

# Fibonacci-számok és tényérok

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2017. április 8.

# A Fibonacci-sorozat

## Rekurzív definíció

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1,$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

## Rekurzív definíció

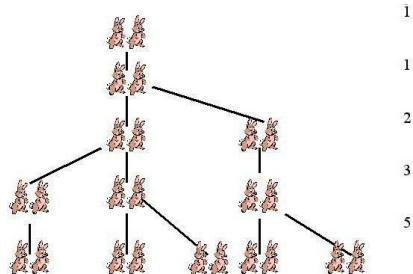
$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1,$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$n :$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$F_n :$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377



- Európa: Fibonacci, Liber Abaci (1202).



- India: Szanszkrit verselés tanulmányozása ( $\ll 1000$ ).

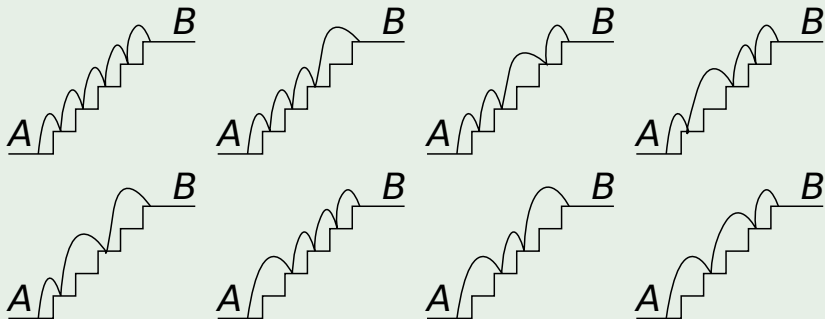
## Kérdés

$n$  lépcsőfok vezet fel  $A$ -ból  $B$ -be. Egy vagy két lépcsőfokot tudunk egyszerre fellépni. Hányféleképpen juthatunk fel  $A$ -ból  $B$ -be?

## Kérdés

$n$  lépcsőfok vezet fel  $A$ -ból  $B$ -be. Egy vagy két lépcsőfokot tudunk egyszerre fellépni. Hányféleképpen juthatunk fel  $A$ -ból  $B$ -be?

$n = 5$

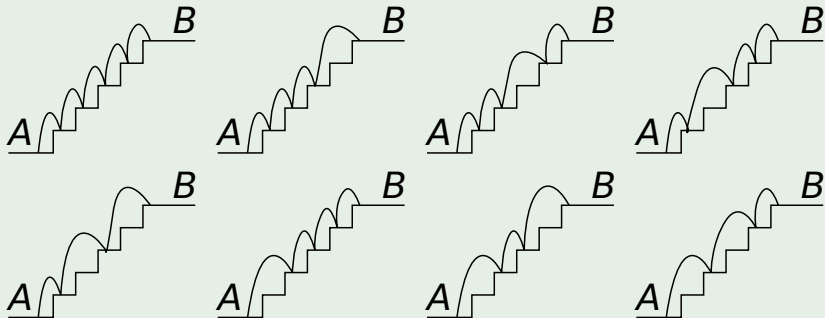




## Kérdés

$n$  lépcsőfok vezet fel  $A$ -ból  $B$ -be. Egy vagy két lépcsőfokot tudunk egyszerre fellépni. Hányféleképpen juthatunk fel  $A$ -ból  $B$ -be?

$n = 5$



A válasz  $F_{n+1}$ .

## Kérdés

Hányféleképpen írható fel  $n$  az 1 és 2 számok összegeként? A tagok sorrendje számít.

## Kérdés

Hányféleképpen írható fel  $n$  az 1 és 2 számok összegeként? A tagok sorrendje számít.

$n = 6$

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1,$     $1 + 1 + 1 + 1 + 2,$     $1 + 1 + 1 + 2 + 1,$   
 $1 + 1 + 2 + 1 + 1,$     $1 + 1 + 2 + 2,$     $1 + 2 + 1 + 1 + 1,$   
 $1 + 2 + 1 + 2,$     $1 + 2 + 2 + 1,$     $2 + 1 + 1 + 1 + 1,$     $2 + 1 + 1 + 2,$   
 $2 + 1 + 2 + 1,$     $2 + 2 + 1 + 1,$     $2 + 2 + 2.$

## Kérdés

Hányféleképpen írható fel  $n$  az 1 és 2 számok összegeként? A tagok sorrendje számít.

$n = 6$

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, \quad 1 + 1 + 1 + 1 + 2, \quad 1 + 1 + 1 + 2 + 1,$   
 $1 + 1 + 2 + 1 + 1, \quad 1 + 1 + 2 + 2, \quad 1 + 2 + 1 + 1 + 1,$   
 $1 + 2 + 1 + 2, \quad 1 + 2 + 2 + 1, \quad 2 + 1 + 1 + 1 + 1, \quad 2 + 1 + 1 + 2,$   
 $2 + 1 + 2 + 1, \quad 2 + 2 + 1 + 1, \quad 2 + 2 + 2.$

A kérdés izomorf az előzővel. A válasz  $F_{n+1}$ .

# Fibonacci-számok és a Pascal-háromszög

## Kérdés

Hányféleképpen írható fel  $n$  az 1 és 2 számok összegeként? A tagok sorrendje számít.

## Kérdés

Hányféleképpen írható fel  $n$  az 1 és 2 számok összegeként? A tagok sorrendje számít.

## Válasz

## Kérdés

Hányféleképpen írható fel  $n$  az 1 és 2 számok összegeként? A tagok sorrendje számít.

## Válasz

- Csoportosítsuk a lehetőségeket a 2 tagok száma ( $k$ ) szerint.



## Kérdés

Hányféleképpen írható fel  $n$  az 1 és 2 számok összegeként? A tagok sorrendje számít.

## Válasz

- Csoportosítsuk a lehetőségeket a 2 tagok száma ( $k$ ) szerint.
- Az összes tag száma  $(n - 2k) + k = n - k$ .

## Kérdés

Hányféleképpen írható fel  $n$  az 1 és 2 számok összegeként? A tagok sorrendje számít.

## Válasz

- Csoportosítsuk a lehetőségeket a 2 tagok száma ( $k$ ) szerint.
- Az összes tag száma  $(n - 2k) + k = n - k$ .
- Adott  $k$  esetén  $\binom{n-k}{k}$  lehetőség van.

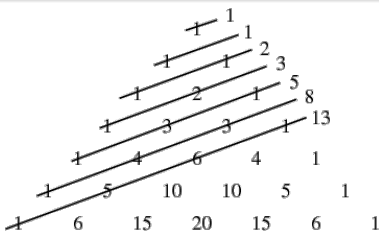
# Fibonacci-számok és a Pascal-háromszög

## Kérdés

Hányféleképpen írható fel  $n$  az 1 és 2 számok összegeként? A tagok sorrendje számít.

## Válasz

- Csoportosítsuk a lehetőségeket a 2 tagok száma ( $k$ ) szerint.
- Az összes tag száma  $(n - 2k) + k = n - k$ .
- Adott  $k$  esetén  $\binom{n-k}{k}$  lehetőség van.



## Kérdés

Hányféleképpen írható fel a pozitív  $n$  szám pozitív páratlan számok összegeként? A tagok sorrendje számít.

## Kérdés

Hányféleképpen írható fel a pozitív  $n$  szám pozitív páratlan számok összegeként? A tagok sorrendje számít.

$$n = 7$$

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ ,  $1 + 1 + 1 + 1 + 3$ ,  $1 + 1 + 1 + 3 + 1$ ,  
 $1 + 1 + 3 + 1 + 1$ ,  $1 + 3 + 1 + 1 + 1$ ,  $3 + 1 + 1 + 1 + 1$ ,  
 $1 + 3 + 3$ ,  $3 + 1 + 3$ ,  $3 + 3 + 1$ ,  
 $1 + 1 + 5$ ,  $1 + 5 + 1$ ,  $5 + 1 + 1$ ,  $7$ .

## Kérdés

Hányféleképpen írható fel a pozitív  $n$  szám pozitív páratlan számok összegeként? A tagok sorrendje számít.

$$n = 7$$

$$\begin{aligned} &1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, \quad 1 + 1 + 1 + 1 + 3, \quad 1 + 1 + 1 + 3 + 1, \\ &1 + 1 + 3 + 1 + 1, \quad 1 + 3 + 1 + 1 + 1, \quad 3 + 1 + 1 + 1 + 1, \\ &1 + 3 + 3, \quad 3 + 1 + 3, \quad 3 + 3 + 1, \\ &1 + 1 + 5, \quad 1 + 5 + 1, \quad 5 + 1 + 1, \quad 7. \end{aligned}$$

A kérdés **izomorf\*** az előzővel. A válasz  $F_n$ .

# Talán a matematika legismertebb sorozata

A Fibonacci-számokkal gyakran találkozhatunk a természetben.

A Fibonacci-számokkal gyakran találkozhatunk a természetben.

## Központi botanikai kérdéskör

A levélállás, levélhelyezkedés vagy ághelyzet (phyllotaxis) vizsgálata.



# Talán a matematika legismertebb sorozata

A Fibonacci-számokkal gyakran találkozhatunk a természetben.

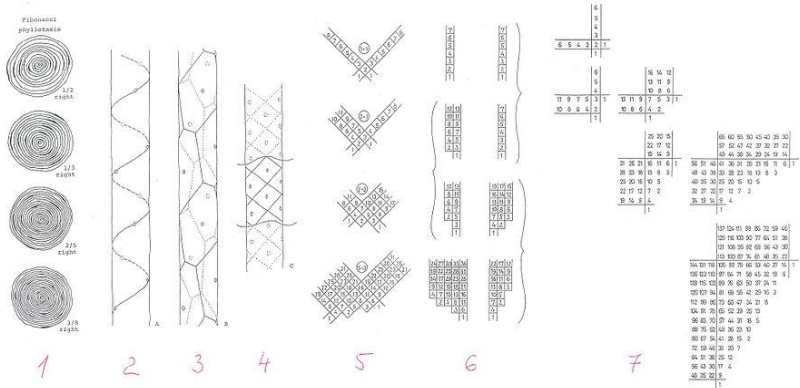
## Központi botanikai kérdéskör

A levélállás, levélhelyezkedés vagy ághelyzet (phyllotaxis) vizsgálata.



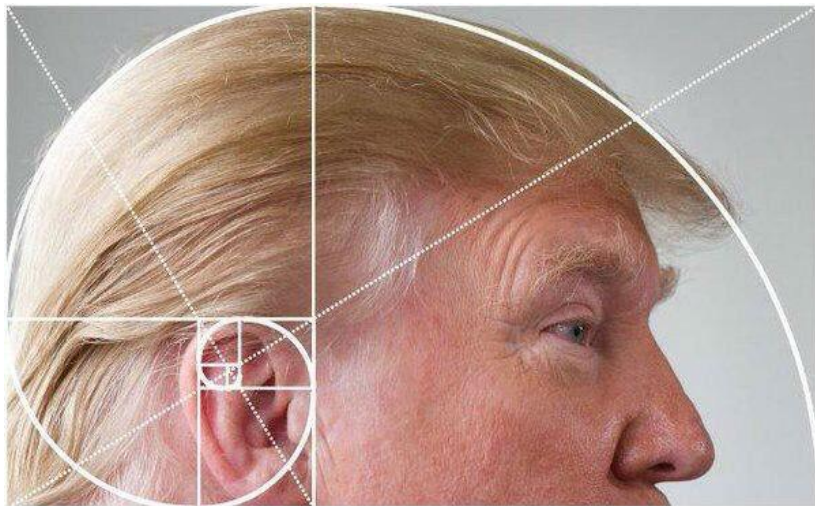
# Talán a matematika legismertebb sorozata: phyllotaxis

..., Alan Turing, ..., John Horton Conway, ...



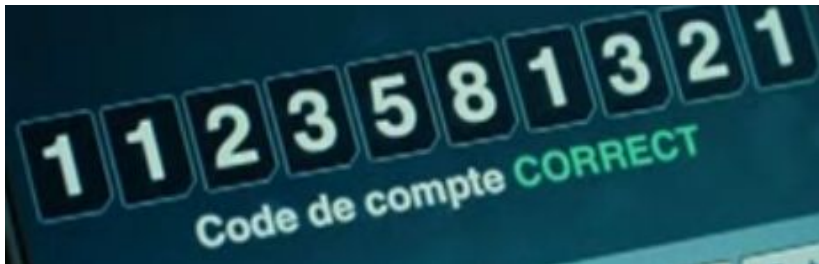
# Talán a matematika legismertebb sorozata: Nem minden arany ami fénylik

# Talán a matematika legismertebb sorozata: Nem minden arany ami fénylik



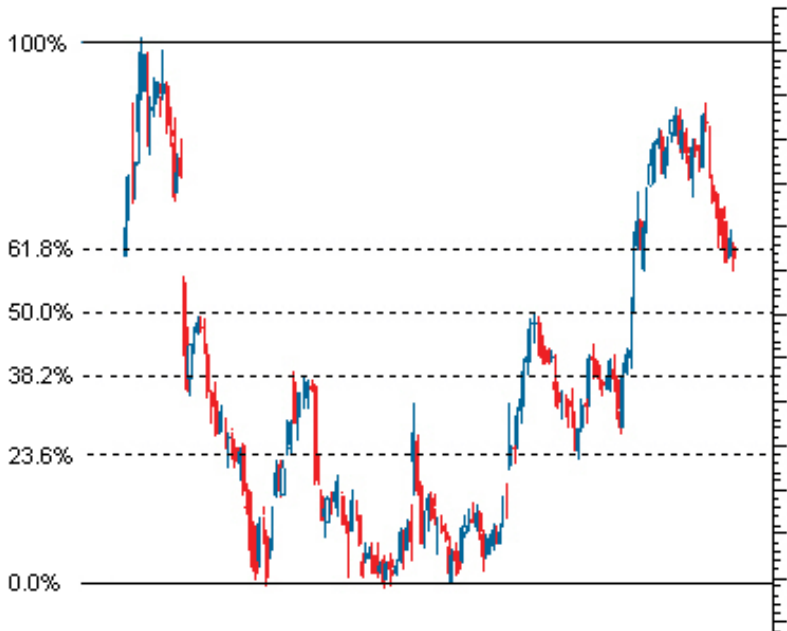
# Talán a matematika legismertebb sorozata: Hollywood

# Talán a matematika legismertebb sorozata: Hollywood



# Talán a matematika legismertebb sorozata: Wall Street

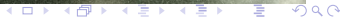
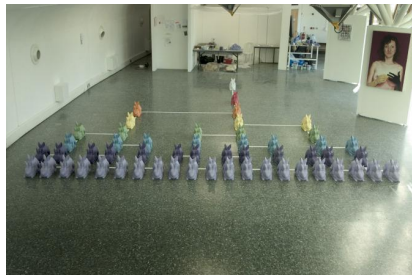
# Talán a matematika legismertebb sorozata: Wall Street





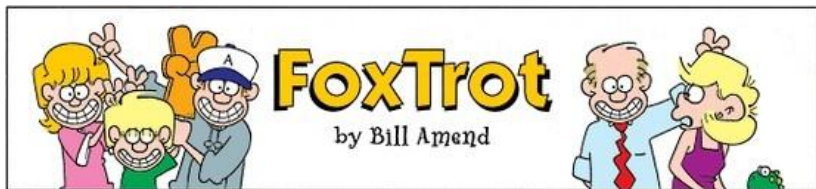
# Talán a matematika legismertebb sorozata: Művészet

# Talán a matematika legismertebb sorozata: Művészet



# Talán a matematika legismertebb sorozata: Comics

# Talán a matematika legismertebb sorozata: Comics



# Talán a matematika legismertebb sorozata: Comics



# Fibonacci-számok növekedése

## Észrevétel



$$F_0 < F_1 = F_2 < F_3 < F_4 < F_5 < F_6 < F_7 < F_8 < F_9 < \dots,$$



$$2F_{n-2} \leq F_n \leq 2F_{n-1}, \quad \text{ha } n \geq 2$$



$$2^{n/2} \leq F_n \leq 2^n, \quad \text{ha } n \geq 6.$$

# Kettő hatványok vs Fibonacci számok



Kettő hatványok



Fibonacci-számok



# Kettő hatványok vs Fibonacci számok

## Kettő hatványok



1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...

## Fibonacci-számok



1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

# Kettő hatványok vs Fibonacci számok

## Kettő hatványok



1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...



$$k_n = 2^n$$

## Fibonacci-számok



1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...



$$F_n$$

# Kettő hatványok vs Fibonacci számok

## Kettő hatványok



1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...



$$k_n = 2^n$$



$$k_{n+1} = 2k_n = k_n + k_n$$

## Fibonacci-számok



1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...



$$F_n$$



$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

# Kettő hatványok vs Fibonacci számok

## Kettő hatványok

- 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...

- $$k_n = 2^n$$

- $$k_{n+1} = 2k_n = k_n + k_n$$

- Ha  $k_n \leq N < k_{n+1}$ , akkor

$$N = k_n + M, \text{ ahol } M < k_n$$

## Fibonacci-számok

- 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

- $$F_n$$

- $$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

- Ha  $F_n \leq N < F_{n+1}$ , akkor

$$N = F_n + M, \text{ ahol } M < F_{n-1}$$

# Kettes számrendszer vs Fibonacci-számrendszer



Kettes számrendszer



Fibonacci-számrendszer

# Kettes számrendszer vs Fibonacci-számrendszer

## Kettes számrendszer

- Helyiértékek:

32   16   8   4   2   1

## Fibonacci-számrendszer

- Helyiértékek:

13   8   5   3   2   1

# Kettes számrendszer vs Fibonacci-számrendszer

## Kettes számrendszer

- Helyiértékek:

$\underbrace{32}$     $\underbrace{16}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{4}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$

- Példa: 19

$\underbrace{32}$     $\underbrace{16}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{4}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$

## Fibonacci-számrendszer

- Helyiértékek:

$\underbrace{13}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{5}$     $\underbrace{3}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$

- Példa: Egy híján húsz.

$\underbrace{13}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{5}$     $\underbrace{3}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$

# Kettes számrendszer vs Fibonacci-számrendszer

## Kettes számrendszer

- Helyiértékek:

$\underbrace{32}$     $\underbrace{16}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{4}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$

- Példa: 19

$\underbrace{32}$     $\underbrace{16}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{4}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$

0

## Fibonacci-számrendszer

- Helyiértékek:

$\underbrace{13}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{5}$     $\underbrace{3}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$

- Példa: Egy hóján húsz.

$\underbrace{13}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{5}$     $\underbrace{3}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$

1   0



# Kettes számrendszer vs Fibonacci-számrendszer

## Kettes számrendszer

- Helyiértékek:

$\underbrace{32}$     $\underbrace{16}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{4}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$

- Példa: 19

$\underbrace{32}$     $\underbrace{16}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{4}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$   
0   1

## Fibonacci-számrendszer

- Helyiértékek:

$\underbrace{13}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{5}$     $\underbrace{3}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$

- Példa: Egy hóján húsz.

$\underbrace{13}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{5}$     $\underbrace{3}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$   
1   0

# Kettes számrendszer vs Fibonacci-számrendszer

## Kettes számrendszer

- Helyiértékek:

$\underbrace{32}$     $\underbrace{16}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{4}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$

- Példa: 19

$\underbrace{32}$     $\underbrace{16}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{4}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$   
0   1   0

## Fibonacci-számrendszer

- Helyiértékek:

$\underbrace{13}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{5}$     $\underbrace{3}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$

- Példa: Egy hóján húsz.

$\underbrace{13}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{5}$     $\underbrace{3}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$   
1   0   1   0

# Kettes számrendszer vs Fibonacci-számrendszer

## Kettes számrendszer

- Helyiértékek:

$\underbrace{32}$     $\underbrace{16}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{4}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$

- Példa: 19

$\underbrace{32}$     $\underbrace{16}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{4}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$   
0   1   0   0

## Fibonacci-számrendszer

- Helyiértékek:

$\underbrace{13}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{5}$     $\underbrace{3}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$

- Példa: Egy hóján húsz.

$\underbrace{13}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{5}$     $\underbrace{3}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$   
1   0   1   0

# Kettes számrendszer vs Fibonacci-számrendszer

## Kettes számrendszer

- Helyiértékek:

$\underbrace{32}$     $\underbrace{16}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{4}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$

- Példa: 19

$\underbrace{32}$     $\underbrace{16}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{4}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$   
0   1   0   0   1

## Fibonacci-számrendszer

- Helyiértékek:

$\underbrace{13}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{5}$     $\underbrace{3}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$

- Példa: Egy hóján húsz.

$\underbrace{13}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{5}$     $\underbrace{3}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$   
1   0   1   0   0

# Kettes számrendszer vs Fibonacci-számrendszer

## Kettes számrendszer

- Helyiértékek:

$\underbrace{32}$     $\underbrace{16}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{4}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$

- Példa: 19

$\underbrace{32}$     $\underbrace{16}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{4}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$   
0   1   0   0   1   **1**

## Fibonacci-számrendszer

- Helyiértékek:

$\underbrace{13}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{5}$     $\underbrace{3}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$

- Példa: Egy hóján húsz.

$\underbrace{13}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{5}$     $\underbrace{3}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$   
1   0   1   0   0   **1**

# Kettes számrendszer vs Fibonacci-számrendszer

## Kettes számrendszer

- Helyiértékek:

$\underbrace{32}$     $\underbrace{16}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{4}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$

- Példa: 19

$\underbrace{32}$     $\underbrace{16}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{4}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$   
0   1   0   0   1   1

- 

$$2017 = 11111100001_2$$

## Fibonacci-számrendszer

- Helyiértékek:

$\underbrace{13}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{5}$     $\underbrace{3}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$

- Példa: Egy hóján húsz.

$\underbrace{13}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{5}$     $\underbrace{3}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$   
1   0   1   0   0   1

- 

$$2017 = 1001000010010001_F$$

# Kettes számrendszer vs Fibonacci-számrendszer

## Kettes számrendszer

- Helyiértékek:

$\underbrace{32}$     $\underbrace{16}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{4}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$

- Példa: 19

$\underbrace{32}$     $\underbrace{16}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{4}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$   
0   1   0   0   1   1

- 

$$2017 = 11111100001_2$$

- 1-gyel kezdődik, különben TETSZŐLEGES.

## Fibonacci-számrendszer

- Helyiértékek:

$\underbrace{13}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{5}$     $\underbrace{3}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$

- Példa: Egy híján húsz.

$\underbrace{13}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{5}$     $\underbrace{3}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$   
1   0   1   0   0   1

- 

$$2017 = 1001000010010001_F$$

- 1-gyel kezdődik, NINCS két 1-es egymás mellett.

# Kettes számrendszer vs Fibonacci-számrendszer

## Kettes számrendszer

- Helyiértékek:

$\underbrace{32}$     $\underbrace{16}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{4}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$

- Példa: 19

$\underbrace{32}$     $\underbrace{16}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{4}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$   
0   1   0   0   1   1

- 

$$2017 = 11111100001_2$$

- 1-gyel kezdődik, különben TETSZŐLEGES.
- Egyértelmű felírhatóság!

## Fibonacci-számrendszer

- Helyiértékek:

$\underbrace{13}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{5}$     $\underbrace{3}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$

- Példa: Egy híján húsz.

$\underbrace{13}$     $\underbrace{8}$     $\underbrace{5}$     $\underbrace{3}$     $\underbrace{2}$     $\underbrace{1}$   
1   0   1   0   0   1

- 

$$2017 = 1001000010010001_F$$

- 1-gyel kezdődik, NINCS két 1-es egymás mellett.
- Egyértelmű felírhatóság!



## Alapfeladat

Adjunk össze két (vagy több) bináris számrendszerben megadott számot.

## Alapfeladat

Adjunk össze két (vagy több) bináris számrendszerben megadott számot.

- Naív összeadás  $\rightarrow$  szabálytalan számok, „pénz számtan”

## Alapfeladat

Adjunk össze két (vagy több) bináris számrendszerben megadott számot.

- Naív összeadás  $\rightarrow$  szabálytalan számok, „pénz számtan”
- $k_n + k_n = k_{n+1}$ .

## Alapfeladat

Adjunk össze két (vagy több) bináris számrendszerben megadott számot.

- Naív összeadás  $\rightarrow$  szabálytalan számok, „pénz számtan”
- $k_n + k_n = k_{n+1}$ .
- Jobbról balra rendszerezett számolás.

## Alapfeladat

Adjunk össze két (vagy több) Fibonacci-számrendszerben megadott számot.

## Alapfeladat

Adjunk össze két (vagy több) Fibonacci-számrendszerben megadott számot.

- Naív összeadás  $\rightarrow$  szabálytalan számok, „pénz számtan”

## Alapfeladat

Adjunk össze két (vagy több) Fibonacci-számrendszerben megadott számot.

- Naív összeadás  $\rightarrow$  szabálytalan számok, „pénz számtan”
- $F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$ .

## Alapfeladat

Adjunk össze két (vagy több) Fibonacci-számrendszerben megadott számot.

- Naív összeadás  $\rightarrow$  szabálytalan számok, „pénz számtan”
- $F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$ .
- $F_n + F_n = F_{n+1} + F_{n-2}$ , HA  $n > 3$ .



## Alapfeladat

Adjunk össze két (vagy több) Fibonacci-számrendszerben megadott számot.

- Naív összeadás  $\rightarrow$  szabálytalan számok, „pénz számtan”
- $F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$ .
- $F_n + F_n = F_{n+1} + F_{n-2}$ , HA  $n > 3$ .
- ?????? Rendszerezett számolás ??????

# Egy egyszerű összeadás

$$\begin{array}{r} \phantom{+} \phantom{1} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{1} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{1} \phantom{0} \phantom{1} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{1} \phantom{0} \phantom{1} \phantom{0} \phantom{1}_F \\ + 1 \phantom{0} \phantom{0} \phantom{1} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{1} \phantom{0} \phantom{1} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{1} \phantom{0} \phantom{1} \phantom{0} \phantom{1}_F \\ \hline \end{array}$$

# Egy egyszerű összeadás

$$\begin{array}{r} \phantom{+} \phantom{1} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{1} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{1} \phantom{0} \phantom{1} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{1} \phantom{0} \phantom{1} \phantom{0} \phantom{1}_F \\ + \phantom{1} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{1} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{1} \phantom{0} \phantom{1} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{1} \phantom{0} \phantom{1} \phantom{0} \phantom{1}_F \\ \hline 1 \phantom{0} \phantom{0} \phantom{1} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{1} \phantom{0} \phantom{1} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{1} \phantom{0} \phantom{1} \phantom{0} \phantom{1}_F \end{array}$$

# Tányérok: Az eredet

1964, 1966, 1968, 1984,

# Tányérok: Az eredet

1964, 1966, 1968, 1984,

Ki miben tudós?

# Tányérok: Az eredet

1964, 1966, 1968, 1984,

Ki miben tudós?



A döntő utolsó feladata

## A döntő utolsó feladata

Egy asztalon egy sorban 6 tányér van. Ubul mindkét kezével megragad egy-egy tetszőleges tányért a hat közül, és mindkettőt egy hellyel jobbra vagy balra odébb helyezi (ha már van ott tányér, akkor annak a tetejére). Ezt ismételve el tudja-e érni, hogy az összes tányér egy oszlopba kerüljön ?





A feladat: asztal, tányérok, pakolás.

A feladat: asztal, tányérok, pakolás.

A megoldás: terítő.

A feladat: asztal, tányérok, pakolás.

A megoldás: terítő.



A feladat: asztal, tányérok, pakolás.

A megoldás: terítő.



Paritásos megmondolás.

Egy új feladat

## Egy új feladat

Egy asztalon egy sorban valahány, valahogy elosztott tányér van. Úbül mindkét kezével megragad egy-egy tetszőleges tányért amelyek egymás tetején vannak. Az egyiket egy hellyel balra, a másikat két hellyel jobbra odébb helyezi (ha már van ott tányér, akkor annak a tetejére). Ezt ismételve el tudja-e érni, hogy az összes tányér különböző helyre kerüljön ?

# A megoldás







A megoldás menete:

- A kiinduló tányér-konfiguráció tartójának definíciója.



A megoldás menete:

- A kiinduló tányér-konfiguráció tartójának definíciója.
- A tartón kívüli rész hármásokra bontása.



A megoldás menete:

- A kiinduló tányér-konfiguráció tartójának definíciója.
- A tartón kívüli rész hármásokra bontása.
- HA egy hármasba tányér kerül, akkor ott MARAD is tányér.



A megoldás menete:

- A kiinduló tányér-konfiguráció tartójának definíciója.
- A tartón kívüli rész hármásokra bontása.
- HA egy hármasba tányér kerül, akkor ott MARAD is tányér.
- A tányér-konfiguráció szélessége nem nőhet korlátlanul.



A megoldás menete:

- A kiinduló tányér-konfiguráció tartójának definíciója.
- A tartón kívüli rész hármásokra bontása.
- HA egy hármasba tányér kerül, akkor ott MARAD is tányér.
- A tányér-konfiguráció szélessége nem nőhet korlátlanul.
- A súlypont monoton módon mozog.

# Stolarsky-táblázat

1	2	3	5	8	13	21	34	55	...
4	6	10	16	26	42	68	110	178	...
7	11	18	29	47	76	123	199	322	...
9	15	24	39	63	102	165	267	432	...
12	19	31	50	81	131	212	343	555	...
14	23	37	60	97	157	254	411	665	...
17	28	45	73	118	191	309	500	809	...
20	32	52	84	136	220	356	576	932	...
22	36	58	94	152	246	398	644	1042	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	↘

# Stolarsky-táblázat

1	2	3	5	8	13	21	34	55	...
4	6	10	16	26	42	68	110	178	...
7	11	18	29	47	76	123	199	322	...
9	15	24	39	63	102	165	267	432	...
12	19	31	50	81	131	212	343	555	...
14	23	37	60	97	157	254	411	665	...
17	28	45	73	118	191	309	500	809	...
20	32	52	84	136	220	356	576	932	...
22	36	58	94	152	246	398	644	1042	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	↘

## Tétel

Minden Fibonacci-sémának eleget tevő sorozat „benne van” a Stolarsky-táblázatban.

## Definíció

Egy sorozat Fibonacci-sémájú, ha a harmadiktól kezdve mindegyik tagja az előző kettő tagjának összege.

## Példák



## Definíció

Egy sorozat Fibonacci-sémájú, ha a harmadiktól kezdve mindegyik tagja az előző kettő tagjának összege.

## Példák

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$

## Definíció

Egy sorozat Fibonacci-sémájú, ha a harmadiktól kezdve mindegyik tagja az előző kettő tagjának összege.

## Példák

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$

$1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$

## Definíció

Egy sorozat Fibonacci-sémájú, ha a harmadiktól kezdve mindegyik tagja az előző kettő tagjának összege.

## Példák

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$

$1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$

$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \dots$

## Definíció

Egy sorozat Fibonacci-sémájú, ha a harmadiktól kezdve mindegyik tagja az előző kettő tagjának összege.

## Példák

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$

$1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$

$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \dots$

$1, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \varphi^5, \varphi^6, \varphi^7, \varphi^8, \dots$

## Definíció

Egy sorozat Fibonacci-sémájú, ha a harmadiktól kezdve mindegyik tagja az előző kettő tagjának összege.

## Példák

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

$$1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \dots$$

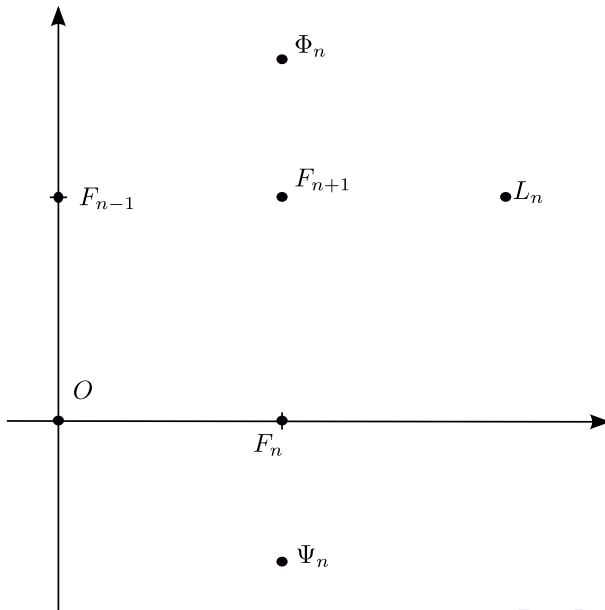
$$1, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \varphi^5, \varphi^6, \varphi^7, \varphi^8, \dots$$

$$1, -\varphi^{-1}, \varphi^{-2}, -\varphi^3, \varphi^4, -\varphi^{-5}, \varphi^{-6}, -\varphi^{-7}, \varphi^{-8}, \dots$$

# Fibonacci-sémájú sorozatok: Elég az első két tag ismerete

Sorozat/ $\sigma_n$	Első tag/ $\sigma_0$	Második tag/ $\sigma_1$
$O_n$	0	0
$F_n$	0	1
$F_{n-1}$	1	0
$F_{n+1}$	1	1
$L_n$	2	1
$\Phi_n :$	1	$\varphi$
$\Psi_n :$	1	$-1/\varphi$

# Szám párok? Koordináta geometria!



$$(a, b) = a \cdot \mathbf{i} + b \cdot \mathbf{j}$$

$$\Phi_n = 1 \cdot F_{n-1} + \varphi \cdot F_n.$$

$$\Psi_n = 1 \cdot F_{n-1} - \frac{1}{\varphi} \cdot F_n.$$



Tétel (Euler, Daniel Bernoulli, de Moivre, Binet)

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right) = \left[ \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Köszönöm a figyelmet!