Gráfok, véletlen, sajátértékek

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2022. április 22.

Gráfok, mátrixok

Gráfelméleti alapjelölések

G egyszerű gráf.

Gráfelméleti alapjelölések

G egyszerű gráf.

$V(G)$,

Gráfelméleti alapjelölések

G egyszerű gráf.

$V(G)$, $E(G)$,

Gráfelméleti alapjelölések

G egyszerű gráf.

$V(G)$, $E(G)$, csúcsok fokszáma,

Gráfelméleti alapjelölések

G egyszerű gráf.

$V(G)$, $E(G)$, csúcsok fokszáma, d-reguláris gráf,

Gráfelméleti alapjelölések

G egyszerű gráf.

$V(G)$, $E(G)$, csúcsok fokszáma, d-reguláris gráf, A_G.

Gráfok, mátrixok

Gráfelméleti alapjelölések

G egyszerű gráf.

$V(G)$, $E(G)$, csúcsok fokszáma, d-reguláris gráf, A_G.

Mátrixelméleti alapjelölések

$M \in \mathcal{S}\mathbb{R}^{n \times n}$,

Gráfelméleti alapjelölések

G egyszerű gráf.

$V(G)$, $E(G)$, csúcsok fokszáma, d-reguláris gráf, A_G.

Mátrixelméleti alapjelölések

$M \in \mathcal{S}\mathbb{R}^{n\times n}$, $M = (M_{u,v})_{u,v\in V} \in \mathcal{S}\mathbb{R}^{V\times V}$,

Gráfok, mátrixok

Gráfelméleti alapjelölések

G egyszerű gráf.

$V(G)$, $E(G)$, csúcsok fokszáma, d-reguláris gráf, A_G.

Mátrixelméleti alapjelölések

$M \in \mathcal{S}\mathbb{R}^{n\times n}$, $M = (M_{u,v})_{u,v\in V} \in \mathcal{S}\mathbb{R}^{V\times V}$, $x = (x_v)_{v:v\in V} \in \mathbb{R}^V$

Gráfok, mátrixok

Gráfelméleti alapjelölések

G egyszerű gráf.

$V(G)$, $E(G)$, csúcsok fokszáma, d-reguláris gráf, A_G.

Mátrixelméleti alapjelölések

$M \in \mathcal{S}\mathbb{R}^{n\times n}$, $M = (M_{u,v})_{u,v\in V} \in \mathcal{S}\mathbb{R}^{V\times V}$, $x = (x_v)_{v:v\in V} \in \mathbb{R}^V$ (mindig oszlopvektor).

Gráfelméleti alapjelölések

G egyszerű gráf.

$V(G)$, $E(G)$, csúcsok fokszáma, d-reguláris gráf, A_G.

Mátrixelméleti alapjelölések

$M \in \mathcal{S}\mathbb{R}^{n\times n}$, $M = (M_{u,v})_{u,v\in V} \in \mathcal{S}\mathbb{R}^{V\times V}$, $x = (x_v)_{v:v\in V} \in \mathbb{R}^V$ (mindig oszlopvektor).

Sajátértékek, sajátvektorok.

Mire jók a gráfok?

Mire jók a gráfok?

Nagyon sok természetes gyakorlati probléma modellezhető gráfokkal/egyszerű gráfokkal.

Mire jók a gráfok?

Nagyon sok természetes gyakorlati probléma modellezhető gráfokkal/egyszerű gráfokkal.

Csúcshalmaz: résztvevők, objektumok, kereszteződések.

Mire jók a gráfok?

Nagyon sok természetes gyakorlati probléma modellezhető gráfokkal/egyszerű gráfokkal.

Csúcshalmaz: résztvevők, objektumok, kereszteződések. Élek: Kapcsolatok, szomszédságok, konflikusok.

Mire jók a gráfok?

Nagyon sok természetes gyakorlati probléma modellezhető gráfokkal/egyszerű gráfokkal.

Csúcshalmaz: résztvevők, objektumok, kereszteződések. Élek: Kapcsolatok, szomszédságok, konflikusok.

Alkalmazások: Matematika, fizika, kémiai, biológia, genetika, szociológia, big data, ...

Mire jó a véletlen?

Mire jó a véletlen?

Sokszor döntések sorozatát kell hoznunk.

Mire jó a véletlen?

Sokszor döntések sorozatát kell hoznunk. A döntések elvezetnek egy eredményhez/outputhoz.

Mire jó a véletlen?

Sokszor döntések sorozatát kell hoznunk. A döntések elvezetnek egy eredményhez/outputhoz.

Hogyan hozzuk a döntéseket?

Mire jó a véletlen?

Sokszor döntések sorozatát kell hoznunk. A döntések elvezetnek egy eredményhez/outputhoz.

Hogyan hozzuk a döntéseket? Sokféle stratégia, ötlet előhozható.

Mire jó a véletlen?

Sokszor döntések sorozatát kell hoznunk. A döntések elvezetnek egy eredményhez/outputhoz.

Hogyan hozzuk a döntéseket? Sokféle stratégia, ötlet előhozható. Gyakran ezek a stratégiák nem jók.

Mire jó a véletlen?

Sokszor döntések sorozatát kell hoznunk. A döntések elvezetnek egy eredményhez/outputhoz.

Hogyan hozzuk a döntéseket? Sokféle stratégia, ötlet előhozható. Gyakran ezek a stratégiák nem jók. A jónak tűnő döntések rossz irányba vezetnek.

Mire jó a véletlen?

Sokszor döntések sorozatát kell hoznunk. A döntések elvezetnek egy eredményhez/outputhoz.

Hogyan hozzuk a döntéseket? Sokféle stratégia, ötlet előhozható. Gyakran ezek a stratégiák nem jók. A jónak tűnő döntések rossz irányba vezetnek.

?Véletlen döntések!

Mire jó a véletlen?

Sokszor döntések sorozatát kell hoznunk. A döntések elvezetnek egy eredményhez/outputhoz.

Hogyan hozzuk a döntéseket? Sokféle stratégia, ötlet előhozható. Gyakran ezek a stratégiák nem jók. A jónak tűnő döntések rossz irányba vezetnek.

?Véletlen döntések! Pozitív valószínűséggel jó irányba vezetnek.

Mire jó a véletlen?

Sokszor döntések sorozatát kell hoznunk. A döntések elvezetnek egy eredményhez/outputhoz.

Hogyan hozzuk a döntéseket? Sokféle stratégia, ötlet előhozható. Gyakran ezek a stratégiák nem jók. A jónak tűnő döntések rossz irányba vezetnek.

?Véletlen döntések! Pozitív valószínűséggel jó irányba vezetnek. (Ahogy rossz irányba is.)

Mire jó a véletlen?

Sokszor döntések sorozatát kell hoznunk. A döntések elvezetnek egy eredményhez/outputhoz.

Hogyan hozzuk a döntéseket? Sokféle stratégia, ötlet előhozható. Gyakran ezek a stratégiák nem jók. A jónak tűnő döntések rossz irányba vezetnek.

?Véletlen döntések! Pozitív valószínűséggel jó irányba vezetnek. (Ahogy rossz irányba is.) DE nincs mögöttük esetleges rossz elmélet, ami elronthatja döntéssorzatunkat.

Mire jó a véletlen?

Sokszor döntések sorozatát kell hoznunk. A döntések elvezetnek egy eredményhez/outputhoz.

Hogyan hozzuk a döntéseket? Sokféle stratégia, ötlet előhozható. Gyakran ezek a stratégiák nem jók. A jónak tűnő döntések rossz irányba vezetnek.

?Véletlen döntések! Pozitív valószínűséggel jó irányba vezetnek. (Ahogy rossz irányba is.) DE nincs mögöttük esetleges rossz elmélet, ami elronthatja döntéssorzatunkat.

A természetben is ott van a véletlen (Isten kockajátékos).

Mire jó a véletlen?

Sokszor döntések sorozatát kell hoznunk. A döntések elvezetnek egy eredményhez/outputhoz.

Hogyan hozzuk a döntéseket? Sokféle stratégia, ötlet előhozható. Gyakran ezek a stratégiák nem jók. A jónak tűnő döntések rossz irányba vezetnek.

?Véletlen döntések! Pozitív valószínűséggel jó irányba vezetnek. (Ahogy rossz irányba is.) DE nincs mögöttük esetleges rossz elmélet, ami elronthatja döntéssorzatunkat.

A természetben is ott van a véletlen (Isten kockajátékos). Tapasztalat: a véletlen döntések gyakran várhatóan jó eredményhez vezetnek.

Mire jó a gráfok sajátértéke?

Mire jó a gráfok sajátértéke?

Tapasztalat: A sajátértékekből sok minden kiolvasható.

Mire jó a gráfok sajátértéke?

Tapasztalat: A sajátértékekből sok minden kiolvasható.

A sajátértékek kapcsolatban vannak nehéz gráfelméleti paraméterekkel.

Mire jó a gráfok sajátértéke?

Tapasztalat: A sajátértékekből sok minden kiolvasható.

A sajátértékek kapcsolatban vannak nehéz gráfelméleti paraméterekkel. Gyakran becslések adhatók nehezen kiszámolható optimális értékekkel.

Mire jó a gráfok sajátértéke?

Tapasztalat: A sajátértékekből sok minden kiolvasható.

A sajátértékek kapcsolatban vannak nehéz gráfelméleti paraméterekkel. Gyakran becslések adhatók nehezen kiszámolható optimális értékekkel.

A sajátértékek könnyen kiszámolhatók.

Mire jó a gráfok sajátértéke?

Tapasztalat: A sajátértékekből sok minden kiolvasható.

A sajátértékek kapcsolatban vannak nehéz gráfelméleti paraméterekkel. Gyakran becslések adhatók nehezen kiszámolható optimális értékekkel.

A sajátértékek könnyen kiszámolhatók. Numerikus matematika: Hatványmódszer, QR-felbontás, ...

Ramsey számok/gráfok

Ramsey számok/gráfok

$c : E(K_V) \to \{\text{piros}, \text{kék}\}$ a teljes gráf egy élszínezése két színnel.

$c : E(K_V) \to \{\text{piros}, \text{kék}\}$ a teljes gráf egy élszínezése két színnel.

Definíció: Monokromatikus csúcshalmaz

$M \subset V$ monokromatikus, ha $c|_{\binom{M}{2}}$ konstans.

Ramsey számok/gráfok

$c : E(K_V) \to \{\text{piros}, \text{kék}\}$ a teljes gráf egy élszínezése két színnel.

Definíció: Monokromatikus csúcshalmaz

$M \subset V$ monokromatikus, ha $c|_{\binom{M}{2}}$ konstans.

Definíció: Ramsey-számok

$R(k)$ az a minimális szám, hogy $|V| = R(k)$ esetén minden c esetén szükségszerű k elemű monokromatikus csúcshalmaz létezése.

Ramsey számok/gráfok

$c : E(K_V) \to \{\text{piros}, \text{kék}\}$ a teljes gráf egy élszínezése két színnel.

Definíció: Monokromatikus csúcshalmaz

$M \subset V$ monokromatikus, ha $c|_{\binom{M}{2}}$ konstans.

Definíció: Ramsey-számok

$R(k)$ az a minimális szám, hogy $|V| = R(k)$ esetén minden c esetén szükségszerű k elemű monokromatikus csúcshalmaz létezése.

Definíció: Tökéletes Ramsey-gráfok

$R(k) - 1$ pontszámú teljes gráf egy c élszínezéssel, amelyre nézve nincs k meretű monokromatikus halmaz.

Ramsey számok/gráfok

$c : E(K_V) \to \{\text{piros}, \text{kék}\}$ a teljes gráf egy élszínezése két színnel.

Definíció: Monokromatikus csúcshalmaz

$M \subset V$ monokromatikus, ha $c|_{\binom{M}{2}}$ konstans.

Definíció: Ramsey-számok

$R(k)$ az a minimális szám, hogy $|V| = R(k)$ esetén minden c esetén szükségszerű k elemű monokromatikus csúcshalmaz létezése.

Definíció: Tökéletes Ramsey-gráfok

$R(k) - 1$ pontszámú teljes gráf egy c élszínezéssel, amelyre nézve nincs k meretű monokromatikus halmaz.

Definíció: Ramsey-gráfok

Nagy méretű — de $R(k) - 1$-hez közeli pontszámú — teljes gráf egy c élszínezéssel, amelyre nézve nincs k meretű monokromatikus halmaz.

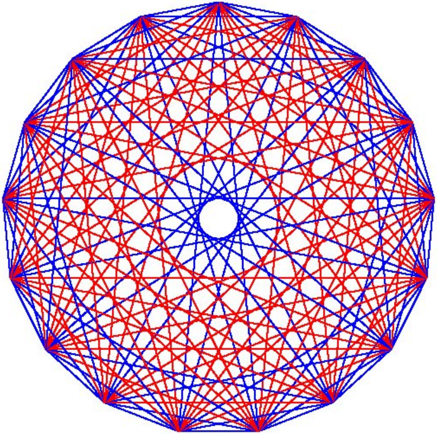
Tökéletes Ramsey-gráfok kis paraméterekre: $R(3) = 6$, $R(4) = 18$

Tökéletes Ramsey-gráfok kis paraméterekre: $R(3) = 6$, $R(4) = 18$

Vegyünk egy $R(k) - 1$ elemű csúcshalmazt. Vegyünk $u, v \in V$ csúcsokat. Milyen színű él legyen köztük?

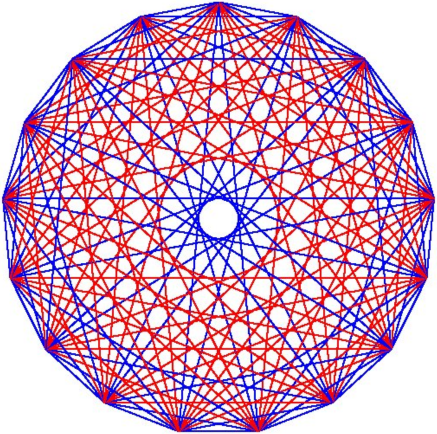
Tökéletes Ramsey-gráfok kis paraméterekre: $R(3) = 6$, $R(4) = 18$

Vegyünk egy $R(k) - 1$ elemű csúcshalmazt. Vegyünk $u, v \in V$ csúcsokat. Milyen színű él legyen köztük?



Tökéletes Ramsey-gráfok kis paraméterekre: $R(3) = 6$, $R(4) = 18$

Vegyünk egy $R(k) - 1$ elemű csúcshalmazt. Vegyünk $u, v \in V$ csúcsokat. Milyen színű él legyen köztük?



Nagyon szimmetrikus, struktúrált gráfok.

A legjobb amit tudunk:

Konstrukció: Szimmetrikus Erdős—Rényi-gráf

Vegyünk $2^{k/2}$ csúcsot.

A legjobb amit tudunk:

Konstrukció: Szimmetrikus Erdős—Rényi-gráf

Vegyünk $2^{k/2}$ csúcsot.
Minden u, v csúcspárra egy külön pénzfeldobással döntsünk.

Ramsey-gráfok nagy paraméterekre

A legjobb amit tudunk:

Konstrukció: Szimmetrikus Erdős—Rényi-gráf

Vegyünk $2^{k/2}$ csúcsot.
Minden u, v csúcspárra egy külön pénzfeldobással döntsünk.

Jó eséllyel nem lesz monokromatikus k-as.

Ramsey-gráfok nagy paraméterekre

A legjobb amit tudunk:

Konstrukció: Szimmetrikus Erdős—Rényi-gráf

Vegyünk $2^{k/2}$ csúcsot.
Minden u, v csúcspárra egy külön pénzfeldobással döntsünk.

Jó eséllyel nem lesz monokromatikus k-as.

Kicsit jobb kornstukció: Bonyolultabb, DE szintén véletlen eljárás.

A legjobb amit tudunk:

Konstrukció: Szimmetrikus Erdős—Rényi-gráf

Vegyünk $2^{k/2}$ csúcsot.
Minden u, v csúcspárra egy külön pénzfeldobással döntsünk.

Jó eséllyel nem lesz monokromatikus k-as.

Kicsit jobb kornstukció: Bonyolultabb, DE szintén véletlen eljárás.

Véletlent nem használó konstrukció: Sokkal rosszabb/ kisebb V-re működik.

Nagy girth (g), kevés pont egy d-reguláris gráfban

Nagy girth (g), kevés pont egy d-reguláris gráfban

$g \geq 3$, $d \geq 2/d \geq 3$.

Nagy girth (g), kevés pont egy d-reguláris gráfban

$g \geq 3$, $d \geq 2/d \geq 3$.

Észrevétel

Nagy girth (g), kevés pont egy d-reguláris gráfban

$g \geq 3$, $d \geq 2/d \geq 3$.

Észrevétel

(i) Ha g páratlan, akkor minden d-reguláris, g-girth-ű gráfra
$|V| \geq 1 + d + d(d-1) + d(d-1)^2 + d(d-1)^3 + \ldots + d(d-1)^{\frac{g-3}{2}}$.

(ii) Ha g páros, akkor minden d-reguláris, g-girth-ű gráfra
$|V| \geq 2\left(1 + (d-1) + (d-1)^2 + (d-1)^3 + \ldots + (d-1)^{\frac{g-2}{2}}\right)$.

Nagy girth (g), kevés pont egy d-reguláris gráfban

$g \geq 3$, $d \geq 2/d \geq 3$.

Észrevétel

(i) Ha g páratlan, akkor minden d-reguláris, g-girth-ű gráfra

$$|V| \geq 1 + d + d(d-1) + d(d-1)^2 + d(d-1)^3 + \ldots + d(d-1)^{\frac{g-3}{2}}.$$

(ii) Ha g páros, akkor minden d-reguláris, g-girth-ű gráfra

$$|V| \geq 2\left(1 + (d-1) + (d-1)^2 + (d-1)^3 + \ldots + (d-1)^{\frac{g-2}{2}}\right).$$

Definíció

G egy (d,g)-kalitka/cage, ha d-reguláris, g-girth-ű és pontszáma minimális.

Nagy girth (g), kevés pont egy d-reguláris gráfban

$g \geq 3$, $d \geq 2/d \geq 3$.

Észrevétel

(i) Ha g páratlan, akkor minden d-reguláris, g-girth-ű gráfra

$$|V| \geq 1 + d + d(d-1) + d(d-1)^2 + d(d-1)^3 + \ldots + d(d-1)^{\frac{g-3}{2}}.$$

(ii) Ha g páros, akkor minden d-reguláris, g-girth-ű gráfra

$$|V| \geq 2\left(1 + (d-1) + (d-1)^2 + (d-1)^3 + \ldots + (d-1)^{\frac{g-2}{2}}\right).$$

Definíció

G egy (d,g)-kalitka/cage, ha d-reguláris, g-girth-ű és pontszáma minimális.
G egy (d,g)-Moore-gráf, ha d-reguláris, g-girth-ű és pontszáma a fenti észrevételben adott becslés.

Nagy girth (g), kevés pont egy d-reguláris gráfban

$g \geq 3$, $d \geq 2/d \geq 3$.

Észrevétel

(i) Ha g páratlan, akkor minden d-reguláris, g-girth-ű gráfra

$$|V| \geq 1 + d + d(d-1) + d(d-1)^2 + d(d-1)^3 + \ldots + d(d-1)^{\frac{g-3}{2}}.$$

(ii) Ha g páros, akkor minden d-reguláris, g-girth-ű gráfra

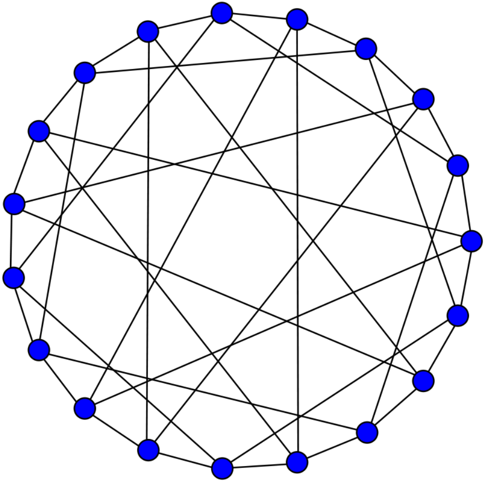
$$|V| \geq 2\left(1 + (d-1) + (d-1)^2 + (d-1)^3 + \ldots + (d-1)^{\frac{g-2}{2}}\right).$$

Definíció

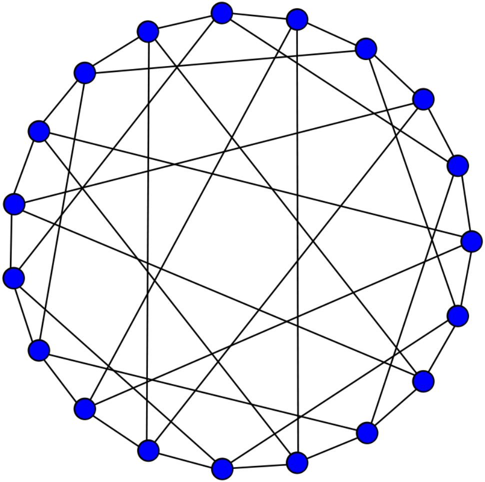
G egy (d,g)-kalitka/cage, ha d-reguláris, g-girth-ű és pontszáma minimális.
G egy (d,g)-Moore-gráf, ha d-reguláris, g-girth-ű és pontszáma a fenti észrevételben adott becslés.

Speciális esetek: $(3,g)$-kalitka/cage, illetve $(d,5)$-Moore-gráf

Példák: Robertson-gráf, 19 csúcs, (4,5)-cage

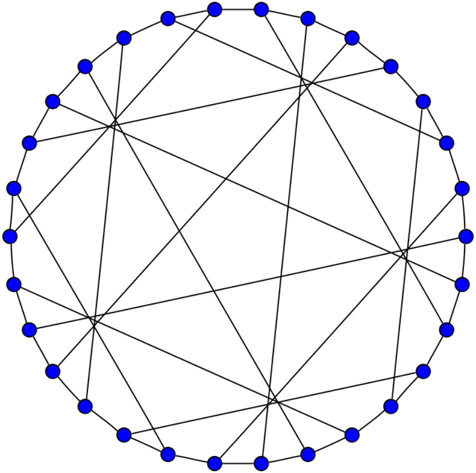


Példák: Robertson-gráf, 19 csúcs, (4,5)-cage



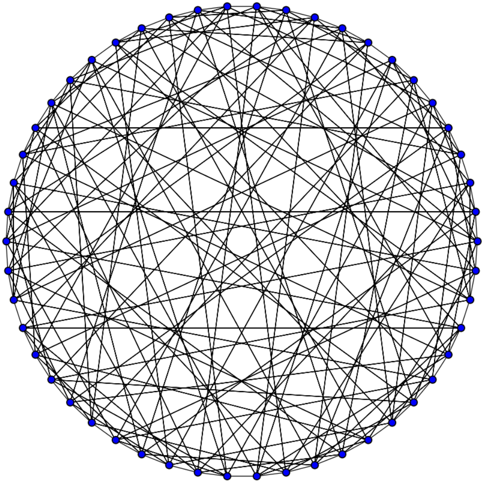
24 elemű automorfizmuscsoport, $\mathbb{D}_{12}$

Példák: Tutte—Coxeter-gráf, 30 csúcs, (3,8)-Moore-gráf



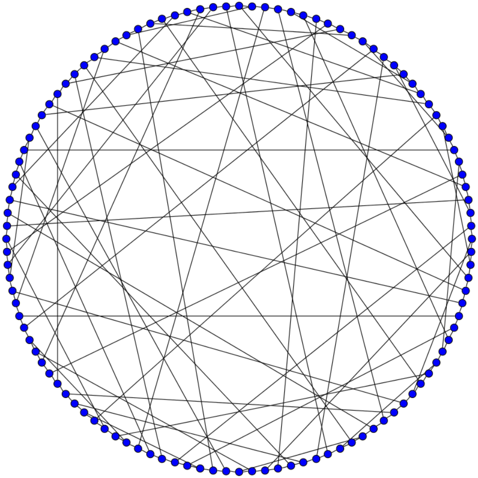
1440 elemű automorfizmuscsoport, $\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathbb{S}_6)$.

Példák: Hoffman—Singleton-gráf, 50 csúcs, (7,5)-Moore-gráf

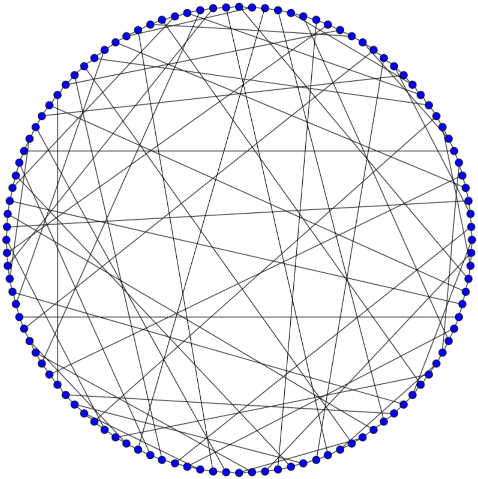


252.000 elemű automorfizmuscsoport.

Példák: Balaban-gráf, 112 csúcs, (3,11)-cage



Példák: Balaban-gráf, 112 csúcs, (3,11)-cage



64 elemű automorfizmuscsoport.

Véletlen d-reguláris gráfok

A fogalom érdekes, fontos, nem-triviális.

Véletlen d-reguláris gráfok

A fogalom érdekes, fontos, nem-triviális.

A véletlen konstrukció, determinisztikus lépésekkel keverve (kvázi-random algoritmus) alkalmas kicsi gráfok konstruálására.

Véletlen d-reguláris gráfok

A fogalom érdekes, fontos, nem-triviális.

A véletlen konstrukció, determinisztikus lépésekkel keverve (kvázi-random algoritmus) alkalmas kicsi gráfok konstruálására.

Nem versenyképes az ismert cage-ekkel.

Nagyító gráfsorozatok

Nagyító/expander paraméter, Cheeger-konstans

(S,T) vágásokon ($V = S \dot{\cup} T, \emptyset \subsetneq S, T \subsetneq V$) minimalizálunk:

$$Ch(G) = \min \frac{|E(S,T)|}{|(S,T)|},$$

ahol $E(S,T)$ az S-T élek halmaza, $|(S,T)| = \min\{|S|, |T|\}$.

Nagyító gráfsorozatok

Nagyító/expander paraméter, Cheeger-konstans

(S,T) vágásokon ($V = S\dot{\cup} T, \emptyset \subsetneq S, T \subsetneq V$) minimalizálunk:

$$Ch(G) = \min \frac{|E(S,T)|}{|(S,T)|},$$

ahol $E(S,T)$ az S-T élek halmaza, $|(S,T)| = \min\{|S|,|T|\}$.

Definíció: Expander gráfsorozatok

A (G_n) gráfsorozat egy (d,ε)-expander, ha $|V(G_n)| \to \infty$, G_n gráfok d-reguláris gráfok, továbbá $Ch(G_n) \geq \varepsilon(> 0)$.

Mire jók a nagyító gráfsorozatok?

Mire jók a nagyító gráfsorozatok?

- Pszeudo-véletlen szám generátorok:

Mire jók a nagyító gráfsorozatok?

- Pszeudo-véletlen szám generátorok: r random bitből determinisztikusan $R \gg r$ véletlennek tűnő bitet kiszámoló algoritmus.

Mire jók a nagyító gráfsorozatok?

- Pszeudo-véletlen szám generátorok: r random bitből determinisztikusan $R \gg r$ véletlennek tűnő bitet kiszámoló algoritmus.
- Véletlen algoritmusok determinisztikussá tétele kevés lassulással (derandomizáció).

Mire jók a nagyító gráfsorozatok?

- Pszeudo-véletlen szám generátorok: r random bitből determinisztikusan $R \gg r$ véletlennek tűnő bitet kiszámoló algoritmus.
- Véletlen algoritmusok determinisztikussá tétele kevés lassulással (derandomizáció).
- Hibajavító kódok konstrukciói.

Mire jók a nagyító gráfsorozatok?

- Pszeudo-véletlen szám generátorok: r random bitből determinisztikusan $R \gg r$ véletlennek tűnő bitet kiszámoló algoritmus.
- Véletlen algoritmusok determinisztikussá tétele kevés lassulással (derandomizáció).
- Hibajavító kódok konstrukciói.
- Determinisztikus algoritmusok tervezése kevés tárigénnyel.

Mire jók a nagyító gráfsorozatok?

- Pszeudo-véletlen szám generátorok: r random bitből determinisztikusan $R \gg r$ véletlennek tűnő bitet kiszámoló algoritmus.
- Véletlen algoritmusok determinisztikussá tétele kevés lassulással (derandomizáció).
- Hibajavító kódok konstrukciói.
- Determinisztikus algoritmusok tervezése kevés tárigénnyel.

S. Hoory, N. Linial, A. Wigderson, Expander graphs and their applications (123 oldal)

Mire jók a nagyító gráfsorozatok?

- Pszeudo-véletlen szám generátorok: r random bitből determinisztikusan $R \gg r$ véletlennek tűnő bitet kiszámoló algoritmus.
- Véletlen algoritmusok determinisztikussá tétele kevés lassulással (derandomizáció).
- Hibajavító kódok konstrukciói.
- Determinisztikus algoritmusok tervezése kevés tárigénnyel.

S. Hoory, N. Linial, A. Wigderson, Expander graphs and their applications (123 oldal)
https://www.cs.huji.ac.il/~nati/PAPERS/expander_survey.pdf

Nagyító gráfsorozatok konstrukciói

Nagyító gráfsorozatok konstrukciói

Tétel, $d \geq 3$

Létezik $c_d > 0$, hogy véletlen d-reguláris gráfok n csúcson legalább c_d nagyítópatamáterűek.

Nagyító gráfsorozatok konstrukciói

Tétel, $d \geq 3$

Létezik $c_d > 0$, hogy véletlen d-reguláris gráfok n csúcson legalább c_d nagyítópatamóterűek.

Az alkalmazások számára nem kielégítő.

Tétel, $d \geq 3$

Létezik $c_d > 0$, hogy véletlen d-reguláris gráfok n csúcson legalább c_d nagyítópatam éterűek.

Az alkalmazások számára nem kielégítő.

Margulis (Abel-díj, 2020) konstrukciója (https://abelprize.no/sites/default/files/2021-04/Margulis_construction_expander_english.pdf)

Létezik $c > 0$, hogy az alábbi 8-reguláris páros gráfok legalább c nagyítóparaméterűek:

Nagyító gráfsorozatok konstrukciói

Tétel, $d \geq 3$

Létezik $c_d > 0$, hogy véletlen d-reguláris gráfok n csúcson legalább c_d nagyítópatamétereűek.

Az alkalmazások számára nem kielégítő.

Margulis (Abel-díj, 2020) konstrukciója (https://abelprize.no/sites/default/files/2021-04/Margulis_construction_expander_english.pdf)

Létezik $c > 0$, hogy az alábbi 8-reguláris páros gráfok legalább c nagyítóparaméterűek:

$$A \quad {}''={}'' \quad F: \qquad \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n,$$

$$\begin{aligned} E: (i,j)(i+j,j), \quad & (i,j)(i,i+j), \quad (i,j)(i+1,j), \\ (i,j)(i,j+1), \quad & (i,j)(i-j,j), \quad (i,j)(i,j-i), \\ (i,j)(i-1,j), \quad & (i,j)(i,j-1). \end{aligned}$$

Sajátértékek alaptulajdonságai

Tétel

Legyen G egy egyszerű gráf ($|V(G)| = n$). Ekkor

Tétel

Legyen G egy egyszerű gráf ($|V(G)| = n$). Ekkor

(i) G összes/n darab (multiplicitással számolt) sajátértéke valós.

Tétel

Legyen G egy egyszerű gráf ($|V(G)| = n$). Ekkor

(i) G összes/n darab (multiplicitással számolt) sajátértéke valós.

(ii) G sajátértékei a $[-D(G), D(G)]$ intervallumba esnek.

Tétel

Legyen G egy egyszerű gráf ($|V(G)| = n$). Ekkor

(i) G összes/n darab (multiplicitással számolt) sajátértéke valós.

(ii) G sajátértékei a $[-D(G), D(G)]$ intervallumba esnek.

A továbbiakban feltesszük, hogy G összefüggő:

Tétel

Legyen G egy egyszerű gráf ($|V(G)| = n$). Ekkor

(i) G összes/n darab (multiplicitással számolt) sajátértéke valós.

(ii) G sajátértékei a $[-D(G), D(G)]$ intervallumba esnek.

A továbbiakban feltesszük, hogy G összefüggő:

(iii) A maximális sajátérték egyszeres és hozzá választható pozitív komponensű sajátvektor.

Sajátértékek alaptulajdonságai

Tétel

Legyen G egy egyszerű gráf ($|V(G)| = n$). Ekkor

(i) G összes/n darab (multiplicitással számolt) sajátértéke valós.

(ii) G sajátértékei a $[-D(G), D(G)]$ intervallumba esnek.

A továbbiakban feltesszük, hogy G összefüggő:

(iii) A maximális sajátérték egyszeres és hozzá választható pozitív komponensű sajátvektor.

(iv) $D(G)$ akkor és csak akkor sajátérték, ha G reguláris.

Sajátértékek alaptulajdonságai

Tétel

Legyen G egy egyszerű gráf ($|V(G)| = n$). Ekkor

(i) G összes/n darab (multiplicitással számolt) sajátértéke valós.

(ii) G sajátértékei a $[-D(G), D(G)]$ intervallumba esnek.

A továbbiakban feltesszük, hogy G összefüggő:

(iii) A maximális sajátérték egyszeres és hozzá választható pozitív komponensű sajátvektor.

(iv) $D(G)$ akkor és csak akkor sajátérték, ha G reguláris.

(v) $-D(G)$ akkor és csak akkor sajátérték, ha G reguláris páros gráf.

Tétel

Legyen G egy egyszerű gráf ($|V(G)| = n$). Ekkor

(i) G összes/n darab (multiplicitással számolt) sajátértéke valós.

(ii) G sajátértékei a $[-D(G), D(G)]$ intervallumba esnek.

A továbbiakban feltesszük, hogy G összefüggő:

(iii) A maximális sajátérték egyszeres és hozzá választható pozitív komponensű sajátvektor.

(iv) $D(G)$ akkor és csak akkor sajátérték, ha G reguláris.

(v) $-D(G)$ akkor és csak akkor sajátérték, ha G reguláris páros gráf.

(vi) Sajátértékek összege 0, speciálisan a legnagyobb sajátérték nemnegatív, a legkisebb nempozitív.

Alaptulajdonságok bizonyítása

Alaptulajdonságok bizonyítása

(i) A_G szimmetrikus mátrix, így jól ismert, hogy sajátértékei valósak.

Alaptulajdonságok bizonyítása

(i) A_G szimmetrikus mátrix, így jól ismert, hogy sajátértékei valósak.

(ii) Legyen x egy sajátvektor. Legyen x_v a legnagyobb abszolútértékű komponense, amiről feltehető, hogy $x_v > 0$.

Alaptulajdonságok bizonyítása

(i) A_G szimmetrikus mátrix, így jól ismert, hogy sajátértékei valósak.

(ii) Legyen x egy sajátvektor. Legyen x_v a legnagyobb abszolútértékű komponense, amiről feltehető, hogy $x_v > 0$. Nézzük meg az $(A_G \cdot x)_v$ komponenst. Ez legfeljebb $D(G)$ darab legfeljebb x_v abszolútértékű számösszege, azaz az eredmény legfeljebb $D(G)$-szerese és legalább $-D(G)$-szerese x_v-nek.

Alaptulajdonságok bizonyítása

(i) A_G szimmetrikus mátrix, így jól ismert, hogy sajátértékei valósak.

(ii) Legyen x egy sajátvektor. Legyen x_v a legnagyobb abszolútértékű komponense, amiről feltehető, hogy $x_v > 0$. Nézzük meg az $(A_G \cdot x)_v$ komponenst. Ez legfeljebb $D(G)$ darab legfeljebb x_v abszolútértékű számösszege, azaz az eredmény legfeljebb $D(G)$-szerese és legalább $-D(G)$-szerese x_v-nek.

(iii) Ez a nehéz része a tételnek. Az állítás a Frobenius—Perron-elmélet alaptételéből adódik. Itt nem bizonyítjuk.

Alaptulajdonságok bizonyítása (folytatás)

Alaptulajdonságok bizonyítása (folytatás)

(iv) A fenti gondolatmenet azt is adja, hogy ha $D(G)$ sajátérték, akkor a fent választott x csúcsnak $D(G)$ szomszédja van és v mindegyiken x_v-et vesz fel értékül. Ha G összefüggő, akkor ebből adódik, hogy mindegyik csúcsnak $D(G)$ a foka és a sajátvektor mindegyik komponense ugyanaz (az $(1, 1, \ldots, 1)^T$ vektor többszöröse).

Alaptulajdonságok bizonyítása (folytatás)

(iv) A fenti gondolatmenet azt is adja, hogy ha $D(G)$ sajátérték, akkor a fent választott x csúcsnak $D(G)$ szomszédja van és v mindegyiken x_v-et vesz fel értékül. Ha G összefüggő, akkor ebből adódik, hogy mindegyik csúcsnak $D(G)$ a foka és a sajátvektor mindegyik komponense ugyanaz (az $(1, 1, \ldots, 1)^\mathsf{T}$ vektor többszöröse).

(v) hasonlóan elemi módon belátható, ezt az olvasóra bízzuk.

Jelölés: G spektruma

Legyen G egy gráf. G sajátértékeinek rendezett sorozata

$$\lambda_{max} = \lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_{n-1} = \lambda_{min}.$$

Ha G összefüggő, akkor

$$\lambda_{max} > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_{min}.$$

Ha G összefüggő és d-reguláris, akkor

$$d = \lambda_{max} > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_{min} \geq -d.$$

Sajátértékek: Alapjelölés

Jelölés: G spektruma

Legyen G egy gráf. G sajátértékeinek rendezett sorozata

$$\lambda_{max} = \lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_{n-1} = \lambda_{min}.$$

Ha G összefüggő, akkor

$$\lambda_{max} > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_{min}.$$

Ha G összefüggő és d-reguláris, akkor

$$d = \lambda_{max} > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_{min} \geq -d.$$

Jelölés: G Ramanujan-spektrálsugara

G egy d-reguláris gráf, Ramanujan(G) az a minimális R, hogy

$$\{\lambda_{max}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-2}, \lambda_{min}\} \subset \{-d, d\} \cup [-R, R]$$

Ramanujan-gráfok

Ramanujan-gráfok

Alon—Boppana, Serre Tétele

$$\liminf \{\text{Ramanujan}(G) : G \ d\text{-reguláris}\} \geq 2\sqrt{d-1}$$

Ramanujan-gráfok

Alon—Boppana, Serre Tétele

$$\liminf\{\text{Ramanujan}(G) : G\ d\text{-reguláris}\} \geq 2\sqrt{d-1}$$

Definíció: G egy d-reguláris gráf Ramanujan-gráf

ha összefüggő és

$$\text{Ramanujan}(G) \leq 2\sqrt{d-1}.$$

Ramanujan-gráfok: Példák

Példa: Teljes gráfok

Legyen $G = K_{d+1}$, az $d+1$ pontú teljes gráf.

Példa: Teljes gráfok

Legyen $G = K_{d+1}$, az $d+1$ pontú teljes gráf. Ekkor a sajátértékek d, -1, -1, $-1, \ldots, -1$. d-hez tartozó egyik sajátvektor a $(1, 1, 1, \ldots, 1)$ vektor.

Példa: Teljes gráfok

Legyen $G = K_{d+1}$, az $d+1$ pontú teljes gráf. Ekkor a sajátértékek d, -1, -1, $-1, \ldots, -1$. d-hez tartozó egyik sajátvektor a $(1, 1, 1, \ldots, 1)$ vektor. -1-hez tartozó sajátvektorok altere azon vektorokat tartalmazza, amelyek komponenseinek összege 0.

Példa: Teljes gráfok

Legyen $G = K_{d+1}$, az $d+1$ pontú teljes gráf. Ekkor a sajátértékek d, -1, -1, $-1, \ldots, -1$. d-hez tartozó egyik sajátvektor a $(1, 1, 1, \ldots, 1)$ vektor. -1-hez tartozó sajátvektorok altere azon vektorokat tartalmazza, amelyek komponenseinek összege 0.

Példa: Teljes páros gráfok

Legyen $G = K_{d,d}$, az $d+d$ pontú teljes gráf.

Ramanujan-gráfok: Példák

Példa: Teljes gráfok

Legyen $G = K_{d+1}$, az $d+1$ pontú teljes gráf. Ekkor a sajátértékek d, -1, -1, $-1, \ldots, -1$. d-hez tartozó egyik sajátvektor a $(1, 1, 1, \ldots, 1)$ vektor. -1-hez tartozó sajátvektorok altere azon vektorokat tartalmazza, amelyek komponenseinek összege 0.

Példa: Teljes páros gráfok

Legyen $G = K_{d,d}$, az $d+d$ pontú teljes gráf. Ekkor a sajátértékek d, $-d$, 0, $0, \ldots, 0$. d-hez tartozó egyik sajátvektor a $(1, 1, 1, \ldots, 1)$ vektor.

Ramanujan-gráfok: Példák

Példa: Teljes gráfok

Legyen $G = K_{d+1}$, az $d+1$ pontú teljes gráf. Ekkor a sajátértékek d, -1, -1, $-1, \ldots, -1$. d-hez tartozó egyik sajátvektor a $(1, 1, 1, \ldots, 1)$ vektor. -1-hez tartozó sajátvektorok altere azon vektorokat tartalmazza, amelyek komponenseinek összege 0.

Példa: Teljes páros gráfok

Legyen $G = K_{d,d}$, az $d+d$ pontú teljes gráf. Ekkor a sajátértékek d, $-d$, 0, $0, \ldots, 0$. d-hez tartozó egyik sajátvektor a $(1, 1, 1, \ldots, 1)$ vektor. A -1-hez tartozó egyik sajátvektor a $(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$ vektor.

Ramanujan-gráfok: Példák

Példa: Teljes gráfok

Legyen $G = K_{d+1}$, az $d+1$ pontú teljes gráf. Ekkor a sajátértékek d, -1, -1, $-1, \ldots, -1$. d-hez tartozó egyik sajátvektor a $(1, 1, 1, \ldots, 1)$ vektor. -1-hez tartozó sajátvektorok altere azon vektorokat tartalmazza, amelyek komponenseinek összege 0.

Példa: Teljes páros gráfok

Legyen $G = K_{d,d}$, az $d+d$ pontú teljes gráf. Ekkor a sajátértékek d, $-d$, 0, $0, \ldots, 0$. d-hez tartozó egyik sajátvektor a $(1, 1, 1, \ldots, 1)$ vektor. A -1-hez tartozó egyik sajátvektor a $(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$ vektor. A 0-hoz tartozó sajátvektorok altere azon vektorokat tartalmazza, amelyek komponenseinek összege mindkét színosztályban 0.

Példa: Teljes gráfok

Legyen $G = K_{d+1}$, az $d+1$ pontú teljes gráf. Ekkor a sajátértékek d, -1, -1, $-1, \ldots, -1$. d-hez tartozó egyik sajátvektor a $(1, 1, 1, \ldots, 1)$ vektor. -1-hez tartozó sajátvektorok altere azon vektorokat tartalmazza, amelyek komponenseinek összege 0.

Példa: Teljes páros gráfok

Legyen $G = K_{d,d}$, az $d+d$ pontú teljes gráf. Ekkor a sajátértékek d, $-d$, 0, $0, \ldots, 0$. d-hez tartozó egyik sajátvektor a $(1, 1, 1, \ldots, 1)$ vektor. A -1-hez tartozó egyik sajátvektor a $(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$ vektor. A 0-hoz tartozó sajátvektorok altere azon vektorokat tartalmazza, amelyek komponenseinek összege mindkét színosztályban 0.

Léteznek-e „nagy" Ramanujan-gráfok?

Ramanujan-gráfok: Példák

Példa: Teljes gráfok

Legyen $G = K_{d+1}$, az $d+1$ pontú teljes gráf. Ekkor a sajátértékek d, -1, -1, $-1, \ldots, -1$. d-hez tartozó egyik sajátvektor a $(1, 1, 1, \ldots, 1)$ vektor. -1-hez tartozó sajátvektorok altere azon vektorokat tartalmazza, amelyek komponenseinek összege 0.

Példa: Teljes páros gráfok

Legyen $G = K_{d,d}$, az $d+d$ pontú teljes gráf. Ekkor a sajátértékek d, $-d$, 0, $0, \ldots, 0$. d-hez tartozó egyik sajátvektor a $(1, 1, 1, \ldots, 1)$ vektor. A -1-hez tartozó egyik sajátvektor a $(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$ vektor. A 0-hoz tartozó sajátvektorok altere azon vektorokat tartalmazza, amelyek komponenseinek összege mindkét színosztályban 0.

Léteznek-e „nagy" Ramanujan-gráfok? (d fix.)

Ramanujan-gráfok létezése

Ramanujan-gráfok létezése

Lubotzky—Sarnak—Philips, Margulis kostrukciója

Léteznek „nagy" Ramanujan-gráfok!

Ramanujan-gráfok létezése

Lubotzky—Sarnak—Philips, Margulis kostrukciója

Léteznek „nagy" Ramanujan-gráfok!

A konstrukció lényegében ugyanaz. Nagyon szép/szimmetrikus gráfok.

Lubotzky—Sarnak—Philips, Margulis kostrukciója

Léteznek „nagy" Ramanujan-gráfok!

A konstrukció lényegében ugyanaz. Nagyon szép/szimmetrikus gráfok. A bizonyítás matematikailag nagyon mély. Ramanujan egy megoldott sejtésén alapul.

Ramanujan-gráfok létezése

Lubotzky—Sarnak—Philips, Margulis kostrukciója

Léteznek „nagy" Ramanujan-gráfok!

A konstrukció lényegében ugyanaz. Nagyon szép/szimmetrikus gráfok. A bizonyítás matematikailag nagyon mély. Ramanujan egy megoldott sejtésén alapul.

Spielman-tétel

A véletlen d-reguláris gráfok majdnem Ramanujan-gráfok: Tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén teljesül nagy $|V|$-re, hogy

$$\text{Ramanujan}(\mathbf{G}) \leq 2\sqrt{d-1} + \epsilon.$$

Lubotzky—Sarnak—Philips, Margulis kostrukciója

Léteznek „nagy" Ramanujan-gráfok!

A konstrukció lényegében ugyanaz. Nagyon szép/szimmetrikus gráfok. A bizonyítás matematikailag nagyon mély. Ramanujan egy megoldott sejtésén alapul.

Spielman-tétel

A véletlen d-reguláris gráfok majdnem Ramanujan-gráfok: Tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén teljesül nagy $|V|$-re, hogy

$$\text{Ramanujan}(\mathbf{G}) \leq 2\sqrt{d-1} + \epsilon.$$

Sejtés: A véletlen d-reguláris gráfok pozitív ($> 40\%$) valószínűséggel Ramanujan-gráfok.

Páros Ramanujan-gráfok létezése: (viszonylag) elemi véletlen konstrukció

Páros Ramanujan-gráfok létezése: (viszonylag) elemi véletlen konstrukció

Tétel A.W. Marcus, D.A. Spielman, N. Srivastava (2015)

Minden $d \geq 3$ esetén létezik d-reguláris páros gráf nagy pontszámmal.

Ramanujan-gráfok létezése: Bizonyítás I

Definíció: Gráfok felemelése/lift

Legyen G egy gráf a V csúcshalmazon.

Definíció: Gráfok felemelése/lift

Legyen G egy gráf a V csúcshalmazon. A felemelt gráf csúcshalmaza $\underline{V}\dot{\cup}\overline{V}$.

Definíció: Gráfok felemelése/lift

Legyen G egy gráf a V csúcshalmazon. A felemelt gráf csúcshalmaza $\underline{V}\dot{\cup}\overline{V}$.

A felemelt gráf éleit úgy kapjuk, hogy minden eredeti uv él esetén két élt húzunk be: $\underline{uv}$"+" $\overline{uv}$

Definíció: Gráfok felemelése/lift

Legyen G egy gráf a V csúcshalmazon. A felemelt gráf csúcshalmaza $\underline{V}\dot{\cup}\overline{V}$.

A felemelt gráf éleit úgy kapjuk, hogy minden eredeti uv él esetén két élt húzunk be: $\underline{uv}$"+" $\overline{uv}$ VAGY $\underline{u}\overline{v}$"+" $\overline{u}\underline{v}$.

Definíció: Gráfok felemelése/lift

Legyen G egy gráf a V csúcshalmazon. A felemelt gráf csúcshalmaza $\underline{V}\dot{\cup}\overline{V}$.

A felemelt gráf éleit úgy kapjuk, hogy minden eredeti uv él esetén két élt húzunk be: $\underline{uv}$"+" $\overline{uv}$ VAGY $\underline{u}\overline{v}$"+" $\overline{u}\underline{v}$. (Feltolás VAGY X-elemés.)

Definíció: Gráfok felemelése/lift

Legyen G egy gráf a V csúcshalmazon. A felemelt gráf csúcshalmaza $\underline{V}\dot{\cup}\overline{V}$.

A felemelt gráf éleit úgy kapjuk, hogy minden eredeti uv él esetén két élt húzunk be: $\underline{uv}$"+" $\overline{uv}$ VAGY $\underline{u}\overline{v}$"+" $\overline{u}\underline{v}$. (Feltolás VAGY X-elemés.)

Egy m élű gráfnak 2^m felemelése van.

Definíció: Gráfok felemelése/lift

Legyen G egy gráf a V csúcshalmazon. A felemelt gráf csúcshalmaza $\underline{V}\dot{\cup}\overline{V}$.

A felemelt gráf éleit úgy kapjuk, hogy minden eredeti uv él esetén két élt húzunk be: $\underline{uv}$"+" $\overline{uv}$ VAGY $\underline{u}\overline{v}$"+" $\overline{u}\underline{v}$. (Feltolás VAGY X-elemés.)

Egy m élű gráfnak 2^m felemelése van. Beszélhetünk véletlen felemelésről.

Ramanujan-gráfok létezése: Bizonyítás I

Definíció: Gráfok felemelése/lift

Legyen G egy gráf a V csúcshalmazon. A felemelt gráf csúcshalmaza $\underline{V}\dot\cup\overline{V}$.

A felemelt gráf éleit úgy kapjuk, hogy minden eredeti uv él esetén két élt húzunk be: $\underline{uv}$"+" $\overline{uv}$ VAGY $\underline{u}\overline{v}$"+" $\overline{u}\underline{v}$. (Feltolás VAGY X-elemés.)

Egy m élű gráfnak 2^m felemelése van. Beszélhetünk véletlen felemelésről.

Páros gráf minden felemelése páros.

Ramanujan-gráfok létezése: Bizonyítás I

Definíció: Gráfok felemelése/lift

Legyen G egy gráf a V csúcshalmazon. A felemelt gráf csúcshalmaza $\underline{V} \dot{\cup} \overline{V}$.

A felemelt gráf éleit úgy kapjuk, hogy minden eredeti uv él esetén két élt húzunk be: $\underline{uv}$"+" $\overline{uv}$ VAGY $\underline{u}\overline{v}$"+" $\overline{u}\underline{v}$. (Feltolás VAGY X-elemés.)

Egy m élű gráfnak 2^m felemelése van. Beszélhetünk véletlen felemelésről.

Páros gráf minden felemelése páros.

Észrevétel

Minden felemelt gráf sajátértékei között ott vannak az eredeti gráf sajátértékei.

Ramanujan-gráfok létezése: Bizonyítás II

Mik a további ($|V|$ darab) sajátértékek?

Mik a további ($|V|$ darab) sajátértékek?

Lemma

Vegyünk egy G gráfot és egy tetszőleges $\ell(G)$ felemeltjét.

Mik a további ($|V|$ darab) sajátértékek?

Lemma

Vegyünk egy G gráfot és egy tetszőleges $\ell(G)$ felemeltjét.

Vegyük az eredeti gráf A_G szomszédsági mátrixát. Az m élnek megfelel m darab 1-esek párja, amelyek szimmetrikusan helyezkednek el. Az X-elt éleknek megfelelő két 1-es párjait helyettesítsük két -1-es párjával. Legyen $\ell(A_G)$ az így kapott (szimmetrikus!) mátrix.

Mik a további ($|V|$ darab) sajátértékek?

Lemma

Vegyünk egy G gráfot és egy tetszőleges $\ell(G)$ felemeltjét.

Vegyük az eredeti gráf A_G szomszédsági mátrixát. Az m élnek megfelel m darab 1-esek párja, amelyek szimmetrikusan helyezkednek el. Az X-elt éleknek megfelelő két 1-es párjait helyettesítsük két -1-es párjával. Legyen $\ell(A_G)$ az így kapott (szimmetrikus!) mátrix.

A hiányzó sajátértékek $\ell(A_G)$ sajátértékei.

Ramanujan-gráfok létezése: Bizonyítás III

Ramanujan-gráfok létezése: Bizonyítás III

A véletlen felemelések véletlen karakterisztikus polinomhoz vezetnek.

Ramanujan-gráfok létezése: Bizonyítás III

A véletlen felemelések véletlen karakterisztikus polinomhoz vezetnek. Ezeknek vehetjük a várható értékét:

$$m_G(x) = \mathbb{E}_{\underline{\ell}} \det(xI - A_{\underline{\ell}(G)}).$$

Ramanujan-gráfok létezése: Bizonyítás III

A véletlen felemelések véletlen karakterisztikus polinomhoz vezetnek. Ezeknek vehetjük a várható értékét:

$$m_G(x) = \mathbb{E}_{\underline{\ell}} \det(xI - A_{\underline{\ell}(G)}).$$

Lemma, Definíció: párosítási polinom

$$m_G(x) = \sum_{k=0} (-1)^k m_k(G) x^{|V|-2k}.$$

Ramanujan-gráfok létezése: Bizonyítás IV

Ramanujan-gráfok létezése: Bizonyítás IV

Tétel, Godsil

Legyen G egy tetszőleges gráf. Ekkor párosítási polinomjának

(i) Minden gyöke valós,

(ii) amennyiben G egy d-reguláris gráf, akkor minden gyöke a $[-2\sqrt{d-1}, 2\sqrt{d-1}]$ intervallumba esik.

Ramanujan-gráfok létezése: Bizonyítás V

Tétel A.W. Marcus, D.A. Spielman, N. Srivastava (2015)

Vam olyan $\ell(G)$ felemelés, hogy

$$\text{max-root}(\det(xI - \ell(A_G))) \leq \text{max-root}(\mathbb{E}_{\underline{\ell}} \det(xI - \underline{\ell}(A_G))).$$

Tétel A.W. Marcus, D.A. Spielman, N. Srivastava (2015)

Vam olyan $\ell(G)$ felemelés, hogy

$$\text{max-root}(\det(xI - \ell(A_G))) \leq \text{max-root}(\mathbb{E}_{\underline{\ell}} \det(xI - \underline{\ell}(A_G))).$$

A többi egyszerű:

Tétel A.W. Marcus, D.A. Spielman, N. Srivastava (2015)

Vam olyan $\ell(G)$ felemelés, hogy

$$\text{max-root}(\det(xI - \ell(A_G))) \leq \text{max-root}(\mathbb{E}_{\underline{\ell}} \det(xI - \underline{\ell}(A_G))).$$

A többi egyszerű:

(1) Vegyünk egy kis páros d-reguláris Ramanujan-gráfot.

Tétel A.W. Marcus, D.A. Spielman, N. Srivastava (2015)

Vam olyan $\ell(G)$ felemelés, hogy

$$\text{max-root}(\det(xI - \ell(A_G))) \leq \text{max-root}(\mathbb{E}_{\underline{\ell}} \det(xI - \underline{\ell}(A_G))).$$

A többi egyszerű:

(1) Vegyünk egy kis páros d-reguláris Ramanujan-gráfot.

(2) Vegyük azt a felemelését, amelyben a többlet sajátértékek mind legfeljebb $2\sqrt{d-1}$ értékűek.

Tétel A.W. Marcus, D.A. Spielman, N. Srivastava (2015)

Vam olyan $\ell(G)$ felemelés, hogy

$$\text{max-root}(\det(xI - \ell(A_G))) \leq \text{max-root}(\mathbb{E}_{\underline{\ell}} \det(xI - \underline{\ell}(A_G))).$$

A többi egyszerű:

(1) Vegyünk egy kis páros d-reguláris Ramanujan-gráfot.

(2) Vegyük azt a felemelését, amelyben a többlet sajátértékek mind legfeljebb $2\sqrt{d-1}$ értékűek.

(2+) A felemelt gráf páros, így a többlet sajátértékek mind $[-2\sqrt{d-1}, 2\sqrt{d-1}]$ intervallumba esnek.

Tétel A.W. Marcus, D.A. Spielman, N. Srivastava (2015)

Vam olyan $\ell(G)$ felemelés, hogy

$$\text{max-root}(\det(xI - \ell(A_G))) \leq \text{max-root}(\mathbb{E}_{\underline{\ell}} \det(xI - \underline{\ell}(A_G))).$$

A többi egyszerű:

(1) Vegyünk egy kis páros d-reguláris Ramanujan-gráfot.

(2) Vegyük azt a felemelését, amelyben a többlet sajátértékek mind legfeljebb $2\sqrt{d-1}$ értékűek.

(2+) A felemelt gráf páros, így a többlet sajátértékek mind $[-2\sqrt{d-1}, 2\sqrt{d-1}]$ intervallumba esnek.

(2++) A felemelt gráf páros Ramanujan-gráf kétszer akkor pontszámon mint a kiinduló gráf pontszáma.

Tétel A.W. Marcus, D.A. Spielman, N. Srivastava (2015)

Vam olyan $\ell(G)$ felemelés, hogy

$$\text{max-root}(\det(xI - \ell(A_G))) \leq \text{max-root}(\mathbb{E}_{\underline{\ell}} \det(xI - \underline{\ell}(A_G))).$$

A többi egyszerű:

(1) Vegyünk egy kis páros d-reguláris Ramanujan-gráfot.

(2) Vegyük azt a felemelését, amelyben a többlet sajátértékek mind legfeljebb $2\sqrt{d-1}$ értékűek.

(2+) A felemelt gráf páros, így a többlet sajátértékek mind $[-2\sqrt{d-1}, 2\sqrt{d-1}]$ intervallumba esnek.

(2++) A felemelt gráf páros Ramanujan-gráf kétszer akkor pontszámon mint a kiinduló gráf pontszáma.

(3) Iteráljunk.

Köszönöm a figyelmet!