

Gubancok

Hajnal Péter

SZTE, Bolyai Intézet

2010

Három ház – három kút feladat

Adott a síkon három ház és három kút.

Három ház – három kút feladat

Adott a síkon három ház és három kút.

$$H_1, H_2, H_3, K_1, K_2, K_3$$

Három ház – három kút feladat

Adott a síkon három ház és három kút.

$$H_1, H_2, H_3, K_1, K_2, K_3$$

Tervezhető-e kilenc út a házak és kutak közt,

Három ház – három kút feladat

Adott a síkon három ház és három kút.

$$H_1, H_2, H_3, K_1, K_2, K_3$$

Tervezhető-e kilenc út a házak és kutak közt,

$$H_1K_1, H_1K_2, H_1K_3, H_2K_1, H_2K_2, H_2K_3, H_3K_1, H_3K_2, H_3K_3$$

Három ház – három kút feladat

Adott a síkon három ház és három kút.

$$H_1, H_2, H_3, K_1, K_2, K_3$$

Tervezhető-e kilenc út a házak és kutak közt,

$$H_1K_1, H_1K_2, H_1K_3, H_2K_1, H_2K_2, H_2K_3, H_3K_1, H_3K_2, H_3K_3$$

hogy az utak csak közös végpontjukban találkozzanak?

HA TERVEZHETŐ, AKKOR

a bizonyítás egyszerű: fel kell mutatni egy „tervrajzot”

HA TERVEZHETŐ, AKKOR

a bizonyítás egyszerű: fel kell mutatni egy „tervrajzot”

Csak rövid a bizonyítás! Hogy hogyan találjuk meg a tervdrajzot, arról nem szóltunk.

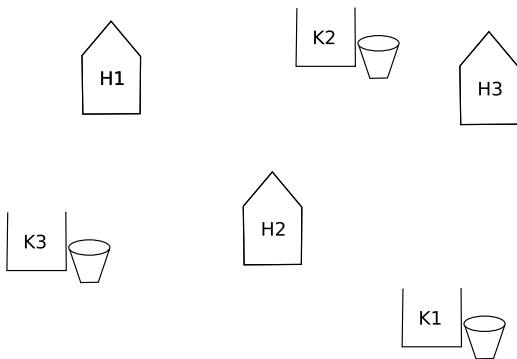
HA NEM TERVEZHETŐ, AKKOR
A bizonyítás: ???

Részfeladat

Tervezzük meg a $H_1K_1, K_1H_2, H_2K_2, K_2H_3, H_3K_3, K_3H_1$ utakat.

Részfeladat

Tervezzük meg a H_1K_1 , K_1H_2 , H_2K_2 , K_2H_3 , H_3K_3 , K_3H_1 utakat.
Vegyünk fel házakat/kutakat.

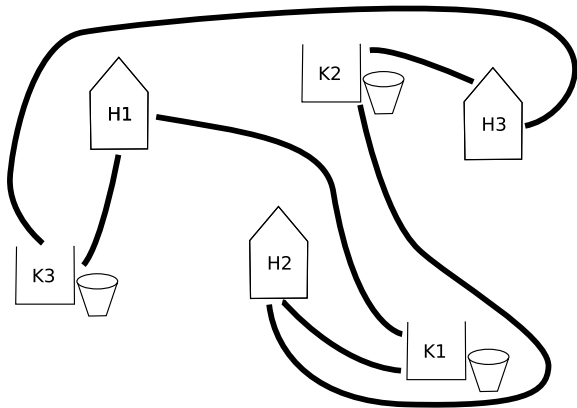


Részfeladatmegoldása (folytatás)

Tervezzük meg a H_1K_1 , K_1H_2 , H_2K_2 , K_2H_3 , H_3K_3 , K_3H_1 utakat.

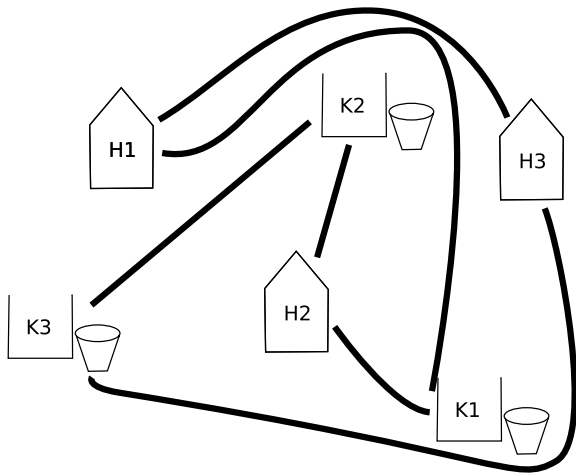
Vegyünk fel házakat/kutakat.

Tervezzünk utakat.



Részfeladat MÁSIK megoldása

Egy másik jó tervrajz:



Lényeges (könnyen elhíhető, nehezen bizonyítható) észrevétel

Lényegében egyetlen megoldás van.

Lényeges (könnyen elhíhető, nehezen bizonyítható) észrevétel

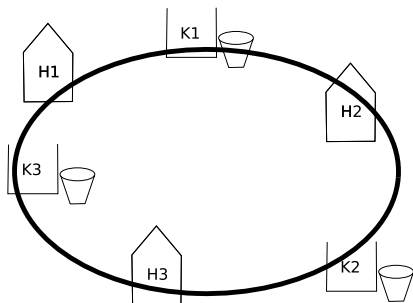
Lényegében egyetlen megoldás van.

Minden megoldás egyenértékű a következő STANDARD megoldással/LERAJZOLÁSSal:

Lényeges (könnyen elhíhető, nehezen bizonyítható) észrevétel

Lényegében egyetlen megoldás van.

Minden megoldás egyenértékű a következő STANDARD megoldással/LERAJZOLÁSSal:



A három ház- három kút feladat megoldása

Válasz: NINCS megfelelő lerajzolás.

A három ház- három kút feladat megoldása

Válasz: NINCS megfelelő lerajzolás.

INDIREKT bizonyítás.

A három ház- három kút feladat megoldása

Válasz: NINCS megfelelő lerajzolás.

INDIREKT bizonyítás.

FELTEHETŐ, hogy a rész standard lerajzolásával kezdünk és próbáljuk a hiányzó három élt berajzolni.

A három ház- három kút feladat megoldása

Válasz: NINCS megfelelő lerajzolás.

INDIREKT bizonyítás.

FELTEHETŐ, hogy a rész standard lerajzolásával kezdünk és próbáljuk a hiányzó három élt berajzolni.

BELÜLre nem fér el két hiányzó él. KÍVÜLre sem.

A három ház- három kút feladat megoldása

Válasz: NINCS megfelelő lerajzolás.

INDIREKT bizonyítás.

FELTEHETŐ, hogy a rész standard lerajzolásával kezdünk és próbáljuk a hiányzó három élt berajzolni.

BELÜLre nem fér el két hiányzó él. KÍVÜLre sem.

ELLENTMONDÁS.

Csúcsok (V): Egy véges halmaz

A gráfelmélet nyelve

Csúcsok (V): Egy véges halmaz

Élek (E): Csúcspárok halmaza (\rightarrow egyszerű gráf)

Csúcsok (V): Egy véges halmaz

Élek (E): Csúcspárok halmaza (\rightarrow egyszerű gráf)

$e = \{u, v\}$ **olvasata**:

- az u és v csúcsok szomszédosak
- e összeköti u -t és v -t
- u -nak v szomszédja
- u és v az e él két végpontja

Csúcsok (V): Egy véges halmaz

Élek (E): Csúcspárok halmaza (\rightarrow egyszerű gráf)

$e = \{u, v\}$ **olvasata**:

- az u és v csúcsok szomszédosak
- e összeköti u -t és v -t
- u -nak v szomszédja
- u és v az e él két végpontja

Lerajzolás: csúcsok helyett pontok, élek helyett élgörbék

Csúcsok (V): Egy véges halmaz

Élek (E): Csúcspárok halmaza (\rightarrow egyszerű gráf)

$e = \{u, v\}$ **olvasata**:

- az u és v csúcsok szomszédosak
- e összeköti u -t és v -t
- u -nak v szomszédja
- u és v az e él két végpontja

Lerajzolás: csúcsok helyett pontok, élek helyett élgörbék

Szép lerajzolás: élgörbék nem metszik át egymást

Csúcsok (V): Egy véges halmaz

Élek (E): Csúcspárok halmaza (\rightarrow egyszerű gráf)

$e = \{u, v\}$ **olvasata**:

- az u és v csúcsok szomszédosak
- e összeköti u -t és v -t
- u -nak v szomszédja
- u és v az e él két végpontja

Lerajzolás: csúcsok helyett pontok, élek helyett élgörbék

Szép lerajzolás: élgörbék nem metszik át egymást

Síkgráf: gráf, ami lerajzolható szépen

A gráfelmélet nyelve (folytatás)

Kör egy gráfban: olyan része a gráfnak, ami lerajzolható úgy, hogy a megfelelő élgörbék egy egyszerű körvonallá olvadnak össze.

A gráfelmélet nyelve (folytatás)

Kör egy gráfban: olyan része a gráfnak, ami lerajzolható úgy, hogy a megfelelő élgörbék egy egyszerű körvonallá olvadnak össze.

Körgráf: egy kör és más semmi.

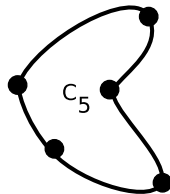
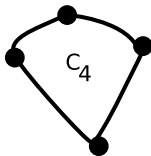
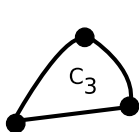
A gráfelmélet nyelve (folytatás)

Kör egy gráfban: olyan része a gráfnak, ami lerajzolható úgy, hogy a megfelelő élgörbék egy egyszerű körvonallá olvadnak össze.

Körgráf: egy kör és más semmi.

Jelölés: C_n (n pontú/élű gráf)

Jelölés: C_n (n pontú/élű gráf)



Euler tétele

G egyszerű síkgráf. Ekkor

$$|E| < 3|V|.$$



Fáry tétele

(Fáry tétele)

G egyszerű síkgráf. Ekkor G lerajzolható úgy is, hogy minden élgörbéje EGYENES SZAKASZ.

Definíció

G egy lerajzolása *Conway-lerajzolás*, ha

Definíció

G egy lerajzolása *Conway-lerajzolás*, ha

- összefutó élpárok élgörbéi nem találkoznak (csak a közös végpontjukban),

Definíció

G egy lerajzolása *Conway-lerajzolás*, ha

- összefutó élpárok élgörbéi nem találkoznak (csak a közös végpontjukban),
- *nem összefutó* élpárok élgörbéi pontosan *egyszer átmetszik* egymást.

Definíció

G egy lerajzolása *Conway-lerajzolás*, ha

- összefutó élpárok élgörbéi nem találkoznak (csak a közös végpontjukban),
- *nem összefutó* élpárok élgörbéi pontosan *egyszer átmetszik* egymást.



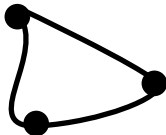
Definíció

G egyszerű gráf *gubanc*/thackle, ha van Conway-lerajzolása.

Gubancok-e a körgráfok?

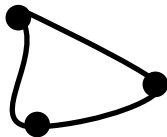
Gubancok-e a körgráfok?

C_3 gubanc:

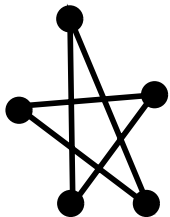


Gubancok-e a körgráfok?

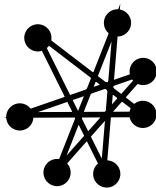
C_3 gubanc:



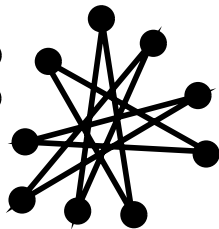
$C_5, C_7, C_9, C_{11}, \dots$ gubanc



C_5



C_7



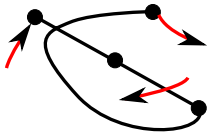
C_9

Gubancok-e a körgráfok? (folytatás)

C_4

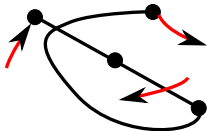
Gubancok-e a körgráfok? (folytatás)

C_4 NEM gubanc.



Gubancok-e a körgráfok? (folytatás)

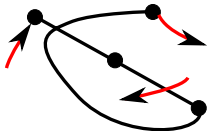
C_4 NEM gubanc.



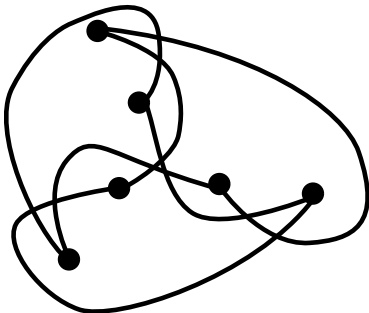
C_6 ?

Gubancok-e a körgráfok? (folytatás)

C_4 NEM gubanc.



C_6 ? IGEN.



Tétel

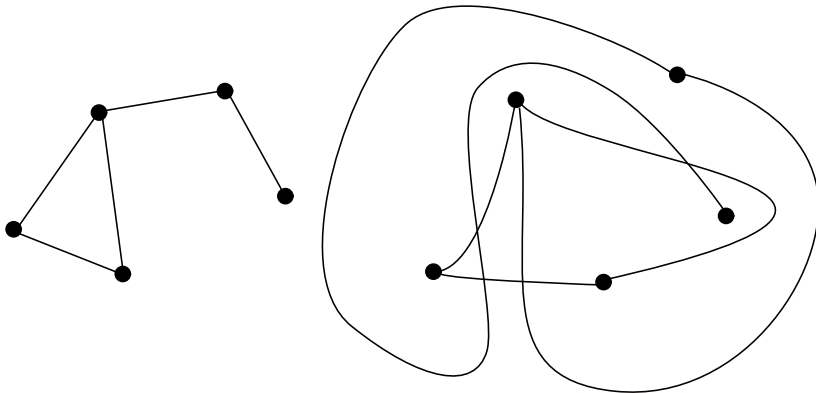
C_ℓ akkor és csak akkor gubanc, ha ℓ NEM 4.

Tétel

C_ℓ akkor és csak akkor gubanc, ha ℓ NEM 4.

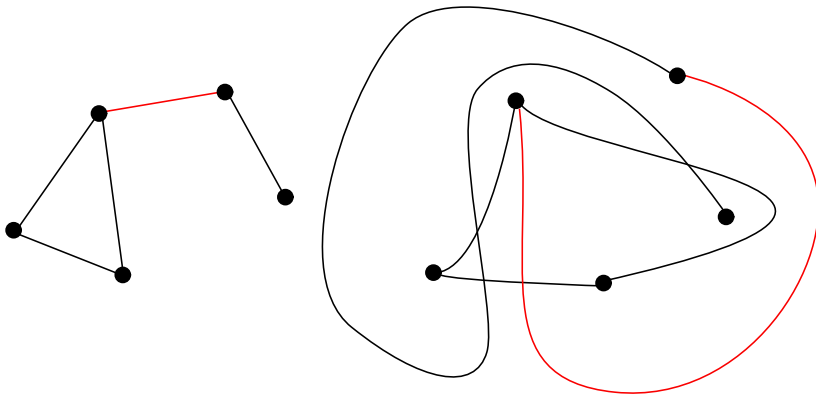
BIZONYÍTÁS:Ha C_ℓ gubanc akkor $C_{\ell+2}$ is az:

Egy G gráf és gubanc lerajzolása:



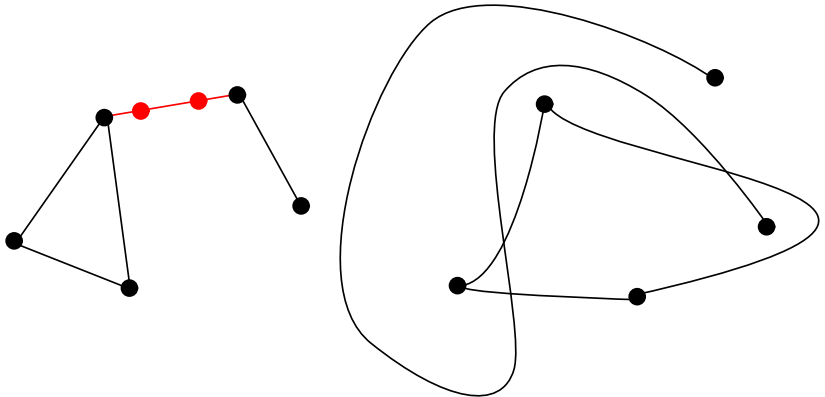
Betoldás (folytatás)

A G gráf egy e élnek (piros) kijelölése:



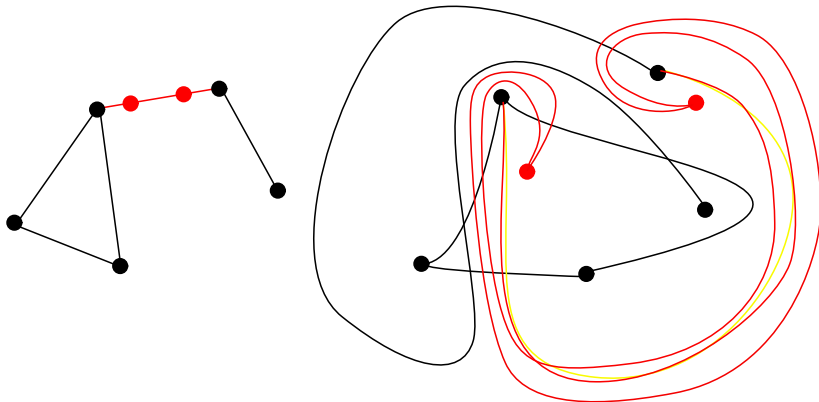
Betoldás (folytatás)

e felosztása két új ponttal.

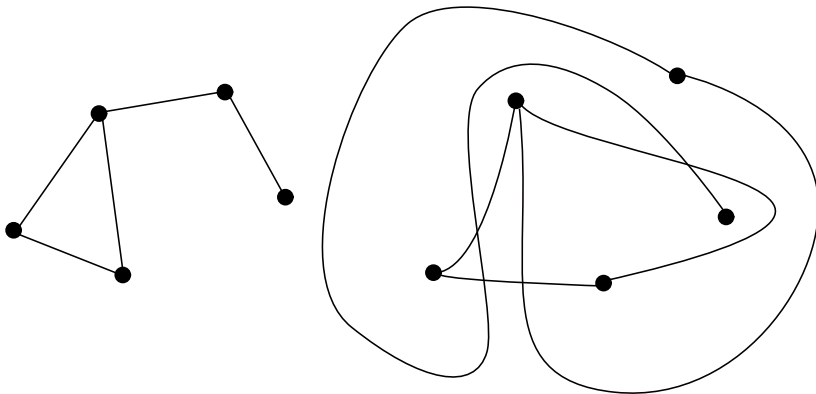


Betoldás (folytatás)

A toldott gráf gubanc lerajzolása:

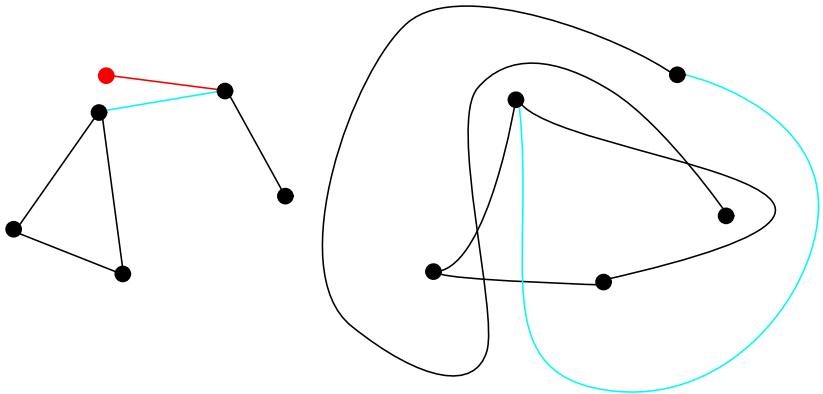


Egy G gráf és gubanc lerajzolása:



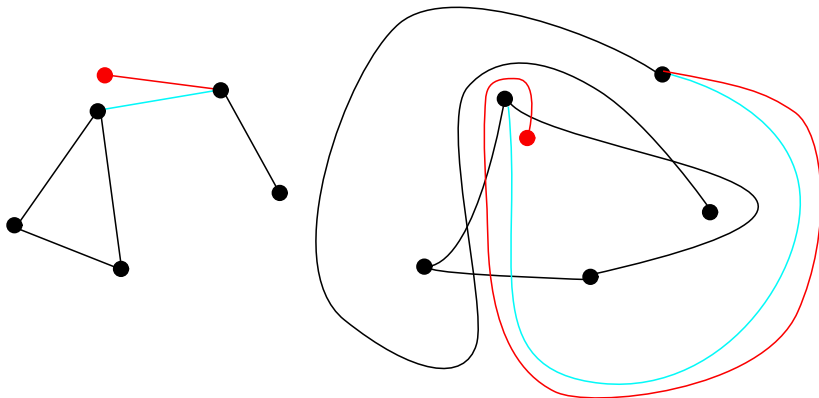
Ághajtás (folytatás)

A G gráfból egy ág (piros e él) kihajtása:



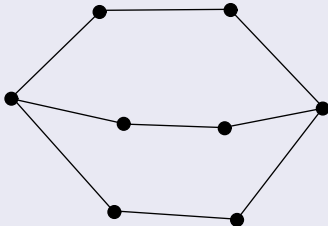
Ághajtás (folytatás)

Az ághajtott gráf gubanc lerajzolása:



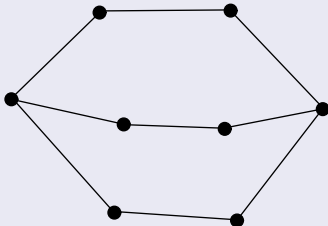
Lovász László, Pach János, Szegedy Máriaó tétele

A következő gráf nem gubanc.



Lovász László, Pach János, Szegedy Mórió tétele

A következő gráf nem gubanc.



Meglepően nehéz.

Conway sejtése

Legyen G egy gubanc. Ekkor

$$|E| \leq |V|.$$

Conway sejtése

Legyen G egy gubanc. Ekkor

$$|E| \leq |V|.$$

Miért gondolkozzak rajta?

Conway sejtése

Legyen G egy gubanc. Ekkor

$$|E| \leq |V|.$$

Miért gondolkozzak rajta?

Első korrekt megoldó jutalma: 1000\$ + világhír

Definíció

Egy gubanc egyenes-gubanc, ha van olyan gubanc lerajzolása, ahol minden élgörbe egyenes.

Definíció

Egy gubanc egyenes-gubanc, ha van olyan gubanc lerajzolása, ahol minden élgörbe egyenes.

$C_{2\ell+1}$ egyenes-gubanc.

Definíció

Egy gubanc egyenes-gubanc, ha van olyan gubanc lerajzolása, ahol minden élgörbe egyenes.

$C_{2\ell+1}$ egyenes-gubanc.

C_6 NEM egyenes-gubanc.

Lemma

Egy egyenes-gubanc minden legalább 3 fokú csúcsának van 1 fokú szomszédja.

Lemma

Egy egyenes-gubanc minden legalább 3 fokú csúcsának van 1 fokú szomszédja.

Lemma átfogalmazva

Egy egyenes-gubancban van 1 fokú csúcs vagy minden fokszám legfeljebb 2.

Lemma

Egy egyenes-gubanc minden legalább 3 fokú csúcsának van 1 fokú szomszédja.

Lemma átfogalmazva

Egy egyenes-gubancban van 1 fokú csúcs vagy minden fokszám legfeljebb 2.

A SEJTÉS BIZONYÍTÁSA EGYENES GUBANCOKRA: Lemma alapján a pontszámra vonatkozó teljes indukció.

Tétel

*(Lovász László—Pach János—Szegedy Mórió,
G. Cairns—Y. Nikolayevsky, R. Fulek—Pach János)*
Ha G egy gubanc, akkor

$$|E| \leq 1.428 \dots \cdot |V|.$$

Az 1000\$-os díj még mindig érvényes.

Köszönöm a figyelmet.