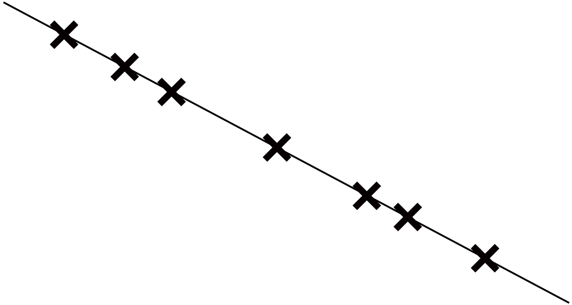
Gallai-egyenesek és Sylvester-egyenesek

Hajnal Péter

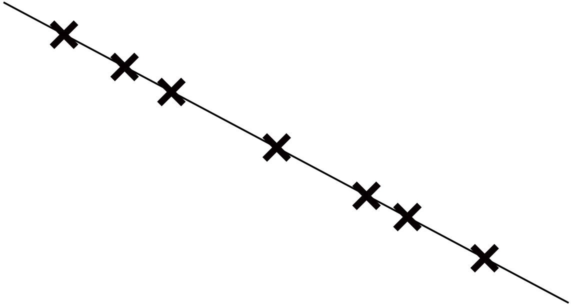
Bolyai Intézet, SZTE, Szeged

2012. április

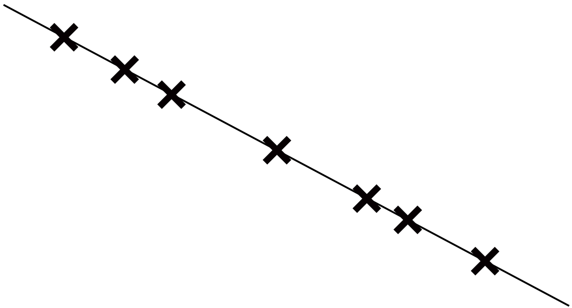
Véges ponthalmazok a síkon. Példák



Véges ponthalmazok a síkon. Példák



$$\mathcal{E}_7, \mathcal{E}_n.$$

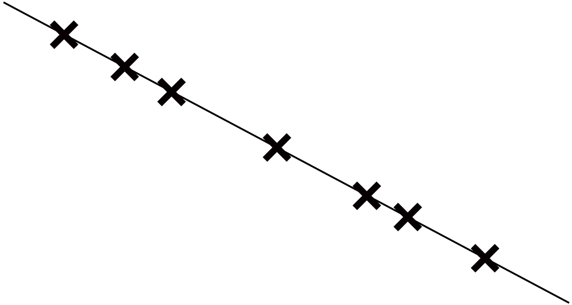


$$\mathcal{E}_7, \mathcal{E}_n.$$

Definíció

Egy ponthalmaz/konfiguráció *triviális*, ha egy egyenesre esik.
Egy ponthalmaz/konfiguráció *nem-triviális*, ha nem esik egy egyenesre,

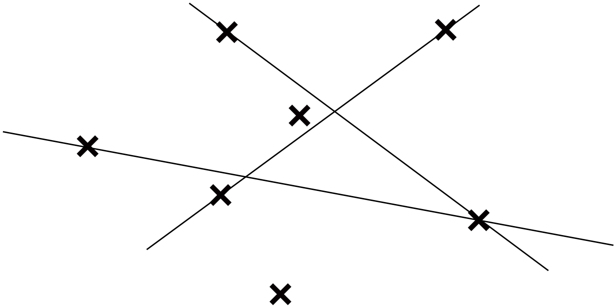
Véges ponthalmazok a síkon. Példák



$$\mathcal{E}_7, \mathcal{E}_n.$$

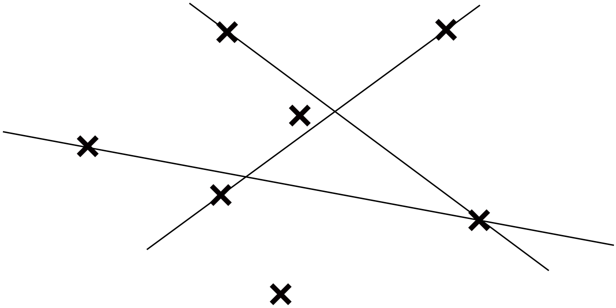
Definíció

Egy ponthalmaz/konfiguráció *triviális*, ha egy egyenesre esik. Egy ponthalmaz/konfiguráció *nem-triviális*, ha nem esik egy egyenesre, azaz van három eleme, amely egy háromszög csúcsponthalmaza.



$\mathcal{G}_7, \mathcal{G}_n.$

Véges ponthalmazok a síkon. Példák

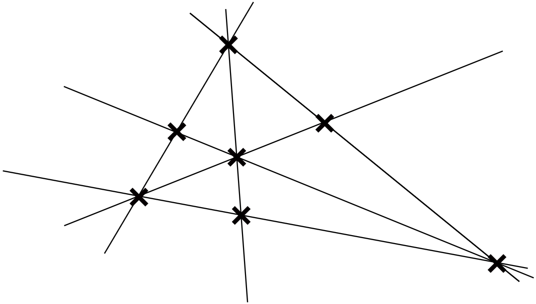


$\mathcal{G}_7, \mathcal{G}_n$.

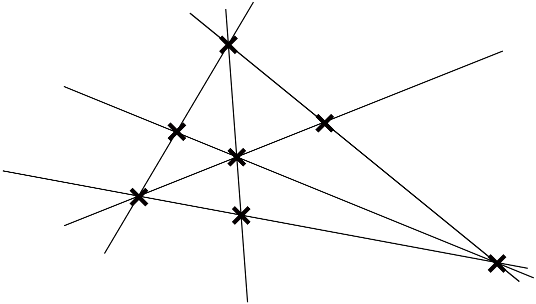
Definíció

Egy ponthalmaz általános helyzetű, ha nincs három pontja, mely egy egyenesre esik.

Kelly—Moser-konfiguráció:

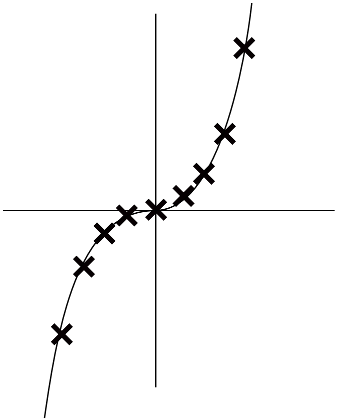


Kelly—Moser-konfiguráció:

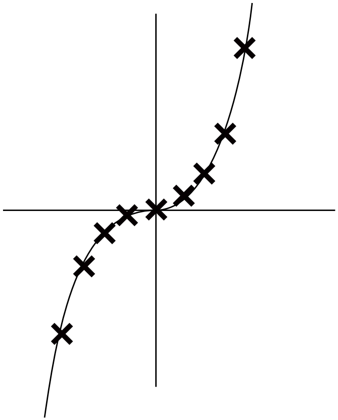


$\mathcal{KM}$

Köbös ponthalmaz.



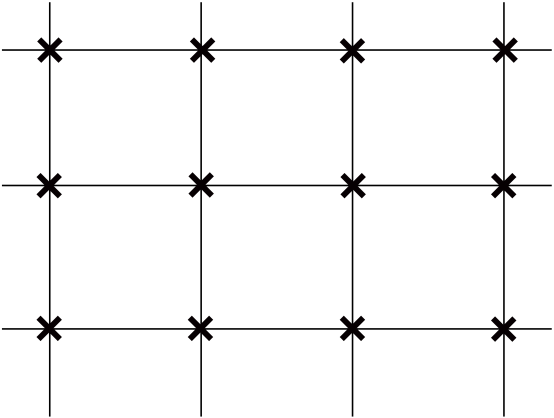
Köbös ponthalmaz.



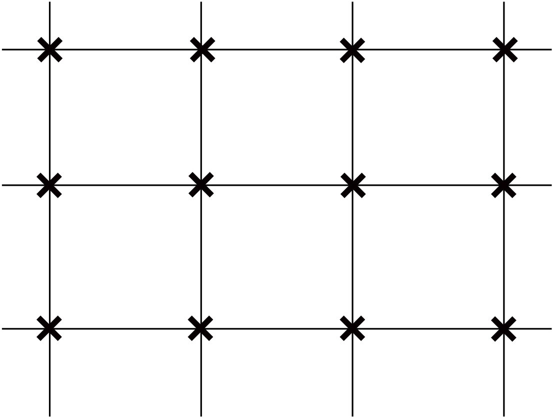
$\mathcal{C}_9, \mathcal{C}_{2k+1}$

Véges ponthalmazok a síkon. Példák

A rács.



A rács.



$$\mathcal{R}_{3\times 4}, \mathcal{R}_{k\times \ell}$$

Összeszámlálási alapfeladat

Adott egy $\mathcal{P}$ véges ponthalmaz a síkon.

Definíció

Egy $\mathcal{P}$ által meghatározott egyenesek a ponthalmazból vett pontpárok összekötő egyenesei:

Adott egy $\mathcal{P}$ véges ponthalmaz a síkon.

Definíció

Egy $\mathcal{P}$ által meghatározott egyenesek a ponthalmazból vett pontpárok összekötő egyenesei:

$$e\text{-t meghatározza } \mathcal{P}, \text{ ha } |e \cap \mathcal{P}| > 1.$$

Összeszámlálási alapfeladat

Adott egy $\mathcal{P}$ véges ponthalmaz a síkon.

Definíció

Egy $\mathcal{P}$ által meghatározott egyenesek a ponthalmazból vett pontpárok összekötő egyenesei:

$$e\text{-t meghatározza } \mathcal{P}, \text{ ha } |e \cap \mathcal{P}| > 1.$$

Definíció

Adott $\mathcal{P}$. Számoljuk meg hány egyenest határoznak meg.

Összeszámlálási alapfeladat

Adott egy $\mathcal{P}$ véges ponthalmaz a síkon.

Definíció

Egy $\mathcal{P}$ által meghatározott egyenesek a ponthalmazból vett pontpárok összekötő egyenesei:

e-t meghatározza $\mathcal{P}$, ha $|e \cap \mathcal{P}| > 1$.

Definíció

Adott $\mathcal{P}$. Számoljuk meg hány egyenest határoznak meg.

$T(\mathcal{P})$ jelölje a $\mathcal{P}$ által meghatározott egyenesek számát.

Számoljunk finomabban!

Adott egy $\mathcal{P}$ véges ponthalmaz a síkon. Vegyük a meghatározott egyeneseket. Amikor a népszámlálásukat tartjuk, kérdezzük meg mindegyiktől „hány ponton megy keresztül”.

Számoljunk finomabban!

Adott egy $\mathcal{P}$ véges ponthalmaz a síkon. Vegyük a meghatározott egyeneseket. Amikor a népszámlálásukat tartjuk, kérdezzük meg mindegyiktől „hány ponton megy keresztül”.

Elnevezés

Egy $\mathcal{P}$ által meghatározott egyenes i-egyenes, ha $|e \cap \mathcal{P}| = i$.

Számoljunk finomabban!

Adott egy $\mathcal{P}$ véges ponthalmaz a síkon. Vegyük a meghatározott egyeneseket. Amikor a népszámlálásukat tartjuk, kérdezzük meg mindegyiktől „hány ponton megy keresztül”.

Elnevezés

Egy $\mathcal{P}$ által meghatározott egyenes i-egyenes, ha $|e \cap \mathcal{P}| = i$.

Jelölés

Jelölje $t_i(\mathcal{P})$ a $\mathcal{P}$ által meghatározott i-egyenesek számát.

Számoljunk finomabban!

Adott egy $\mathcal{P}$ véges ponthalmaz a síkon. Vegyük a meghatározott egyeneseket. Amikor a népszámlálásukat tartjuk, kérdezzük meg mindegyiktől „hány ponton megy keresztül".

Elnevezés

Egy $\mathcal{P}$ által meghatározott egyenes i-egyenes, ha $|e \cap \mathcal{P}| = i$.

Jelölés

Jelölje $t_i(\mathcal{P})$ a $\mathcal{P}$ által meghatározott i-egyenesek számát.

$$T(\mathcal{P}) = t_2(\mathcal{P}) + t_3(\mathcal{P}) + t_4(\mathcal{P}) + \dots$$

Számoljunk finomabban!

Adott egy $\mathcal{P}$ véges ponthalmaz a síkon. Vegyük a meghatározott egyeneseket. Amikor a népszámlálásukat tartjuk, kérdezzük meg mindegyiktől „hány ponton megy keresztül”.

Elnevezés

Egy $\mathcal{P}$ által meghatározott egyenes i-egyenes, ha $|e \cap \mathcal{P}| = i$.

Jelölés

Jelölje $t_i(\mathcal{P})$ a $\mathcal{P}$ által meghatározott i-egyenesek számát.

$$T(\mathcal{P}) = t_2(\mathcal{P}) + t_3(\mathcal{P}) + t_4(\mathcal{P}) + \ldots + t_n(\mathcal{P}), \qquad \text{ahol } n = |\mathcal{P}|.$$

Új elnevezések

A 2- és 3-egyenesek különösen fontosak.

Új elnevezések

A 2- és 3-egyenesek különösen fontosak.

Elnevezés

Egy $\mathcal{P}$ által meghatározott 2-egyenes ($\mathcal{P}$ egy két-pontos egyenese) a $\mathcal{P}$ ponthalmaz *Gallai-egyenese*.

Új elnevezések

A 2- és 3-egyenesek különösen fontosak.

Elnevezés

Egy $\mathcal{P}$ által meghatározott 2-egyenes ($\mathcal{P}$ egy két-pontos egyenese) a $\mathcal{P}$ ponthalmaz *Gallai-egyenese*.

TIBOR GALLAI, 1912–1992

Új elnevezések

A 2- és 3-egyenesek különösen fontosak.

Új elnevezések

A 2- és 3-egyenesek különösen fontosak.

Elnevezés

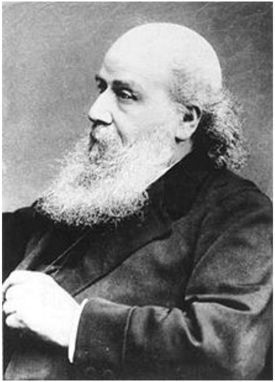
Egy $\mathcal{P}$ által meghatározott 3-egyenes ($\mathcal{P}$ egy három-pontos egyenese) a $\mathcal{P}$ ponthalmaz *Sylvester-egyenese*.

Új elnevezések

A 2- és 3-egyenesek különösen fontosak.

Elnevezés

Egy $\mathcal{P}$ által meghatározott 3-egyenes ($\mathcal{P}$ egy három-pontos egyenese) a $\mathcal{P}$ ponthalmaz *Sylvester-egyenese*.



I. ALAPKÉRDÉS

Milyen kevés Gallai-egyenes lehet egy n elemű ponthalmazban?

I. ALAPKÉRDÉS

Milyen kevés Gallai-egyenes lehet egy n elemű ponthalmazban?

Feltéve, hogy ponthalmazunk nem triviális.

Alapkérdések

I. ALAPKÉRDÉS

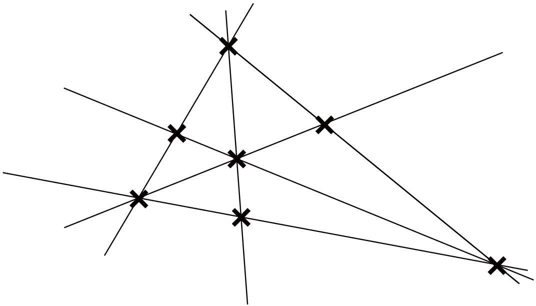
Milyen kevés Gallai-egyenes lehet egy n elemű ponthalmazban?

Feltéve, hogy ponthalmazunk nem triviális.

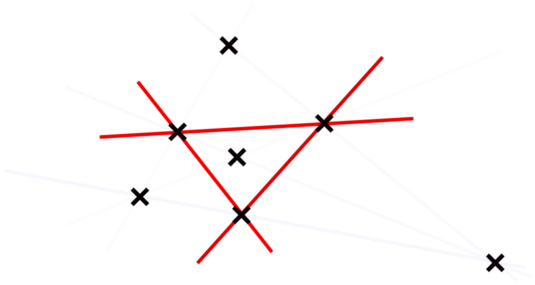
II. ALAPKÉRDÉS

Milyen sok Sylvester-egyenes lehet egy n elemű ponthalmazban?

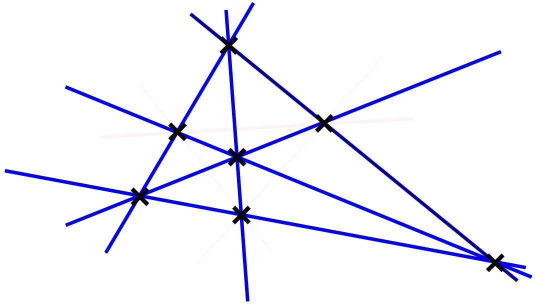
Alapkérdések, példa: $\mathcal{KM}$



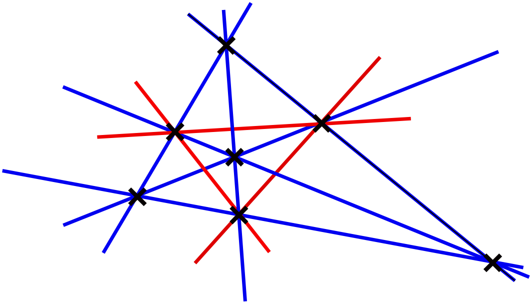
Alapkérdések, példa: $\mathcal{KM}$



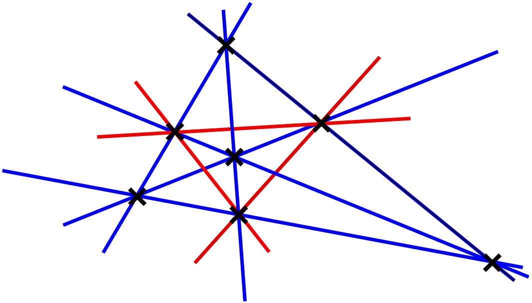
Alapkérdések, példa: $\mathcal{KM}$



Alapkérdések, példa: $\mathcal{KM}$



Alapkérdések, példa: $\mathcal{KM}$



$$t_2(\mathcal{KM}) = 3, \quad t_3(\mathcal{KM}) = 6, \quad t_4 = t_5 = t_6 = \ldots = 0,$$

$$T(\mathcal{KM}) = 9.$$

Alapkérdések, példa: $\mathcal{R}_{3\times 3}$

Hány pontpárt határoz meg $\mathcal{R}_{3\times 3}$?

Alapkérdések, példa: $\mathcal{R}_{3\times 3}$

Hány pontpárt határoz meg $\mathcal{R}_{3\times 3}$? $\binom{9}{2} = 36$.

Alapkérdések, példa: $\mathcal{R}_{3\times 3}$

Hány pontpárt határoz meg $\mathcal{R}_{3\times 3}$? $\binom{9}{2} = 36$.

Hány egyenest határoz meg $\mathcal{R}_{3\times 3}$?

Alapkérdések, példa: $\mathcal{R}_{3\times 3}$

Hány pontpárt határoz meg $\mathcal{R}_{3\times 3}$? $\binom{9}{2} = 36$.

Hány egyenest határoz meg $\mathcal{R}_{3\times 3}$?

- $t_2 + t_3$.

Alapkérdések, példa: $\mathcal{R}_{3\times 3}$

Hány pontpárt határoz meg $\mathcal{R}_{3\times 3}$? $\binom{9}{2} = 36$.

Hány egyenest határoz meg $\mathcal{R}_{3\times 3}$?

- $t_2 + t_3$.
- $t_3(\mathcal{R}_{3\times 3}) =$

Alapkérdések, példa: $\mathcal{R}_{3\times 3}$

Hány pontpárt határoz meg $\mathcal{R}_{3\times 3}$? $\binom{9}{2} = 36$.

Hány egyenest határoz meg $\mathcal{R}_{3\times 3}$?

- $t_2 + t_3$.
- $t_3(\mathcal{R}_{3\times 3}) = 3 + 3 + 2 = 8$.

Alapkérdések, példa: $\mathcal{R}_{3\times 3}$

Hány pontpárt határoz meg $\mathcal{R}_{3\times 3}$? $\binom{9}{2} = 36$.

Hány egyenest határoz meg $\mathcal{R}_{3\times 3}$?

- $t_2 + t_3$.
- $t_3(\mathcal{R}_{3\times 3}) = 3 + 3 + 2 = 8$.
- $t_2(\mathcal{R}_{3\times 3}) =$

Alapkérdések, példa: $\mathcal{R}_{3\times 3}$

Hány pontpárt határoz meg $\mathcal{R}_{3\times 3}$? $\binom{9}{2} = 36$.

Hány egyenest határoz meg $\mathcal{R}_{3\times 3}$?

- $t_2 + t_3$.
- $t_3(\mathcal{R}_{3\times 3}) = 3 + 3 + 2 = 8$.
- $t_2(\mathcal{R}_{3\times 3}) = 8 + 4 = 12$.

Alapkérdések, példa: $\mathcal{R}_{3\times 3}$

Hány pontpárt határoz meg $\mathcal{R}_{3\times 3}$? $\binom{9}{2} = 36$.

Hány egyenest határoz meg $\mathcal{R}_{3\times 3}$?

- $t_2 + t_3$.
- $t_3(\mathcal{R}_{3\times 3}) = 3 + 3 + 2 = 8$.
- $t_2(\mathcal{R}_{3\times 3}) = 8 + 4 = 12$.
- Válasz:

Alapkérdések, példa: $\mathcal{R}_{3\times 3}$

Hány pontpárt határoz meg $\mathcal{R}_{3\times 3}$? $\binom{9}{2} = 36$.

Hány egyenest határoz meg $\mathcal{R}_{3\times 3}$?

- $t_2 + t_3$.
- $t_3(\mathcal{R}_{3\times 3}) = 3 + 3 + 2 = 8$.
- $t_2(\mathcal{R}_{3\times 3}) = 8 + 4 = 12$.
- Válasz: $8 + 12 = 20$.

Alapkérdések, példa: $\mathcal{R}_{3\times 3}$

Hány pontpárt határoz meg $\mathcal{R}_{3\times 3}$? $\binom{9}{2} = 36$.

Hány egyenest határoz meg $\mathcal{R}_{3\times 3}$?

- $t_2 + t_3$.
- $t_3(\mathcal{R}_{3\times 3}) = 3 + 3 + 2 = 8$.
- $t_2(\mathcal{R}_{3\times 3}) = 8 + 4 = 12$.
- Válasz: $8 + 12 = 20$.

Második gondolatmenet:

Alapkérdések, példa: $\mathcal{R}_{3\times 3}$

Hány pontpárt határoz meg $\mathcal{R}_{3\times 3}$? $\binom{9}{2} = 36$.

Hány egyenest határoz meg $\mathcal{R}_{3\times 3}$?

- $t_2 + t_3$.
- $t_3(\mathcal{R}_{3\times 3}) = 3 + 3 + 2 = 8$.
- $t_2(\mathcal{R}_{3\times 3}) = 8 + 4 = 12$.
- Válasz: $8 + 12 = 20$.

Második gondolatmenet:

- A középső pont elhagyható.

Alapkérdések, példa: $\mathcal{R}_{3\times 3}$

Hány pontpárt határoz meg $\mathcal{R}_{3\times 3}$? $\binom{9}{2} = 36$.

Hány egyenest határoz meg $\mathcal{R}_{3\times 3}$?

- $t_2 + t_3$.
- $t_3(\mathcal{R}_{3\times 3}) = 3 + 3 + 2 = 8$.
- $t_2(\mathcal{R}_{3\times 3}) = 8 + 4 = 12$.
- Válasz: $8 + 12 = 20$.

Második gondolatmenet:

- A középső pont elhagyható.
- $\binom{8}{2} -$

Alapkérdések, példa: $\mathcal{R}_{3\times 3}$

Hány pontpárt határoz meg $\mathcal{R}_{3\times 3}$? $\binom{9}{2} = 36$.

Hány egyenest határoz meg $\mathcal{R}_{3\times 3}$?

- $t_2 + t_3$.
- $t_3(\mathcal{R}_{3\times 3}) = 3 + 3 + 2 = 8$.
- $t_2(\mathcal{R}_{3\times 3}) = 8 + 4 = 12$.
- Válasz: $8 + 12 = 20$.

Második gondolatmenet:

- A középső pont elhagyható.
- $\binom{8}{2} - 4 \cdot 2 = 28 - 8 = 20$.

Hány pontban metszheti egy egyenes az $y = x^3$ függvény grafikonját?

Alapkérdések, példa: $\mathcal{C}_{2k+1}$

Hány pontban metszheti egy egyenes az $y = x^3$ függvény grafikonját?

- Hány valós gyöke lehet az $x^3 = ax + b$ egyenletnek?

Alapkérdések, példa: $\mathcal{C}_{2k+1}$

Hány pontban metszheti egy egyenes az $y = x^3$ függvény grafikonját?

- Hány valós gyöke lehet az $x^3 = ax + b$ egyenletnek?

$$1, 2 \text{ vagy } 3.$$

Alapkérdések, példa: $\mathcal{C}_{2k+1}$

Hány pontban metszheti egy egyenes az $y = x^3$ függvény grafikonját?

- Hány valós gyöke lehet az $x^3 = ax + b$ egyenletnek?

$$1, 2 \text{ vagy } 3.$$

- (i, i^3), (j, j^3), (ℓ, ℓ^3) egy Sylvester-egyenesre esik (i, j és ℓ különbözőek) $\Leftrightarrow$

Alapkérdések, példa: $\mathcal{C}_{2k+1}$

Hány pontban metszheti egy egyenes az $y = x^3$ függvény grafikonját?

- Hány valós gyöke lehet az $x^3 = ax + b$ egyenletnek?

$$1, 2 \text{ vagy } 3.$$

- (i, i^3), (j, j^3), (ℓ, ℓ^3) egy Sylvester-egyenesre esik (i, j és ℓ különbözőek) $\Leftrightarrow$

$$i + j + \ell = 0.$$

Alapkérdések, példa: $\mathcal{C}_{2k+1}$

Hány pontban metszheti egy egyenes az $y = x^3$ függvény grafikonját?

- Hány valós gyöke lehet az $x^3 = ax + b$ egyenletnek?

$$1, 2 \text{ vagy } 3.$$

- (i, i^3), (j, j^3), (ℓ, ℓ^3) egy Sylvester-egyenesre esik (i, j és ℓ különbözőek) $\Leftrightarrow$
$$i + j + \ell = 0.$$
- (i, i^3) és (j, j^3) egy Gallai-egyenesre esik (i és j különbözőek) $\Leftrightarrow$

Alapkérdések, példa: $\mathcal{C}_{2k+1}$

Hány pontban metszheti egy egyenes az $y = x^3$ függvény grafikonját?

- Hány valós gyöke lehet az $x^3 = ax + b$ egyenletnek?

$$1, 2 \text{ vagy } 3.$$

- (i, i^3), (j, j^3), (ℓ, ℓ^3) egy Sylvester-egyenesre esik (i, j és ℓ különbözőek) $\Leftrightarrow$

$$i + j + \ell = 0.$$

- (i, i^3) és (j, j^3) egy Gallai-egyenesre esik (i és j különbözőek) $\Leftrightarrow$

$$2i + j = 0 \text{ vagy } i + 2j = 0.$$

Alapkérdések, példa: $t_3(\mathcal{C}_{2k+1})$ kiszámítása

Hány olyan számhármas van a $\{-k, -k+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k-1, k\}$ halmazban, amelyek összege 0?

Hány olyan számhármas van a $\{-k, -k+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k-1, k\}$ halmazban, amelyek összege 0?

Észrevétel

Típusok: $+, +, -$ $\qquad +, -, -$ $\qquad +, 0, -$

Alapkérdések, példa: $t_3(\mathcal{C}_{2k+1})$ kiszámítása

Hány olyan számhármas van a $\{-k, -k+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k-1, k\}$ halmazban, amelyek összege 0?

Észrevétel

Típusok: $+,+,-$ $\quad$ $+,-,-$ $\quad$ $+,0,-$

- $+,0,-$ típusú hármasok száma k.

Alapkérdések, példa: $t_3(\mathcal{C}_{2k+1})$ kiszámítása

Hány olyan számhármas van a $\{-k, -k+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k-1, k\}$ halmazban, amelyek összege 0?

Észrevétel

Típusok: $+,+,-$ $\qquad +,-,-$ $\qquad +,0,-$

- $+,0,-$ típusú hármasok száma k.
- $+,+,-$ típusú hármasok száma ugyananyi mint a $+,-,-$ típusú hármasok száma.

Alapkérdések, példa: $t_3(\mathcal{C}_{2k+1})$ kiszámítása

Hány olyan számhármas van a $\{-k, -k+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k-1, k\}$ halmazban, amelyek összege 0?

Észrevétel

Típusok: $+, +, -$ $\qquad$ $+, -, -$ $\qquad$ $+, 0, -$

- $+, 0, -$ típusú hármasok száma k.
- $+, +, -$ típusú hármasok száma ugyananyi mint a $+, -, -$ típusú hármasok száma.
- Ábrázoljuk a $+, +, -$ típusú számhármasok két pozitív eleme által meghatározott pontok halmazát.

$$
\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & \dots & (1,k-2) & (1,k-1) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & \dots & (2,k-2) & \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & \dots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
(k-3,1) & (k-3,2) & (k-3,3) & & & \\
(k-2,1) & (k-2,2) & & & & \\
(k-1,1) & & & & &
\end{array}
$$

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & \dots & (1,k-2) & (1,k-1) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & \dots & (2,k-2) & \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & \dots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
(k-3,1) & (k-3,2) & (k-3,3) & & & \\
(k-2,1) & (k-2,2) & & & & \\
(k-1,1) & & & & &
\end{array}$$

Összegezve

$$
\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & \ldots & (1,k-2) & (1,k-1) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & \ldots & (2,k-2) & \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & \ldots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
(k-3,1) & (k-3,2) & (k-3,3) & & & \\
(k-2,1) & (k-2,2) & & & & \\
(k-1,1) & & & & &
\end{array}
$$

Összegezve

A Sylvester-egyenesek száma:

$$
\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & \dots & (1,k-2) & (1,k-1) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & \dots & (2,k-2) & \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & \dots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
(k-3,1) & (k-3,2) & (k-3,3) & & & \\
(k-2,1) & (k-2,2) & & & & \\
(k-1,1) & & & & &
\end{array}
$$

Összegezve

A Sylvester-egyenesek száma:

$$t_3(\mathcal{C}_{2k+1}) =$$

$$
\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & \dots & (1,k-2) & (1,k-1) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & \dots & (2,k-2) & \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & \dots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
(k-3,1) & (k-3,2) & (k-3,3) & & & \\
(k-2,1) & (k-2,2) & & & & \\
(k-1,1) & & & & &
\end{array}
$$

Összegezve

A Sylvester-egyenesek száma:

$$t_3(\mathcal{C}_{2k+1}) = k + 2 \cdot \Big($$

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & \dots & (1,k-2) & (1,k-1) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & \dots & (2,k-2) & \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & \dots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
(k-3,1) & (k-3,2) & (k-3,3) & & & \\
(k-2,1) & (k-2,2) & & & & \\
(k-1,1) & & & & &
\end{array}$$

Összegezve

A Sylvester-egyenesek száma:

$$t_3(\mathcal{C}_{2k+1}) = k + 2 \cdot \Bigg(\Bigg(\frac{k(k-1)}{2}$$

$$
\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & \ldots & (1,k-2) & (1,k-1) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & \ldots & (2,k-2) & \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & \ldots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
(k-3,1) & (k-3,2) & (k-3,3) & & & \\
(k-2,1) & (k-2,2) & & & & \\
(k-1,1) & & & & &
\end{array}
$$

Összegezve

A Sylvester-egyenesek száma:

$$t_3(\mathcal{C}_{2k+1}) = k + 2 \cdot \left(\left(\frac{k(k-1)}{2} - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \right) \right)$$

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & \ldots & (1,k-2) & (1,k-1) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & \ldots & (2,k-2) & \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & \ldots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
(k-3,1) & (k-3,2) & (k-3,3) & & & \\
(k-2,1) & (k-2,2) & & & & \\
(k-1,1) & & & & &
\end{array}$$

Összegezve

A Sylvester-egyenesek száma:

$$t_3(\mathcal{C}_{2k+1}) = k + 2 \cdot \left(\left(\frac{k(k-1)}{2} - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \right) \cdot \frac{1}{2} \right),$$

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & \dots & (1,k-2) & (1,k-1) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & \dots & (2,k-2) & \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & \dots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
(k-3,1) & (k-3,2) & (k-3,3) & & & \\
(k-2,1) & (k-2,2) & & & & \\
(k-1,1) & & & & &
\end{array}$$

Összegezve

A Sylvester-egyenesek száma:

$$t_3(\mathcal{C}_{2k+1}) = k + 2 \cdot \left(\left(\frac{k(k-1)}{2} - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \right) \cdot \frac{1}{2} \right),$$

$$t_3(\mathcal{C}_n) = \frac{n^2}{8}$$

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & \dots & (1,k-2) & (1,k-1) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & \dots & (2,k-2) & \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & \dots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
(k-3,1) & (k-3,2) & (k-3,3) & & & \\
(k-2,1) & (k-2,2) & & & & \\
(k-1,1) & & & & &
\end{array}$$

Összegezve

A Sylvester-egyenesek száma:

$$t_3(\mathcal{C}_{2k+1}) = k + 2 \cdot \left(\left(\frac{k(k-1)}{2} - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \right) \cdot \frac{1}{2} \right),$$

$$t_3(\mathcal{C}_n) = \frac{n^2}{8} + \mathcal{O}(n).$$

Észrevétel

Adott egy n elemű ponthalmaz. Hány pontpárt határoz meg?

Észrevétel

Adott egy n elemű ponthalmaz. Hány pontpárt határoz meg?

I. Válasz: $\binom{n}{2}$.

Észrevétel

Adott egy n elemű ponthalmaz. Hány pontpárt határoz meg?

I. Válasz: $\binom{n}{2}$.

II. Válasz: Számoljunk a meghatározott egyenesek szerint.

Észrevétel

Adott egy n elemű ponthalmaz. Hány pontpárt határoz meg?

I. Válasz: $\binom{n}{2}$.

II. Válasz: Számoljunk a meghatározott egyenesek szerint.

$$t_2 + t_3 \cdot \binom{3}{2} + t_4 \cdot \binom{4}{2} + t_5 \cdot \binom{5}{2} + \dots$$

Észrevétel

Adott egy n elemű ponthalmaz. Hány pontpárt határoz meg?

I. Válasz: $\binom{n}{2}$.

II. Válasz: Számoljunk a meghatározott egyenesek szerint.

$$t_2 + t_3 \cdot \binom{3}{2} + t_4 \cdot \binom{4}{2} + t_5 \cdot \binom{5}{2} + \dots$$

Tétel

$$\sum_{i=2}^{n} \binom{i}{2} t_i(\mathcal{P}) = \binom{|\mathcal{P}|}{2}.$$

Felső becslések t_3-ra

Következmény

(i)

$$t_3(\mathcal{P}) \leq \frac{1}{3} \cdot \binom{n}{2} < \frac{n^2}{6}.$$

Felső becslések t_3-ra

Következmény

(i)

$$t_3(\mathcal{P}) \leq \frac{1}{3} \cdot \binom{n}{2} < \frac{n^2}{6}.$$

(ii)

$$t_3(\mathcal{P}) \leq \frac{1}{3} \cdot \binom{n}{2} - \frac{1}{3} \cdot t_2(n).$$

Legyen $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Legyen $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Mit kódolhat ez a számpár?

Lehet

Legyen $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Mit kódolhat ez a számpár?

Lehet

egy pont koordinátái $\bigg|$

Legyen $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Mit kódolhat ez a számpár?

Lehet

egy pont koordinátái | egy egyenesegyenlet együtthatói

Legyen $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Mit kódolhat ez a számpár?

Lehet

egy pont koordinátái	egy egyenesegyenlet együtthatói
$P(a, b)$	

Dualizálás: koordinátageometria

Legyen $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Mit kódolhat ez a számpár?

Lehet

egy pont koordinátái	egy egyenesegyenlet együtthatói
$P(a, b)$	$\ell(a, b) : ax + by = 1$

Legyen $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Mit kódolhat ez a számpár?

Lehet

egy pont koordinátái	egy egyenesegyenlet együtthatói
$P(a, b)$	$\ell(a, b) : ax + by = 1$

Minden objektumot kódolhatunk így?

nem	

Dualizálás: koordinátageometria

Legyen $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Mit kódolhat ez a számpár?

Lehet

egy pont koordinátái	egy egyenesegyenlet együtthatói
$P(a, b)$	$\ell(a, b) : ax + by = 1$

Minden objektumot kódolhatunk így?

nem	nem

Dualizálás: koordinátageometria

Legyen $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Mit kódolhat ez a számpár?

Lehet

egy pont koordinátái	egy egyenesegyenlet együtthatói
$P(a, b)$	$\ell(a, b) : ax + by = 1$

Minden objektumot kódolhatunk így?

nem	nem
az origó ki van zárva	

Legyen $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Mit kódolhat ez a számpár?

Lehet

egy pont koordinátái	egy egyenesegyenlet együtthatói
$P(a, b)$	$\ell(a, b) : ax + by = 1$

Minden objektumot kódolhatunk így?

nem	nem
az origó ki van zárva	az origón átmenő egyenesek ki vannak zárva

Dualizálás (folytatás)

Mit jelent, hogy

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = 1 \\ \gamma x + \delta y = 1 \\ \eta x + \epsilon y = 1 \end{cases} \qquad \text{megoldható?}$$

Dualizálás (folytatás)

Mit jelent, hogy

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = 1 \\ \gamma x + \delta y = 1 \\ \eta x + \epsilon y = 1 \end{cases} \qquad \text{megoldható?}$$

(1) Az $\ell(\alpha, \beta)$, $\ell(\gamma, \delta)$ és $\ell(\eta, \epsilon)$ egyenesek közös ponton haladnak át.

Dualizálás (folytatás)

Mit jelent, hogy

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = 1 \\ \gamma x + \delta y = 1 \\ \eta x + \epsilon y = 1 \end{cases} \qquad \text{megoldható?}$$

(1) Az $\ell(\alpha, \beta)$, $\ell(\gamma, \delta)$ és $\ell(\eta, \epsilon)$ egyenesek közös ponton haladnak át.

(2) A $P_{\alpha,\beta}$, $P_{\gamma,\delta}$ és $P_{\eta,\epsilon}$ pontokra közös egyenes illeszkedik.

Dualizálás definíciója

Legyen $\mathcal{P}$ egy ponthalmaz. Elemei legyenek

$$P_{a_1,b_1}, P_{a_2,b_2}, P_{a_3,b_3}, \ldots, P_{a_n,b_n}.$$

Dualizálás definíciója

Legyen $\mathcal{P}$ egy ponthalmaz. Elemei legyenek

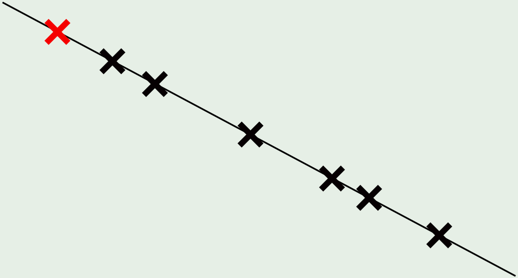
$$P_{a_1,b_1}, P_{a_2,b_2}, P_{a_3,b_3}, \ldots, P_{a_n,b_n}.$$

$\mathcal{P}$ duálisa egy egyeneshalmaz, amely elemei

$$\ell_{a_1,b_1}, \ell_{a_2,b_2}, \ell_{a_3,b_3}, \ldots, \ell_{a_n,b_n}.$$

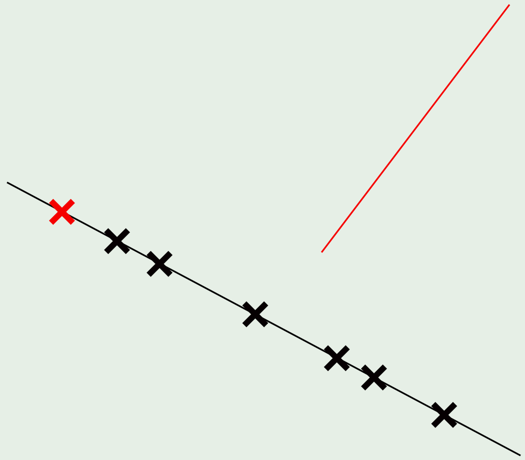
Dualizálás: Ábrák

Példa dualizálásra: $\mathcal{E}_7$



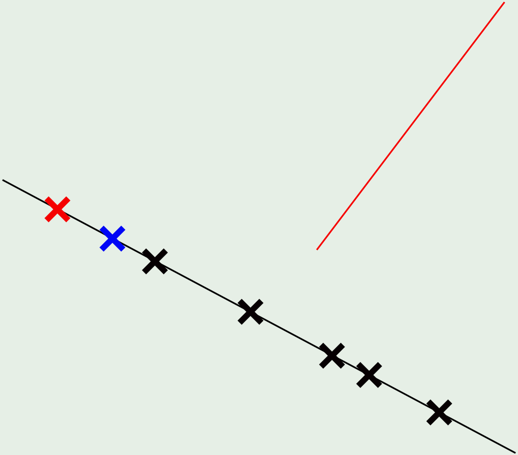
Dualizálás: Ábrák

Példa dualizálásra: $\mathcal{E}_7$



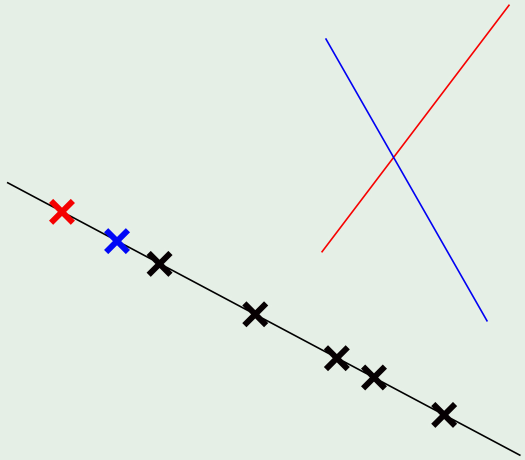
Dualizálás: Ábrák

Példa dualizálásra: $\mathcal{E}_7$



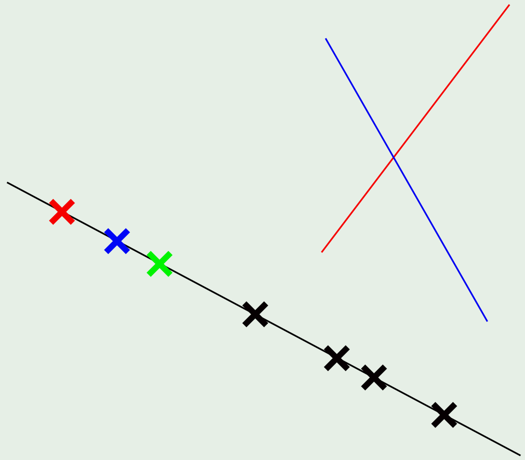
Dualizálás: Ábrák

Példa dualizálásra: $\mathcal{E}_7$



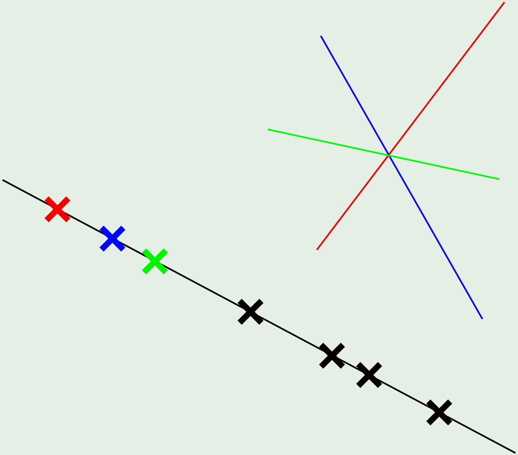
Dualizálás: Ábrák

Példa dualizálásra: $\mathcal{E}_7$



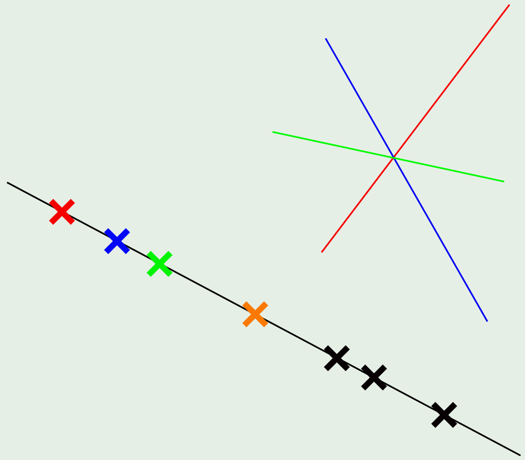
Dualizálás: Ábrák

Példa dualizálásra: $\mathcal{E}_7$



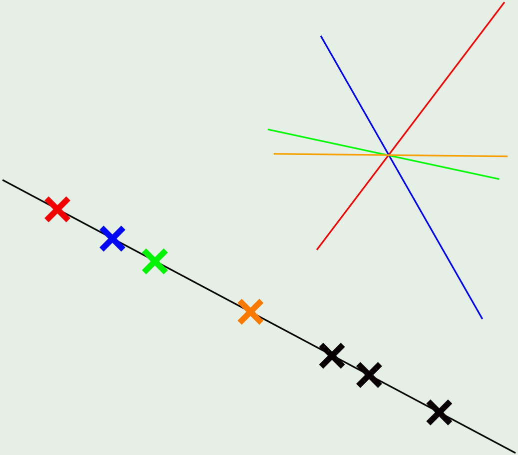
Dualizálás: Ábrák

Példa dualizálásra: $\mathcal{E}_7$



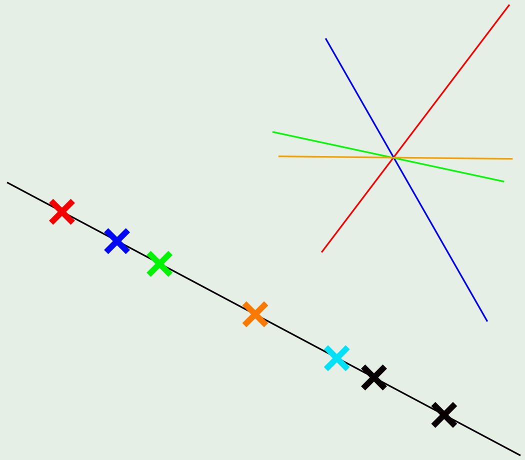
Dualizálás: Ábrák

Példa dualizálásra: $\mathcal{E}_7$



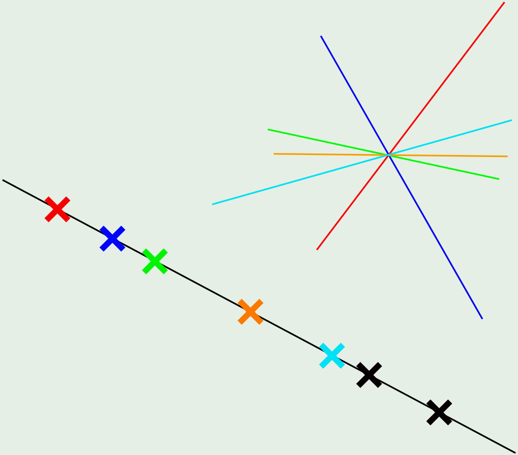
Dualizálás: Ábrák

Példa dualizálásra: $\mathcal{E}_7$

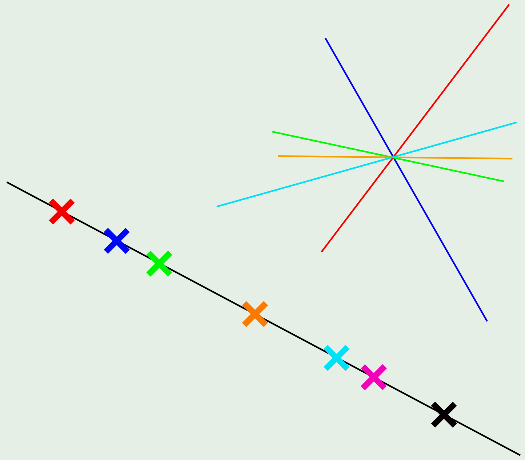


Dualizálás: Ábrák

Példa dualizálásra: $\mathcal{E}_7$

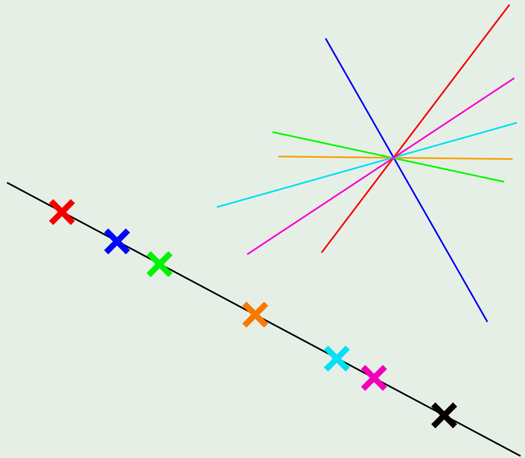


Példa dualizálásra: $\mathcal{E}_7$



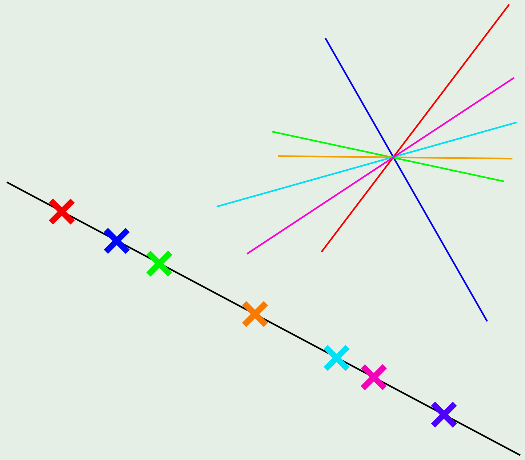
Dualizálás: Ábrák

Példa dualizálásra: $\mathcal{E}_7$



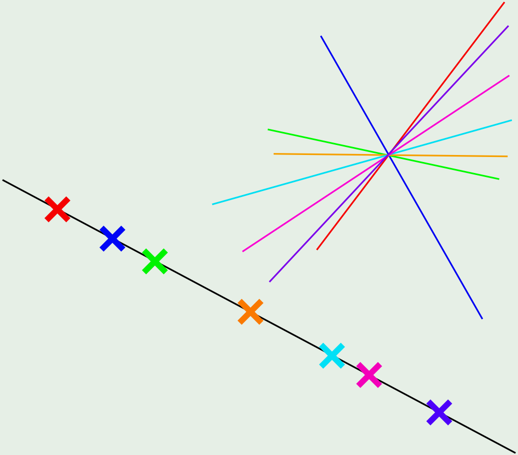
Dualizálás: Ábrák

Példa dualizálásra: $\mathcal{E}_7$



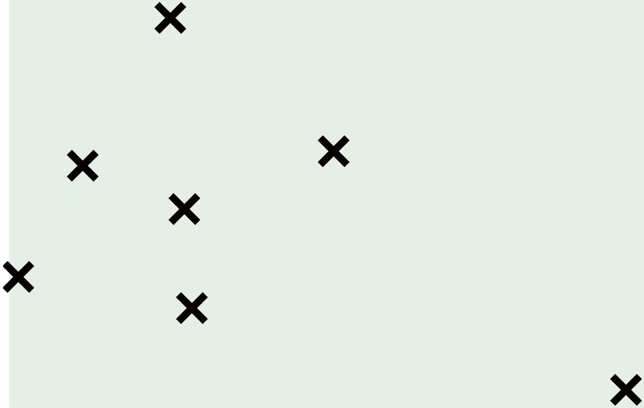
Dualizálás: Ábrák

Példa dualizálásra: $\mathcal{E}_7$



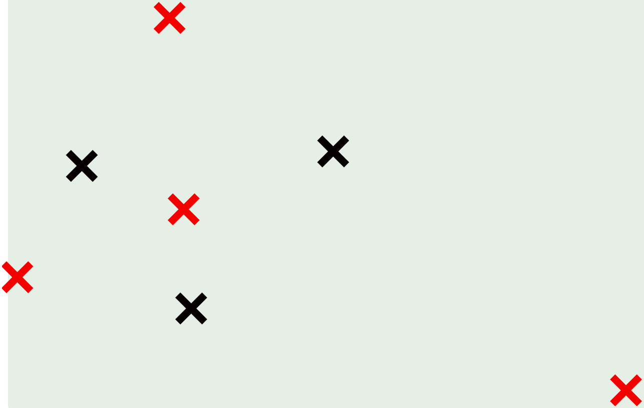
Dualizálás: Ábrák

Példa dualizálásra: $\mathcal{KM}$ (Kelly—Moser)



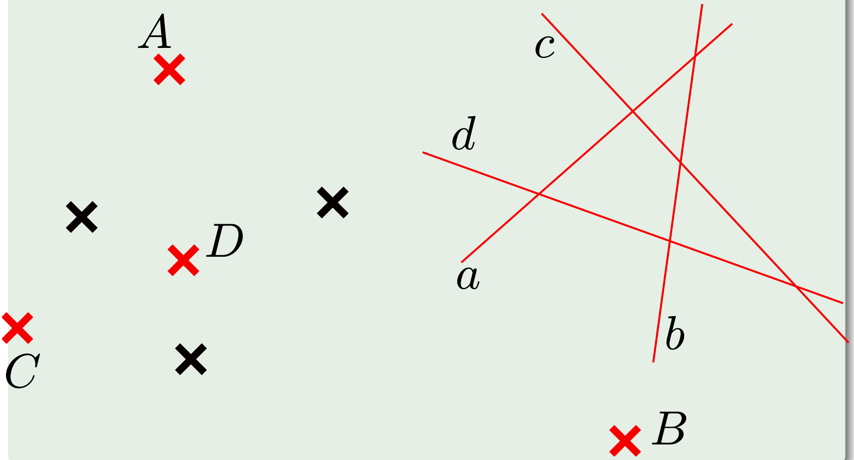
Dualizálás: Ábrák

Példa dualizálásra: $\mathcal{KM}$ (Kelly—Moser)

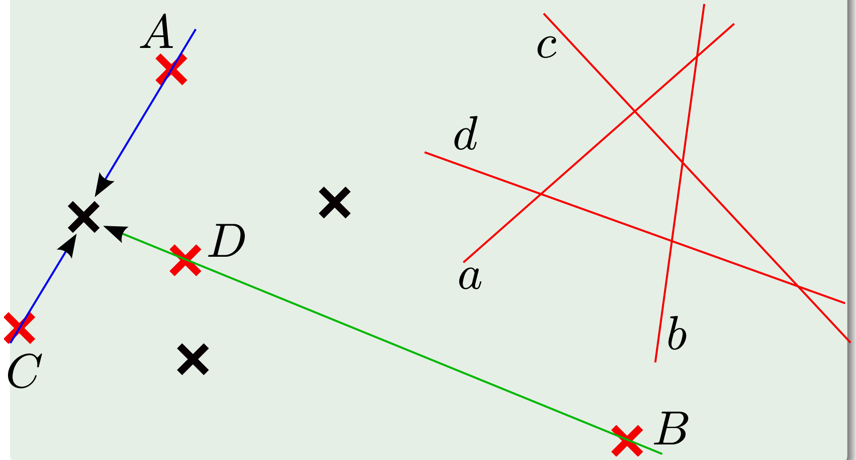


Dualizálás: Ábrák

Példa dualizálásra: $\mathcal{KM}$ (Kelly—Moser)

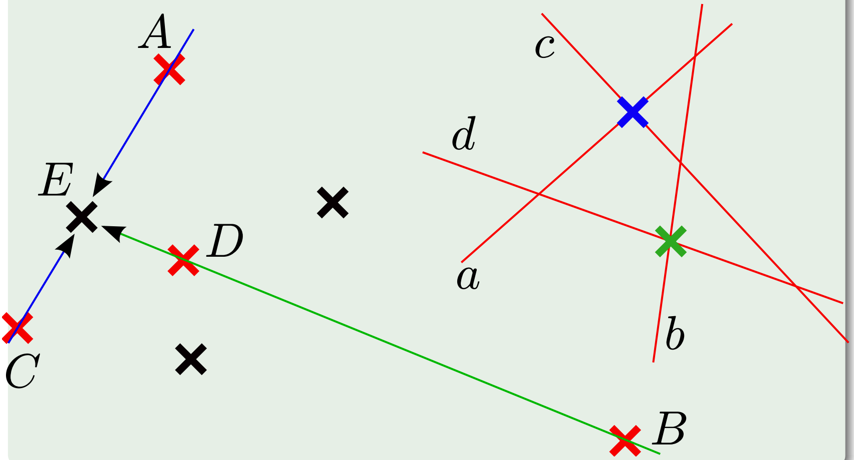


Példa dualizálásra: $\mathcal{KM}$ (Kelly—Moser)



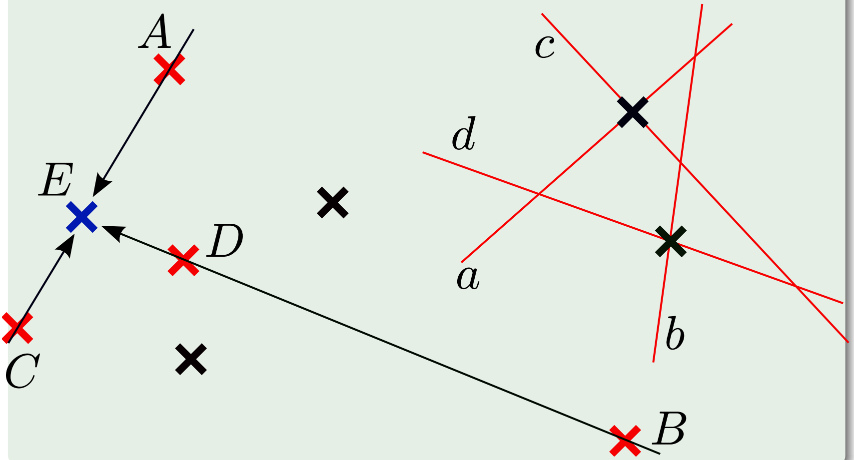
Dualizálás: Ábrák

Példa dualizálásra: $\mathcal{KM}$ (Kelly—Moser)



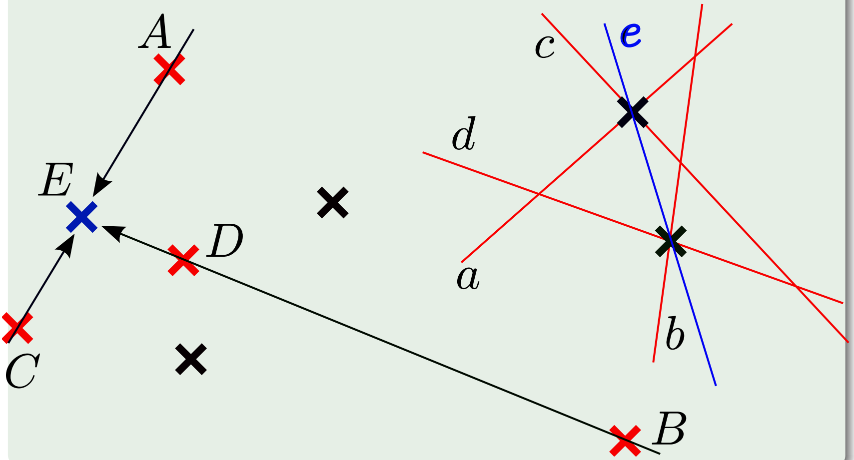
Dualizálás: Ábrák

Példa dualizálásra: $\mathcal{KM}$ (Kelly—Moser)

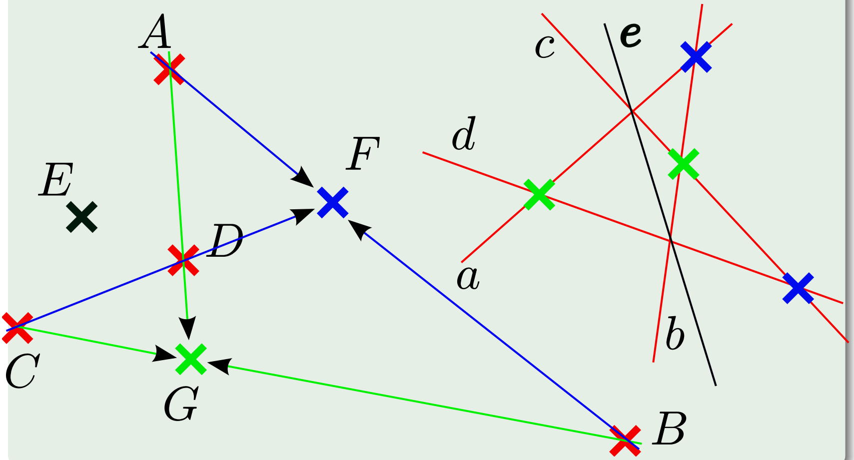


Dualizálás: Ábrák

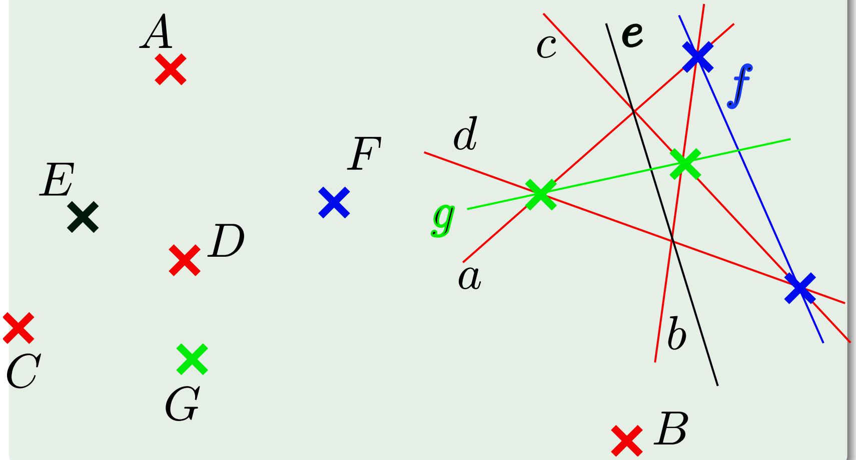
Példa dualizálásra: $\mathcal{KM}$ (Kelly—Moser)



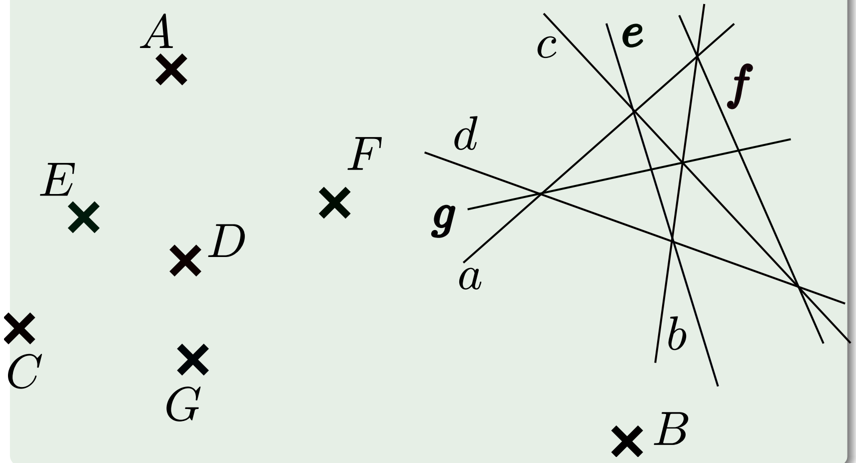
Példa dualizálásra: $\mathcal{KM}$ (Kelly—Moser)



Példa dualizálásra: $\mathcal{KM}$ (Kelly—Moser)



Példa dualizálásra: $\mathcal{KM}$ (Kelly—Moser)



Dulizálás: Szótár

Σ „eredeti” sík	dualizált sík

Dulizálás: Szótár

Σ „eredeti" sík	dualizált sík
pont	

Dulizálás: Szótár

Σ „eredeti” sík	dualizált sík
pont	egyenes

Dulizálás: Szótár

Σ „eredeti” sík	dualizált sík
pont	egyenes
egyenes	

Dulizálás: Szótár

Σ „eredeti" sík	dualizált sík
pont	egyenes
egyenes	pont

Dulizálás: Szótár

Σ „eredeti” sík	dualizált sík
pont	egyenes
egyenes	pont
egyenes pontsereg	

Dulizálás: Szótár

Σ „eredeti" sík	dualizált sík
pont	egyenes
egyenes	pont
egyenes pontsereg	egy ponton áthaladó egyenessereg

Dulizálás: Szótár

Σ „eredeti" sík	dualizált sík
pont	egyenes
egyenes	pont
egyenes pontsereg	egy ponton áthaladó egyenessereg
általános helyzetű pontok	

Dulizálás: Szótár

Σ „eredeti” sík	dualizált sík
pont	egyenes
egyenes	pont
egyenes pontsereg	egy ponton áthaladó egyenessereg
általános helyzetű pontok	általános helyzetű egyenesek

Dulizálás: Szótár

Σ „eredeti" sík	dualizált sík
pont	egyenes
egyenes	pont
egyenes pontsereg	egy ponton áthaladó egyenessereg
általános helyzetű pontok	általános helyzetű egyenesek
metszéspont	

Dulizálás: Szótár

Σ „eredeti" sík	dualizált sík
pont	egyenes
egyenes	pont
egyenes pontsereg	egy ponton áthaladó egyenessereg
általános helyzetű pontok	általános helyzetű egyenesek
metszéspont	összekötő egyenes

Dulizálás: Szótár

Σ „eredeti" sík	dualizált sík
pont	egyenes
egyenes	pont
egyenes pontsereg	egy ponton áthaladó egyenessereg
általános helyzetű pontok	általános helyzetű egyenesek
metszéspont	összekötő egyenes
háromszög három csúcsa	

Dulizálás: Szótár

Σ „eredeti” sík	dualizált sík
pont	egyenes
egyenes	pont
egyenes pontsereg	egy ponton áthaladó egyenessereg
általános helyzetű pontok	általános helyzetű egyenesek
metszéspont	összekötő egyenes
háromszög három csúcsa	háromszög három oldalegyenese

Dualizálás újra: Geometria

Adott egy O középpontú k kör a Σ síkon. Legyen $P \in \Sigma - \{O\}$.

P-hez egy egyenes hozzárendelése

(i) $P \in k$:

Adott egy O középpontú k kör a Σ síkon. Legyen $P \in \Sigma - \{O\}$.

P-hez egy egyenes hozzárendelése

(i) $P \in k$: A k-hoz P-ben húzott érintő.

Dualizálás újra: Geometria

Adott egy O középpontú k kör a Σ síkon. Legyen $P \in \Sigma - \{O\}$.

P-hez egy egyenes hozzárendelése

(i) $P \in k$: A k-hoz P-ben húzott érintő.

(ii) P a k külső pontja:

Dualizálás újra: Geometria

Adott egy O középpontú k kör a Σ síkon. Legyen $P \in \Sigma - \{O\}$.

P-hez egy egyenes hozzárendelése

(i) $P \in k$: A k-hoz P-ben húzott érintő.

(ii) P a k külső pontja: Az AB egyenes, ahol A és B a P-ből k-hoz húzott két érintő érintési pontjai.

Dualizálás újra: Geometria

Adott egy O középpontú k kör a Σ síkon. Legyen $P \in \Sigma - \{O\}$.

P-hez egy egyenes hozzárendelése

(i) $P \in k$: A k-hoz P-ben húzott érintő.

(ii) P a k külső pontja: Az AB egyenes, ahol A és B a P-ből k-hoz húzott két érintő érintési pontjai.

(iii) P a k belső pontja:

Dualizálás újra: Geometria

Adott egy O középpontú k kör a Σ síkon. Legyen $P \in \Sigma - \{O\}$.

P-hez egy egyenes hozzárendelése

(i) $P \in k$: A k-hoz P-ben húzott érintő.

(ii) P a k külső pontja: Az AB egyenes, ahol A és B a P-ből k-hoz húzott két érintő érintési pontjai.

(iii) P a k belső pontja: Hosszú. Lásd következő ábra.

Dualizálás újra: Geometria

Adott egy O középpontú k kör a Σ síkon. Legyen $P \in \Sigma - \{O\}$.

P-hez egy egyenes hozzárendelése

(i) $P \in k$: A k-hoz P-ben húzott érintő.

(ii) P a k külső pontja: Az AB egyenes, ahol A és B a P-ből k-hoz húzott két érintő érintési pontjai.

(iii) P a k belső pontja: Hosszú. Lásd következő ábra.

Jelölés

A fenti definiált egyenes

P polárisa.

Dualizálás újra: Geometria

Adott egy O középpontú k kör a Σ síkon. Legyen $P \in \Sigma - \{O\}$.

P-hez egy egyenes hozzárendelése

(i) $P \in k$: A k-hoz P-ben húzott érintő.

(ii) P a k külső pontja: Az AB egyenes, ahol A és B a P-ből k-hoz húzott két érintő érintési pontjai.

(iii) P a k belső pontja: Hosszú. Lásd következő ábra.

Jelölés

A fenti definiált egyenes

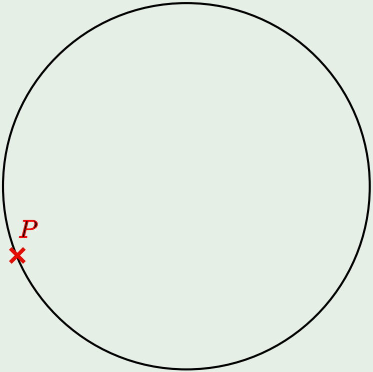
P polárisa.

P a fenti definiált egyenes

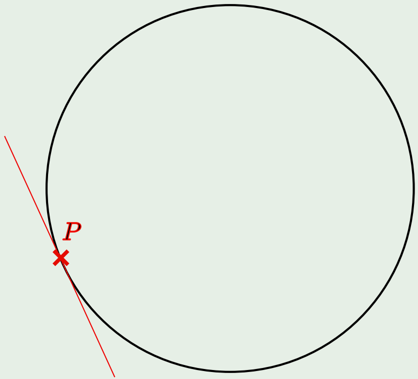
pólusa.

Dualizálás: Geometria

Példa: A poláris definíciója

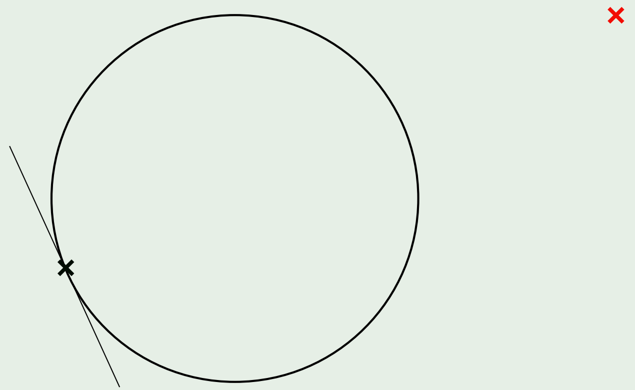


Példa: A poláris definíciója

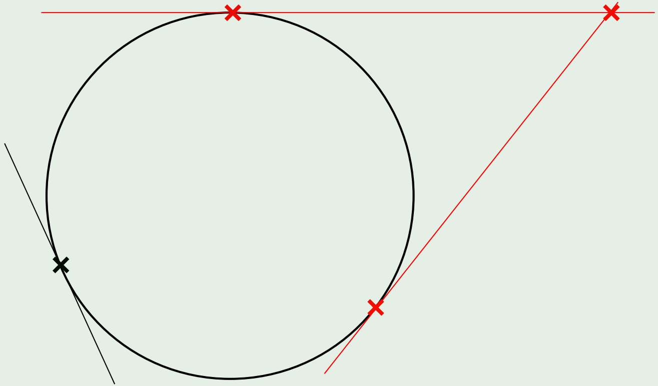


Dualizálás: Geometria

Példa: A poláris definíciója

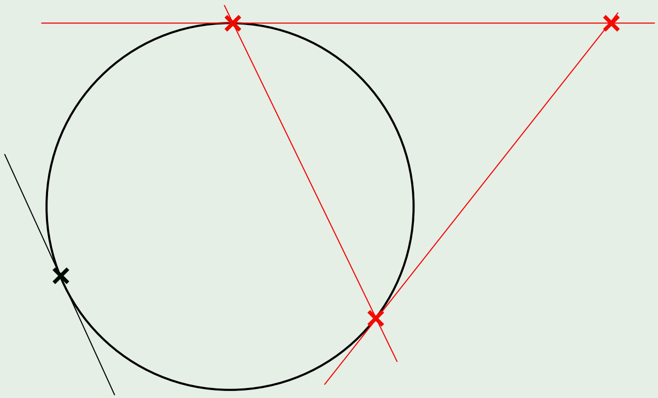


Példa: A poláris definíciója

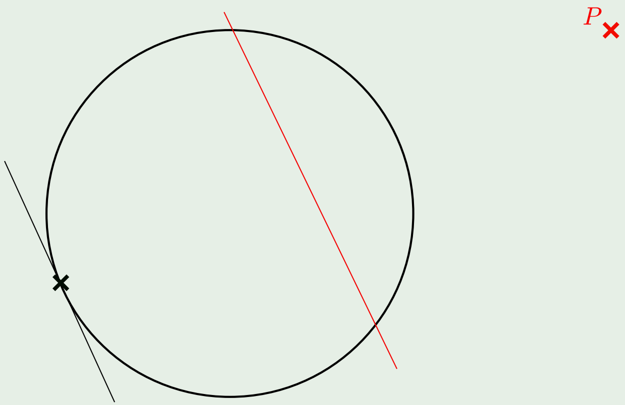


Dualizálás: Geometria

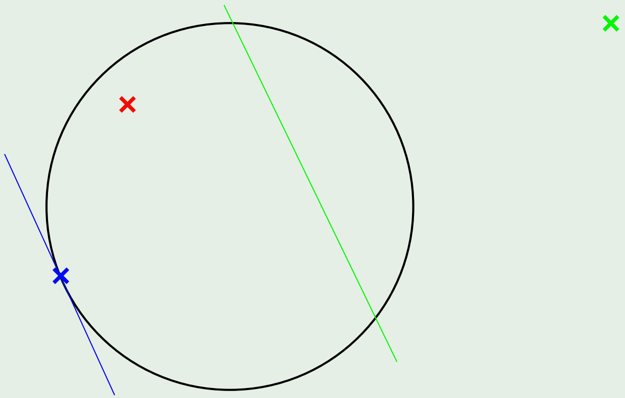
Példa: A poláris definíciója



Példa: A poláris definíciója

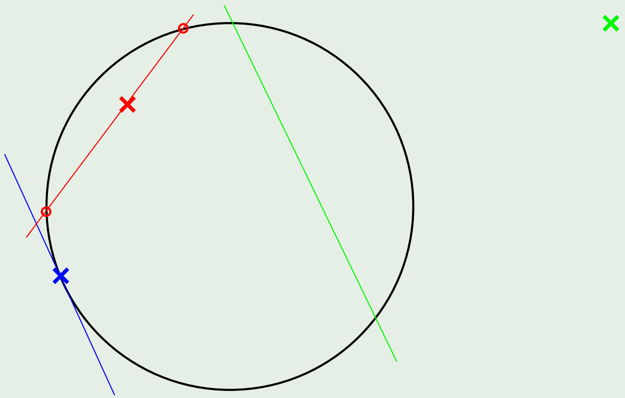


Példa: A poláris definíciója

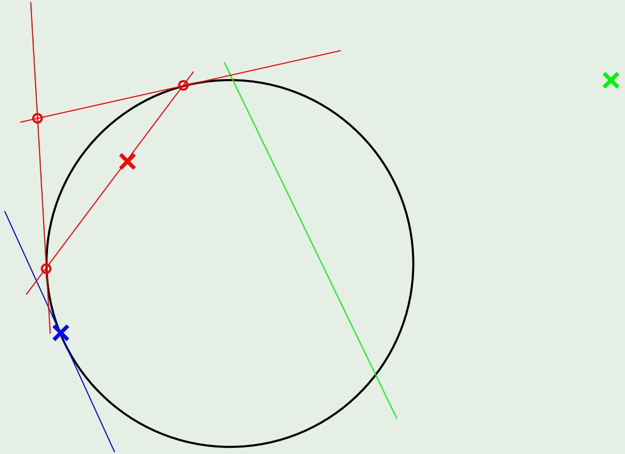


Dualizálás: Geometria

Példa: A poláris definíciója

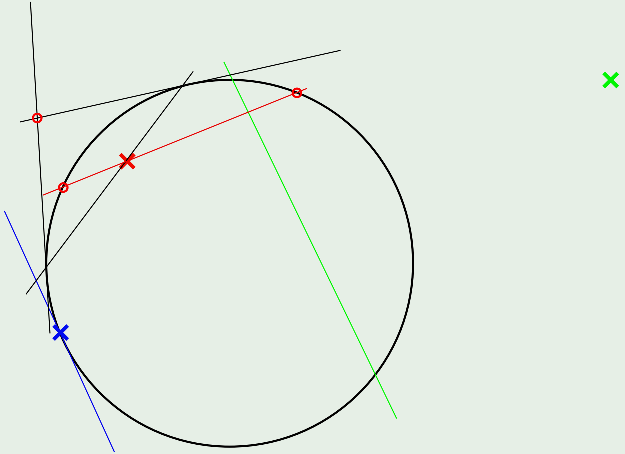


Példa: A poláris definíciója



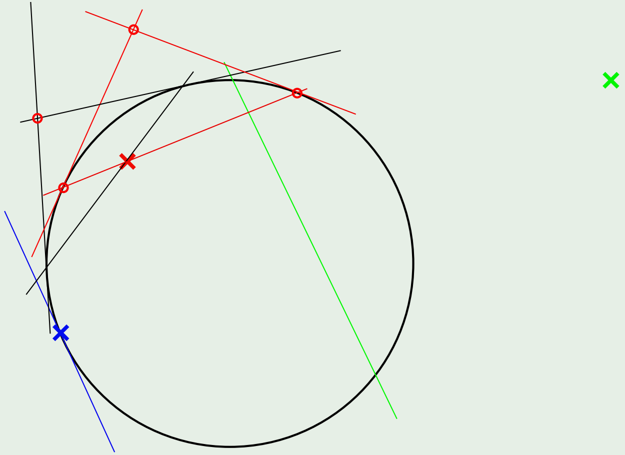
Dualizálás: Geometria

Példa: A poláris definíciója



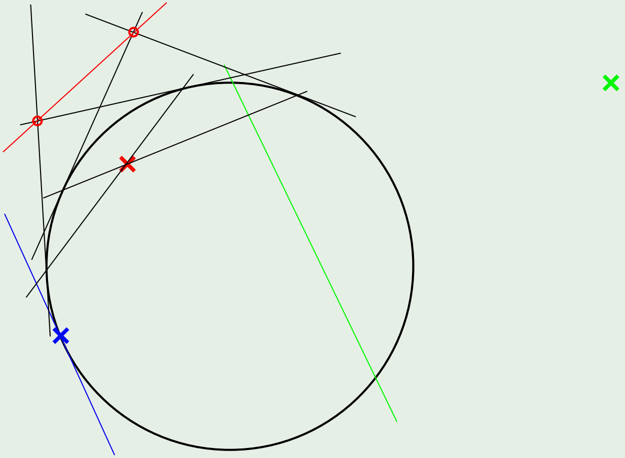
Dualizálás: Geometria

Példa: A poláris definíciója

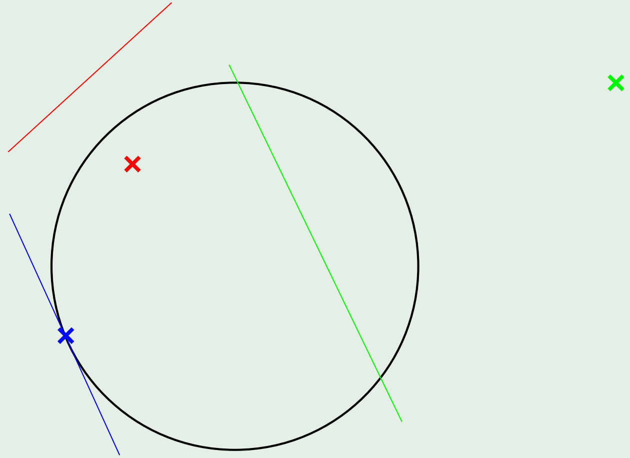


Dualizálás: Geometria

Példa: A poláris definíciója



Példa: A poláris definíciója



Lényeg

Egy véges ponthalmazra vonatkozó probléma átfogalmazható véges egyeneshalmazra vonatkozó problémára.

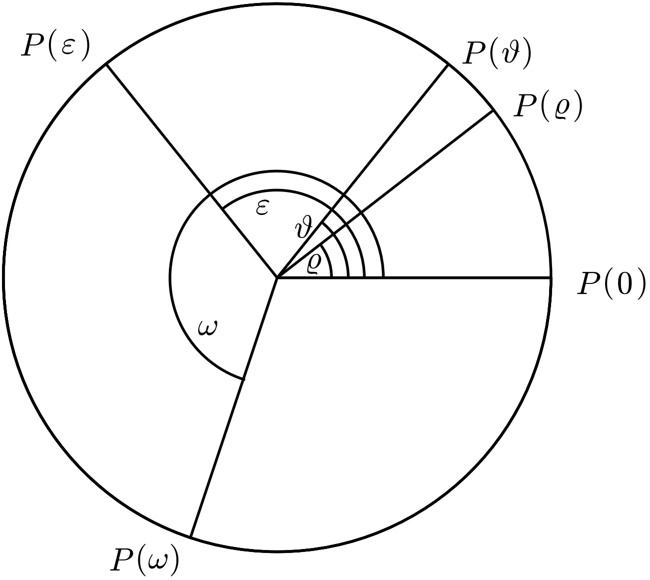
Dualizálás

Lényeg

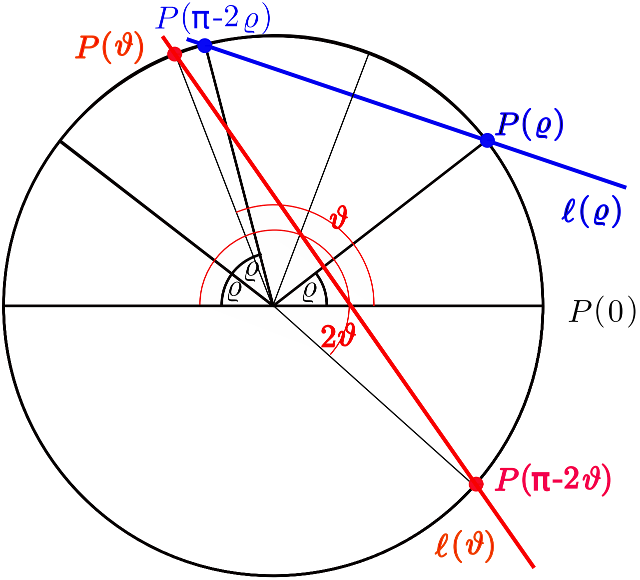
Egy véges ponthalmazra vonatkozó probléma átfogalmazható véges egyeneshalmazra vonatkozó problémára.

Egyenesek egy ügyes konstrukciója megválaszolhat ponthalmazokra vonatkozó kérdést.

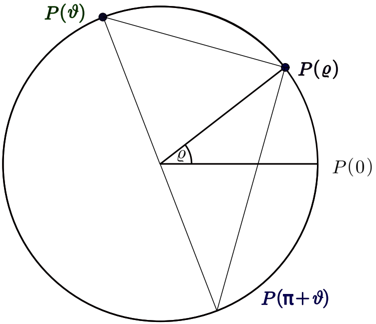
Egy konstrukció (Füredi Zoltán—Palásti Ilona): pontok



Egy konstrukció (Füredi Zoltán—Palásti Ilona): egyenesek



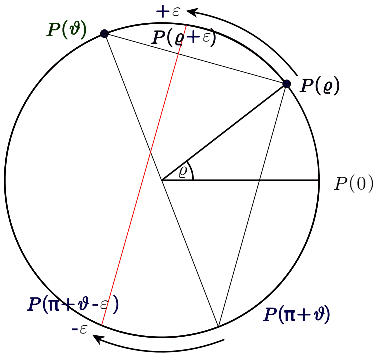
Egy konstrukció (Füredi Zoltán—Palásti Ilona): Thalesz-tétel



Thalesz tétele

$$P(\vartheta+\pi)P(\rho) \perp P(\rho)P(\vartheta)$$

Egy konstrukció (Füredi Zoltán—Palásti Ilona): Thalesz-tétel



Következmény

$$P(\vartheta+\pi-\epsilon)P(\rho+\epsilon) \perp P(\rho)P(\vartheta)$$

Egy konstrukció (Füredi Zoltán—Palásti Ilona): Főlemma

Lemma

$$P(\alpha)P(\beta) \perp P(\rho)P(\vartheta)$$

akkor és csak akkor, ha

$$\alpha + \beta + \pi \equiv \rho + \vartheta \pmod{2\pi}.$$

Egy konstrukció (Füredi Zoltán—Palásti Ilona): Főlemma

Lemma

$$P(\alpha)P(\beta) \perp P(\rho)P(\vartheta)$$

akkor és csak akkor, ha

$$\alpha + \beta + \pi \equiv \rho + \vartheta \pmod{2\pi}.$$

Főlemma

$$P(\alpha)P(\beta) \perp \ell(\gamma)$$

akkor és csak akkor, ha

$$\alpha + \beta + \gamma \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

Tétel

$$\ell(\alpha), \ell(\beta), \ell(\gamma) \text{ egy ponton halad át}$$

akkor és csak akkor, ha

$$\alpha + \beta + \gamma \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

Tétel

$$\ell(\alpha), \ell(\beta), \ell(\gamma) \text{ egy ponton halad át}$$

akkor és csak akkor, ha

$$\alpha + \beta + \gamma \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

Bizonyítás

Egyik irányt bizonyítjuk:

Tétel

$$\ell(\alpha), \ell(\beta), \ell(\gamma) \text{ egy ponton halad át}$$

akkor és csak akkor, ha

$$\alpha + \beta + \gamma \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

Bizonyítás

Egyik irányt bizonyítjuk:
Tegyük fel, hogy $\alpha + \beta + \gamma \equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Egy konstrukció (Füredi Zoltán—Palásti Ilona): A tétel

Tétel

$$\ell(\alpha), \ell(\beta), \ell(\gamma) \text{ egy ponton halad át}$$

akkor és csak akkor, ha

$$\alpha + \beta + \gamma \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

Bizonyítás

Egyik irányt bizonyítjuk:
Tegyük fel, hogy $\alpha + \beta + \gamma \equiv 0 \pmod{2\pi}$.
Észrevétel: $\ell(\gamma)$ a $P(\alpha)P(\beta)P(\gamma)$ háromszög $P(\gamma)$ csúcson átmenő magasságegyenese.

Egy konstrukció (Füredi Zoltán—Palásti Ilona): A tétel

Tétel

$$\ell(\alpha), \ell(\beta), \ell(\gamma) \text{ egy ponton halad át}$$

akkor és csak akkor, ha

$$\alpha + \beta + \gamma \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

Bizonyítás

Egyik irányt bizonyítjuk:
Tegyük fel, hogy $\alpha + \beta + \gamma \equiv 0 \pmod{2\pi}$.
Észrevétel: $\ell(\gamma)$ a $P(\alpha)P(\beta)P(\gamma)$ háromszög $P(\gamma)$ csúcson átmenő magasságegyenese.
A $P(\alpha)P(\beta)P(\gamma)$ háromszög három magasságegyenese

Tétel

$$\ell(\alpha), \ell(\beta), \ell(\gamma) \text{ egy ponton halad át}$$

akkor és csak akkor, ha

$$\alpha + \beta + \gamma \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

Bizonyítás

Egyik irányt bizonyítjuk:
Tegyük fel, hogy $\alpha + \beta + \gamma \equiv 0 \pmod{2\pi}$.
Észrevétel: $\ell(\gamma)$ a $P(\alpha)P(\beta)P(\gamma)$ háromszög $P(\gamma)$ csúcson átmenő magasságegyenese.
A $P(\alpha)P(\beta)P(\gamma)$ háromszög három magasságegyenese $(\ell(\alpha), \ell(\beta), \ell(\gamma))$

Egy konstrukció (Füredi Zoltán—Palásti Ilona): A tétel

Tétel

$$\ell(\alpha), \ell(\beta), \ell(\gamma) \text{ egy ponton halad át}$$

akkor és csak akkor, ha

$$\alpha + \beta + \gamma \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

Bizonyítás

Egyik irányt bizonyítjuk:
Tegyük fel, hogy $\alpha + \beta + \gamma \equiv 0 \pmod{2\pi}$.
Észrevétel: $\ell(\gamma)$ a $P(\alpha)P(\beta)P(\gamma)$ háromszög $P(\gamma)$ csúcson átmenő magasságegyenese.
A $P(\alpha)P(\beta)P(\gamma)$ háromszög három magasságegyenese $(\ell(\alpha), \ell(\beta), \ell(\gamma))$ egy ponton halad át.

A Füredi Zoltán—Palásti Ilona konstrukció

A konstrukció

Legyen $\mathcal{FP}_n$ a következő egyenesek halmaza:

$$\ell(0), \ell\left(\frac{2\pi}{n}\right), \ell\left(2\frac{2\pi}{n}\right), \ldots, \ell\left((n-2)\frac{2\pi}{n}\right), \ell\left((n-1)\frac{2\pi}{n}\right).$$

A Füredi Zoltán—Palásti Ilona konstrukció

A konstrukció

Legyen $\mathcal{FP}_n$ a következő egyenesek halmaza:

$$\ell(0), \ell\left(\frac{2\pi}{n}\right), \ell\left(2\frac{2\pi}{n}\right), \ldots, \ell\left((n-2)\frac{2\pi}{n}\right), \ell\left((n-1)\frac{2\pi}{n}\right).$$

A korábbi tétel:

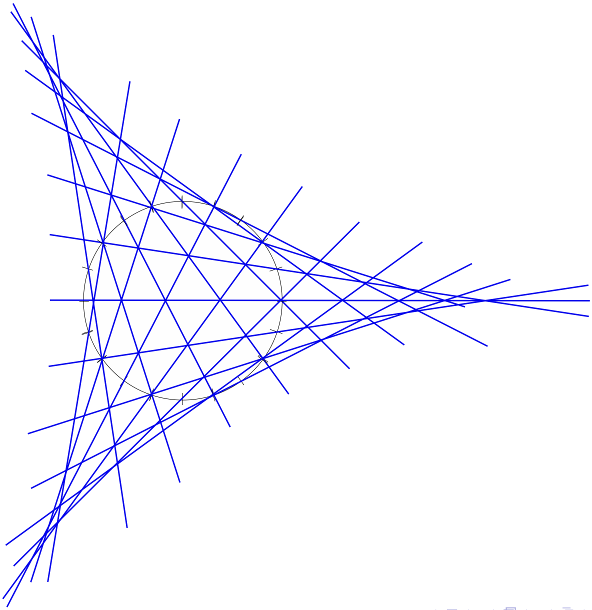
Tétel

$$\ell\left(i \cdot \frac{2\pi}{n}\right), \ell\left(j \cdot \frac{2\pi}{n}\right), \ell\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)$$

akkor és csak akkor halad át egy egyenesen (i, j, k különbözők), ha

$$i + j + k \equiv 0 \pmod{n}.$$

A Füredi Zoltán—Palásti Ilona konstrukció



Kérdés:

Hány olyan hármas van az $\{0, 1, 2, 3, \ldots, n-2, n-1\}$ halmazban, amelyek összege osztható n-nel?

$t_3(\mathcal{FP}_n)$

Kérdés:

Hány olyan hármas van az $\{0, 1, 2, 3, \ldots, n-2, n-1\}$ halmazban, amelyek összege osztható n-nel?

Tétel

$$t_3(\mathcal{FP}_n) = \left\lfloor \frac{n(n-3)}{6} \right\rfloor + 1.$$

Gallai-tétel

ADVANCED PROBLEMS

Send all communications about Advanced Problems and Solutions to Otto Dunkel, Washington University, St. Louis, Mo. All manuscripts should be typewritten, with double spacing and with margins at least one inch wide.

Problems containing results believed to be new or extensions of old results are especially sought. The editorial work would be greatly facilitated, if, on sending in problems, proposers would also enclose any solutions or information that will assist the editors in checking the statements. In general, problems in well known text-books or results found in readily accessible sources will not be proposed as problems for solution in this department. In so far as possible, however, the editors will be glad to assist members of the Association in the solution of such problems.

PROBLEMS FOR SOLUTION

4065. *Proposed by P. Erdös, Princeton, N. J.*

(1) Let n given points have the property that the straight line joining any two of them passes through a third point of the set. Show that the n points lie on a straight line.

(2) Given n points which do not all lie on the same straight line, prove that if we join every two of them we obtain at least n distinct straight lines.

Gallai-tétel

ADVANCED PROBLEMS

Send all communications about Advanced Problems and Solutions to Otto Dunkel, Washington University, St. Louis, Mo. All manuscripts should be typewritten, with double spacing and with margins at least one inch wide.

Problems containing results believed to be new or extensions of old results are especially sought. The editorial work would be greatly facilitated, if, on sending in problems, proposers would also enclose any solutions or information that will assist the editors in checking the statements. In general, problems in well known text-books or results found in readily accessible sources will not be proposed as problems for solution in this department. In so far as possible, however, the editors will be glad to assist members of the Association in the solution of such problems.

PROBLEMS FOR SOLUTION

4065. *Proposed by P. Erdös, Princeton, N. J.*

(1) Let n given points have the property that the straight line joining any two of them passes through a third point of the set. Show that the n points lie on a straight line.

(2) Given n points which do not all lie on the same straight line, prove that if we join every two of them we obtain at least n distinct straight lines.

Gallai-tétel/Gallai—Sylvester-tétel

Minden nem-triviális ponthalmaz meghatároz Gallai-egyenest.

Erdős Pál

A történet

A történet

1933: Erdős Hilbert—Cohn-Vossen, Szemléletes geometriáját olvasta.

A történet

1933: Erdős Hilbert—Cohn-Vossen, Szemléletes geometriáját olvasta.

1933: Erdős megsejti: minden nem-triviális ponthalmaz meghatároz 2-pontos egyenest.

A történet

1933: Erdős Hilbert—Cohn-Vossen, Szemléletes geometriáját olvasta.

1933: Erdős megsejti: minden nem-triviális ponthalmaz meghatároz 2-pontos egyenest.

$1933+\epsilon$: Gallai bebizonyítja Erdős sejtését.

A történet

1933: Erdős Hilbert—Cohn-Vossen, Szemléletes geometriáját olvasta.

1933: Erdős megsejti: minden nem-triviális ponthalmaz meghatároz 2-pontos egyenest.

$1933+\epsilon$: Gallai bebizonyítja Erdős sejtését.

1943: Erdős kitűzi a problémát a Monthly-ban.

A történet

- 1933: Erdős Hilbert—Cohn-Vossen, Szemléletes geometriáját olvasta.
- 1933: Erdős megsejti: minden nem-triviális ponthalmaz meghatároz 2-pontos egyenest.
- $1933+\epsilon$: Gallai bebizonyítja Erdős sejtését.
- 1943: Erdős kitűzi a problémát a Monthly-ban.
- 1944: Kelly felhívja Erdős figyelmét, hogy Sylvester már kitűzte a problémát (kielégítő bizonyítás nélkül) az Educational Times című újságban, 1893-ban.

A történet

1933: Erdős Hilbert—Cohn-Vossen, Szemléletes geometriáját olvasta.

1933: Erdős megsejti: minden nem-triviális ponthalmaz meghatároz 2-pontos egyenest.

$1933+\epsilon$: Gallai bebizonyítja Erdős sejtését.

1943: Erdős kitűzi a problémát a Monthly-ban.

1944: Kelly felhívja Erdős figyelmét, hogy Sylvester már kitűzte a problémát (kielégítő bizonyítás nélkül) az Educational Times című újságban, 1893-ban.

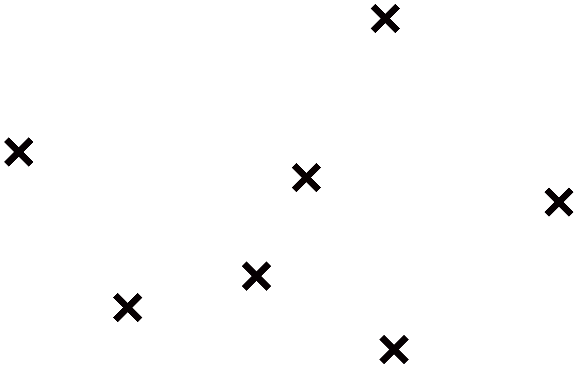
1940: Melchior projektív geometriai munkájában szereplő egyenlőtlenség egyből kiadja, hogy minden nem-triviális ponthalmaz meghatároz legalább HÁROM 2-pontos egyenest.

Solved also by R. C. Buck, T. Grünwald and N. E. Steenrod.

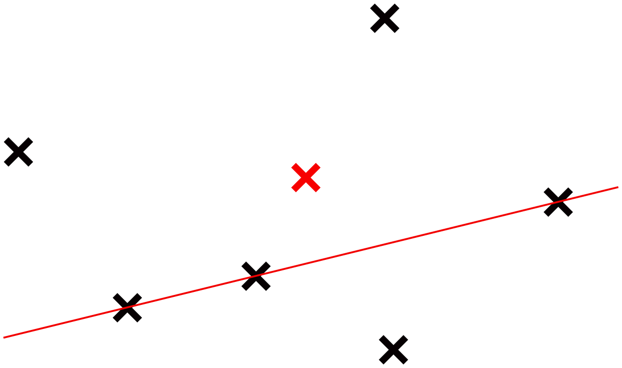
Editorial Note. The proposer enclosed with the problem an outline of Grünwald's solution of part (1) and remarked that part (2) could be easily proved by induction using (1). This proof of (1) may be put in the following form. The assumption that the n points do not lie on a straight line leads to a contradiction as follows.

Consider only those points A_i which lie in a plane determined by three non-collinear points, and project them into the points B_i, from a center O not in the plane, on a second plane parallel to OA_1 but not to any other OA_i. In the second plane we have a system of parallels each containing at least three points including the point at infinity B_1. Let l be the join of two points meeting the system at the least positive angle. Then on l there are three finite points B_i, B_j, B_k, where we suppose that B_j lies between B_i and B_k, and there are three parallels through these points. On the parallel through B_j there is at least one finite point B' distinct from B_j, and we now have the contradiction that one of the two joins B_iB', B_kB' must make a smaller positive angle with the parallels. Hence the original n points lie on a single straight line.

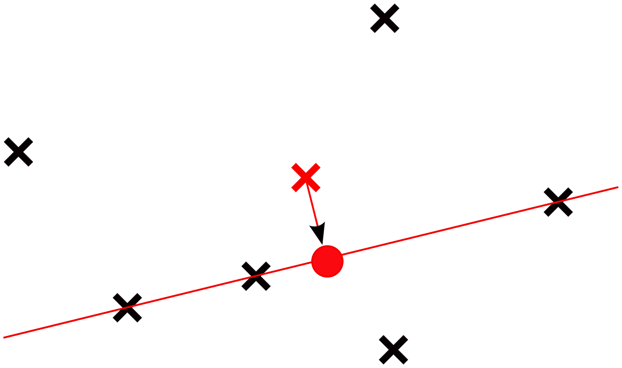
Gallai-tétel: Bizonyítás a Könyvből (Kelly)



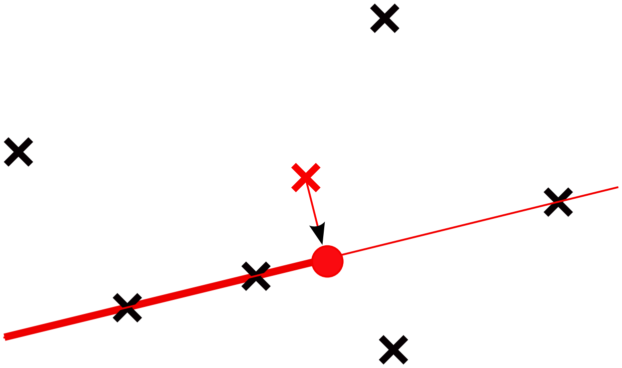
Gallai-tétel: Bizonyítás a Könyvből (Kelly)



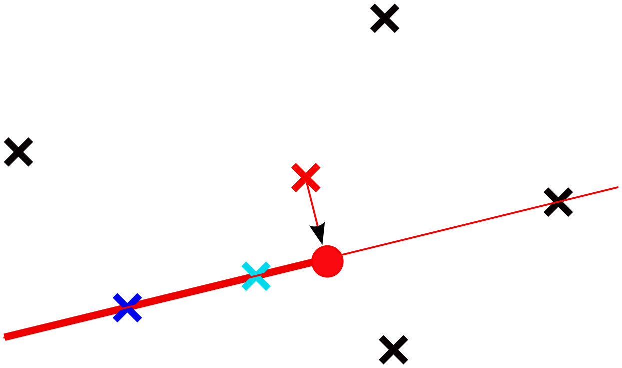
Gallai-tétel: Bizonyítás a Könyvből (Kelly)



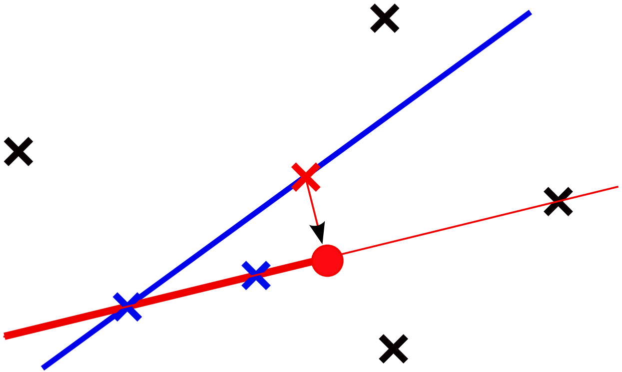
Gallai-tétel: Bizonyítás a Könyvből (Kelly)



Gallai-tétel: Bizonyítás a Könyvből (Kelly)



Gallai-tétel: Bizonyítás a Könyvből (Kelly)



Three Point Collinearity

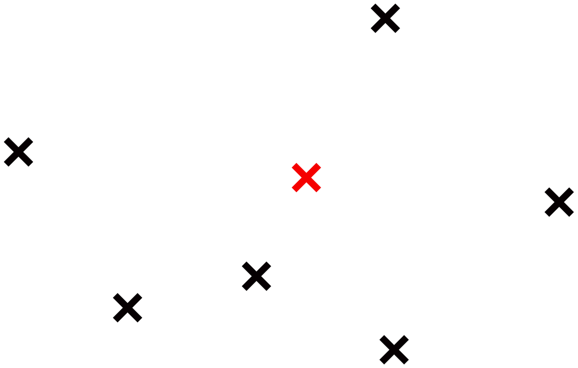
4065 [1943, 65]. *Proposed by P. Erdös, Princeton, N. J.*

(1) Let n given points have the property that the straight line joining any two of them passes through a third point of the set. Show that the n points lie on a straight line.

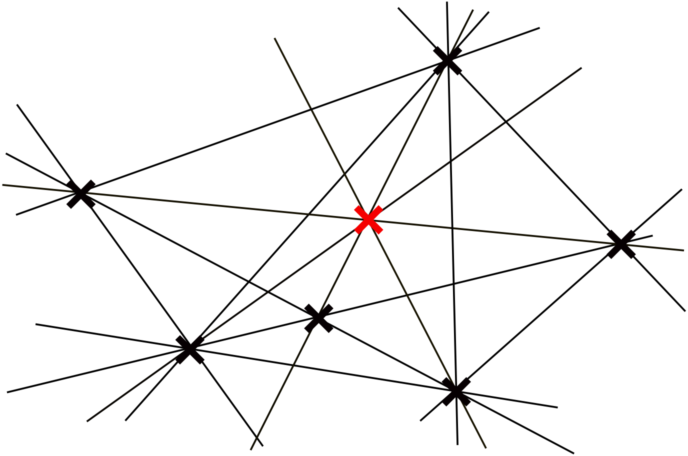
(2) Given n points which do not all lie on the same straight line, prove that if we join every two of them we obtain at least n distinct straight lines.

Solution by Robert Steinberg, Student, University of Toronto. (1) We shall suppose that the n points do not all lie on one line, and show that this leads to a contradiction. Let A, B, C be three noncollinear points among the n, and let a be any line through A, in the plane ABC, which does not contain any other point of the set. Let those joins of pairs of the n points which meet a do so at points P_1, P_2, $\cdots$. There will be at least one of the points P_1, P_2, $\cdots$ which does not coincide with A, *viz.* the one that lies on BC; thus the points A, P_1,

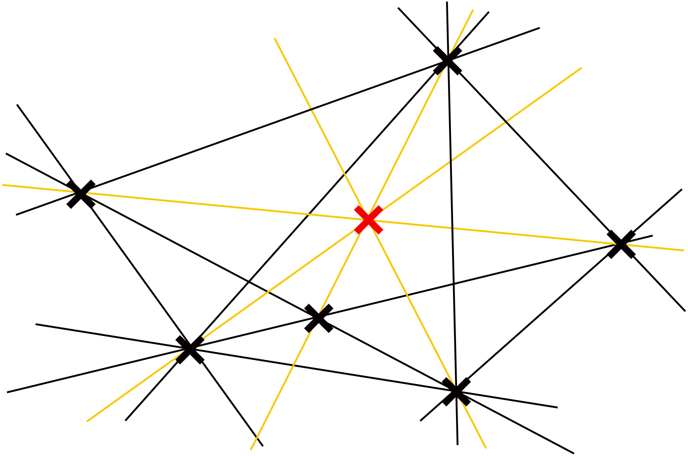
Gallai-tétel: Ez is a Könyvből van



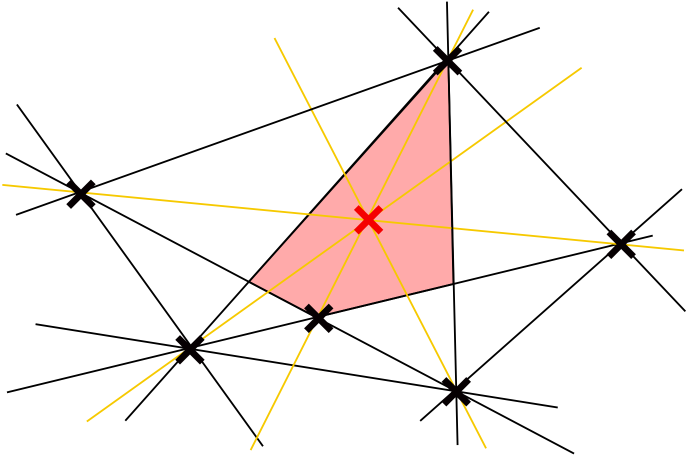
Gallai-tétel: Ez is a Könyvből van



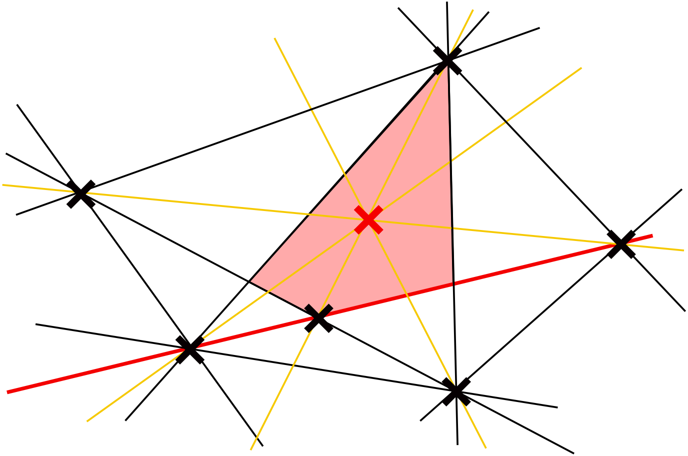
Gallai-tétel: Ez is a Könyvből van



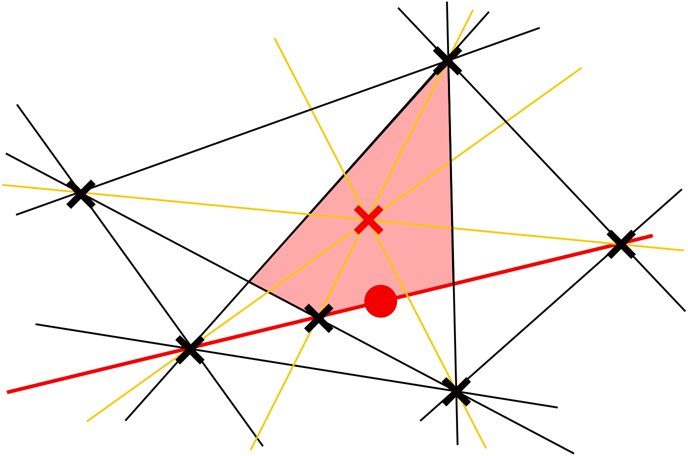
Gallai-tétel: Ez is a Könyvből van



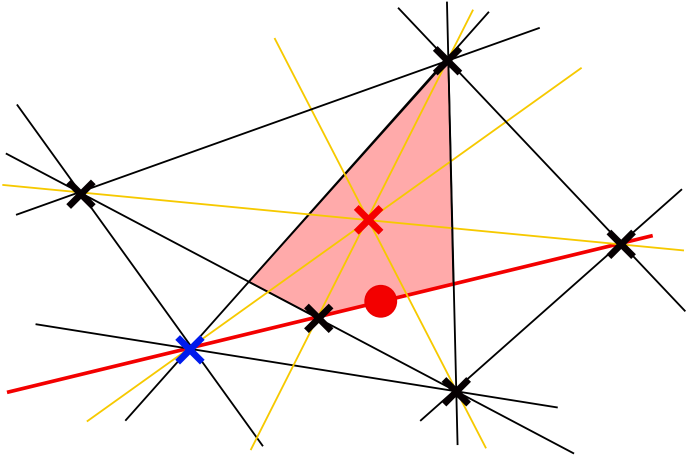
Gallai-tétel: Ez is a Könyvből van



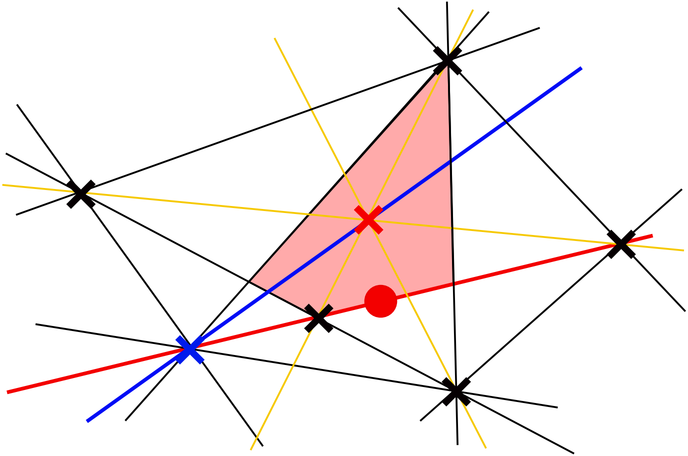
Gallai-tétel: Ez is a Könyvből van



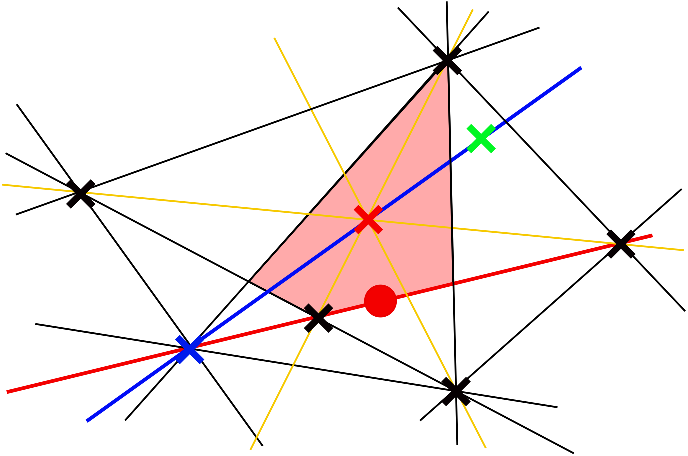
Gallai-tétel: Ez is a Könyvből van



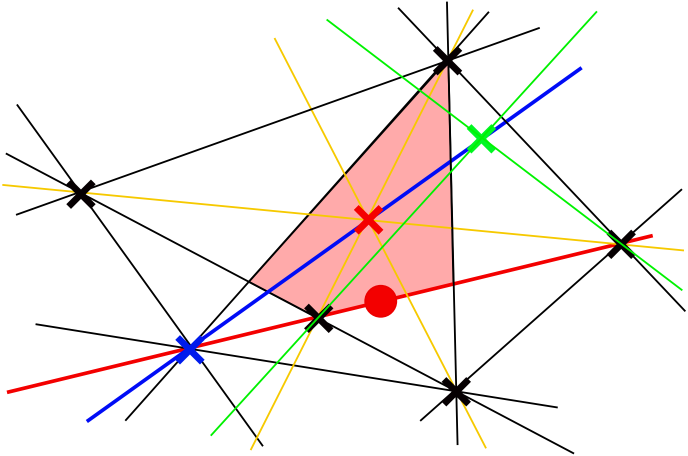
Gallai-tétel: Ez is a Könyvből van



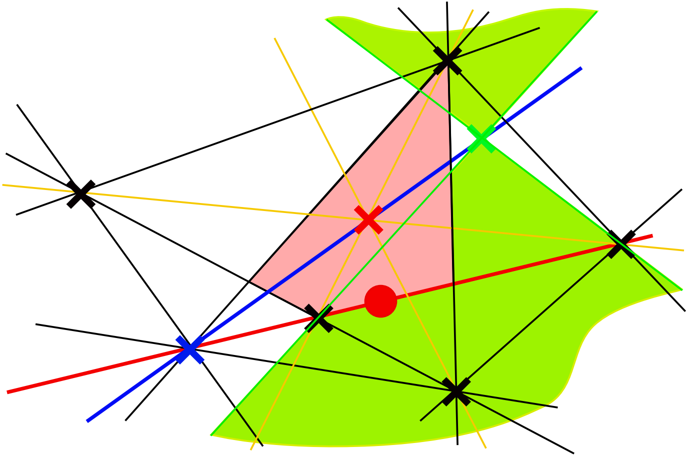
Gallai-tétel: Ez is a Könyvből van



Gallai-tétel: Ez is a Könyvből van



Gallai-tétel: Ez is a Könyvből van



Észrevétel

A fenti módon minden ponthoz találtunk legalább EGY Gallai-egyenest.

Következmények

Észrevétel

A fenti módon minden ponthoz találtunk legalább EGY Gallai-egyenest.
A megtalált egyenes vagy szomszédos a kiinduló ponttal vagy átmegy rajta.

Következmények

Észrevétel

A fenti módon minden ponthoz találtunk legalább EGY Gallai-egyenest.
A megtalált egyenes vagy szomszédos a kiinduló ponttal vagy átmegy rajta.

Lemma

A fenti módon minden ponthoz találtunk legalább KÉT Gallai-egyenest.

Következmények

Észrevétel

A fenti módon minden ponthoz találtunk legalább EGY Gallai-egyenest.
A megtalált egyenes vagy szomszédos a kiinduló ponttal vagy átmegy rajta.

Lemma

A fenti módon minden ponthoz találtunk legalább KÉT Gallai-egyenest.

Lemma

Egy Gallai-egyenest legfeljebb HAT pont talál meg a fenti módon.

Tétel

Ha $\mathcal{P}$ nem-triviális, akkor

$$t_2(\mathcal{P}) \geq \frac{1}{3}|\mathcal{P}|.$$

Tételek

Tétel

Ha $\mathcal{P}$ nem-triviális, akkor

$$t_2(\mathcal{P}) \geq \frac{1}{3}|\mathcal{P}|.$$

Tétel (Kelly—Moser, 1958)

Ha $\mathcal{P}$ nem-triviális, akkor

$$t_2(\mathcal{P}) \geq \frac{3}{7}|\mathcal{P}|.$$

Egy tétel és egy sejtés

Tétel (Csima—Sawyer, 1993)

Ha $\mathcal{P}$ nem-triviális és NEM $\mathcal{KM}$, akkor

$$t_2(\mathcal{P}) \geq \frac{6}{13}|\mathcal{P}|.$$

Egy tétel és egy sejtés

Tétel (Csima—Sawyer, 1993)

Ha $\mathcal{P}$ nem-triviális és NEM $\mathcal{KM}$, akkor

$$t_2(\mathcal{P}) \geq \frac{6}{13}|\mathcal{P}|.$$

Dirac-sejtés, 1951

Ha $\mathcal{P}$ nem-triviális és „elég nagy”, akkor

$$t_2(\mathcal{P}) \geq \frac{1}{2}|\mathcal{P}|.$$

Gabriel Andrew Dirac

Gabriel Andrew Dirac

1925 (Budapest)—1984

Az összes meghatározott egyenes száma

Tétel

Ha $\mathcal{P}$ triviális, akkor

$$T(\mathcal{P}) = 1.$$

Az összes meghatározott egyenes száma

Tétel

Ha $\mathcal{P}$ triviális, akkor

$$T(\mathcal{P}) = 1.$$

Ha $\mathcal{P}$ NEM triviális, akkor

$$T(\mathcal{P}) \geq |\mathcal{P}|.$$

Az összes meghatározott egyenes száma

Tétel

Ha $\mathcal{P}$ triviális, akkor
$$T(\mathcal{P}) = 1.$$
Ha $\mathcal{P}$ NEM triviális, akkor
$$T(\mathcal{P}) \geq |\mathcal{P}|.$$

Bizonyítás:

Indukció $|\mathcal{P}| = n$-re.

Az összes meghatározott egyenes száma

Tétel

Ha $\mathcal{P}$ triviális, akkor

$$T(\mathcal{P}) = 1.$$

Ha $\mathcal{P}$ NEM triviális, akkor

$$T(\mathcal{P}) \geq |\mathcal{P}|.$$

Bizonyítás:

Indukció $|\mathcal{P}| = n$-re.
$n = 1, 2, 3$ nyilvánvaló.

Az összes meghatározott egyenes száma

Tétel

Ha $\mathcal{P}$ triviális, akkor
$$T(\mathcal{P}) = 1.$$
Ha $\mathcal{P}$ NEM triviális, akkor
$$T(\mathcal{P}) \geq |\mathcal{P}|.$$

Bizonyítás:

Indukció $|\mathcal{P}| = n$-re.
$n = 1, 2, 3$ nyilvánvaló.
Ha $\mathcal{P}$ NEM triviális, akkor meghatároz egy PQ Gallai-egyenest.
$\mathcal{P} - \{P\}$-re alkalmazzuk az indukciós feltevést.

Legyen $\mathcal{E}$ egyenesek egy rendszere a (projektív) síkon. Tegyük fel, hogy $\mathcal{E}$ nem-triviális. Ekkor $\mathcal{E}$ meghatároz egy gráfot, amely le van rajzolva a síkra. (Csúcsok a metszéspontok, élek az egyenesek elemi szakaszai.)

Definíció

$v_4, v_6, v_8, \ldots$ a $4, 6, 8, \ldots$ fokú csúcsok száma.
$f_3, f_4, f_5, \ldots$ a $3, 4, 5, \ldots$ oldalú tartományok száma.

Melchior-egyenlőtlenség: Bevezetés

Legyen $\mathcal{E}$ egyenesek egy rendszere a (projektív) síkon. Tegyük fel, hogy $\mathcal{E}$ nem-triviális. Ekkor $\mathcal{E}$ meghatároz egy gráfot, amely le van rajzolva a síkra. (Csúcsok a metszéspontok, élek az egyenesek elemi szakaszai.)

Definíció

$v_4, v_6, v_8, \ldots$ a $4, 6, 8, \ldots$ fokú csúcsok száma.
$f_3, f_4, f_5, \ldots$ a $3, 4, 5, \ldots$ oldalú tartományok száma.

Észrevétel

$$|V| = v_4 + v_6 + v_8 + \ldots,$$

Melchior-egyenlőtlenség: Bevezetés

Legyen $\mathcal{E}$ egyenesek egy rendszere a (projektív) síkon. Tegyük fel, hogy $\mathcal{E}$ nem-triviális. Ekkor $\mathcal{E}$ meghatároz egy gráfot, amely le van rajzolva a síkra. (Csúcsok a metszéspontok, élek az egyenesek elemi szakaszai.)

Definíció

$v_4, v_6, v_8, \dots$ a $4, 6, 8, \dots$ fokú csúcsok száma.
$f_3, f_4, f_5, \dots$ a $3, 4, 5, \dots$ oldalú tartományok száma.

Észrevétel

$$|V| = v_4 + v_6 + v_8 + \dots,$$

$$2|E| = 4v_4 + 6v_6 + 8v_8 + \dots = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots,$$

Legyen $\mathcal{E}$ egyenesek egy rendszere a (projektív) síkon. Tegyük fel, hogy $\mathcal{E}$ nem-triviális. Ekkor $\mathcal{E}$ meghatároz egy gráfot, amely le van rajzolva a síkra. (Csúcsok a metszéspontok, élek az egyenesek elemi szakaszai.)

Definíció

$v_4, v_6, v_8, \ldots$ a $4, 6, 8, \ldots$ fokú csúcsok száma.
$f_3, f_4, f_5, \ldots$ a $3, 4, 5, \ldots$ oldalú tartományok száma.

Észrevétel

$$|V| = v_4 + v_6 + v_8 + \ldots,$$

$$2|E| = 4v_4 + 6v_6 + 8v_8 + \ldots = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \ldots,$$

$$f_3 + f_4 + f_5 + \ldots = |E| - |V| + 1.$$

Melchior-egyenlőtlenség

Tétel, Melchior-egyenlőtlenség

$$v_4 = 3 + v_8 + 2v_{10} + 3v_{12} + \ldots + f_4 + 2f_5 + 3f_6 + \ldots,$$

Tétel, Melchior-egyenlőtlenség

$$v_4 = 3 + v_8 + 2v_{10} + 3v_{12} + \ldots + f_4 + 2f_5 + 3f_6 + \ldots,$$

$$v_4 \geq 3 + v_8 + 2v_{10} + 3v_{12} + \ldots,$$

Melchior-egyenlőtlenség

Tétel, Melchior-egyenlőtlenség

$$v_4 = 3 + v_8 + 2v_{10} + 3v_{12} + \ldots + f_4 + 2f_5 + 3f_6 + \ldots,$$

$$v_4 \geq 3 + v_8 + 2v_{10} + 3v_{12} + \ldots,$$

$$t_2(\mathcal{P}) \geq 3 + t_4(\mathcal{P}) + 2t_5(\mathcal{P}) + 3t_6(\mathcal{P}) + \ldots$$

Következmények

Következmény

Ha $\mathcal{P}$ nem-triviális, akkor

(i) (Dirac-tétel)

$$t_2(\mathcal{P}) \geq 3.$$

Következmények

Következmény

Ha $\mathcal{P}$ nem-triviális, akkor

(i) (Dirac-tétel)

$$t_2(\mathcal{P}) \geq 3.$$

(ii) Gallai-egyenesek száma több az összes nem-Gallai-, nem-Sylvester-egyenes számánál.

Következmények

Következmény

Ha $\mathcal{P}$ nem-triviális, akkor

(i) (Dirac-tétel)
$$t_2(\mathcal{P}) \geq 3.$$

(ii) Gallai-egyenesek száma több az összes nem-Gallai-, nem-Sylvester-egyenes számánál.

(iii)
$$\max\{t_2(\mathcal{P}), t_3(\mathcal{P}), t_4(\mathcal{P}), t_5(\mathcal{P}), \ldots\} = \max\{t_2(\mathcal{P}), t_3(\mathcal{P})\}.$$

Itt a vége!

Itt a vége!

Köszönöm a figyelmet!