathbb{P}(X + Y = 8) = p_2 q_6 + p_3 q_5 + p_4 q_4 + p_5 q_3 + p_6 q_2, \dots$,
 $\mathbb{P}(X + Y = 10) = p_4 q_6 + p_5 q_5 + p_6 q_4$,
 $\mathbb{P}(X + Y = 11) = p_5 q_6 + p_6 q_5$, $\mathbb{P}(X + Y = 12) = p_6 q_6$.

Cinkelt kockákból igazságos: Polinomok

Cinkelt kockából igazságos: Polinomok

$$\begin{aligned}G_X(x) &= \mathbb{P}(X = 1)x + \mathbb{P}(X = 2)x^2 + \mathbb{P}(X = 3)x^3 + \\ &\quad \mathbb{P}(X = 4)x^4 + \mathbb{P}(X = 5)x^5 + \mathbb{P}(X = 6)x^6 \\ &= p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4 + p_5x^5 + p_6x^6.\end{aligned}$$

Cinkelt kockákból igazságos: Polinomok

$$\begin{aligned}G_X(x) &= \mathbb{P}(X = 1)x + \mathbb{P}(X = 2)x^2 + \mathbb{P}(X = 3)x^3 + \\ &\quad \mathbb{P}(X = 4)x^4 + \mathbb{P}(X = 5)x^5 + \mathbb{P}(X = 6)x^6 \\ &= p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4 + p_5x^5 + p_6x^6.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G_Y(x) &= \mathbb{P}(Y = 1)x + \mathbb{P}(Y = 2)x^2 + \mathbb{P}(Y = 3)x^3 + \\ &\quad \mathbb{P}(Y = 4)x^4 + \mathbb{P}(Y = 5)x^5 + \mathbb{P}(Y = 6)x^6 \\ &= q_1x + q_2x^2 + q_3x^3 + q_4x^4 + q_5x^5 + q_6x^6.\end{aligned}$$

Cinkelt kockákból igazságos: Polinomok

$$\begin{aligned}G_X(x) &= \mathbb{P}(X = 1)x + \mathbb{P}(X = 2)x^2 + \mathbb{P}(X = 3)x^3 + \\ &\quad \mathbb{P}(X = 4)x^4 + \mathbb{P}(X = 5)x^5 + \mathbb{P}(X = 6)x^6 \\ &= p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4 + p_5x^5 + p_6x^6.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G_Y(x) &= \mathbb{P}(Y = 1)x + \mathbb{P}(Y = 2)x^2 + \mathbb{P}(Y = 3)x^3 + \\ &\quad \mathbb{P}(Y = 4)x^4 + \mathbb{P}(Y = 5)x^5 + \mathbb{P}(Y = 6)x^6 \\ &= q_1x + q_2x^2 + q_3x^3 + q_4x^4 + q_5x^5 + q_6x^6.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G_{X+Y}(x) &= \mathbb{P}(X + Y = 2)x^2 + \mathbb{P}(X + Y = 3)x^3 + \\ &\quad \mathbb{P}(X + Y = 4)x^4 + \dots + \mathbb{P}(X + Y = 11)x^{11} + \\ &\quad \mathbb{P}(X + Y = 12)x^{12} = G_X(x) \cdot G_Y(x).\end{aligned}$$

Cinkelt kockákból igazságos: Polinomok

$$\begin{aligned}G_X(x) &= \mathbb{P}(X = 1)x + \mathbb{P}(X = 2)x^2 + \mathbb{P}(X = 3)x^3 + \\ &\quad \mathbb{P}(X = 4)x^4 + \mathbb{P}(X = 5)x^5 + \mathbb{P}(X = 6)x^6 \\ &= p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4 + p_5x^5 + p_6x^6.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G_Y(x) &= \mathbb{P}(Y = 1)x + \mathbb{P}(Y = 2)x^2 + \mathbb{P}(Y = 3)x^3 + \\ &\quad \mathbb{P}(Y = 4)x^4 + \mathbb{P}(Y = 5)x^5 + \mathbb{P}(Y = 6)x^6 \\ &= q_1x + q_2x^2 + q_3x^3 + q_4x^4 + q_5x^5 + q_6x^6.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G_{X+Y}(x) &= \mathbb{P}(X + Y = 2)x^2 + \mathbb{P}(X + Y = 3)x^3 + \\ &\quad \mathbb{P}(X + Y = 4)x^4 + \dots + \mathbb{P}(X + Y = 11)x^{11} + \\ &\quad \mathbb{P}(X + Y = 12)x^{12} = G_X(x) \cdot G_Y(x).\end{aligned}$$

A feltételezés:

Cinkelt kockákból igazságos: Polinomok

$$\begin{aligned}G_X(x) &= \mathbb{P}(X = 1)x + \mathbb{P}(X = 2)x^2 + \mathbb{P}(X = 3)x^3 + \\ &\quad \mathbb{P}(X = 4)x^4 + \mathbb{P}(X = 5)x^5 + \mathbb{P}(X = 6)x^6 \\ &= p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4 + p_5x^5 + p_6x^6.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G_Y(x) &= \mathbb{P}(Y = 1)x + \mathbb{P}(Y = 2)x^2 + \mathbb{P}(Y = 3)x^3 + \\ &\quad \mathbb{P}(Y = 4)x^4 + \mathbb{P}(Y = 5)x^5 + \mathbb{P}(Y = 6)x^6 \\ &= q_1x + q_2x^2 + q_3x^3 + q_4x^4 + q_5x^5 + q_6x^6.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G_{X+Y}(x) &= \mathbb{P}(X + Y = 2)x^2 + \mathbb{P}(X + Y = 3)x^3 + \\ &\quad \mathbb{P}(X + Y = 4)x^4 + \dots + \mathbb{P}(X + Y = 11)x^{11} + \\ &\quad \mathbb{P}(X + Y = 12)x^{12} = G_X(x) \cdot G_Y(x).\end{aligned}$$

A feltételezés:

$$G_{X+Y}(x) = G_X(x) \cdot G_Y(x) = \frac{1}{11}x^2 + \frac{1}{11}x^3 + \dots + \frac{1}{11}x^{11} + \frac{1}{11}x^{12}.$$

Cinkelt kockákból igazságos: A megoldás

Tétel

Nincs két olyan cinkelt kocka, amely igazságos kockapárt alkot.

Tétel

Nincs két olyan cinkelt kocka, amely igazságos kockapárt alkot.

Indirekt bizonyítás.

Tétel

Nincs két olyan cinkelt kocka, amely igazságos kockapárt alkot.

Indirekt bizonyítás.

- Indirekt feltevés: Tegyük fel, hogy van.

Tétel

Nincs két olyan cinkelt kocka, amely igazságos kockapárt alkot.

Indirekt bizonyítás.

- Indirekt feltevés: Tegyük fel, hogy van.
- Ellentmondásvadászat:

Tétel

Nincs két olyan cinkelt kocka, amely igazságos kockapárt alkot.

Indirekt bizonyítás.

- Indirekt feltevés: Tegyük fel, hogy van.
- Ellentmondásvadászat:

$$\frac{G_X(x)}{x} \cdot \frac{G_Y(x)}{x} = \frac{1}{11} + \frac{1}{11}x + \dots + \frac{1}{11}x^9 + \frac{1}{11}x^{10} = \frac{1 - x^{11}}{1 - x}.$$

Tétel

Nincs két olyan cinkelt kocka, amely igazságos kockapárt alkot.

Indirekt bizonyítás.

- Indirekt feltevés: Tegyük fel, hogy van.
- Ellentmondásvadászat:

$$\frac{G_X(x)}{x} \cdot \frac{G_Y(x)}{x} = \frac{1}{11} + \frac{1}{11}x + \dots + \frac{1}{11}x^9 + \frac{1}{11}x^{10} = \frac{1 - x^{11}}{1 - x}.$$

- Jobb oldalon szereplő polinomnak nincs valós gyöke.

Tétel

Nincs két olyan cinkelt kocka, amely igazságos kockapárt alkot.

Indirekt bizonyítás.

- Indirekt feltevés: Tegyük fel, hogy van.
- Ellentmondásvadászat:

$$\frac{G_X(x)}{x} \cdot \frac{G_Y(x)}{x} = \frac{1}{11} + \frac{1}{11}x + \dots + \frac{1}{11}x^9 + \frac{1}{11}x^{10} = \frac{1 - x^{11}}{1 - x}.$$

- Jobb oldalon szereplő polinomnak nincs valós gyöke.
- Bal oldalon két ötödfokú polinom szorzata szerepel.

Tétel

Nincs két olyan cinkelt kocka, amely igazságos kockapárt alkot.

Indirekt bizonyítás.

- Indirekt feltevés: Tegyük fel, hogy van.
- Ellentmondásvadászat:

$$\frac{G_X(x)}{x} \cdot \frac{G_Y(x)}{x} = \frac{1}{11} + \frac{1}{11}x + \dots + \frac{1}{11}x^9 + \frac{1}{11}x^{10} = \frac{1 - x^{11}}{1 - x}.$$

- Jobb oldalon szereplő polinomnak nincs valós gyöke.
 - Bal oldalon két ötödfokú polinom szorzata szerepel.
- Szükségszerű valós gyök léte.

Tétel

Nincs két olyan cinkelt kocka, amely igazságos kockapárt alkot.

Indirekt bizonyítás.

- Indirekt feltevés: Tegyük fel, hogy van.
- Ellentmondásvadászat:

$$\frac{G_X(x)}{x} \cdot \frac{G_Y(x)}{x} = \frac{1}{11} + \frac{1}{11}x + \dots + \frac{1}{11}x^9 + \frac{1}{11}x^{10} = \frac{1 - x^{11}}{1 - x}.$$

- Jobb oldalon szereplő polinomnak nincs valós gyöke.
 - Bal oldalon két ötödfokú polinom szorzata szerepel.
- Szükségszerű valós gyök léte.
- Ellentmondás.

Tétel

Nincs két olyan cinkelt kocka, amely igazságos kockapárt alkot.

Indirekt bizonyítás.

- Indirekt feltevés: Tegyük fel, hogy van.
- Ellentmondásvadászat:

$$\frac{G_X(x)}{x} \cdot \frac{G_Y(x)}{x} = \frac{1}{11} + \frac{1}{11}x + \dots + \frac{1}{11}x^9 + \frac{1}{11}x^{10} = \frac{1 - x^{11}}{1 - x}.$$

- Jobb oldalon szereplő polinomnak nincs valós gyöke.
- Bal oldalon két ötödfokú polinom szorzata szerepel.

Szükségszerű valós gyök léte.

- Ellentmondás. Az állítást beláttuk.

Rablók és a zsákmány: Igazságos osztzkodás

A probléma

Két rabló (Pálinkás és Boros) egy zsákmányt szerez (aranypor). El szeretnék felezni a zsákmányt mérőeszköz, független bíró nélkül.

A probléma

Két rabló (Pálincás és Boros) egy zsákmányt szerez (aranypor). El szeretnék felezni a zsákmányt mérőeszköz, független bíró nélkül. Mit tegyenek?

A probléma

Két rabló (Pálinkás és Boros) egy zsákmányt szerez (aranypor). El szeretnék felezni a zsákmányt mérőeszköz, független bíró nélkül. Mit tegyenek?

A megoldás

P elosztja a zsákmányt két egyenlő részre. A két részből B kiválasztja a sajátját.

A probléma

Két rabló (Pálinkás és Boros) egy zsákmányt szerez (aranypor). El szeretnék felezni a zsákmányt mérőeszköz, független bíró nélkül. Mit tegyenek?

A megoldás

P elosztja a zsákmányt két egyenlő részre. A két részből B kiválasztja a sajátját.

Egyenlőtlen elosztás esetén a kisebb részhez jutó csak magát okolhatja.

A probléma

Két rabló (Pálincás és Boros) egy zsákmányt szerez (aranypor). El szeretnék felezni a zsákmányt mérőeszköz, független bíró nélkül. Mit tegyenek?

A megoldás

P elosztja a zsákmányt két egyenlő részre. A két részből B kiválasztja a sajátját.

Egyenlőtlen elosztás esetén a kisebb részhez jutó csak magát okolhatja. → Ábrahám és Lót bibliai története.

Rablók és a zsákmány: Igazságos osztzkodás, k rabló

Fink-eljárás:

Fink-eljárás: Egy induktív eljárás.

Fink-eljárás: Egy induktív eljárás.

- [Az indukció elindítása:] $k = 2$ esetén végezzék el az Ábrahám/Lót-eljárást.

Fink-eljárás: Egy induktív eljárás.

- [Az indukció elindítása:] $k = 2$ esetén végezzék el az Ábrahám/Lót-eljárást.
- [Az induktív feltevés:] $k \geq 3$ esetén feltesszük, hogy egy alkalmas eljárással $k - 1$ rabló meg tudja oldani az osztozkodást.

Fink-eljárás: Egy induktív eljárás.

- [Az indukció elindítása:] $k = 2$ esetén végezzék el az Ábrahám/Lót-eljárást.
- [Az induktív feltevés:] $k \geq 3$ esetén feltesszük, hogy egy alkalmas eljárással $k - 1$ rabló meg tudja oldani az osztozkodást.
- [Az induktív lépés:] $k - 1$ -en osszák fel a zsákmány igazságosan.

Fink-eljárás: Egy induktív eljárás.

- [Az indukció elindítása:] $k = 2$ esetén végezzék el az Ábrahám/Lót-eljárást.
- [Az induktív feltevés:] $k \geq 3$ esetén feltesszük, hogy egy alkalmas eljárással $k - 1$ rabló meg tudja oldani az osztozkodást.
- [Az induktív lépés:] $k - 1$ -en osszák fel a zsákmány igazságosan. Egy valaki tétlen, vár arra, hogy eljöjjön az ideje.

Fink-eljárás: Egy induktív eljárás.

- [Az indukció elindítása:] $k = 2$ esetén végezzék el az Ábrahám/Lót-eljárást.
- [Az induktív feltevés:] $k \geq 3$ esetén feltesszük, hogy egy alkalmas eljárással $k - 1$ rabló meg tudja oldani az osztozkodást.
- [Az induktív lépés:] $k - 1$ -en osszák fel a zsákmány igazságosan. Egy valaki tétlen, vár arra, hogy eljöjjön az ideje.
- A $k - 1$ rabló ossza fel a saját részét k egyenlő részre.

Fink-eljárás: Egy induktív eljárás.

- [Az indukció elindítása:] $k = 2$ esetén végezzék el az Ábrahám/Lót-eljárást.
- [Az induktív feltevés:] $k \geq 3$ esetén feltesszük, hogy egy alkalmas eljárással $k - 1$ rabló meg tudja oldani az osztozkodást.
- [Az induktív lépés:] $k - 1$ -en osszák fel a zsákmány igazságosan. Egy valaki tétlen, vár arra, hogy eljöjjön az ideje.
- A $k - 1$ rabló ossza fel a saját részét k egyenlő részre.
- A k -edik rabló mindeki felosztásából kivesz egy-egy darabot.

Fink-eljárás: Egy induktív eljárás.

- [Az indukció elindítása:] $k = 2$ esetén végezzék el az Ábrahám/Lót-eljárást.
- [Az induktív feltevés:] $k \geq 3$ esetén feltesszük, hogy egy alkalmas eljárással $k - 1$ rabló meg tudja oldani az osztozkodást.
- [Az induktív lépés:] $k - 1$ -en osszák fel a zsákmány igazságosan. Egy valaki tétlen, vár arra, hogy eljőjön az ideje.
- A $k - 1$ rabló ossza fel a saját részét k egyenlő részre.
- A k -edik rabló mindeki felosztásából kivesz egy-egy darabot. A maradék $k - 1$ osztozkodó megtartja, ami maradt előtte.

Igazságos osztzkodás: egyéni értékrendek

Eddig aranyponon osztzkodtunk.

Eddig arányon osztozkodtunk. Az értéket egyetlen fizikai paraméter (a súly) határozta meg.

Eddig arányon osztozkodtunk. Az értéket egyetlen fizikai paraméter (a súly) határozta meg. Az élet bonyolultabb.

Eddig aranyponon osztozkodtunk. Az értéket egyetlen fizikai paraméter (a súly) határozta meg. Az élet bonyolultabb.

Példa

Adott egy torta 12 egyenlő súlyú/méretű szeletre felosztva.

Eddig aranyponon osztozkodtunk. Az értéket egyetlen fizikai paraméter (a súly) határozta meg. Az élet bonyolultabb.

Példa

Adott egy torta 12 egyenlő súlyú/méretű szeletre felosztva.
Válasszunk ki egy szeletet.

Eddig aranyponon osztzkodtunk. Az értéket egyetlen fizikai paraméter (a súly) határozta meg. Az élet bonyolultabb.

Példa

Adott egy torta 12 egyenlő súlyú/méretű szeletre felosztva. Válasszunk ki egy szeletet.

Mennyi mazsola esik egy-egy szeletbe?

Eddig aranyponon osztzkodtunk. Az értéket egyetlen fizikai paraméter (a súly) határozta meg. Az élet bonyolultabb.

Példa

Adott egy torta 12 egyenlő súlyú/méretű szeletre felosztva. Válasszunk ki egy szeletet.

Mennyi mazsola esik egy-egy szeletbe? Hol vannak a marcipános részek?

Eddig aranyponon osztzkodtunk. Az értéket egyetlen fizikai paraméter (a súly) határozta meg. Az élet bonyolultabb.

Példa

Adott egy torta 12 egyenlő súlyú/méretű szeletre felosztva. Válasszunk ki egy szeletet.

Mennyi mazsola esik egy-egy szeletbe? Hol vannak a marcipános részek? Melyikbe esik több csokoládé borítás?

Eddig aranyponon osztozkodtunk. Az értéket egyetlen fizikai paraméter (a súly) határozta meg. Az élet bonyolultabb.

Példa

Adott egy torta 12 egyenlő súlyú/méretű szeletre felosztva. Válasszunk ki egy szeletet.

Mennyi mazsola esik egy-egy szeletbe? Hol vannak a marcipános részek? Melyikbe esik több csokoládé borítás? Hol vannak a konyakos meggyek?

Eddig aranyponon osztozkodtunk. Az értéket egyetlen fizikai paraméter (a súly) határozta meg. Az élet bonyolultabb.

Példa

Adott egy torta 12 egyenlő súlyú/méretű szeletre felosztva. Válasszunk ki egy szeletet.

Mennyi mazsola esik egy-egy szeletbe? Hol vannak a marcipános részek? Melyikbe esik több csokoládé borítás? Hol vannak a konyakos meggyek?

Mi van, ha az osztozkodóknak különböző értékrendje van?

Eddig aranyponon osztozkodtunk. Az értéket egyetlen fizikai paraméter (a súly) határozta meg. Az élet bonyolultabb.

Példa

Adott egy torta 12 egyenlő súlyú/méretű szeletre felosztva. Válasszunk ki egy szeletet.

Mennyi mazsola esik egy-egy szeletbe? Hol vannak a marcipános részek? Melyikbe esik több csokoládé borítás? Hol vannak a konyakos meggyek?

Mi van, ha az osztozkodóknak különböző értékrendje van? Mondjuk valaki felosztja a tortát saját értékrendje alapján egyenlő részekre, de azt mindenki más egyenlőtlen felosztásnak látja?

Egyéni értékrendek: Mi az igazságos?

Több lehetőség is van az igazságossáág definíciójára.

Több lehetőség is van az igazságossáág definíciójára.

Definíció: Arányos osztozkodás

Az osztozkodási eljárás végén mindenki azt lássa, hogy a saját része — értékrendje szerint — eléri a teljes érték n -ed részét.

Több lehetőség is van az igazságossáág definíciójára.

Definíció: Arányos osztozkodás

Az osztozkodási eljárás végén mindenki azt lássa, hogy a saját része — értékrendje szerint — eléri a teljes érték n -ed részét. (n a résztvevői száma.)

Több lehetőség is van az igazságossáág definíciójára.

Definíció: Arányos osztozkodás

Az osztozkodási eljárás végén mindenki azt látja, hogy a saját része — értékrendje szerint — eléri a teljes érték n -ed részét. (n a résztvevői száma.)

Definíció: Irigység-mentes osztozkodás

Az osztozkodási eljárás végén mindenki azt látja, hogy a többiek része a saját értékrendje alapján legfeljebb akkora mint a saját része.

Selfridge—Conway-tétel

Selfridge—Conway tétele

Három osztzkodó esetén van véges, irigység-mentes osztzkodási eljárás.

Selfridge—Conway eljárás, három osztózkodó

- Az I-es osztozkodó a saját értékrendje szerint ossza fel három egyenlő részre a tortát.

- Az I-es osztozkodó a saját értékrendje szerint ossza fel három egyenlő részre a tortát.
- Az II-es osztozkodó a saját értékrendje szerint rendezze a három tortarészt.

- Az I-es osztozkodó a saját értékrendje szerint ossza fel három egyenlő részre a tortát.
- Az II-es osztozkodó a saját értékrendje szerint rendezze a három tortarészt. A legnagyobb részből vágjon le egy darabot (ha szükséges), hogy pont olyan értékű legyen (szerinte) mint az általa középsőnek rangsorolt.

- Az I-es osztozkodó a saját értékrendje szerint ossza fel három egyenlő részre a tortát.
- Az II-es osztozkodó a saját értékrendje szerint rendezze a három tortarészt. A legnagyobb részből vágjon le egy darabot (ha szükséges), hogy pont olyan értékű legyen (szerinte) mint az általa középsőnek rangsorolt.
- Legyen K a kisebbített rész. Legyen L a levágott rész.

- Az I-es osztozkodó a saját értékrendje szerint ossza fel három egyenlő részre a tortát.
- Az II-es osztozkodó a saját értékrendje szerint rendezze a három tortarészt. A legnagyobb részből vágjon le egy darabot (ha szükséges), hogy pont olyan értékű legyen (szerinte) mint az általa középsőnek rangsorolt.
- Legyen K a kisebbített rész. Legyen L a levágott rész. Az L részt tegyék félre. A maradék három torta szeleten osztozzanak először.

Selfridge—Conway eljárás II: A három szelet szétosztása

- A *III*-as osztozkodó válassza ki a számára legértékesebb szeletet a háromból.

- A *III*-as osztozkodó válassza ki a számára legértékesebb szeletet a háromból.
- A *II*-es osztokodó válassza ki a maradék kettőből a számára legértékesebbet. Ha teheti, vegye *K*-t.

- A *III*-as osztozkodó válassza ki a számára legértékesebb szeletet a háromból.
- A *II*-es osztokodó válassza ki a maradék kettőből a számára legértékesebbet. Ha teheti, vegye *K*-t. Ez számára a legértékesebb, mert kisebbitésével elérte, hogy az értékrendje szerint a legértékesebb szelet nem egyértelmű volt és egy szelet elvétele után az egyik legértékesebb szelet a számára elérhető szeletek között van.

- A *III*-as osztozkodó válassza ki a számára legértékesebb szeletet a háromból.
- A *II*-es osztokodó válassza ki a maradék kettőből a számára legértékesebbet. Ha teheti, vegye *K*-t. Ez számára a legértékesebb, mert kisebbitésével elérte, hogy az értékrendje szerint a legértékesebb szelet nem egyértelmű volt és egy szelet elvétele után az egyik legértékesebb szelet a számára elérhető szeletek között van.
- Az *I*-es osztozkodó vegye el a maradék szeletet.

- A *III*-as osztozkodó válassza ki a számára legértékesebb szeletet a háromból.
- A *II*-es osztokodó válassza ki a maradék kettőből a számára legértékesebbet. Ha teheti, vegye *K*-t. Ez számára a legértékesebb, mert kisebbitésével elérte, hogy az értékrendje szerint a legértékesebb szelet nem egyértelmű volt és egy szelet elvétele után az egyik legértékesebb szelet a számára elérhető szeletek között van.
- Az *I*-es osztozkodó vegye el a maradék szeletet. Ez számára pontosan a teljes érték harmada (!ő nem választhatta *K*-t), legalább akkora mint a többi szelet.

- A *III*-as osztozkodó válassza ki a számára legértékesebb szeletet a háromból.
- A *II*-es osztokodó válassza ki a maradék kettőből a számára legértékesebbet. Ha teheti, vegye *K*-t. Ez számára a legértékesebb, mert kisebbitésével elérte, hogy az értékrendje szerint a legértékesebb szelet nem egyértelmű volt és egy szelet elvétele után az egyik legértékesebb szelet a számára elérhető szeletek között van.
- Az *I*-es osztozkodó vegye el a maradék szeletet. Ez számára pontosan a teljes érték harmada (!ő nem választhatta *K*-t), legalább akkora mint a többi szelet.
- Eddig nincs irigységre ok.

- A *III*-as osztozkodó válassza ki a számára legértékesebb szeletet a háromból.
- A *II*-es osztozkodó válassza ki a maradék kettőből a számára legértékesebbet. Ha teheti, vegye *K*-t. Ez számára a legértékesebb, mert kisebbitésével elérte, hogy az értékrendje szerint a legértékesebb szelet nem egyértelmű volt és egy szelet elvétele után az egyik legértékesebb szelet a számára elérhető szeletek között van.
- Az *I*-es osztozkodó vegye el a maradék szeletet. Ez számára pontosan a teljes érték harmada (!ő nem választhatta *K*-t), legalább akkora mint a többi szelet.
- Eddig nincs irigységre ok. Azonban a levégott *L* részen még osztozni kell.

Selfridge—Conway eljárás III: Hol tartunk?

- A három osztozkodót nevezzük át: Legyen K -osztozkodó az a szereplő, aki a K nevű szeletet választotta.

- A három osztozkodót nevezzük át: Legyen K -osztozkodó az a szereplő, aki a K nevű szeletet választotta. Az I -es osztozkodó az egyik a másik két játékos közül, az $ő$ nevét meghagyjuk.

Selfridge—Conway eljárás III: Hol tartunk?

- A három osztozkodót nevezzük át: Legyen K -osztozkodó az a szereplő, aki a K nevű szeletet választotta. Az I -es osztozkodó az egyik a másik két játékos közül, az ő nevét meghagyjuk. A harmadik szereplő legyen a H -osztozkodó.

- A három osztozkodót nevezzük át: Legyen K -osztozkodó az a szereplő, aki a K nevű szeletet választotta. Az I -es osztozkodó az egyik a másik két játékos közül, az $ő$ nevét meghagyjuk. A harmadik szereplő legyen a H -osztozkodó.
- Látszólag nem történt semmi: van három szereplőnk és egy darab torta (L , a levágott rész).

- A három osztozkodót nevezzük át: Legyen K -osztozkodó az a szereplő, aki a K nevű szeletet választotta. Az I -es osztozkodó az egyik a másik két játékos közül, az $ő$ nevét meghagyjuk. A harmadik szereplő legyen a H -osztozkodó.
- Látszólag nem történt semmi: van három szereplőnk és egy darab torta (L , a levágott rész). Azonban mégis van egy kis eredmény: az I -es osztozkodó tudja, hogy a K -osztozkodóra nem lesz irigy. Ha a teljes L a K -osztozkodóhoz kerül, akkor is meg lesz elégedve.

- A három osztozkodót nevezzük át: Legyen K -osztozkodó az a szereplő, aki a K nevű szeletet választotta. Az I -es osztozkodó az egyik a másik két játékos közül, az ő nevét meghagyjuk. A harmadik szereplő legyen a H -osztozkodó.
- Látszólag nem történt semmi: van három szereplőnk és egy darab torta (L , a levágott rész). Azonban mégis van egy kis eredmény: az I -es osztozkodó tudja, hogy a K -osztozkodóra nem lesz irigy. Ha a teljes L a K -osztozkodóhoz kerül, akkor is meg lesz elégedve.
- Ez a kicsinek tűnő megjegyzés mozgatja az osztozkodás további menetét.

Selfridge—Conway eljárás IV: L szétosztása

Selfridge—Conway eljárás IV: L szétosztása

- H -osztzkodó számára három egyenlő értékű részre osztja L -et.

Selfridge—Conway eljárás IV: L szétosztása

- H -osztzkodó számára három egyenlő értékű részre osztja L -et. Ezt a három részt osztják el egymás közt úgy, hogy mindenki egy-egy szeletet kapjon a háromból.

Selfridge—Conway eljárás IV: L szétosztása

- H -osztzkodó számára három egyenlő értékű részre osztja L -et. Ezt a három részt osztják el egymás közt úgy, hogy mindenki egy-egy szeletet kapjon a háromból.
- H -osztzkodó már nem járhat rosszul. Korábban értékrendje szerint senki sem járt jobban mint ő. Az osztzkodás további részében ő úgy látja, hogy mindeki egyenlően növeli részesedését.

Selfridge—Conway eljárás IV: L szétosztása

- H -osztzkodó számára három egyenlő értékű részre osztja L -et. Ezt a három részt osztják el egymás közt úgy, hogy mindenki egy-egy szeletet kapjon a háromból.
- H -osztzkodó már nem járhat rosszul. Korábban értékrendje szerint senki sem járt jobban mint ő. Az osztzkodás további részében ő úgy látja, hogy mindeki egyenlően növeli részesedését.
- K -osztzkodó kiválasztja a számára legértékesebb részt.

Selfridge—Conway eljárás IV: L szétosztása

- H -osztzkodó számára három egyenlő értékű részre osztja L -et. Ezt a három részt osztják el egymás közt úgy, hogy mindenki egy-egy szeletet kapjon a háromból.
- H -osztzkodó már nem járhat rosszul. Korábban értékrendje szerint senki sem járt jobban mint ő. Az osztzkodás további részében ő úgy látja, hogy mindeki egyenlően növeli részesedését.
- K -osztzkodó kiválasztja a számára legértékesebb részt.
- K -osztzkodó már nem járhat rosszul. Korábban értékrendje szerint senki sem járt jobban mint ő. Az osztzkodás további részében ő úgy látja, hogy ő érte el a legértékesebb növelést L szétosztásával.

Selfridge—Conway eljárás IV: L szétosztása

- H -osztzkodó számára három egyenlő értékű részre osztja L -et. Ezt a három részt osztják el egymás közt úgy, hogy mindenki egy-egy szeletet kapjon a háromból.
- H -osztzkodó már nem járhat rosszul. Korábban értékrendje szerint senki sem járt jobban mint ő. Az osztzkodás további részében ő úgy látja, hogy mindeki egyenlően növeli részesedését.
- K -osztzkodó kiválasztja a számára legértékesebb részt.
- K -osztzkodó már nem járhat rosszul. Korábban értékrendje szerint senki sem járt jobban mint ő. Az osztzkodás további részében ő úgy látja, hogy ő érte el a legértékesebb növelést L szétosztásával.
- Az I -es osztzkodó kiválasztja a számára értékesebb részt a maradék kettő közül.

Selfridge—Conway eljárás IV: L szétosztása

- H -osztzkodó számára három egyenlő értékű részre osztja L -et. Ezt a három részt osztják el egymás közt úgy, hogy mindenki egy-egy szeletet kapjon a háromból.
- H -osztzkodó már nem járhat rosszul. Korábban értékrendje szerint senki sem járt jobban mint ő. Az osztzkodás további részében ő úgy látja, hogy mindeki egyenlően növeli részesedését.
- K -osztzkodó kiválasztja a számára legértékesebb részt.
- K -osztzkodó már nem járhat rosszul. Korábban értékrendje szerint senki sem járt jobban mint ő. Az osztzkodás további részében ő úgy látja, hogy ő érte el a legértékesebb növelést L szétosztásával.
- Az I -es osztzkodó kiválasztja a számára értékesebb részt a maradék kettő közül.
- Az I -es osztzkodó már nem járhat rosszul. Korábban értékrendje szerint senki sem járt jobban mint ő. K -val nem törődik, H pedig I -es szemével nem jár jobban mint ő.

Selfridge—Conway eljárás IV: L szétosztása

- H -osztzkodó számára három egyenlő értékű részre osztja L -et. Ezt a három részt osztják el egymás közt úgy, hogy mindenki egy-egy szeletet kapjon a háromból.
- H -osztzkodó már nem járhat rosszul. Korábban értékrendje szerint senki sem járt jobban mint ő. Az osztzkodás további részében ő úgy látja, hogy mindeki egyenlően növeli részesedését.
- K -osztzkodó kiválasztja a számára legértékesebb részt.
- K -osztzkodó már nem járhat rosszul. Korábban értékrendje szerint senki sem járt jobban mint ő. Az osztzkodás további részében ő úgy látja, hogy ő érte el a legértékesebb növelést L szétosztásával.
- Az I -es osztzkodó kiválasztja a számára értékesebb részt a maradék kettő közül.
- Az I -es osztzkodó már nem járhat rosszul. Korábban értékrendje szerint senki sem járt jobban mint ő. K -val nem törődik, H pedig I -es szemével nem jár jobban mint ő.
- A maradékot megtartja a H -osztzkodó.

John Horton Conway egy idézete



People think that mathematics is complicated. Mathematics is the simple bit, it's the stuff we CAN understand. It's cats that are complicated.

— *John Horton Conway* —

AZ QUOTES



1937. december 26. – 2020. április 11.

Legyünk igazságtalanok: Pizza osztzkodás, a probléma

- Xavér és Yvett barátok voltak, de végül összevesztek.

- Xavér és Yvett barátok voltak, de végül összevesztek. Egy utolsó pizzázással lezárják kapcsolatukat.

Legyünk igazságtalanok: Pizza osztzkodás, a probléma

- Xavér és Yvett barátok voltak, de végül összevesztek. Egy utolsó pizzázással lezárják kapcsolatukat.
- A közös pizzázás szabályai:

Legyünk igazságtalanok: Pizza osztzkodás, a probléma

- Xavér és Yvett barátok voltak, de végül összevesztek. Egy utolsó pizzázással lezárják kapcsolatukat.
- A közös pizzázás szabályai: (1) A pizzát szeletekre osztva hozzák ki.

Legyünk igazságtalanok: Pizza osztzkodás, a probléma

- Xavér és Yvett barátok voltak, de végül összevesztek. Egy utolsó pizzázással lezárják kapcsolatukat.
- A közös pizzázás szabályai: (1) A pizzát szeletekre osztva hozzák ki. (2) Azt nem várhatjuk el a konyhától, hogy egyenlőek legyenek a szeletek. (A valóság: a konyha össze-vissza vág.)

- Xavér és Yvett barátok voltak, de végül összevesztek. Egy utolsó pizzázással lezárják kapcsolatukat.
- A közös pizzázás szabályai: (1) A pizzát szeletekre osztva hozzák ki. (2) Azt nem várhatjuk el a konyhától, hogy egyenlőek legyenek a szeletek. (A valóság: a konyha össze-vissza vág.) (3) Ha fiú/lány pizzázik, akkor a lány választ egy tetszőleges első szeletet.

- Xavér és Yvett barátok voltak, de végül összevesztek. Egy utolsó pizzázással lezárják kapcsolatukat.
- A közös pizzázás szabályai: (1) A pizzát szeletekre osztva hozzák ki. (2) Azt nem várhatjuk el a konyhától, hogy egyenlőek legyenek a szeletek. (A valóság: a konyha össze-vissza vág.) (3) Ha fiú/lány pizzázik, akkor a lány választ egy tetszőleges első szeletet. (4) Utána felváltva választanak ki egy-egy szeletet.

- Xavér és Yvett barátok voltak, de végül összevesztek. Egy utolsó pizzázással lezárják kapcsolatukat.
- A közös pizzázás szabályai: (1) A pizzát szeletekre osztva hozzák ki. (2) Azt nem várhatjuk el a konyhától, hogy egyenlőek legyenek a szeletek. (A valóság: a konyha össze-vissza vág.) (3) Ha fiú/lány pizzázik, akkor a lány választ egy tetszőleges első szeletet. (4) Utána felváltva választanak ki egy-egy szeletet. (5) Az első szelet kivétele után lesz két „szélső” szelet. Mindig ezek egyikét veheti ki a soron következő.

- Xavér és Yvett barátok voltak, de végül összevesztek. Egy utolsó pizzázással lezárják kapcsolatukat.
- A közös pizzázás szabályai: (1) A pizzát szeletekre osztva hozzák ki. (2) Azt nem várhatjuk el a konyhától, hogy egyenlőek legyenek a szeletek. (A valóság: a konyha össze-vissza vág.) (3) Ha fiú/lány pizzázik, akkor a lány választ egy tetszőleges első szeletet. (4) Utána felváltva választanak ki egy-egy szeletet. (5) Az első szelet kivétele után lesz két „szélső” szelet. Mindig ezek egyikét veheti ki a soron következő.
- Ugye igazságos!

- Xavér és Yvett barátok voltak, de végül összevesztek. Egy utolsó pizzázással lezárják kapcsolatukat.
- A közös pizzázás szabályai: (1) A pizzát szeletekre osztva hozzák ki. (2) Azt nem várhatjuk el a konyhától, hogy egyenlőek legyenek a szeletek. (A valóság: a konyha össze-vissza vág.) (3) Ha fiú/lány pizzázik, akkor a lány választ egy tetszőleges első szeletet. (4) Utána felváltva választanak ki egy-egy szeletet. (5) Az első szelet kivétele után lesz két „szélső” szelet. Mindig ezek egyikét veheti ki a soron következő.
- Ugye igazságos! Igazságosnak kell lenni, mert Xavér nagyon nem akarja, hogy Yvett sok pizzát egyen.

- Xavér és Yvett barátok voltak, de végül összevesztek. Egy utolsó pizzázással lezárják kapcsolatukat.
- A közös pizzázás szabályai: (1) A pizzát szeletekre osztva hozzák ki. (2) Azt nem várhatjuk el a konyhától, hogy egyenlőek legyenek a szeletek. (A valóság: a konyha össze-vissza vág.) (3) Ha fiú/lány pizzázik, akkor a lány választ egy tetszőleges első szeletet. (4) Utána felváltva választanak ki egy-egy szeletet. (5) Az első szelet kivétele után lesz két „szélső” szelet. Mindig ezek egyikét veheti ki a soron következő.
- Ugye igazságos! Igazságosnak kell lenni, mert Xavér nagyon nem akarja, hogy Yvett sok pizzát egyen. Igen, de Xavér legjobb barátja a konyhán dolgozik. Ő vágja fel a pizzát.

Legyünk igazságtalanok: Pizza osztzkodás, páros szelet

Tétel

Tegyük fel, hogy a felvágás páros sok szeletre történik.

Tétel

Tegyük fel, hogy a felvágás páros sok szeletre történik.
Bárhogy is legyen a felosztás Yvett el tudja érni, hogy a pizza legalább felét megkapja.

Tétel

Tegyük fel, hogy a felvágás páros sok szeletre történik.
Bárhogy is legyen a felosztás Yvett el tudja érni, hogy a pizza legalább felét megkapja.

- Páros sok szelet esetén a szeletek sakktáblaszerűen kiszínezhetők.

Tétel

Tegyük fel, hogy a felvágás páros sok szeletre történik.
Bárhogy is legyen a felosztás Yvett el tudja érni, hogy a pizza legalább felét megkapja.

- Páros sok szelet esetén a szeletek sakktáblaszerűen kiszínezhetők.
Pfúúúúúúúúúúú

Legyünk igazságtalanok: Pizza osztzkodás, páros szelet

Tétel

Tegyünk fel, hogy a felvágás páros sok szeletre történik.
Bárhogy is legyen a felosztás Yvett el tudja érni, hogy a pizza legalább felét megkapja.

- Páros sok szelet esetén a szeletek sakktáblaszerűen kiszínezhetők. Pfüúúúúúúúúúú Inkább minden második szeletre tegyünk egy oliva bogyót (feltesszük, hogy eredetileg nincs oliva bogyó a pizzán).

Tétel

Tegyük fel, hogy a felvágás páros sok szeletre történik. Bárhogy is legyen a felosztás Yvett el tudja érni, hogy a pizza legalább felét megkapja.

- Páros sok szelet esetén a szeletek sakktáblaszerűen kiszínezhetők. Pfüúúúúúúúúúúú Inkább minden második szeletre tegyünk egy oliva bogyót (feltesszük, hogy eredetileg nincs oliva bogyó a pizzán).
- Yvett kiszámolja, hogy az olivás szeletek méretét és az oliva nélküli szeletek méretét.

Tétel

Tegyük fel, hogy a felvágás páros sok szeletre történik. Bárhogy is legyen a felosztás Yvett el tudja érni, hogy a pizza legalább felét megkapja.

- Páros sok szelet esetén a szeletek sakktáblaszerűen kiszínezhetők. Pfüúúúúúúúúúúú Inkább minden második szeletre tegyünk egy oliva bogyót (feltesszük, hogy eredetileg nincs oliva bogyó a pizzán).
- Yvett kiszámolja, hogy az olivás szeletek méretét és az oliva nélküli szeletek méretét. Tegyük fel, hogy az olivás szeletek adják a nagyobb adagot.

Tétel

Tegyük fel, hogy a felvágás páros sok szeletre történik. Bárhogy is legyen a felosztás Yvett el tudja érni, hogy a pizza legalább felét megkapja.

- Páros sok szelet esetén a szeletek sakktáblaszerűen kiszínezhetők. Pfüúúúúúúúúúúú Inkább minden második szeletre tegyünk egy oliva bogyót (feltesszük, hogy eredetileg nincs oliva bogyó a pizzán).
- Yvett kiszámolja, hogy az olivás szeletek méretét és az oliva nélküli szeletek méretét. Tegyük fel, hogy az olivás szeletek adják a nagyobb adagot.
- Yvett olivás szeletet választ.

Tétel

Tegyük fel, hogy a felvágás páros sok szeletre történik. Bárhogy is legyen a felosztás Yvett el tudja érni, hogy a pizza legalább felét megkapja.

- Páros sok szelet esetén a szeletek sakktáblaszerűen kiszínezhetők. Pfüúúúúúúúúúúú Inkább minden második szeletre tegyünk egy oliva bogyót (feltesszük, hogy eredetileg nincs oliva bogyó a pizzán).
- Yvett kiszámolja, hogy az olivás szeletek méretét és az oliva nélküli szeletek méretét. Tegyük fel, hogy az olivás szeletek adják a nagyobb adagot.
- Yvett olivás szeletet választ.
- A szabályok szerint az összes olivás szelet Yvetté, Xavérnek az oliva nélküliek jutnak.

Legyünk igazságtalanok: Pizza osztzkodás, a példa

Legyünk igazságtalanok: Pizza osztzkodás, a példa

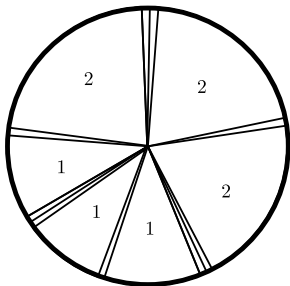
Páratlan sok szelet esetén Yvett eggyel több szeletet kap.

Legyünk igazságtalanok: Pizza osztzkodás, a példa

Páratlan sok szelet esetén Yvett eggyel több szeletet kap. De méretileg járhat rosszabbul.

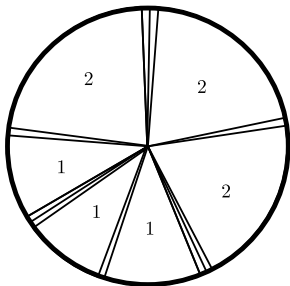
Legyünk igazságtalanok: Pizza osztozkodás, a példa

Páratlan sok szelet esetén Yvett eggyel több szeletet kap. De méretileg járhat rosszabbul.



Legyünk igazságtalanok: Pizza osztzkodás, a példa

Páratlan sok szelet esetén Yvett eggyel több szeletet kap. De méretileg járhat rosszabbul.

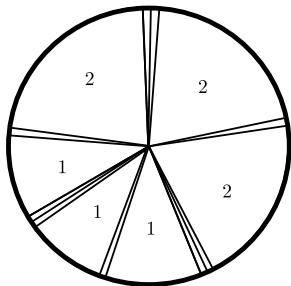


Tétel

A fenti példában Yvett legfeljebb a pizza $4/9$ -edét kapja ügyes Xavérrel osztzkodva.

Legyünk igazságtalanok: Pizza osztzkodás, a példa

Páratlan sok szelet esetén Yvett eggyel több szeletet kap. De méretileg járhat rosszabbul.



Tétel

A fenti példában Yvett legfeljebb a pizza $4/9$ -edét kapja ügyes Xavérrel osztzkodva. Ekkora részt minden felvágásnál megkaphat az ügyes Yvett.

Tanulság?

Tanulság?

- Nincs igazságosság.

Tanulság?

- Nincs igazságosság.
- Tartsuk be a szabályokat.

Tanulság?

- Nincs igazságosság.
- Tartsuk be a szabályokat. Mik legyenek a szabályok?

- Nincs igazságosság.
- Tartsuk be a szabályokat. Mik legyenek a szabályok?
- Legyenek
 - lehetőleg egyszerűek, jól áttekinthetőek
 - mindeki számára elfogadhatóak
 - ...

- Nincs igazságosság.
- Tartsuk be a szabályokat. Mik legyenek a szabályok?
- Legyenek
 - lehetőleg egyszerűek, jól áttekinthetőek
 - mindeki számára elfogadhatóak
 - ...
- Ha formalizálunk, folytatjuk a józan ész szabályait, akkor bebizonyítható, hogy nincsenek igazságos szabályok.

- Nincs igazságosság.
- Tartsuk be a szabályokat. Mik legyenek a szabályok?
- Legyenek
 - lehetőleg egyszerűek, jól áttekinthetőek
 - mindeki számára elfogadhatóak
 - ...
- Ha formalizálunk, folytatjuk a józan ész szabályait, akkor bebizonyítható, hogy nincsenek igazságos szabályok.
- Legyünk „bölcsek” .

- Nincs igazságosság.
- Tartsuk be a szabályokat. Mik legyenek a szabályok?
- Legyenek
 - lehetőleg egyszerűek, jól áttekinthetőek
 - mindeki számára elfogadhatóak
 - ...
- Ha formalizálunk, folytatjuk a józan ész szabályait, akkor bebizonyítható, hogy nincsenek igazságos szabályok.
- Legyünk „bölcsek”. → Salamon király, salamoni döntés.

Köszönöm a figyelmet!