

Lerajzolások

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2016. április 16.

Mi is az, hogy gráf?

Mi is az, hogy gráf?

Egy G (egyszerű) gráf csúcsok halmaza és bizonyos csúcspárok/élek halmaza.

Mi is az, hogy gráf?

Egy G (egyszerű) gráf csúcsok halmaza és bizonyos csúcspárok/élek halmaza.

Példa

$$V = \{u, v, w, u', v', w'\},$$

$$E = \{uu', uv', uw', vu', vv', vw', wu', wv', ww'\}.$$

Mi is az, hogy gráf?

Egy G (egyszerű) gráf csúcsok halmaza és bizonyos csúcspárok/élek halmaza.

Példa

$$V = \{u, v, w, u', v', w'\},$$
$$E = \{uu', uv', uw', vu', vv', vw', wu', wv', ww'\}.$$

Ugyanaz a példa szavakkal

Két három elemű csoport együtt alkotja a csúcshalmazt.

Mi is az, hogy gráf?

Egy G (egyszerű) gráf csúcsok halmaza és bizonyos csúcspárok/élek halmaza.

Példa

$$V = \{u, v, w, u', v', w'\},$$
$$E = \{uu', uv', uw', vu', vv', vw', wu', wv', ww'\}.$$

Ugyanaz a példa szavakkal

Két három elemű csoport együtt alkotja a csúcshalmazt. Az éleket az összes olyan csúcspár alkotja, amely két eleme két különböző csoportból kerül ki.

Mi is az, hogy gráf?

Egy G (egyszerű) gráf csúcsok halmaza és bizonyos csúcspárok/élek halmaza.

Példa

$$V = \{u, v, w, u', v', w'\},$$
$$E = \{uu', uv', uw', vu', vv', vw', wu', wv', ww'\}.$$

Ugyanaz a példa szavakkal

Két három elemű csoport együtt alkotja a csúcshalmazt. Az éleket az összes olyan csúcspár alkotja, amely két eleme két különböző csoportból kerül ki.

Ugyanaz a példa újra szavakkal

Három ház és három kút alkotja a csúcshalmazt.

Mi is az, hogy gráf?

Egy G (egyszerű) gráf csúcsok halmaza és bizonyos csúcspárok/élek halmaza.

Példa

$$V = \{u, v, w, u', v', w'\},$$
$$E = \{uu', uv', uw', vu', vv', vw', wu', wv', ww'\}.$$

Ugyanaz a példa szavakkal

Két három elemű csoport együtt alkotja a csúcshalmazt. Az éleket az összes olyan csúcspár alkotja, amely két eleme két különböző csoportból kerül ki.

Ugyanaz a példa újra szavakkal

Három ház és három kút alkotja a csúcshalmazt. Kilenc él az összes házat az összes kúttal köti össze.

A gráf szó

- Szótár részlet:

- **Szótár részlet:** gráf, graffiti, grafika, grafikon, grafit, grafológia, grafománia

A gráf szó

- **Szótár részlet:** gráf, graffiti, grafika, grafikon, grafit, grafológia, grafománia
- **Magyar → angol → magyar fordítás:**

A gráf szó

- **Szótár részlet:** gráf, graffiti, grafika, grafikon, grafit, grafológia, grafománia
- **Magyar** → **angol** → **magyar fordítás:** gráf → graph
→ gráf, grafikon (egy függvény lerajzolása)

A gráf szó

- **Szótár részlet:** gráf, graffiti, grafika, grafikon, grafit, grafológia, grafománia
- **Magyar → angol → magyar fordítás:** gráf → graph → gráf, grafikon (egy függvény lerajzolása)
- **Értelmező szótár (grafikon):**

- **Szótár részlet:** gráf, graffiti, grafika, grafikon, grafit, grafológia, grafománia
- **Magyar → angol → magyar fordítás:** gráf → graph → gráf, grafikon (egy függvény lerajzolása)
- **Értelmező szótár (grafikon):** Rajz egyes jelenségek, számszaki összefüggések és azokkal kapcsolatos folyamatok szemléltetésére/leírására.

- **Szótár részlet:** gráf, graffiti, grafika, grafikon, grafit, grafológia, grafománia
- **Magyar → angol → magyar fordítás:** gráf → graph → gráf, grafikon (egy függvény lerajzolása)
- **Értelmező szótár (grafikon):** Rajz egyes jelenségek, számszaki összefüggések és azokkal kapcsolatos folyamatok szemléltetésére/leírására.

Értelmező szótár (tipp): GRÁF LERAJZOLÁSA

Rajz egyes szimmetrikus, bináris reláció szemléltetésére/leírására.

- **Szótár részlet:** gráf, graffiti, grafika, grafikon, grafit, grafológia, grafománia
- **Magyar** → **angol** → **magyar fordítás:** gráf → graph → gráf, grafikon (egy függvény lerajzolása)
- **Értelmező szótár (grafikon):** Rajz egyes jelenségek, számszaki összefüggések és azokkal kapcsolatos folyamatok szemléltetésére/leírására.

Értelmező szótár (tipp): GRÁF LERAJZOLÁSA

Rajz egyes szimmetrikus, bináris reláció szemléltetésére/leírására.

- **Jellemző szavak/kifejezések középiskolai gráfelméleti feladatokban:**

- **Szótár részlet:** gráf, graffiti, grafika, grafikon, grafit, grafológia, grafománia
- **Magyar** → **angol** → **magyar fordítás:** gráf → graph → gráf, grafikon (egy függvény lerajzolása)
- **Értelmező szótár (grafikon):** Rajz egyes jelenségek, számszaki összefüggések és azokkal kapcsolatos folyamatok szemléltetésére/leírására.

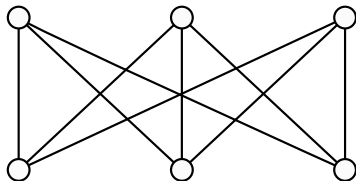
Értelmező szótár (tipp): GRÁF LERAJZOLÁSA

Rajz egyes szimmetrikus, bináris reláció szemléltetésére/leírására.

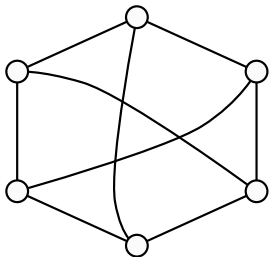
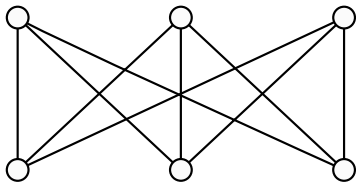
- **Jellemző szavak/kifejezések középiskolai gráfelméleti feladatokban:** ismerettség, „az ismerettséget kölcsönösnek tételezzük fel”

Az első példa lerajzolása

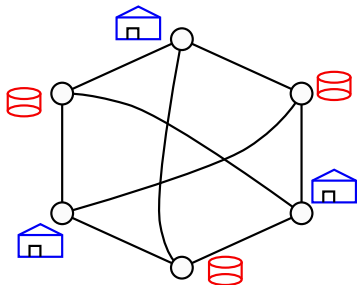
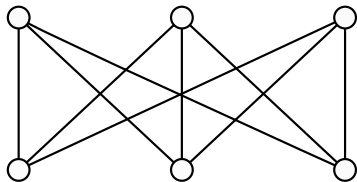
Az első példa lerajzolása



Az első példa lerajzolása

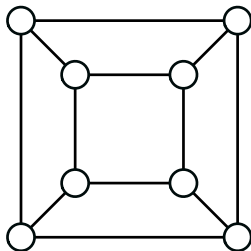
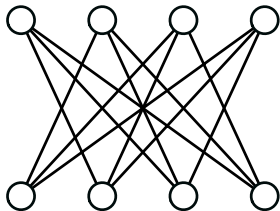
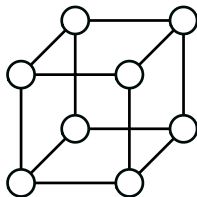
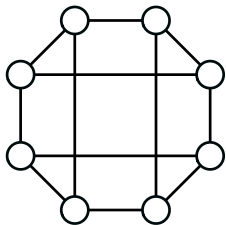


Az első példa lerajzolása

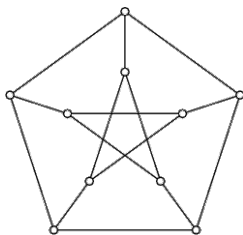


Újabb példa: A kocka gráf

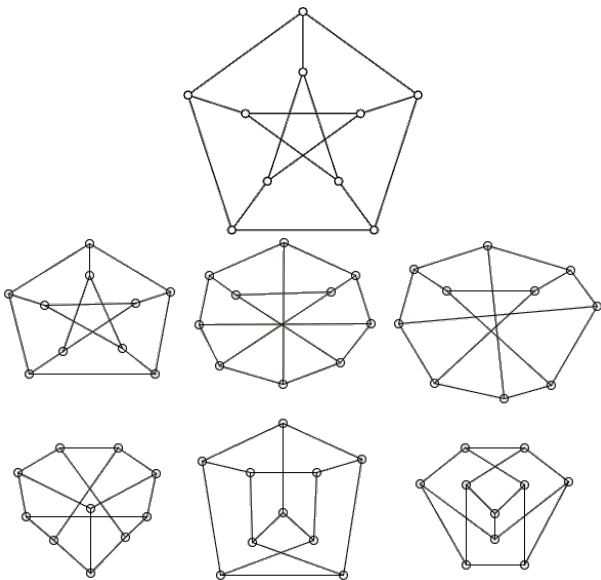
Újabb példa: A kocka gráf



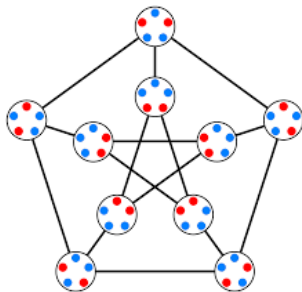
Újabb példa: A Petersen-gráf

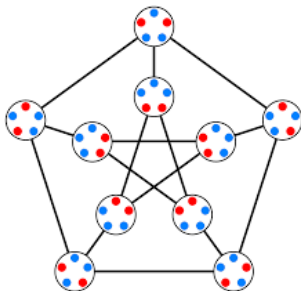


Újabb példa: A Petersen-gráf



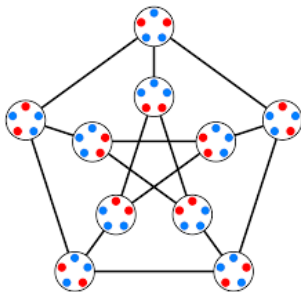
Petersen-gráf II.





Petersen-gráf szavakkal

A csúcsok az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz két-elemű részhalmazai.



Petersen-gráf szavakkal

A csúcsok az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz két-elemű részhalmazai. Kettő összekötött, ha nincs közös elemük.

Definíció

Két gráf izomorf,

- ha egyik csúcsai átnevezhetők úgy, hogy a másikat kapjuk meg.

Definíció

Két gráf izomorf,

- ha egyik csúcsai átnevezhetők úgy, hogy a másikat kapjuk meg.
- ha vesszük egy-egy lerajzolásukat és az egyik csúcsai (a hozzá illeszkedő élgörbékkel) elmozgathatók úgy, hogy a másik lerajzolást kapjuk meg.

Definíció

Két gráf izomorf,

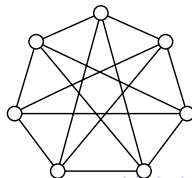
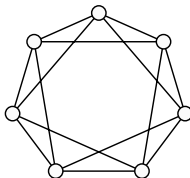
- ha egyik csúcsai átnevezhetők úgy, hogy a másikat kapjuk meg.
- ha vesszük egy-egy lerajzolásukat és az egyik csúcsai (a hozzá illeszkedő élgörbékkel) elmozgathatók úgy, hogy a másik lerajzolást kapjuk meg.
- ha „lényegében ugyanazok”.

Definíció

Két gráf izomorf,

- ha egyik csúcsai átnevezhetők úgy, hogy a másikat kapjuk meg.
- ha vesszük egy-egy lerajzolásukat és az egyik csúcsai (a hozzá illeszkedő élgörbékkel) elmozgathatók úgy, hogy a másik lerajzolást kapjuk meg.
- ha „lényegében ugyanazok”.

Feladat típus: Izomorfak-e?



Definíció

Egy lerajzolás szép, ha bármely két élgörbéje csak (az esetleges) közös végpontjukban találkoznak.

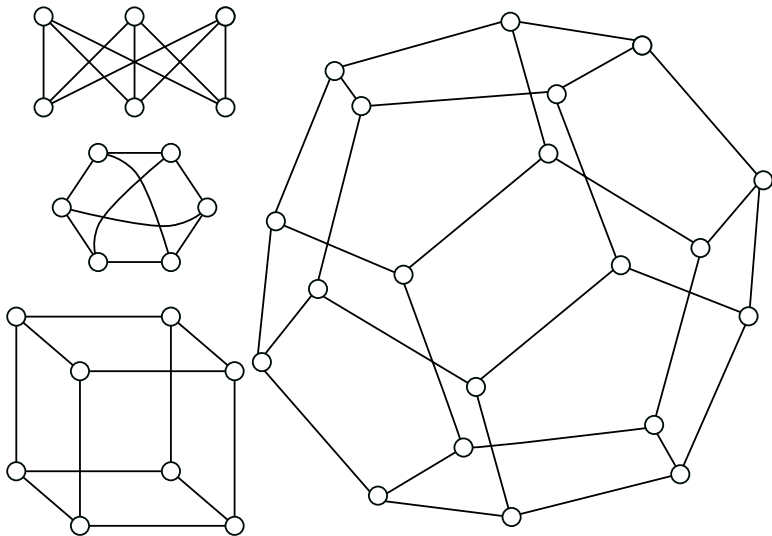
Definíció

Egy lerajzolás szép, ha bármely két élgörbéje csak (az esetleges) közös végpontjukban találkoznak.

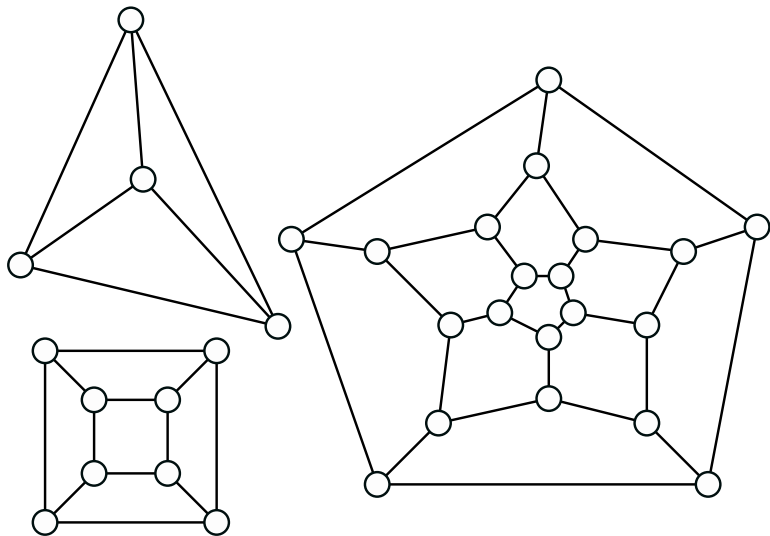
Definíció

Egy gráf síkgráf, ha szépen lerajzolható a síkra.

Nem szép lerajzolások

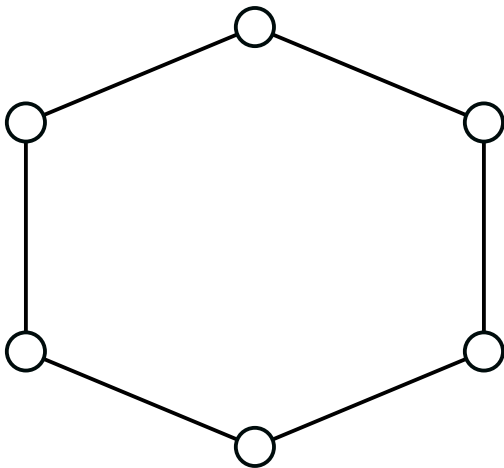


Szép lerajzolások

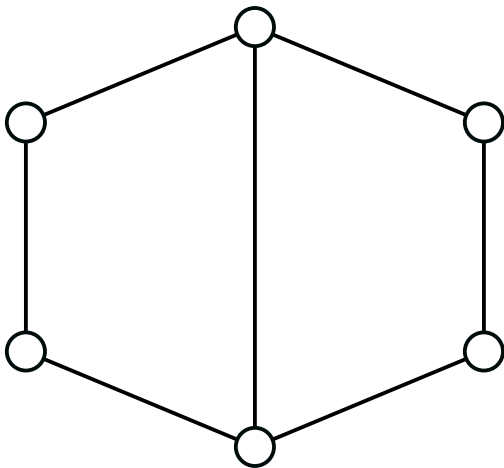


A három ház — három kút gráf NEM síkgráf

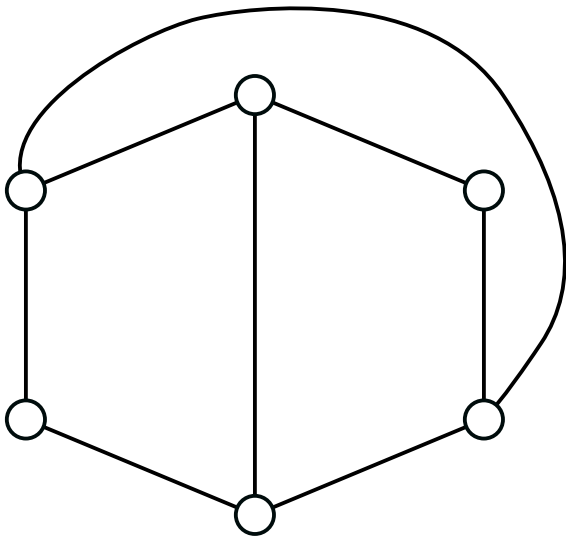
A három ház — három kút gráf NEM síkgráf



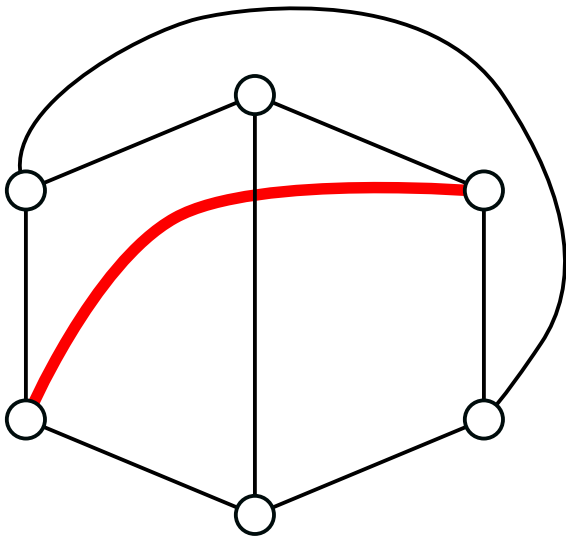
A három ház — három kút gráf NEM síkgráf



A három ház — három kút gráf NEM síkgráf

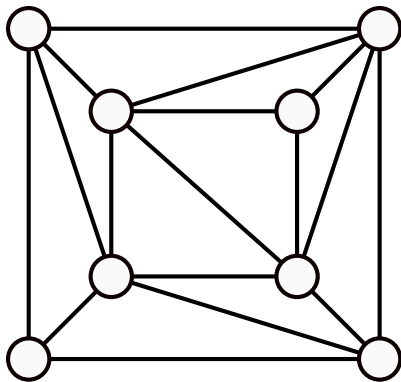
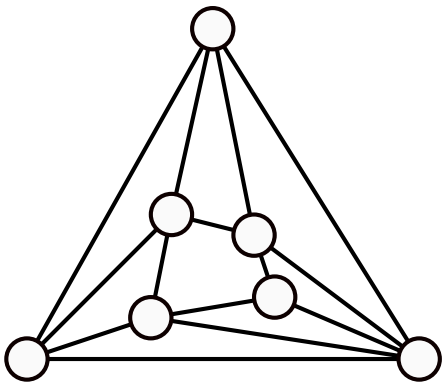


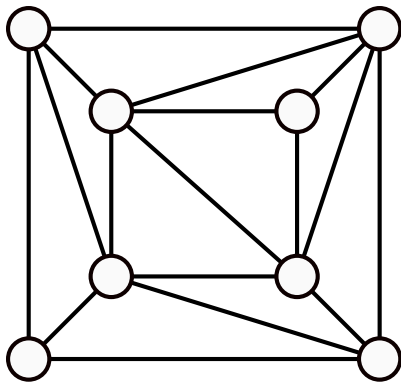
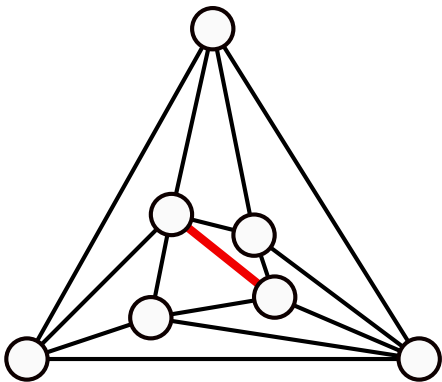
A három ház — három kút gráf NEM síkgráf

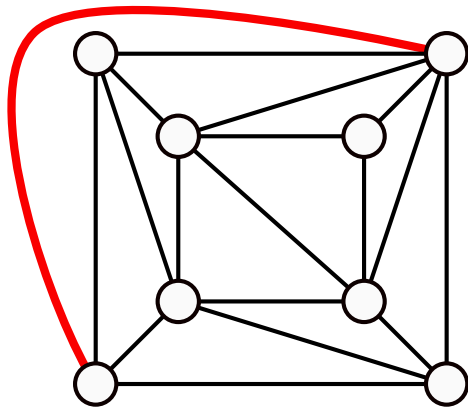
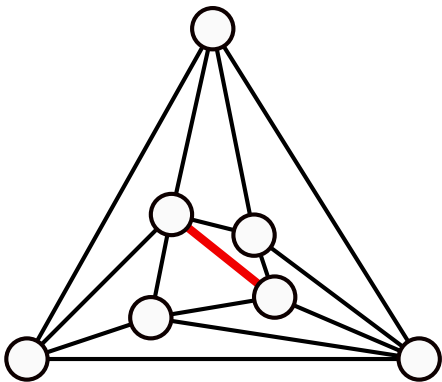


Definíció

Egy **szép** lerajzolás TELÍTETT, ha két nem összekötött csúcς közé nem rajzolhatunk be élgörbét úgy, hogy a lerajzolás szép maradjon.

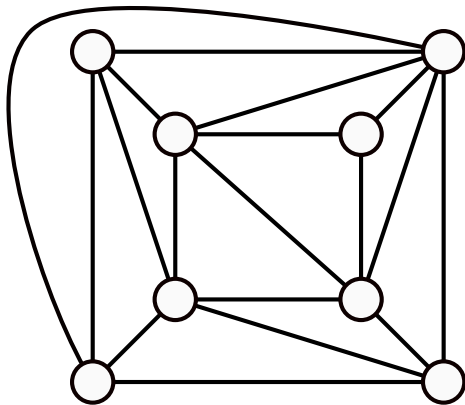
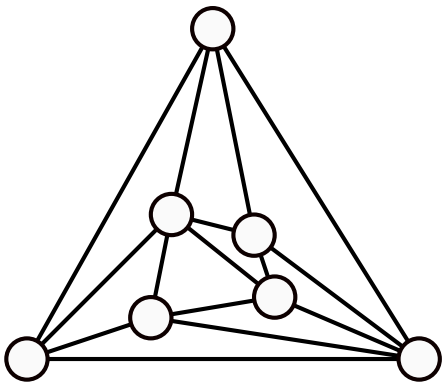






Telített lerajzolások

Telített lerajzolások



Egy unalmas játék

Játék

Kiindulás: n pont a síkon.

A játék: András és Bea felváltva lépnek: két össze nem kötött pont közé egy (egyszerű) görbét rajzolnak úgy, hogy a korábbi görbéket ne messék.

Vesztes: Aki nem tud lépni.

Játék

Kiindulás: n pont a síkon.

A játék: András és Bea felváltva lépnek: két össze nem kötött pont közé egy (egyszerű) görbét rajzolnak úgy, hogy a korábbi görbéket ne messék.

Vesztes: Aki nem tud lépni.

A játék menete: Egy szép lerajzolás „telítése”.

Játék

Kiindulás: n pont a síkon.

A játék: András és Bea felváltva lépnek: két össze nem kötött pont közé egy (egyszerű) görbét rajzolnak úgy, hogy a korábbi görbéket ne messék.

Vesztes: Aki nem tud lépni.

A játék menete: Egy szép lerajzolás „telítése”.

Miért unalmas?

Játék

Kiindulás: n pont a síkon.

A játék: András és Bea felváltva lépnek: két össze nem kötött pont közé egy (egyszerű) görbét rajzolnak úgy, hogy a korábbi görbéket ne messék.

Vesztes: Aki nem tud lépni.

A játék menete: Egy szép lerajzolás „telítése”.

Miért unalmas?

Mindegy hogy játszunk (feltéve, hogy minden lehetőséget észreveszünk). A nyerő játékost meghatározza a kiinduló n pontok száma.

Euler-tétel

Legyen $n > 2$. Minden n csúcsú telített, szépen lerajzolt gráfnak

$$3n - 6$$

éle van.

Euler-tétel

Legyen $n > 2$. Minden n csúcsú telített, szépen lerajzolt gráfnak

$$3n - 6$$

éle van.

Követkemény

A szépen lerajzolt gráfok RITKÁK.

Leonhard Euler (1707–1783)



Definíció

Egy lerajzolt gráf gubanc, ha bármely élének egy közös pontja van:

Definíció

Egy lerajzolt gráf gubanc, ha bármely élének egy közös pontja van:

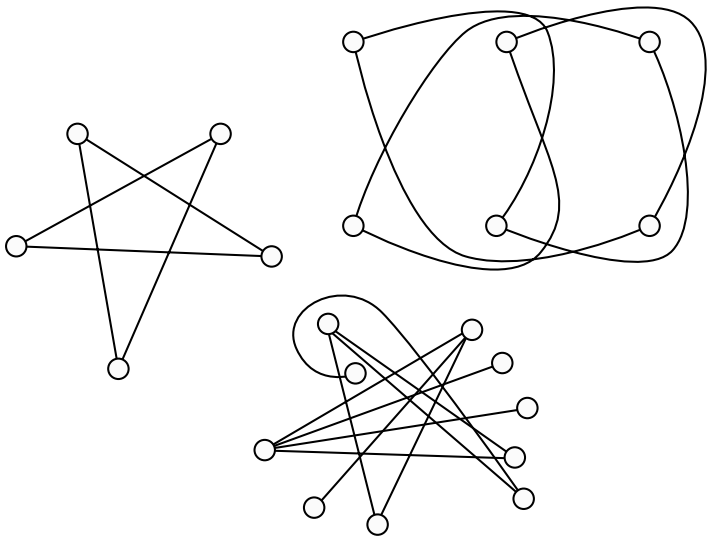
- Ha a két él közös csúccsal rendelkezik, akkor az ezt reprezentáló pont.

Definíció

Egy lerajzolt gráf gubanc, ha bármely élének egy közös pontja van:

- Ha a két él közös csúccsal rendelkeznek, akkor az ezt reprezentáló pont.
- Ha a két él nem rendelkeznek közös csúccsal, akkor egy átmetszés.

Példák gubancokra



Conway thrackle SEJTÉSE

Conway-sejtés

Minden n pontú gubancnak legfeljebb

n

élgörbéje van.

Conway-sejtés

Minden n pontú gubancnak legfeljebb

n

élgörbéje van.

Azaz, még a síkgráfoknál is ritkábbak.

Conway-sejtés

Minden n pontú gubancnak legfeljebb

$$n$$

élgörbéje van.

Azaz, még a síkgráfoknál is ritkábbak.

ÉRDEMES GONDOLKODNI:

Conway-sejtés

Minden n pontú gubancnak legfeljebb

$$n$$

élgörbéje van.

Azaz, még a síkgráfoknál is ritkábbak.

ÉRDEMES GONDOLKODNI: Az első megoldó 1000\$-t kap.

Definíció

Egy lerajzolás EGYSZERŰ, ha bármely két élgörbe legfeljebb egy közös ponttal rendelkezik.

Definíció

Egy lerajzolás EGYSZERŰ, ha bármely két élgörbe legfeljebb egy közös ponttal rendelkezik.

Példa:

Definíció

Egy lerajzolás EGYSZERŰ, ha bármely két élgörbe legfeljebb egy közös ponttal rendelkezik.

Példa: szépen lerajzolt gráfok,

Definíció

Egy lerajzolás EGYSZERŰ, ha bármely két élgörbe legfeljebb egy közös ponttal rendelkezik.

Példa: szépen lerajzolt gráfok, gubancok.

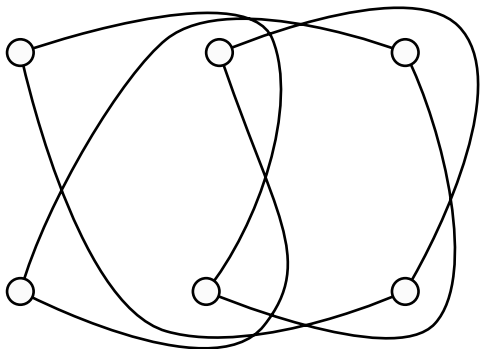
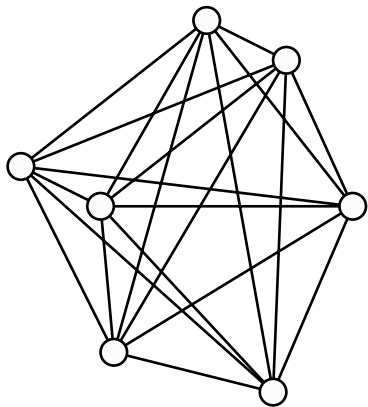
Definíció

Egy lerajzolás EGYSZERŰ, ha bármely két élgörbe legfeljebb egy közös ponttal rendelkezik.

Példa: szépen lerajzolt gráfok, gubancok.

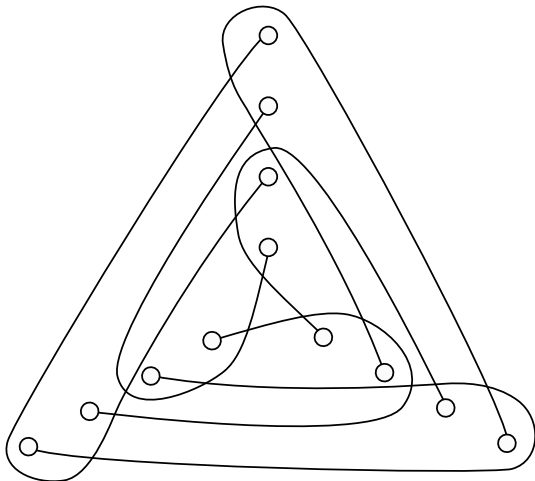
Definíció

Egy egyszerű lerajzolás telített, ha két nem összekötött pont közé nem tudunk úgy élgörbét behúzni, hogy egyszerű maradjon.

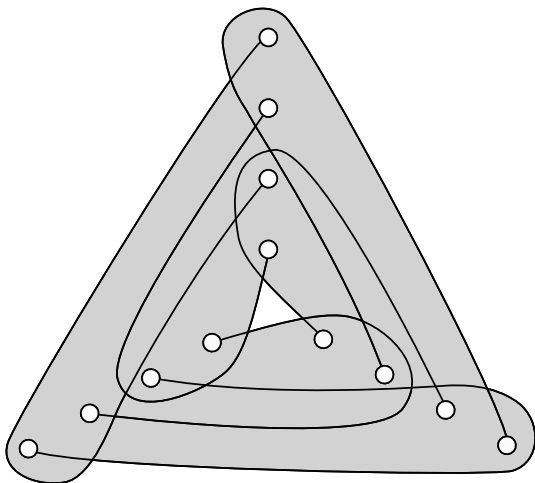


A kerítés!

A kerítés!



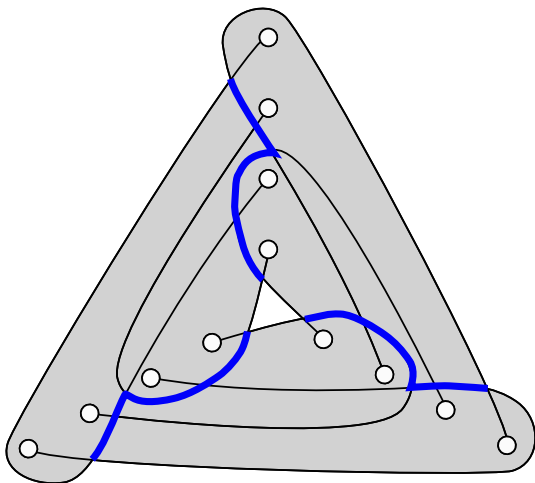
A kerítés!

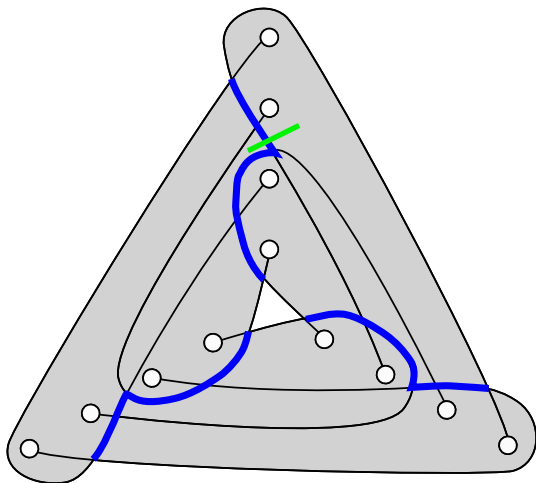


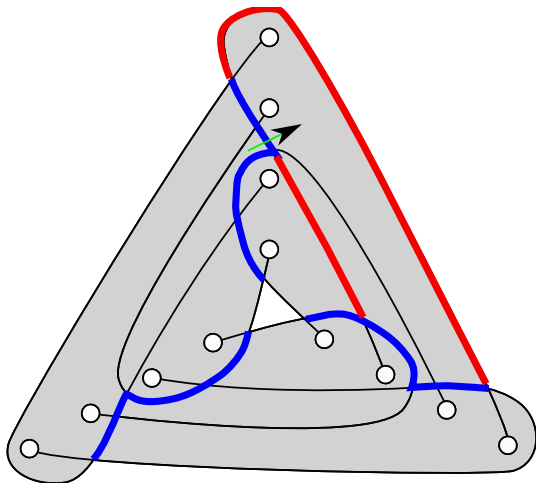
Tétel

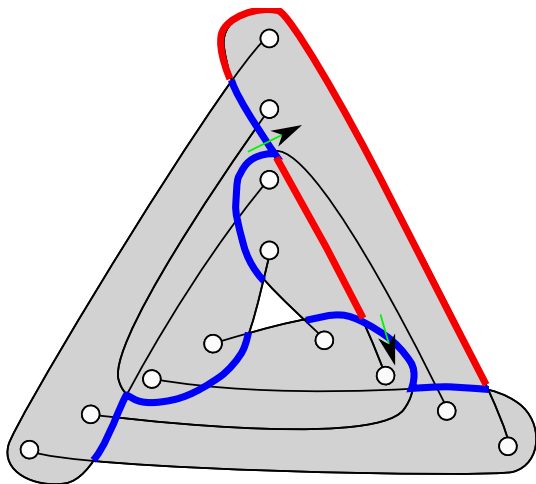
A fenti ábrába nem tudunk behúzni egy élgörbét egy belső pontja és egy külső pontja közé úgy, hogy egyszerű lerajzolás maradjon.

Még egy bizonyítás









Tétel

Létezik n pontú

(i)

$$\binom{n}{2}$$

élű telített egyszerű lerajzolás;

Tétel

Létezik n pontú

(i)

$$\binom{n}{2}$$

élű telített egyszerű lerajzolás;

(ii)

$$7n$$

élű telített egyszerű lerajzolás.

Egy NEM unalmas játék

Ismét Conway

Egy NEM unalmas játék

Ismét Conway és Paterson.

Ismét Conway és Paterson.

Hajtás játék

Kiindulás: n pont a síkon.

Ismét Conway és Paterson.

Hajtás játék

Kiindulás: n pont a síkon.

A játék: András és Bea felváltva lépnek:

- két pont (!! lehet összekötött, lehet nem összekötött, lehet egybeeső !!) közé egy (egyszerű) görbét rajzolnak úgy, hogy a korábbi görbéket ne messék,
- az új görbét egy új ponttal felosztják két görbére,
- a fentiek során ügyelnek arra, hogy hogy mindegyik pontba legfeljebb három görbe fusson össze.

Ismét Conway és Paterson.

Hajtás játék

Kiindulás: n pont a síkon.

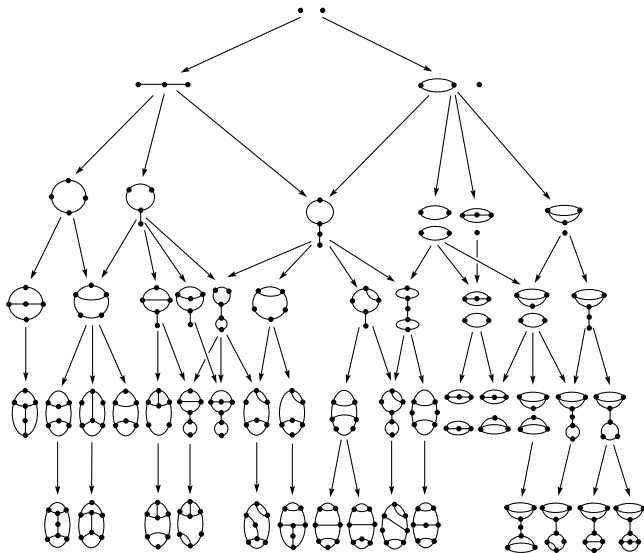
A játék: András és Bea felváltva lépnek:

- két pont (!! lehet összekötött, lehet nem összekötött, lehet egybeeső !!) közé egy (egyszerű) görbét rajzolnak úgy, hogy a korábbi görbéket ne messék,
- az új görbét egy új ponttal felosztják két görbére,
- a fentiek során ügyelnek arra, hogy hogy mindegyik pontba legfeljebb három görbe fusson össze.

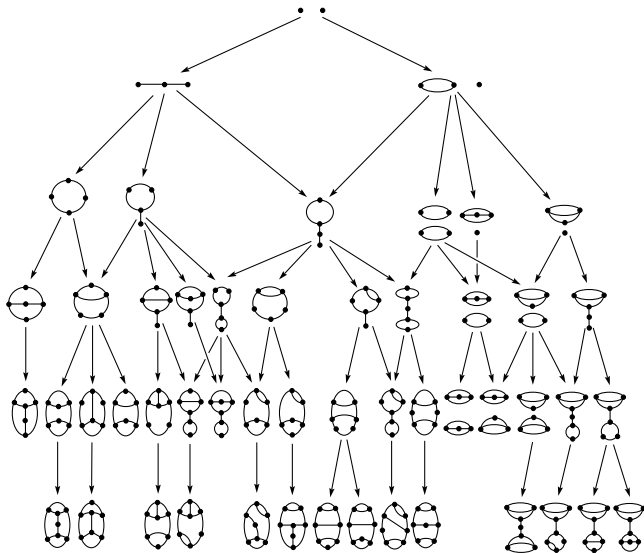
Vesztes: Aki nem tud lépni.

Az $n = 2$ eset [Applegate, D.G. Jacobson, D. Sleator: Computer Analysis of Sprouts]

Az $n = 2$ eset [Applegate, D.G. Jacobson, D. Sleator: Computer Analysis of Sprouts]



Az $n = 2$ eset [Applegate, D.G. Jacobson, D. Sleator: Computer Analysis of Sprouts]



n=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nyerő:	B	B	A	A	A	B	B	B	A	A	A	B

$n \leq 44$ esetén számítógépes eredmény.

n=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nyerő:	B	B	A	A	A	B	B	B	A	A	A	B

$n \leq 44$ esetén számítógépes eredmény.

$n \leq 7$ esetén „kézi” stratégia.

n=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nyerő:	B	B	A	A	A	B	B	B	A	A	A	B

$n \leq 44$ esetén számítógépes eredmény.

$n \leq 7$ esetén „kézi” stratégia.

Sejtés [Applegate, Jacobson and Sleator]

A kezdő akkor és csak nyer, ha

$$n \equiv 3, 4, 5 \pmod{6}.$$

Izomorfizmus Probléma

Adott két n pontú gráf.

Izomorfizmus Probléma

Adott két n pontú gráf.

Tervezzünk olyan HATÉKONY algoritmust, amely eldönti, hogy input gráfjaink izomorfak-e.

Izomorfizmus Probléma

Adott két n pontú gráf.

Tervezzünk olyan HATÉKONY algoritmust, amely eldönti, hogy input gráfjaink izomorfak-e.

HATÉKONY: Minél kevesebb elemi lépést felhasználva mondja meg a korrekt választ.

Babai tétel 2015+

Két n pontú gráf izomorfizmusa eldönthető

$$2^{\alpha \log^{\beta} n}$$

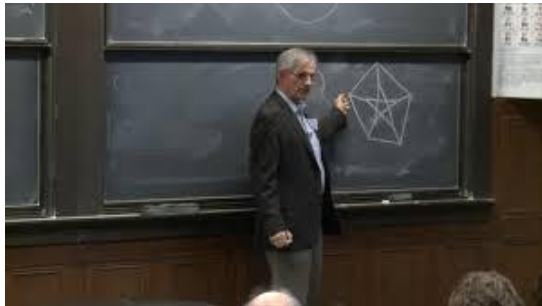
lépésben (α, β alkalmas konstansok).

Babai tétel 2015+

Két n pontú gráf izomorfizmusa eldönthető

$$2^{\alpha \log^{\beta} n}$$

lépésben (α, β alkalmas konstansok).



Köszönöm a figyelmet!