Geometria és a szemi-random módszer

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, SZTE, Szeged

2018. november 29.

közös eredmények Szemerédi Endrével

A Heilbronn probléma

Vegyünk egy „szép” egység területű tartományt D-t (például egy négyzetet). Helyezzünk el n pontot D-ben és keressük meg a legkisebb területű háromszöget azon háromszögek között, amelyek csúcsai a kiválasztott pontokból kerülnek ki. Jelölje $H_\triangle(n)$ ennek az értéknek a maximumát az összes D-beli pont n-es között.

A Heilbronn probléma

Vegyünk egy „szép” egység területű tartományt D-t (például egy négyzetet). Helyezzünk el n pontot D-ben és keressük meg a legkisebb területű háromszöget azon háromszögek között, amelyek csúcsai a kiválasztott pontokból kerülnek ki. Jelölje $H_{\triangle}(n)$ ennek az értéknek a maximumát az összes D-beli pont n-es között.

A könnyű becslések:

$$\frac{1}{n^2} \ll H_{\triangle}(n) \ll \frac{1}{n}.$$

A Heilbronn probléma

Vegyünk egy „szép” egység területű tartományt D-t (például egy négyzetet). Helyezzünk el n pontot D-ben és keressük meg a legkisebb területű háromszöget azon háromszögek között, amelyek csúcsai a kiválasztott pontokból kerülnek ki. Jelölje $H_\triangle(n)$ ennek az értéknek a maximumát az összes D-beli pont n-es között.

A könnyű becslések:

$$\frac{1}{n^2} \ll H_\triangle(n) \ll \frac{1}{n}.$$

A lényegi javítások Roth és Schmidt nevéhez köthetők.

Felső becslések a Heilbronn problémára

Roth

$$H_{\triangle}(n) \ll \frac{1}{n^{1.001}}$$

Felső becslések a Heilbronn problémára

Roth

$$H_{\triangle}(n) \ll \frac{1}{n^{1.001}}$$

Bizonyítása geometria- és analízisbeli ötletek keveréke.

Az áttörés:

Komlós, Pintz, Szemerédi, 1982

$$\frac{\sqrt{\log n}}{n^2} \ll H_{\triangle}(n).$$

Legyen k egy rögzített konstans. A kiválasztott pontjaink által meghatározott háromszögek helyett a k-szögeket vizsgáljuk. Legyen $H_k(n)$ a megfelelő extremális érték (azaz $H_3(n) = H_\triangle(n)$).

Legyen k egy rögzített konstans. A kiválasztott pontjaink által meghatározott háromszögek helyett a k-szögeket vizsgáljuk. Legyen $H_k(n)$ a megfelelő extremális érték (azaz $H_3(n) = H_\triangle(n)$).

Nyilvánvalóan

$$H_\triangle(n) \ll H_4(n) := H_\square(n) \ll H_5(n) \ll \ldots \ll \frac{1}{n}.$$

Legyen k egy rögzített konstans. A kiválasztott pontjaink által meghatározott háromszögek helyett a k-szögeket vizsgáljuk. Legyen $H_k(n)$ a megfelelő extremális érték (azaz $H_3(n) = H_\triangle(n)$).

Nyilvánvalóan

$$H_\triangle(n) \ll H_4(n) := H_\square(n) \ll H_5(n) \ll \ldots \ll \frac{1}{n}.$$

Két központi probléma: $H_\triangle(n) \ll 1/n^{2-\varepsilon}$ és $H_\square(n) = o(1/n)$.

Alsó becslés $H_4(n)$-re

Schmidt

$$\frac{1}{n^{3/2}} \ll H_{\square}(n)$$

Alsó becslés $H_4(n)$-re

Schmidt

$$\frac{1}{n^{3/2}} \ll H_{\square}(n)$$

A bizonyítás — mai nyelven — egy mohó algoritmus.

Egyik eredményünk

H.—Szemerédi

$$\frac{\sqrt{\log n}}{n^{3/2}} \ll H_{\square}(n)$$

Azaz, van egy olyan n elemű ponthalmaz az egyégnégyzetben, amely nem tartalmaz pontnégyest legfeljebb $\alpha n^{-3/2}(\log n)^{1/2}$ területű konvex burokkal.

Komlós, Pintz, Szemerédi, 1982

Legyen $\mathcal{H}$ egy 3-uniform hipergráf egy v elemű csúcshalmaz felett. Legyen $\overline{d}$ a $\mathcal{H}$ hipergráf átlagos foka. Tegyük fel, hogy $\overline{d} \leq t^2$ és $1 \ll t \ll v^{1/10}$.
HA $\mathcal{H}$ nem tartalmaz legfeljebb 4 hosszú egyszerű köröket, AKKOR

$$\alpha(\mathcal{H}) = \Omega\left(\frac{v}{t}\sqrt{\log t}\right).$$

Kombinatorikus struktúrák konstrukciói:

- Mohó algoritmus.
- Egyszerű véletlen választások sorozata (például Erdős–Rényi gráfok).
- A Komlós–Pintz–Szemerédi Lemma (egy független halmaz konstrukciója egy nem-zsúfolt 3-uniform hipergráfban) az előző két módszer nagyon finom keveréke.

A szemi-random módszer

Kombinatorikus struktúrák konstrukciói:

- Mohó algoritmus.
- Egyszerű véletlen választások sorozata (például Erdős–Rényi gráfok).
- A Komlós–Pintz–Szemerédi Lemma (egy független halmaz konstrukciója egy nem-zsúfolt 3-uniform hipergráfban) az előző két módszer nagyon finom keveréke.

Nem sokkal később Rödl Erdős és Hanani egy központi problémáját oldotta meg ezzel a módszerrel.

A körök jelen lesznek az általunk definiált hipergráfokban. A Komlós, Pintz, Szemerédi Lemma következő erősítése fontos számunkra:

A körök jelen lesznek az általunk definiált hipergráfokban. A Komlós, Pintz, Szemerédi Lemma következő erősítése fontos számunkra:

Duke, Leffmann, Rödl, 1995

Legyen $\mathcal{H}$ egy k-uniform hipergráf egy v elemű csúcshalmazon. Legyen Δ a $\mathcal{H}$ hipergráf maximális foka. Tegyük fel, hogy $\Delta \leq t^{k-1}$ és $1 \ll t$. Ha $\mathcal{H}$ nem tartalmaz 2-kört (két él legalább két közös csúccsal), akkor

$$\alpha(\mathcal{H}) = \Omega\left(\frac{v}{t}(\log t)^{\frac{1}{k-1}}\right).$$

Erdős, Gowers problémája

Adott egy $\mathcal{P}$ síkbeli ponthalmaz. Mi a minimális mérete $\mathcal{P}$-nek, amely garantálja, hogy tartalmazzon n pontot egy egyenesen vagy n független pontot (nincs három egy egyenesen)?

Adott egy $\mathcal{P}$ síkbeli ponthalmaz. Mi a minimális mérete $\mathcal{P}$-nek, amely garantálja, hogy tartalmazzon n pontot egy egyenesen vagy n független pontot (nincs három egy egyenesen)?

Definíció: $G(n)$.

Erdős, Gowers problémája

Adott egy $\mathcal{P}$ síkbeli ponthalmaz. Mi a minimális mérete $\mathcal{P}$-nek, amely garantálja, hogy tartalmazzon n pontot egy egyenesen vagy n független pontot (nincs három egy egyenesen)?

Definíció: $G(n)$.

Könnyű:

- a rács mutatja, hogy $\Omega(n^2)$ pont szükséges,
- n^3 elemű ponthalmazban — amelyben nincs n kollineáris pont — a mohó algoritmus talál n független pontot.

Payne és Wood eredménye

Payne—Wood

$$G(n) = O(n^2 \log n).$$

Payne és Wood eredménye

Payne—Wood

$$G(n) = O(n^2 \log n).$$

Azaz, ha $\mathcal{P}$ egy $cn^2 \log n$ elemű síkbeli ponthalmaz n kollineáris pont nélkül, akkor tartalmaz n független pontot.

A bizonyítás: Erdős típusú véletlen kiritkítás majd, Gowers-féle mohó választás.

Másik eredményünk

H.—Szemerédi

Legyen $\mathcal{P}$ egy tetszőleges $\alpha\frac{n^2 \log n}{\log\log n}$ méretű síkbeli ponthalmaz (α egy alkalmasan nagy konstans). Ekkor létezik n pont $\mathcal{P}$-ben, amely vagy kollineáris, vagy független.

A módszer: Szabaduljunk meg a 2-köröktől, majd használjuk a szemi-random módszert.

A Schmidt-konstrukció erősítése

Legyen

$$S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|, |y| \leq 1/2\}$$

a síkbeli egységnégyzet. Vegyünk N (egy később választandó paramétert) egyenletes eloszlással, egymástól függetlenül

$$(1/2)S = \{(x/2, y/2); (x,y) \in S\}$$

halmazvól. Legyen $\mathcal{P}$ az a véletlen $\{P_1, P_2, \ldots, P_N\}$ ponthalmaz, amihez így jutottunk.

Észrevétel: $\mathcal{P}$ tetszőleges két pontját összekötő egyenes S-sel vett metszete egy $\Theta(1)$ hosszú szakasz.

Áttérés hipergráfokra

$\mathcal{Q}$, egy 4-uniform hipergráf a $\mathcal{P}$ ponthalmazon

$\{P, Q, R, S\}$ pontnégyes pontosan akkor alkot egy élet, ha

$$Area(PQRS) < \tau,$$

ahol τ egy később meghatározandó paraméter.

$\mathcal{Q}$ egy véletlen 4-uniform hipergráf.

A bizonyítás jelentős része $\mathcal{Q}$ paramétereinek becslései.

Fokok

Legyen $A, B \in \mathcal{P}$ két különböző pont

$$deg(A, B) = |\{\{C, D\} : \{A, B, C, D\} \in \mathcal{Q}\}|,$$

azaz azon élek száma, amelyek mindkét pontot tartalmazzák.

Fokok

Legyen $A, B \in \mathcal{P}$ két különböző pont

$$deg(A, B) = |\{\{C, D\} : \{A, B, C, D\} \in \mathcal{Q}\}|,$$

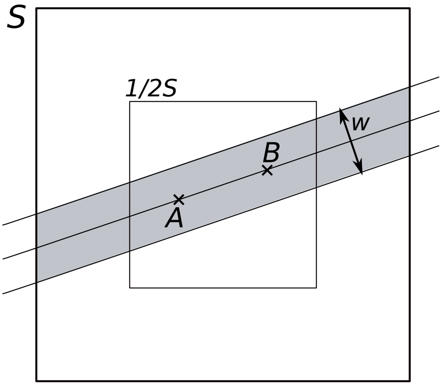
azaz azon élek száma, amelyek mindkét pontot tartalmazzák.

Célunk a fok felső becslése. Ehhez azon C, D rendezett pontpárokat számoljuk, amelyek hozzájárulnak a fokhoz. Nyilván,

$$deg(A, B) = \frac{1}{2}|\{(C, D) : \{A, B, C, D\} \in \mathcal{Q}\}|.$$

Sávok

Legyen $strip(AB, w)$ azon pontok halmaza S-ből amely szélessége w és középvonala AB. Azaz $strip(AB, w)$ azon pontok halmaza S-ből, amelyek AB egyenestől vett távolságuk legfeljebb $w/2$.



A $strip(AB, w)$ sáv területe $\Theta(w)$.

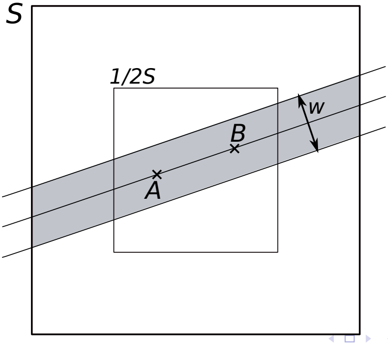
$d(A, B)$ becslése

A startégia: A és B pontokat rögzítjük, legyen $d = dist(A, B)(< 1)$. $deg(A, B)$ bizonyos C, D pontpárokat számol.

$d(A, B)$ becslése

A startégia: A és B pontokat rögzítjük, legyen $d = dist(A, B)(< 1)$. $deg(A, B)$ bizonyos C, D pontpárokat számol.

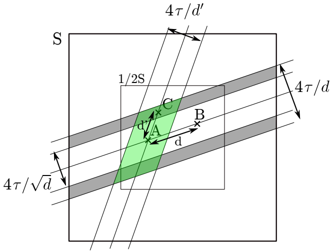
Eseteket különböztetünk meg C, egy $\mathcal{P} - \{A, B\}$-beli tetszőleges pont helyzete alapján, majd a hozzá tartozó D-k lehetséges helyét becsüljük.



1. eset: $C \notin strip(AB, 4\tau/d)$.
Ebben az esetben már a $ABC\triangle$ területe is több mint τ, így ezek a C-k nem járulnak $deg(A, B)$-hez.

2. eset: $C \in strip(AB, 4\tau/\sqrt{d})$. A $strip(AB, 4\tau/\sqrt{d})$ területe $\Theta(\tau/\sqrt{d})$, feltéve, hogy $\tau \ll \sqrt{d} < d$.
A $strip(AB, 4\tau/d)$ sávon kívül nincs olyan D, amely $deg(A, B)$-hez járul (lásd 1. eset).
Így a hozzájáruló D-k a $strip(AB, 4\tau/d)$-ből jönnek. Ennek területe $\Theta(\tau/d)$.

3. eset: $C \in strip(AB, 4\tau/d) - strip(AB, 4\tau/\sqrt{d})$ $(d < \sqrt{d} < 1)$.
$strip(AB, 4\tau/d) - strip(AB, 4\tau/\sqrt{d})$ területe $\mathcal{O}(\tau/d)$.
A hozzájáruló D-k a $strip(AB, 4\tau/d) \cap strip(AC, 4\tau/dist(A, C))$ sávból kerülnek ki.



ábra: A sötét részből jönnek a harmadik eset C pontjai. A zöld tartomány tartalmazza azokat a D-ker, amelyek $\mathcal{Q}$ egy élét alkotják A, B és C-vel.

3. eset (folytatás): Elemi geometria alapján a zöld paralelogramma területe $\Theta(\tau^2/Area(ABC\triangle))$. Mivel $Area(ABC\triangle) = \Omega(d \cdot \tau/\sqrt{d})$, ez a terület $\mathcal{O}(\tau/\sqrt{d})$.

$\mathbb{E}\left(deg(A,B)\right)$ becslése

A C-k számának várható értéke

$$1.\ \text{eset:}\quad 0,\qquad 2.\ \text{eset:}\quad \mathcal{O}(N\tau/\sqrt{d}),\qquad 3.\ \text{eset:}\quad \mathcal{O}(N\tau/d).$$

A megfelelő D-k számának várható értéke

$$1.\ \text{eset:}\quad 0,\qquad 2.\ \text{eset:}\quad \mathcal{O}(N\tau/d),\qquad 3.\text{eset:}\quad \mathcal{O}(N\tau/\sqrt{d}).$$

C és D választása független, a hozzájáruló (C,D) párok várható értékben a fenti várható értékek szorzata. Ez mindegyik estben $\mathcal{O}(\tau^2 d^{-3/2} N^2)$. Így

$$\mathbb{E}\left(deg(A,B)\right) = \mathcal{O}(\tau^2 dist^{-3/2}(A,B)N^2).$$

Az $A, B \in \mathcal{P}$-n keresztül haladó 2-körök száma

$\mathcal{Q}$ két fajta 2-köröket tartalmazhat (különböző betűk különböző pontokat jelölnek)

(I): $\{A, B, C, D\}$, $\{A, B, C', D'\}$,

(II): $\{A, B, C, D\}$, $\{A, B, C, D'\}$

Legyen $\mathcal{C}_I(A, B)$, illetve $\mathcal{C}_{II}(A, B)$ a kétfajta 2-körök száma adott A, B pontokon keresztül..

$\mathcal{C}_I(A, B)$ várható értéke a fentiek alapján

$$\mathbb{E}\left(\mathcal{C}_I(A, B)\right) = \mathcal{O}(\tau^4 dist^{-3}(A, B) N^4).$$

$\mathcal{C}_{II}(A,B)$ várható értékének becslésa technikaibb. A 2., illetve 3. esetbeli C-ket külön kell kezelni:

$$\mathbb{E}\left(\mathcal{C}_{II}(A,B)\right) = \mathcal{O}\left((N\tau/\sqrt{d})(N\tau/d)^2 + (N\tau/d)(N\tau/\sqrt{d})^2\right),$$

így,

$$\mathbb{E}\left(\mathcal{C}_{II}(A,B)\right) = \mathcal{O}(\tau^3 N^3 d^{-2.5}).$$

Rikítás a minimális távolság alsó becsléséhez

Ponthalmazunkat kiritkítjuk, hogy pontjaink közötti minimális távolságot "kontrolálni tudjuk".

Legyen $\delta = \frac{1}{100} N^{-1/2}$. Legyen $C(\mathcal{P})$ a $\mathcal{P}$ ponthalmaz azon pontpárjainak a halmaza. amelyek távolsága kisebb mint δ.
Legyen $C_A(\mathcal{P})$ azon $B \in \mathcal{P}$ pontok halmaza, amelyek δ-nál közelebb vannak A-hoz.
$Disc(A; \delta)$ jelölje a δ sugarú, A középpontú körlapot.

Nyilván

$$C_A(\mathcal{P}) = \mathcal{P} \cap Disc(A; \delta),$$

$$|C(\mathcal{P})| = 1/2 \sum_A |C_A(\mathcal{P})|,$$

és

$$\mathbb{E}\ |C_A(\mathcal{P})| \leq (N-1) Area(Disc(A; \delta)) = 1/2\pi \cdot \delta^{-2} N < 1/1000.$$

Rikítás a minimális távolság alsó becsléséhez

Kapjuk, hogy $\mathbb{E}\left(|C(\mathcal{P})|\right) \leq N/1000$, így elegendően nagy valószínűséggel

$$|C(\mathcal{P})| \leq N/4.$$

A közeli pontpárok elhagyása után kapjuk $\mathcal{P}_0$-t, az új ponthalmazunkat.
$|\mathcal{P}_0| \geq N/2$ nagy valószínűséggel,és tetszőleges két pont távolsága legalább δ.

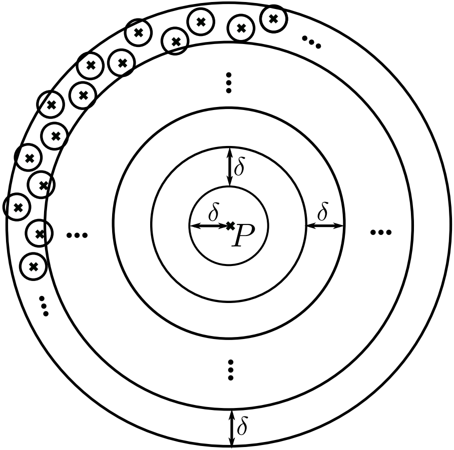
Legyen $\mathcal{Q}_0$ a $\mathcal{Q}$ hipergráf megszorítása $\mathcal{P}_0$ ponthalmazra.

Lemma

Vegyünk M darab pontot S-ből úgy hogy a minimális távolság közöttük legalább δ. Legyen $P \in S$ és $Ann_i(P, \delta)$ a

$$Ann_i(P;\delta) = \{X \in \mathbb{R}^2 : (i-1)\delta < dist(P, X) \leq i\delta\}$$

körgyűrű.
$Ann_1(P;\delta)$, $Ann_2(P;\delta)$, …, $Ann_{\mathcal{O}(\delta^{-1})}(P;\delta)$ halmazok diszjunktak és lefedik S-et. Továbbá az M pont közül legfeljebb $\mathcal{O}(i)$ eshet $Ann_i(P, \delta)$-ba.



ábra: A P körüli körgyűrűk, és az elemi térfogat érvelés

$$\mathbb{E}\ deg_{\mathcal{Q}_0}(A) \le \sum_B \mathbb{E}\ deg(A,B) = \sum_{i=1}^{\mathcal{O}(N^{1/2})} \sum_{B\in Ann_i(A,\delta)} deg(A,B)$$

$$\le \sum_{i=1}^{\mathcal{O}(N^{1/2})} \sum_{B\in Ann_i(A,\delta)} \mathcal{O}(\tau^2 N^2 (i/\sqrt{N})^{-3/2})$$

$$\le \sum_{i=1}^{\mathcal{O}(N^{1/2})} i\cdot\mathcal{O}(\tau^2 N^{2.75} i^{-3/2}) = \mathcal{O}(\tau^2 N^{2.75}) \sum_{i=1}^{\mathcal{O}(N^{1/2})} i\cdot i^{-3/2}$$

$$= \mathcal{O}(\tau^2 N^{2.75})\mathcal{O}(N^{0.25}) = \mathcal{O}(\tau^2 N^3).$$

Így

$$\mathbb{E}\ |\mathcal{Q}_0| = \mathcal{O}(\tau^2 N^4).$$

$\mathbb{E}\,(\mathcal{C}_I)$ becslése

$$\mathbb{E}\,\mathcal{C}_I \leq \sum_{A,B} \mathbb{E}\,\mathcal{C}_I(A,B) = \sum_{A} \sum_{i=1}^{\mathcal{O}(N^{1/2})} \sum_{B \in Ann_i(A,\delta)} \mathbb{E}\,\mathcal{C}_I(A,B)$$

$$= \sum_{A} \sum_{i=1}^{\mathcal{O}(N^{1/2})} \sum_{B \in Ann_i(A,\delta)} \mathcal{O}(\tau^4 \cdot i^{-3} N^{1.5} \cdot N^4)$$

$$= \sum_{A} \sum_{i=1}^{\mathcal{O}(N^{1/2})} \mathcal{O}(\tau^4 \cdot i^{-2} \cdot N^{5.5}) = \sum_{A} \mathcal{O}(\tau^4 N^{5.5}) \sum_{i=1}^{\mathcal{O}(N^{1/2})} i^{-2} =$$

$$= \mathcal{O}(\tau^4 N^{6.5}).$$

$\mathbb{E}\ (\mathcal{C}_{II})$ becslése

$$\mathbb{E}\ \mathcal{C}_{II} \le \sum_{A,B} \mathbb{E}\ \mathcal{C}_{II}(A,B) = \sum_{A} \sum_{i=1}^{\mathcal{O}(N^{1/2})} \sum_{B \in Ann_i(A,\delta)} \mathbb{E}\ \mathcal{C}_{II}(A,B)$$

$$= \sum_{A} \sum_{i=1}^{\mathcal{O}(N^{1/2})} \sum_{B \in Ann_i(A,\delta)} \mathcal{O}(\tau^3 \cdot i^{-2.5} N^{1.25} \cdot N^3)$$

$$= \sum_{A} \sum_{i=1}^{\mathcal{O}(N^{1/2})} \mathcal{O}(\tau^3 \cdot i^{-1.5} \cdot N^{4.25}) = \sum_{A} \mathcal{O}(\tau^3 N^{4.25}) \sum_{i=1}^{\mathcal{O}(N^{1/2})} i^{-1.5} =$$

$$= \mathcal{O}(\tau^3 N^{5.25}).$$

Így,

$$\mathbb{E}\ \mathcal{C} = \mathbb{E}\ (\mathcal{C}_I + \mathcal{C}_{II}) = \mathcal{O}(\tau^4 N^{6.5}) + \mathcal{O}(\tau^3 N^{5.25}).$$

Becsléseink gyümölcsei

Rögzítsük a véletlen biteket a véletlen eljárásban, amely elvezetett $\boldsymbol{\mathcal{P}}_0$ és $\boldsymbol{\mathcal{Q}}_0$-hoz úgy, hogy

- pontjaink száma $N/2$,
- a négyesek száma $\mathcal{O}(\tau^2 N^4)$, és
- a 2-körök száma $\mathcal{O}(\tau^4 N^{6.5}) + \mathcal{O}(\tau^3 N^{5.25})$.

Legyen $\mathcal{Q}_1$ az így kapott 4-uniform hipergráf.

Véletlen ritkítás a 2-körök megszüntetésére: p valószínűséggel megtartjuk, $1-p$ valószínűséggel eldobjuk pontjainkat (függetlenül egymástól).

Legyen $\mathcal{Q}_1$ az így kapott véletlen 4-uniform hipergráf.

Paramétereit könnyen becsülhetjük:

$$\mathbb{E}\ |V(\mathcal{Q}_1)| = \Theta(pN), \quad \mathbb{E}\ |\mathcal{Q}_1| = \mathcal{O}(p^4\tau^2 N^4),$$

$$\mathbb{E}\ (\mathcal{C}) = \mathcal{O}(p^6\tau^4 N^{6.5}) + \mathcal{O}(p^5\tau^3 N^{5.25}).$$

Ritkítás: a 2-körök megszüntetése

Válasszunk olyan p-t, hogy teljesüljön

$$\mathcal{C} \ll |V(\mathcal{Q}_1)|.$$

Using Markov's inequality fix the random choices so that we obtain a hypergraph with the property that after deleting the points of the 2-cycles we obtain a leftover hypergraph on $\Theta(pN)$ points, $\mathcal{O}(p^4\tau^2N^4)$ edges, and no 2-cycles.

Let $\overline{d}$ denote the average degree. Throw away the points with degree at least $10\overline{d}$.

A maradék (2-körök nélküli) hipergráfot jelöljük $\mathcal{L}$-lel.Paraméterei:

$$|V(\mathcal{L})| = \Theta(pN), \qquad |\mathcal{L}| = \mathcal{O}(p^4\tau^2N^4), \qquad \Delta(\mathcal{L}) = \mathcal{O}(p^3\tau^2N^3).$$

A paraméterek jó választása

Válasszuk N, τ értékét úgy, hogy $\alpha(\mathcal{L}) \geq n$. Az n független pont bizonyítja a tételünket.
Némi számtan:

$$p := \mathcal{O}(n^{-0.001}), \quad N := \mathcal{O}(n^{1.01}), \quad \tau = \mathcal{O}(n^{-3/2}\sqrt{\log n}).$$

$$\mathbb{E}\,(\boldsymbol{\mathcal{C}}) = \mathcal{O}(p^6\tau^4 N^{6.5}) + \mathcal{O}(p^5\tau^3 N^{5.25}) = o(n)$$

A fenti választásokkal

$$\mathbb{E}\,|V(\boldsymbol{\mathcal{Q}}_1)| = \Theta(pN) = \Theta(n^{1.009}).$$

Azaz, a 2-körök könnyen elhagyhatók.

Emlékeztető: [DLR 1995]

Theorem (Duke, Leffmann, Rödl, 1995)

Legyen $\mathcal{H}$ *egy* k*-uniform hipergráf egy* v *elemű csúcshalmaz felett. Legyen* Δ *a* $\mathcal{H}$ *hipergráf maximális fokszáma. Tegyük fel, hogy* $\Delta \leq t^{k-1}$ *és* $1 \ll t$*. Ha* $\mathcal{H}$ *nem tartalmaz 2-kört, akkor*

$$\alpha(\mathcal{H}) = \Omega\left(\frac{v}{t}(\log t)^{\frac{1}{k-1}}\right).$$

Bevezetünk egy t paramétert, amelyre $\Delta(\mathcal{L}) \leq t^3$.

Mivel $\Delta(\mathcal{L}) = \mathcal{O}(p^3\tau^2N^3)$ a megfelelő választás

$t = \Theta(p\tau^{2/3}N) = \Theta(n^{0.001}(n^{-1}\log^{1/3} n)n^{1.01}) = \Theta(n^{0.009}\log^{1/3} n)$.

[DLR 1995] feltételei teljesülnek, következtetése pedig

$$\alpha(\mathcal{L}) \geq \frac{\Omega(pN)}{t}\log^{1/3} t = \tau^{-2/3} \cdot \Omega(\log^{1/3} n) = \Omega(n).$$

Skálázás után kapjuk, hogy $\alpha(\mathcal{L}) \geq n$.

A megígért tételt az $\mathcal{L}$-beli n méretű független halmaz bizonyítja.

Köszönöm a figyelmet