Diszkrét matematika I.
2017 őszi félév, hétfőnként 18-20

Dr. Czédli Gábor (professzor, SZTE Algebra Tsz.)

2017. december 5.

Tudnivalók a tantárgyról

http://www.math.u-szeged.hu/~czedli/ :
előadások anyaga (a jelen fájl) és vázlata, vizsgafeladatsor-minták (korábbi évekről), egyéb.

Tétel (Hogyan lehet átmenni a vizsgán?)

4 kredit = 120 munkaóra (közepes képességekkel közepes érdemjegyhez)! Az órák látogatása ehhez kevés. Az új fogalmakat, módszereket meg kell érteni, használatukat be kell gyakorolni, erre az órák látogatásán túl, rendszeresen időt kell fordítani; a vizsgaidőszakban már késő hozzáfogni. A vizsgán ***nagyrészt feladatok lesznek.***

A vizsga írásbeli, és maximum 60 pontot lehet szerezni. A vizsgajegy így függ a pontszámtól: elégtelen $<$ **30 pont** $\leq$ elégséges $<$ 38 pont $\leq$ közepes $<$ 46 pont $\leq$ jó $<$ 54 pont $\leq$ jeles.

http://www.math.u-szeged.hu/~czedli/ :
előadások anyaga (a jelen fájl) és vázlata, vizsgafeladatsor-minták (korábbi évekről), egyéb.

Tétel (Hogyan lehet átmenni a vizsgán?)

4 kredit = 120 munkaóra (közepes képességekkel közepes érdemjegyhez)! Az órák látogatása ehhez kevés. Az új fogalmakat, módszereket meg kell érteni, használatukat be kell gyakorolni, erre az órák látogatásán túl, rendszeresen időt kell fordítani; a vizsgaidőszakban már késő hozzáfogni. A vizsgán ***nagyrészt feladatok lesznek.***

A vizsga írásbeli, és maximum 60 pontot lehet szerezni. A vizsgajegy így függ a pontszámtól: elégtelen $<$ **30 pont** $\leq$ elégséges $<$ 38 pont $\leq$ közepes $<$ 46 pont $\leq$ jó $<$ 54 pont $\leq$ jeles.

http://www.math.u-szeged.hu/~czedli/ :
előadások anyaga (a jelen fájl) és vázlata, vizsgafeladatsor-minták (korábbi évekről), egyéb.

Tétel (Hogyan lehet átmenni a vizsgán?)

4 kredit = 120 munkaóra (közepes képességekkel közepes érdemjegyhez)! Az órák látogatása ehhez kevés. Az új fogalmakat, módszereket meg kell érteni, használatukat be kell gyakorolni, erre az órák látogatásán túl, rendszeresen időt kell fordítani; a vizsgaidőszakban már késő hozzáfogni. A vizsgán ***nagyrészt feladatok lesznek.***

A vizsga írásbeli, és maximum 60 pontot lehet szerezni. A vizsgajegy így függ a pontszámtól: elégtelen $<$ **30 pont** $\leq$ elégséges $<$ 38 pont $\leq$ közepes $<$ 46 pont $\leq$ jó $<$ 54 pont $\leq$ jeles.

Tudnivalók a tantárgyról/2

A **gyakorlaton**: félévközi hiányzás esetén a szorgalmi időszakon **BELÜL** pótlásnak helye **nincs**. (Igazolt betegség vagy más méltányos indok esetén sem!)
A **gyakorlati utóvizsga** írásban, a vizsgaidőszak első hetében, minden csoport számára egyazon időpontban lesz; ezzel egyidejűleg **méltányos indok** esetén a gyakorlatvezető engedélyezheti egy elmaradt zárthelyi dolgozat utólagos pótlását.
A gyakorlati utóvizsga nem számít vizsgának, a NEPTUN-ban nem kell sőt **nem is lehetséges** jelentkezni rá!

Tudnivalók a tantárgyról/2

A **gyakorlaton**: félévközi hiányzás esetén a szorgalmi időszakon **BELÜL** pótlásnak helye **nincs**. (Igazolt betegség vagy más méltányos indok esetén sem!)

A **gyakorlati utóvizsga** írásban, a vizsgaidőszak első hetében, minden csoport számára egyazon időpontban lesz; ezzel egyidejűleg **méltányos indok** esetén a gyakorlatvezető engedélyezheti egy elmaradt zárthelyi dolgozat utólagos pótlását.

A gyakorlati utóvizsga nem számít vizsgának, a NEPTUN-ban nem kell sőt **nem is lehetséges** jelentkezni rá!

Tudnivalók a tantárgyról/3

Három napon belül ismételt vizsga **nem** tehető. A vizsga kezdete előtt több mint 24 órával a vizsgára való jelenkezés szabadon törölhető, de vigyázat: a NEPTUN gyakran túlterhelt, a törlés nem megy egy perc alatt.

Mindenkire érvényes, hogy sikeres vizsga után is (ha még van vizsgalehetősége) tehet újabb vizsgát. A szokásos "javítóvizsga" elnevezés megtévesztő, hiszen ezen **rontani sőt megbukni** is lehet. (Nem árt tudni, hogy mindig a legutóbbi vizsga az érvényes, akkor is, ha az elégtelen!)

Tudnivalók a tantárgyról/3

Három napon belül ismételt vizsga **nem** tehető. A vizsga kezdete előtt több mint 24 órával a vizsgára való jelenkezés szabadon törölhető, de vigyázat: a NEPTUN gyakran túlterhelt, a törlés nem megy egy perc alatt.

Mindenkire érvényes, hogy sikeres vizsga után is (ha még van vizsgalehetősége) tehet újabb vizsgát. A szokásos "javítóvizsga" elnevezés megtévesztő, hiszen ezen **rontani sőt megbukni** is lehet. (Nem árt tudni, hogy mindig a legutóbbi vizsga az érvényes, akkor is, ha az elégtelen!)

Javasolt irodalom

Az előadáson kivetített (elég részletes és a honlapomon elérhető) fóliák általában **önmagukban** is elegendőek a vizsgára felkészüléshez. (Az előadáson természetesen nemcsak ezeket vetítem ki, hanem gyakran kézzel is írok a táblára.) Az előadás főként az **alábbi könyveken** alapul; azokat mint kiegészítő, további részleteket tartalmazó olvasmányokat javasolom.

- Szendrei Ágnes: Diszkrét matematika, Polygon, 1994, 1996, 1998, 2000, 2002.
- Szabó László: Bevezetés a lineáris algebrába, Polygon, 2003.
- Kalmárné Németh Márta, Katonáné Horváth Eszter, Kámán Tamás: Diszkrét matematikai feladatok, Polygon, Szeged, 2003.
- D.K. Fagyejev, I.S. Szominszkij: Felsőbb algebrai feladatok, Műszaki Könyvkiadó, 1973, Typotex, 2000.

Javasolt irodalom

Az előadáson kivetített (elég részletes és a honlapomon elérhető) fóliák általában **önmagukban** is elegendőek a vizsgára felkészüléshez. (Az előadáson természetesen nemcsak ezeket vetítem ki, hanem gyakran kézzel is írok a táblára.) Az előadás főként az **alábbi könyveken** alapul; azokat mint kiegészítő, további részleteket tartalmazó olvasmányokat javasolom.

- Szendrei Ágnes: Diszkrét matematika, Polygon, 1994, 1996, 1998, 2000, 2002.
- Szabó László: Bevezetés a lineáris algebrába, Polygon, 2003.
- Kalmárné Németh Márta, Katonáné Horváth Eszter, Kámán Tamás: Diszkrét matematikai feladatok, Polygon, Szeged, 2003.
- D.K. Fagyejev, I.S. Szominszkij: Felsőbb algebrai feladatok, Műszaki Könyvkiadó, 1973, Typotex, 2000.

Megjegyzés: Számos további könyv és egyetemi jegyzet foglalkozik —több-kevesebb átfedéssel— a jelen tantárgy anyagával. Én a fenti négy könyvet javasolom; a NEPTUN-ban esetenként megjelenő további javaslatok nem tőlem származnak; bizonyára azok is hasznosak de azokat nem ismerem.

Technikai megjegyzés: A jelen fóliákban nyilván számos sajtóhiba van; időnként néhányat kijavítok. (Az alkalmazott szövegszerkesztő nem ismeri az elválasztási szabályokat; az ilyen jellegű hibák tartósan jelen lesznek ...)

A félév során az első témánk a **matematikai logika**.

Megjegyzés: Számos további könyv és egyetemi jegyzet foglalkozik —több-kevesebb átfedéssel— a jelen tantárgy anyagával. Én a fenti négy könyvet javasolom; a NEPTUN-ban esetenként megjelenő további javaslatok nem tőlem származnak; bizonyára azok is hasznosak de azokat nem ismerem.

Technikai megjegyzés: A jelen fóliákban nyilván számos sajtóhiba van; időnként néhányat kijavítok. (Az alkalmazott szövegszerkesztő nem ismeri az elválasztási szabályokat; az ilyen jellegű hibák tartósan jelen lesznek ...)

A félév során az első témánk a **matematikai logika**.

Miről szól a matematikai logika?

A matematikai logika (más néven szimbolikus logika) a gondolkodás **formális szabályaival** foglalkozik. A „formális” azt jelenti, hogy nem az állítások tényleges jelentése, hanem a szerkezete, igazságértéke, és gondolatmenetünk helyessége érdekel minket. Más szóval, ha az agyunk „inputként” elfogad bizonyos igaz állításokat, akkor milyen „szükségképpen igaz” állításokat adhat „outputként”.

A matematikai logika ily módon a matematikai megalapozását szolgálja. Emellett általában a gondolkodás megalapozását is — pl. egy-egy rejtvény megfejtése, a gyanusítottak független vallomásai közül a hamis vallomás kiszűrése nehezen elképzelhető matematikai logika nélkül.

(A LILA SZÍNNEL írt részeket nem kell megtanulni; ezek a megértést könnyítik vagy a témakör motiválják.)

Miről szól a matematikai logika?

A matematikai logika (más néven szimbolikus logika) a gondolkodás **formális szabályaival** foglalkozik. A „formális" azt jelenti, hogy nem az állítások tényleges jelentése, hanem a szerkezete, igazságértéke, és gondolatmenetünk helyessége érdekel minket. Más szóval, ha az agyunk „inputként" elfogad bizonyos igaz állításokat, akkor milyen „szükségképpen igaz" állításokat adhat „outputként".

A matematikai logika ily módon a matematikai megalapozását szolgálja. Emellett általában a gondolkodás megalapozását is — pl. egy-egy rejtvény megfejtése, a gyanusítottak független vallomásai közül a hamis vallomás kiszűrése nehezen elképzelhető matematikai logika nélkül.

(A LILA SZÍNNEL írt részeket nem kell megtanulni; ezek a megértést könnyítik vagy a témakör motiválják.)

A matematikai logika (más néven szimbolikus logika) a gondolkodás **formális szabályaival** foglalkozik. A „formális" azt jelenti, hogy nem az állítások tényleges jelentése, hanem a szerkezete, igazságértéke, és gondolatmenetünk helyessége érdekel minket. Más szóval, ha az agyunk „inputként" elfogad bizonyos igaz állításokat, akkor milyen „szükségképpen igaz" állításokat adhat „outputként".

A matematikai logika ily módon a matematikai megalapozását szolgálja. Emellett általában a gondolkodás megalapozását is — pl. egy-egy rejtvény megfejtése, a gyanusítottak független vallomásai közül a hamis vallomás kiszűrése nehezen elképzelhető matematikai logika nélkül.

(A LILA SZÍNNEL írt részeket nem kell megtanulni; ezek a megértést könnyítik vagy a témakör motiválják.)

Mire jó a matematikai logika?

A matematikai logika formalizmusa és tételei éppoly mértékben megkönnyítik és többre teszik képessé a gondolkodásunkat, mint amennyire mondjuk a középiskolai algebrai ismeretek segítenek annak a feladatnak a megoldásában, hogy hogyan kell egységnyi szélességű (tetszőlegesen hosszú) bádoglemezből maximális űrtartalmú ⊔ alakú vályút készíteni.

Mi csak a kétértékű matematikai logikával foglalkozunk (és abban is csak az első lépéseket tesszük meg), de a többértékű logikáknak is van létjogosultsága. Pl. a jogász számára a lehetséges logikai értékek: tilos, megengedett, kötelező; a matematikusnak: igaz, hamis, eldönthetetlen, „nem ismert”.

Mire jó a matematikai logika?

A matematikai logika formalizmusa és tételei éppoly mértékben megkönnyítik és többre teszik képessé a gondolkodásunkat, mint amennyire mondjuk a középiskolai algebrai ismeretek segítenek annak a feladatnak a megoldásában, hogy hogyan kell egységnyi szélességű (tetszőlegesen hosszú) bádoglemezből maximális űrtartalmú $\sqcup$ alakú vályút készíteni.

Mi csak a kétértékű matematikai logikával foglalkozunk (és abban is csak az első lépéseket tesszük meg), de a többértékű logikáknak is van létjogosultsága. Pl. a jogász számára a lehetséges logikai értékek: tilos, megengedett, kötelező; a matematikusnak: igaz, hamis, eldönthetetlen, „nem ismert”.

A logikai műveleteket a legtöbb programozási nyelv tartalmazza - ezek használata nélkül aligha lehet ügyesen programot írni.

A matematikai logika nélkül pl. aligha lehetne logikai áramköröket, chip-eket tervezni. A matematika logika legegyszerűbb fejezete az **ítéletkalkulus**. (Később majd úgy fogunk rá emlékezni, hogy a mat. logikának az a része, amelyben nincsen kvantor, azaz nincsen $\exists$, $\forall$.)

Az **ítélet** olyan állítás (kijelentő mondat), amelynek igazságértéke van.

A programozás és a logika kapcsolata

A logikai műveleteket a legtöbb programozási nyelv tartalmazza - ezek használata nélkül aligha lehet ügyesen programot írni.

A matematikai logika nélkül pl. aligha lehetne logikai áramköröket, chip-eket tervezni. A matematika logika legegyszerűbb fejezete az **ítéletkalkulus**. (Később majd úgy fogunk rá emlékezni, hogy a mat. logikának az a része, amelyben nincsen kvantor, azaz nincsen $\exists$, $\forall$.)

Az **ítélet** olyan állítás (kijelentő mondat), amelynek igazságértéke van.

Ítéletkalkulus: mi az ítélet?

Tehát az ítélet olyan állítás, amelynek igazságértéke van. Számunkra az ítélet az atom, a tovább nem bontható építőkő (éppúgy mint a kémiában a kémiai atom vagy a geometriában a pont). (És éppúgy nem definiáljuk pontosan, ahogy a pontot sem a geometriában.) Példák ítéletekre:
„$2 \cdot 2 = 5$",
„Végtelen sok olyan p prímszám van, amelyre $p + 2$ is prímszám"
„$2 \cdot 2 = 4$".

A fentiek közül az első ítélet **hamis**, a második ítélet **logikai értékét** (azaz, hogy igaz-e vagy hamis) nem tudjuk, a harmadik ítélet **igaz**. Az igaz és hamis logikai értékeket a továbbiakban **i** és **h** jelöli. (Megjegyzés: sok más helyen és pl. sok programozási nyelvben 1, illetve 0 jelöli az igaz, illetve hamis logikai értékeket.)

Ítéletkalkulus: mi az ítélet?

Tehát az ítélet olyan állítás, amelynek igazságértéke van. Számunkra az ítélet az atom, a tovább nem bontható építőkő (éppúgy mint a kémiában a kémiai atom vagy a geometriában a pont). (És éppúgy nem definiáljuk pontosan, ahogy a pontot sem a geometriában.) Példák ítéletekre:
„$2 \cdot 2 = 5$",
„Végtelen sok olyan p prímszám van, amelyre $p + 2$ is prímszám"
„$2 \cdot 2 = 4$".

A fentiek közül az első ítélet **hamis**, a második ítélet **logikai értékét** (azaz, hogy igaz-e vagy hamis) nem tudjuk, a harmadik ítélet **igaz**. Az igaz és hamis logikai értékeket a továbbiakban **i** és **h** jelöli. (Megjegyzés: sok más helyen és pl. sok programozási nyelvben 1, illetve 0 jelöli az igaz, illetve hamis logikai értékeket.)

Ítéletkalkulus: mi az ítélet?

Tehát az ítélet olyan állítás, amelynek igazságértéke van. Számunkra az ítélet az atom, a tovább nem bontható építőkő (éppúgy mint a kémiában a kémiai atom vagy a geometriában a pont). (És éppúgy nem definiáljuk pontosan, ahogy a pontot sem a geometriában.) Példák ítéletekre:
„$2 \cdot 2 = 5$”,
„Végtelen sok olyan p prímszám van, amelyre $p + 2$ is prímszám”
„$2 \cdot 2 = 4$”.

A fentiek közül az első ítélet **hamis**, a második ítélet **logikai értékét** (azaz, hogy igaz-e vagy hamis) nem tudjuk, a harmadik ítélet **igaz**. Az igaz és hamis logikai értékeket a továbbiakban **i** és **h** jelöli. (Megjegyzés: sok más helyen és pl. sok programozási nyelvben 1, illetve 0 jelöli az igaz, illetve hamis logikai értékeket.)

Nem minden (rövid) mondat itélet!

Nem ítéletek az alábbiak:

„Sicc!" — hiszen ez nem állítás, hanem felszólítás; nincs logikai értéke.

„Mire jó a diszkrét matematika?" — hiszen ez egy kérdés és nem állítás, nincs logikai értéke.

„Vajon $2 + 2 = 4$?" — ennek ugyan van logikai értéke, de ez nem állítás, hanem kérdés.

„Ez a mondat hamis."

A látszat ellenére ennek az állításnak nincs logikai értéke. Ez a mondat önmagában ellentmondás. Hiszen ha **i** lenne, akkor — a mondatnak hitelt adva — **h**. Ha pedig **h**, akkor a mondat tagadásának hitelt adva **i**.

Nem minden (rövid) mondat itélet!

Nem ítéletek az alábbiak:
„Sicc!" — hiszen ez nem állítás, hanem felszólítás; nincs logikai értéke.
„Mire jó a diszkrét matematika?" — hiszen ez egy kérdés és nem állítás, nincs logikai értéke.
„Vajon $2+2=4$?" — ennek ugyan van logikai értéke, de ez nem állítás, hanem kérdés.

„Ez a mondat hamis."
A látszat ellenére ennek az állításnak nincs logikai értéke. Ez a mondat önmagában ellentmondás. Hiszen ha **i** lenne, akkor — a mondatnak hitelt adva — **h**. Ha pedig **h**, akkor a mondat tagadásának hitelt adva **i**.

Nem minden (rövid) mondat itélet!

Nem ítéletek az alábbiak:
„Sicc!" — hiszen ez nem állítás, hanem felszólítás; nincs logikai értéke.
„Mire jó a diszkrét matematika?" — hiszen ez egy kérdés és nem állítás, nincs logikai értéke.
„Vajon $2 + 2 = 4$?" — ennek ugyan van logikai értéke, de ez nem állítás, hanem kérdés.

„Ez a mondat hamis."
A látszat ellenére ennek az állításnak nincs logikai értéke. Ez a mondat önmagában ellentmondás. Hiszen ha **i** lenne, akkor — a mondatnak hitelt adva — **h**. Ha pedig **h**, akkor a mondat tagadásának hitelt adva **i**.

Nem minden (rövid) mondat itélet!

Nem ítéletek az alábbiak:
„Sicc!" — hiszen ez nem állítás, hanem felszólítás; nincs logikai értéke.
„Mire jó a diszkrét matematika?" — hiszen ez egy kérdés és nem állítás, nincs logikai értéke.
„Vajon $2+2=4$?" — ennek ugyan van logikai értéke, de ez nem állítás, hanem kérdés.

„Ez a mondat hamis."
A látszat ellenére ennek az állításnak nincs logikai értéke. Ez a mondat önmagában ellentmondás. Hiszen ha **i** lenne, akkor — a mondatnak hitelt adva — **h**. Ha pedig **h**, akkor a mondat tagadásának hitelt adva **i**.

Nem minden (rövid) mondat itélet!

Nem ítéletek az alábbiak:
„Sicc!" — hiszen ez nem állítás, hanem felszólítás; nincs logikai értéke.
„Mire jó a diszkrét matematika?" — hiszen ez egy kérdés és nem állítás, nincs logikai értéke.
„Vajon $2 + 2 = 4$?" — ennek ugyan van logikai értéke, de ez nem állítás, hanem kérdés.

„Ez a mondat hamis."
A látszat ellenére ennek az állításnak nincs logikai értéke. Ez a mondat önmagában ellentmondás. Hiszen ha **i** lenne, akkor — a mondatnak hitelt adva — **h**. Ha pedig **h**, akkor a mondat tagadásának hitelt adva **i**.

Nem minden (rövid) mondat itélet!

Nem ítéletek az alábbiak:
„Sicc!” — hiszen ez nem állítás, hanem felszólítás; nincs logikai értéke.
„Mire jó a diszkrét matematika?” — hiszen ez egy kérdés és nem állítás, nincs logikai értéke.
„Vajon $2 + 2 = 4$?” — ennek ugyan van logikai értéke, de ez nem állítás, hanem kérdés.

„Ez a mondat hamis.”
A látszat ellenére ennek az állításnak nincs logikai értéke. Ez a mondat önmagában ellentmondás. Hiszen ha **i** lenne, akkor — a mondatnak hitelt adva — **h**. Ha pedig **h**, akkor a mondat tagadásának hitelt adva **i**.

Nem minden (rövid) mondat itélet!

Nem ítéletek az alábbiak:
„Sicc!” — hiszen ez nem állítás, hanem felszólítás; nincs logikai értéke.
„Mire jó a diszkrét matematika?” — hiszen ez egy kérdés és nem állítás, nincs logikai értéke.
„Vajon $2+2=4$?” — ennek ugyan van logikai értéke, de ez nem állítás, hanem kérdés.

„Ez a mondat hamis.”
A látszat ellenére ennek az állításnak nincs logikai értéke. Ez a mondat önmagában ellentmondás. Hiszen ha **i** lenne, akkor — a mondatnak hitelt adva — **h**. Ha pedig **h**, akkor a mondat tagadásának hitelt adva **i**.

Nem minden (rövid) mondat itélet!

Nem ítéletek az alábbiak:
„Sicc!” — hiszen ez nem állítás, hanem felszólítás; nincs logikai értéke.
„Mire jó a diszkrét matematika?” — hiszen ez egy kérdés és nem állítás, nincs logikai értéke.
„Vajon $2+2=4$?” — ennek ugyan van logikai értéke, de ez nem állítás, hanem kérdés.

„Ez a mondat hamis.”
A látszat ellenére ennek az állításnak nincs logikai értéke. Ez a mondat önmagában ellentmondás. Hiszen ha **i** lenne, akkor — a mondatnak hitelt adva — **h**. Ha pedig **h**, akkor a mondat tagadásának hitelt adva **i**.

Összetett ítéletek

A matematikai logika valójában ott kezdődik, amikor ítéletekből logikai műveletekkel újabb ítéleteket képezünk. Ezt teszi a hétköznapi nyelv is. Pl. Ítélet az „Esik az eső” és ítélet a „Lekéstem a vonatot” is. Ezen két ítéletből pl. az „és” kötőszóval képezhetünk új, összetett ítéletet: „Esik az eső és lekéstem a vonatot.” Az „és” a továbbiakban számunkra egy logikai művelet lesz, amellyel ítéletekből újabb ítéletet nyerhetünk.

Az alábbiakban definiáljuk a leggyakrabban használt logikai műveleteket, és megvizsgáljuk, hogy a köznyelvben ezek milyen nyelvtani szerkezeteknek felelnek meg. Az ítéleteket nagybetűkkel jelöljük.

Összetett ítéletek

A matematikai logika valójában ott kezdődik, amikor ítéletekből logikai műveletekkel újabb ítéleteket képezünk. Ezt teszi a hétköznapi nyelv is. Pl. Ítélet az „Esik az eső" és ítélet a „Lekéstem a vonatot" is. Ezen két ítéletből pl. az „és" kötőszóval képezhetünk új, összetett ítéletet: „Esik az eső és lekéstem a vonatot." Az „és" a továbbiakban számunkra egy logikai művelet lesz, amellyel ítéletekből újabb ítéletet nyerhetünk.

Az alábbiakban definiáljuk a leggyakrabban használt logikai műveleteket, és megvizsgáljuk, hogy a köznyelvben ezek milyen nyelvtani szerkezeteknek felelnek meg. Az ítéleteket nagybetűkkel jelöljük.

Összetett ítéletek

A matematikai logika valójában ott kezdődik, amikor ítéletekből logikai műveletekkel újabb ítéleteket képezünk. Ezt teszi a hétköznapi nyelv is. Pl. Ítélet az „Esik az eső" és ítélet a „Lekéstem a vonatot" is. Ezen két ítéletből pl. az „és" kötőszóval képezhetünk új, összetett ítéletet: „Esik az eső és lekéstem a vonatot." Az „és" a továbbiakban számunkra egy logikai művelet lesz, amellyel ítéletekből újabb ítéletet nyerhetünk.

Az alábbiakban definiáljuk a leggyakrabban használt logikai műveleteket, és megvizsgáljuk, hogy a köznyelvben ezek milyen nyelvtani szerkezeteknek felelnek meg. Az ítéleteket nagybetűkkel jelöljük.

Összetett ítéletek

A matematikai logika valójában ott kezdődik, amikor ítéletekből logikai műveletekkel újabb ítéleteket képezünk. Ezt teszi a hétköznapi nyelv is. Pl. Ítélet az „Esik az eső" és ítélet a „Lekéstem a vonatot" is. Ezen két ítéletből pl. az „és" kötőszóval képezhetünk új, összetett ítéletet: „Esik az eső és lekéstem a vonatot." Az „és" a továbbiakban számunkra egy logikai művelet lesz, amellyel ítéletekből újabb ítéletet nyerhetünk.

Az alábbiakban definiáljuk a leggyakrabban használt logikai műveleteket, és megvizsgáljuk, hogy a köznyelvben ezek milyen nyelvtani szerkezeteknek felelnek meg. Az ítéleteket nagybetűkkel jelöljük.

Definíció (Alapvető logikai műveletek)

Tetszőleges A, B ítéletekre

- A, B **konjunkciója** az „A **és** B" ítélet; jele: $A \wedge B$.
- A, B **diszjunkciója** az „A **vagy** B" ítélet; jele: $A \vee B$.
- A, B **implikációja** a „**ha** A **akkor** B" ítélet; jele: $A \to B$.
- A, B **ekvivalenciája** az „**akkor és csak akkor** A **ha** B" ítélet; jele: $A \leftrightarrow B$.
- A **negációja** (más szóval, A **negáltja**) a „**nem** A" ítélet; jele $\neg A$.

Logikai műveletek

Definíció (Alapvető logikai műveletek)

Tetszőleges A, B ítéletekre

- A, B **konjunkciója** az „A **és** B" ítélet; jele: $A \wedge B$.
- A, B **diszjunkciója** az „A **vagy** B" ítélet; jele: $A \vee B$.
- A, B **implikációja** a „**ha** A **akkor** B" ítélet; jele: $A \to B$.
- A, B **ekvivalenciája** az „**akkor és csak akkor** A **ha** B" ítélet; jele: $A \leftrightarrow B$.
- A **negációja** (más szóval, A **negáltja**) a „**nem** A" ítélet; jele $\neg A$.

Logikai műveletek

Definíció (Alapvető logikai műveletek)

Tetszőleges A, B ítéletekre

- A, B **konjunkciója** az „A **és** B" ítélet; jele: $A \wedge B$.
- A, B **diszjunkciója** az „A **vagy** B" ítélet; jele: $A \vee B$.
- A, B **implikációja** a „**ha** A **akkor** B" ítélet; jele: $A \to B$.
- A, B **ekvivalenciája** az „**akkor és csak akkor** A **ha** B" ítélet; jele: $A \leftrightarrow B$.
- A **negációja** (más szóval, A **negáltja**) a „**nem** A" ítélet; jele $\neg A$.

Definíció (Alapvető logikai műveletek)

Tetszőleges A, B ítéletekre

- A, B **konjunkciója** az „A **és** B" ítélet; jele: $A \wedge B$.
- A, B **diszjunkciója** az „A **vagy** B" ítélet; jele: $A \vee B$.
- A, B **implikációja** a „**ha** A **akkor** B" ítélet; jele: $A \to B$.
- A, B **ekvivalenciája** az „**akkor és csak akkor** A **ha** B" ítélet; jele: $A \leftrightarrow B$.
- A **negációja** (más szóval, A **negáltja**) a „**nem** A" ítélet; jele $\neg A$.

Definíció (Alapvető logikai műveletek)

Tetszőleges A, B ítéletekre

- A, B **konjunkciója** az „A **és** B" ítélet; jele: $A \wedge B$.
- A, B **diszjunkciója** az „A **vagy** B" ítélet; jele: $A \vee B$.
- A, B **implikációja** a „**ha** A **akkor** B" ítélet; jele: $A \rightarrow B$.
- A, B **ekvivalenciája** az „**akkor és csak akkor** A **ha** B" ítélet; jele: $A \leftrightarrow B$.
- A **negációja** (más szóval, A **negáltja**) a „**nem** A" ítélet; jele $\neg A$.

A fenti definíció után látszólag már mindent tudunk, de bizonyos pontosításokra, kiegészítésre még szükség van.

Először is megadjuk az egyes logikai műveletek **igazságtáblázatát** — ezt azért tehetjük, mert **a logikai művelet eredményének igazságértéke csakis a kiindulási ítéletek igazságértékétől (és nem azok konkrét tartalmától függ)**. Ha nem így lenne, akkor nem beszélhetnénk logikai műveletről.

de ezzel még nem fejeztük be a definíciót . . .

A fenti definíció után látszólag már mindent tudunk, de bizonyos pontosításokra, kiegészítésre még szükség van.

Először is megadjuk az egyes logikai műveletek **igazságtáblázatát** — ezt azért tehetjük, mert **a logikai művelet eredményének igazságértéke csakis a kiindulási ítéletek igazságértékétől (és nem azok konkrét tartalmától függ)**. Ha nem így lenne, akkor nem beszélhetnénk logikai műveletről.

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
h	**h**	**h**	**h**	**i**	**i**
h	**i**	**i**	**h**	**i**	**h**
i	**h**	**i**	**h**	**h**	**h**
i	**i**	**i**	**i**	**i**	**i**

Az alábbiakat fontos megjegyezni: az implikáció akkor és csak akkor hamis, ha az előtag igaz és az utótag hamis. A diszjunkció akkor és csak akkor hamis, ha mindkét tag hamis. A negáció esetén (ami nincs a táblázatban): $\neg\mathbf{i} = \mathbf{h}$, $\neg\mathbf{h} = \mathbf{i}$.

Logikai műveletek igazságtáblázata

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
h	h	h	h	i	i
h	i	i	h	i	h
i	h	i	h	h	h
i	i	i	i	i	i

Az alábbiakat fontos megjegyezni: az **implikáció akkor és csak akkor hamis, ha az előtag igaz és az utótag hamis**. **A diszjunkció akkor és csak akkor hamis, ha mindkét tag hamis**. A negáció esetén (ami nincs a táblázatban): $\neg$**i** $=$ **h**, $\neg$**h** $=$ **i**.

Összehasonlítás a hétköznapi szóhasználattal: konjunkció

A logikai műveletek jelentése nem mindig egyezik meg a köznapi szóhasználattal, ezért sorra vesszük ezeket.

Konjunkció: A „matematikai és", azaz a $\wedge$ konjunkció használata a köznapival azonos. Viszont a köznapi „és" nem mindig fejez ki konjunkciót. Például „Péter és Pál szomszédok": ez nem konjunkció, hiszen külön-külön egyikről sem mondhatjuk, hogy szomszéd, mert azzal nem fejeznénk ki, hogy *egymás* szomszédai. Viszont a „Péter és Pál haragtartó" esetben: ez már konjunkció, hiszen ez csak rövidítése a „Péter haragtartó és Pál haragtartó" mondatnak. Az „A lámpánál jobbra kanyarodik, elmegy a harmadik sarokig és balra fordul" mondatban az „és" nem tekintendő konjunkciónak, hiszen időrendiséget fejez ki.
A konjukciót nem csak az „és", hanem gyakran vessző vagy más kötőszó fejezi ki. Pl. „Szeretem a csokoládét **de** utálom a spenótot".

Összehasonlítás a hétköznapi szóhasználattal: konjunkció

A logikai műveletek jelentése nem mindig egyezik meg a köznapi szóhasználattal, ezért sorra vesszük ezeket.

Konjunkció: A „matematikai és", azaz a $\wedge$ konjunkció használata a köznapival azonos. Viszont a köznapi „és" nem mindig fejez ki konjunkciót. Például „Péter és Pál szomszédok": ez nem konjunkció, hiszen külön-külön egyikről sem mondhatjuk, hogy szomszéd, mert azzal nem fejeznénk ki, hogy *egymás* szomszédai. Viszont a „Péter és Pál haragtartó" esetben: ez már konjunkció, hiszen ez csak rövidítése a „Péter haragtartó és Pál haragtartó" mondatnak. Az „A lámpánál jobbra kanyarodik, elmegy a harmadik sarokig és balra fordul" mondatban az „és" nem tekintendő konjunkciónak, hiszen időrendiséget fejez ki.
A konjukciót nem csak az „és", hanem gyakran vessző vagy más kötőszó fejezi ki. Pl. „Szeretem a csokoládét **de** utálom a spenótot".

Összehasonlítás a hétköznapi szóhasználattal: konjunkció

A logikai műveletek jelentése nem mindig egyezik meg a köznapi szóhasználattal, ezért sorra vesszük ezeket.

Konjunkció: A „matematikai és”, azaz a $\wedge$ konjunkció használata a köznapival azonos. Viszont a köznapi „és” nem mindig fejez ki konjunkciót. Például „Péter és Pál szomszédok”: ez nem konjunkció, hiszen külön-külön egyikről sem mondhatjuk, hogy szomszéd, mert azzal nem fejeznénk ki, hogy *egymás* szomszédai. Viszont a „Péter és Pál haragtartó” esetben: ez már konjunkció, hiszen ez csak rövidítése a „Péter haragtartó és Pál haragtartó” mondatnak. Az „A lámpánál jobbra kanyarodik, elmegy a harmadik sarokig és balra fordul” mondatban az „és” nem tekintendő konjunkciónak, hiszen időrendiséget fejez ki.

A konjukciót nem csak az „és”, hanem gyakran vessző vagy más kötőszó fejezi ki. Pl. „Szeretem a csokoládét **de** utálom a spenótot”.

A logikai műveletek jelentése nem mindig egyezik meg a köznapi szóhasználattal, ezért sorra vesszük ezeket.

Konjunkció: A „matematikai és", azaz a $\wedge$ konjunkció használata a köznapival azonos. Viszont a köznapi „és" nem mindig fejez ki konjunkciót. Például „Péter és Pál szomszédok": ez nem konjunkció, hiszen külön-külön egyikről sem mondhatjuk, hogy szomszéd, mert azzal nem fejeznénk ki, hogy *egymás* szomszédai. Viszont a „Péter és Pál haragtartó" esetben: ez már konjunkció, hiszen ez csak rövidítése a „Péter haragtartó és Pál haragtartó" mondatnak. Az „A lámpánál jobbra kanyarodik, elmegy a harmadik sarokig és balra fordul" mondatban az „és" nem tekintendő konjunkciónak, hiszen időrendiséget fejez ki.

A konjukciót nem csak az „és", hanem gyakran vessző vagy más kötőszó fejezi ki. Pl. „Szeretem a csokoládét **de** utálom a spenótot".

Összehasonlítás a hétköznapi szóhasználattal: konjunkció

A logikai műveletek jelentése nem mindig egyezik meg a köznapi szóhasználattal, ezért sorra vesszük ezeket.

Konjunkció: A „matematikai és”, azaz a $\wedge$ konjunkció használata a köznapival azonos. Viszont a köznapi „és” nem mindig fejez ki konjunkciót. Például „Péter és Pál szomszédok”: ez nem konjunkció, hiszen külön-külön egyikről sem mondhatjuk, hogy szomszéd, mert azzal nem fejeznénk ki, hogy *egymás* szomszédai. Viszont a „Péter és Pál haragtartó” esetben: ez már konjunkció, hiszen ez csak rövidítése a „Péter haragtartó és Pál haragtartó” mondatnak. Az „A lámpánál jobbra kanyarodik, elmegy a harmadik sarokig és balra fordul” mondatban az „és” nem tekintendő konjunkciónak, hiszen időrendiséget fejez ki.
A konjukciót nem csak az „és”, hanem gyakran vessző vagy más kötőszó fejezi ki. Pl. „Szeretem a csokoládét **de** utálom a spenótot”.

Összehasonlítás a hétköznapival: diszjunkció

Diszjunkció: A matematikai logikában és a matematikában is a „vagy” kötőszót mindig abban az értelemben használjuk, hogy **vagy az egyik, vagy a másik, vagy mindkettő**. Ez az ún. „**matematikai vagy**” vagy más szóval **megengedő vagy**.

Ezzel szemben a köznapi „vagy” gyakran „**kizáró vagy**” értelmű, tehát nem diszjunkció. Például: „Péter a vizsgán átmegy vagy megbukik”: itt kizáró vagyról van szó, hiszen mindkét alternatíva nem teljesülhet. De a „Péter tanul vagy megbukik” mondat esetén megengedő vagyról van szó, hiszen mindkét alternatíva bekövetkezhet.

A „háromszázan vagy háromszázötvenen lehettek az előadáson” mondatban pedig a „vagy” se nem megengedő, se nem kizáró, hiszen csak azt akartuk mondani, hogy jelenlevők száma körülbelül . . . .

Összehasonlítás a hétköznapival: diszjunkció

Diszjunkció: A matematikai logikában és a matematikában is a „vagy" kötőszót mindig abban az értelemben használjuk, hogy **vagy az egyik, vagy a másik, vagy mindkettő**. Ez az ún. „**matematikai vagy**" vagy más szóval **megengedő vagy**. Ezzel szemben a köznapi „vagy" gyakran „**kizáró vagy**" értelmű, tehát nem diszjunkció. Például: „Péter a vizsgán átmegy vagy megbukik": itt kizáró vagyról van szó, hiszen mindkét alternatíva nem teljesülhet. De a „Péter tanul vagy megbukik" mondat esetén megengedő vagyról van szó, hiszen mindkét alternatíva bekövetkezhet.

A „háromszázan vagy háromszázötvenen lehettek az előadáson" mondatban pedig a „vagy" se nem megengedő, se nem kizáró, hiszen csak azt akartuk mondani, hogy jelenlevők száma körülbelül . . . .

Összehasonlítás a hétköznapival: diszjunkció

Diszjunkció: A matematikai logikában és a matematikában is a „vagy" kötőszót mindig abban az értelemben használjuk, hogy **vagy az egyik, vagy a másik, vagy mindkettő**. Ez az ún. „**matematikai vagy**" vagy más szóval **megengedő vagy**. Ezzel szemben a köznapi „vagy" gyakran „**kizáró vagy**" értelmű, tehát nem diszjunkció. Például: „Péter a vizsgán átmegy vagy megbukik": itt kizáró vagyról van szó, hiszen mindkét alternatíva nem teljesülhet. De a „Péter tanul vagy megbukik" mondat esetén megengedő vagyról van szó, hiszen mindkét alternatíva bekövetkezhet.
A „háromszázan vagy háromszázötvenen lehettek az előadáson" mondatban pedig a „vagy" se nem megengedő, se nem kizáró, hiszen csak azt akartuk mondani, hogy jelenlevők száma körülbelül . . . .

Összehasonlítás a hétköznapival: ekvivalencia

Ekvivalencia: Azt, hogy $A \leftrightarrow B$, szavakkal az alábbi módon szokás kifejezni:

Akkor és csak akkor A, **ha** B.

Pontosan akkor A, **ha** B.

A-nak **szükséges és elegendő feltétele** B.

Az alábbi két állítás (vagy feltétel) **ekvivalens:** (1) A; (2) B.

A **ekvivalens** B-vel.

Összehasonlítás a hétköznapival: ekvivalencia

Ekvivalencia: Azt, hogy $A \leftrightarrow B$, szavakkal az alábbi módon szokás kifejezni:

Akkor és csak akkor A, **ha** B.

Pontosan akkor A, **ha** B.

A-nak **szükséges és elegendő feltétele** B.

Az alábbi két állítás (vagy feltétel) **ekvivalens:** (1) A; (2) B.

A **ekvivalens** B-vel.

Összehasonlítás a hétköznapival: ekvivalencia

Ekvivalencia: Azt, hogy $A \leftrightarrow B$, szavakkal az alábbi módon szokás kifejezni:

Akkor és csak akkor A, **ha** B.

Pontosan akkor A, **ha** B.

A-nak **szükséges és elegendő feltétele** B.

Az alábbi két állítás (vagy feltétel) **ekvivalens:** (1) A; (2) B.

A **ekvivalens** B-vel.

Összehasonlítás a hétköznapival: ekvivalencia

Ekvivalencia: Azt, hogy $A \leftrightarrow B$, szavakkal az alábbi módon szokás kifejezni:

Akkor és csak akkor A, **ha** B.

Pontosan akkor A, **ha** B.

A-nak **szükséges és elegendő feltétele** B.

Az alábbi két állítás (vagy feltétel) **ekvivalens:** (1) A; (2) B.

A **ekvivalens** B-vel.

Ekvivalencia: Azt, hogy $A \leftrightarrow B$, szavakkal az alábbi módon szokás kifejezni:

Akkor és csak akkor A, **ha** B.

Pontosan akkor A, **ha** B.

A-nak **szükséges és elegendő feltétele** B.

Az alábbi két állítás (vagy feltétel) **ekvivalens:** (1) A; (2) B.

A **ekvivalens** B-vel.

Az implikáció külön magyarázatot igényel. Pl. Pál ezt ígéri: „Ha a héten nyerek a lottón, veszek Péternek egy autót”. Ígéretét csak egyetlen esetben szegheti meg: ha nyer a lottón (előtag $=$ **i**) de nem vesz autót (utótag $=$ **h**). Ugyanis semmilyen más esetre nem ígért semmit. Ez magyarázza az implikáció igazságtáblázatát, amely tehát megegyezik a köznapi szóhasználattal.

Vizsgáljuk most a „Csak akkor ásom fel a kertet, ha süt a nap” ígéretet. Szerkezete: „Csak akkor A, ha B”. Hogyan lehet ezen ígéretet megszegni? Csakis úgy, hogy más esetben is felásom a kertet. Azaz csakis abban az esetben, ha nem süt a nap és felásom a kertet. Azaz, ha $B =$ **h** és $A =$ **i**.

Állítás: A „**csak akkor** A, **ha** B” művelet igazságtáblázata megegyezik az $A \to B$ implikáció igazságtáblázatával.

Az implikáció külön magyarázatot igényel. Pl. Pál ezt ígéri: „Ha a héten nyerek a lottón, veszek Péternek egy autót". Ígéretét csak egyetlen esetben szegheti meg: ha nyer a lottón (előtag = **i**) de nem vesz autót (utótag = **h**). Ugyanis semmilyen más esetre nem ígért semmit. Ez magyarázza az implikáció igazságtáblázatát, amely tehát megegyezik a köznapi szóhasználattal.

Vizsgáljuk most a „Csak akkor ásom fel a kertet, ha süt a nap" ígéretet. Szerkezete: „Csak akkor A, ha B". Hogyan lehet ezen ígéretet megszegni? Csakis úgy, hogy más esetben is felásom a kertet. Azaz csakis abban az esetben, ha nem süt a nap és felásom a kertet. Azaz, ha $B = \mathbf{h}$ és $A = \mathbf{i}$.

Állítás: A „**csak akkor** A, **ha** B" művelet igazságtáblázata megegyezik az $A \to B$ implikáció igazságtáblázatával.

Az implikáció külön magyarázatot igényel. Pl. Pál ezt ígéri: „Ha a héten nyerek a lottón, veszek Péternek egy autót”. Ígéretét csak egyetlen esetben szegheti meg: ha nyer a lottón (előtag $=$ **i**) de nem vesz autót (utótag $=$ **h**). Ugyanis semmilyen más esetre nem ígért semmit. Ez magyarázza az implikáció igazságtáblázatát, amely tehát megegyezik a köznapi szóhasználattal.

Vizsgáljuk most a „Csak akkor ásom fel a kertet, ha süt a nap” ígéretet. Szerkezete: „Csak akkor A, ha B”. Hogyan lehet ezen ígéretet megszegni? Csakis úgy, hogy más esetben is felásom a kertet. Azaz csakis abban az esetben, ha nem süt a nap és felásom a kertet. Azaz, ha $B =$ **h** és $A =$ **i**.

Állítás: A „**csak akkor** A, **ha** B” művelet igazságtáblázata megegyezik az $A \to B$ implikáció igazságtáblázatával.

Az implikáció külön magyarázatot igényel. Pl. Pál ezt ígéri: „Ha a héten nyerek a lottón, veszek Péternek egy autót”. Ígéretét csak egyetlen esetben szegheti meg: ha nyer a lottón (előtag = $\mathbf{i}$) de nem vesz autót (utótag = $\mathbf{h}$). Ugyanis semmilyen más esetre nem ígért semmit. Ez magyarázza az implikáció igazságtáblázatát, amely tehát megegyezik a köznapi szóhasználattal.

Vizsgáljuk most a „Csak akkor ásom fel a kertet, ha süt a nap” ígéretet. Szerkezete: „Csak akkor A, ha B”. Hogyan lehet ezen ígéretet megszegni? Csakis úgy, hogy más esetben is felásom a kertet. Azaz csakis abban az esetben, ha nem süt a nap és felásom a kertet. Azaz, ha $B = \mathbf{h}$ és $A = \mathbf{i}$.

Állítás: A „**csak akkor** A, **ha** B” művelet igazságtáblázata megegyezik az $A \to B$ implikáció igazságtáblázatával.

Implikáció

Az implikáció külön magyarázatot igényel. Pl. Pál ezt ígéri: „Ha a héten nyerek a lottón, veszek Péternek egy autót". Ígéretét csak egyetlen esetben szegheti meg: ha nyer a lottón (előtag = **i**) de nem vesz autót (utótag = **h**). Ugyanis semmilyen más esetre nem ígért semmit. Ez magyarázza az implikáció igazságtáblázatát, amely tehát megegyezik a köznapi szóhasználattal.

Vizsgáljuk most a „Csak akkor ásom fel a kertet, ha süt a nap" ígéretet. Szerkezete: „Csak akkor A, ha B". Hogyan lehet ezen ígéretet megszegni? Csakis úgy, hogy más esetben is felásom a kertet. Azaz csakis abban az esetben, ha nem süt a nap és felásom a kertet. Azaz, ha $B = \mathbf{h}$ és $A = \mathbf{i}$.
Állítás: A „**csak akkor** A, **ha** B" művelet igazságtáblázata megegyezik az $A \to B$ implikáció igazságtáblázatával.

Implikáció

Hasonló módon (a hamis eset vizsgálatával) vizsgálhatók más nyelvtani szerkezetek. Az eddigiek szerint az $A \to B$ implikációt a következő módokon (is) szavakba foglalhatjuk:

Ha A, akkor B.

Csak akkor A, ha B

A-ból következik B.

B-nek elegendő feltétele A.

A-nak szükséges feltétele B.

Többnyire csak az elsőt és a harmadikat fogjuk használni.

Hasonló módon (a hamis eset vizsgálatával) vizsgálhatók más nyelvtani szerkezetek. Az eddigiek szerint az $A \to B$ implikációt a következő módokon (is) szavakba foglalhatjuk:

Ha A, akkor B.

Csak akkor A, ha B

A-ból következik B.

B-nek elegendő feltétele A.

A-nak szükséges feltétele B.

Többnyire csak az elsőt és a harmadikat fogjuk használni.

Hasonló módon (a hamis eset vizsgálatával) vizsgálhatók más nyelvtani szerkezetek. Az eddigiek szerint az $A \to B$ implikációt a következő módokon (is) szavakba foglalhatjuk:

Ha *A*, akkor *B*.

Csak akkor *A*, ha *B*

***A*-ból következik *B*.**

***B*-nek elegendő feltétele *A*.**

***A*-nak szükséges feltétele *B*.**

Többnyire csak az elsőt és a harmadikat fogjuk használni.

Hasonló módon (a hamis eset vizsgálatával) vizsgálhatók más nyelvtani szerkezetek. Az eddigiek szerint az $A \to B$ implikációt a következő módokon (is) szavakba foglalhatjuk:

Ha A, akkor B.

Csak akkor A, ha B

A-ból következik B.

B-nek elegendő feltétele A.

A-nak szükséges feltétele B.

Többnyire csak az elsőt és a harmadikat fogjuk használni.

Hasonló módon (a hamis eset vizsgálatával) vizsgálhatók más nyelvtani szerkezetek. Az eddigiek szerint az $A \to B$ implikációt a következő módokon (is) szavakba foglalhatjuk:

Ha A, akkor B.

Csak akkor A, ha B

A-ból következik B.

B-nek elegendő feltétele A.

A-nak szükséges feltétele B.

Többnyire csak az elsőt és a harmadikat fogjuk használni.

A ítéletkalkulus formulái

Ha formalizálni akarunk egy gondolatmenetet, a benne szereplő ítéleteket ún. **ítéletváltozókkal** jelöljük. De nem mindegy, hogy hogyan. Pl. ha A jelöli a „ha nő az alapjárati fordulatszám, akkor emelkedik a fogyasztás" ítéletet, B pedig a „ha nem emelkedik a fogyasztás, akkor nem nő az alapjárati fordulatszám" ítéletet, akkor a későbbiekben nem tudjuk kihasználni azt a tényt, hogy ezen két ítélet között nyilvánvaló kapcsolat van.

Ezért úgy kell formalizálnunk, hogy csak a fellépő **prímítéletek** helyett vezessünk be változókat. Az olyan ítéletet nevezzük prímítéletnek, amelyek (logikai műveletre utaló) logikai kötőszavakat nem tartalmaznak (vagy az ilyen kötőszavakat valamilyen okból szándékosan nem vesszük figyelembe). A további ítéleteket pedig a prímítéletek és logikai műveletek segítségével fejezzük ki.

A ítéletkalkulus formulái

Ha formalizálni akarunk egy gondolatmenetet, a benne szereplő ítéleteket ún. **ítéletváltozókkal** jelöljük. De nem mindegy, hogy hogyan. Pl. ha A jelöli a „ha nő az alapjárati fordulatszám, akkor emelkedik a fogyasztás" ítéletet, B pedig a „ha nem emelkedik a fogyasztás, akkor nem nő az alapjárati fordulatszám" ítéletet, akkor a későbbiekben nem tudjuk kihasználni azt a tényt, hogy ezen két ítélet között nyilvánvaló kapcsolat van.

Ezért úgy kell formalizálnunk, hogy csak a fellépő **prímítéletek** helyett vezessünk be változókat. Az olyan ítéletet nevezzük prímítéletnek, amelyek (logikai műveletre utaló) logikai kötőszavakat nem tartalmaznak (vagy az ilyen kötőszavakat valamilyen okból szándékosan nem vesszük figyelembe). A további ítéleteket pedig a prímítéletek és logikai műveletek segítségével fejezzük ki.

Formulák precíz definíciója

Definíció (Ítéletkalkulusbeli formula rekurzív definíciója)

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és legyenek $A_1, \ldots, A_n$ ítéletváltozók, azaz olyan változók, amelyek ítéleteket jelölnek.
(1) Az ítéletváltozók mindegyike (ítéletkalkulusbeli) formula.

(2) Ha F és G formula, akkor az $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$ jelsorozatok mindegyike formula.

(3) Az ítéletkalkulus minden formulája megkapható az (1) és (2) szabály véges számú alkalmazásával.

Megjegyzések: A formula legkülső zárójelét többnyire elhagyjuk. A fenti definíció egy rekurzív definíció. Hasonló rekurzióval adható megtörténik egyes programozási nyelvek szintaktikája, pl. „
<eljárás> := <eljárásfej> BEGIN <utasítások> END
<utasítások>:=<utasítás>;<utasítások>
. . . ”

Formulák precíz definíciója

Definíció (Ítéletkalkulusbeli formula rekurzív definíciója)

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és legyenek $A_1, \ldots, A_n$ ítéletváltozók, azaz olyan változók, amelyek ítéleteket jelölnek.
(1) Az ítéletváltozók mindegyike (ítéletkalkulusbeli) formula.

(2) Ha F és G formula, akkor az $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \to G)$, $(F \leftrightarrow G)$ jelsorozatok mindegyike formula.

(3) Az ítéletkalkulus minden formulája megkapható az (1) és (2) szabály véges számú alkalmazásával.

Megjegyzések: A formula legkülső zárójelét többnyire elhagyjuk. A fenti definíció egy rekurzív definíció. Hasonló rekurzióval adható megtörténik egyes programozási nyelvek szintaktikája, pl. „
<eljárás> := <eljárásfej> BEGIN <utasítások> END
<utasítások>:=<utasítás>;<utasítások>
. . . "

Formulák precíz definíciója

Definíció (Ítéletkalkulusbeli formula rekurzív definíciója)

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és legyenek $A_1, \ldots, A_n$ ítéletváltozók, azaz olyan változók, amelyek ítéleteket jelölnek.

(1) Az ítéletváltozók mindegyike (ítéletkalkulusbeli) formula.

(2) Ha F és G formula, akkor az $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \to G)$, $(F \leftrightarrow G)$ jelsorozatok mindegyike formula.

(3) Az ítéletkalkulus minden formulája megkapható az (1) és (2) szabály véges számú alkalmazásával.

Megjegyzések: A formula legkülső zárójelét többnyire elhagyjuk. A fenti definíció egy rekurzív definíció. Hasonló rekurzióval adható megtörténik egyes programozási nyelvek szintaktikája, pl. „
<eljárás> := <eljárásfej> BEGIN <utasítások> END
<utasítások>:=<utasítás>;<utasítások>
. . . ”

Formulák precíz definíciója

Definíció (Ítéletkalkulusbeli formula rekurzív definíciója)

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és legyenek $A_1, \ldots, A_n$ ítéletváltozók, azaz olyan változók, amelyek ítéleteket jelölnek.

(1) Az ítéletváltozók mindegyike (ítéletkalkulusbeli) formula.

(2) Ha F és G formula, akkor az $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$ jelsorozatok mindegyike formula.

(3) Az ítéletkalkulus minden formulája megkapható az (1) és (2) szabály véges számú alkalmazásával.

Megjegyzések: A formula legkülső zárójelét többnyire elhagyjuk.
A fenti definíció egy rekurzív definíció. Hasonló rekurzióval adható megtörténik egyes programozási nyelvek szintaktikája, pl. „
<eljárás> := <eljárásfej> BEGIN <utasítások> END
<utasítások>:=<utasítás>;<utasítások>
. . . ”

Formulák precíz definíciója

Definíció (Ítéletkalkulusbeli formula rekurzív definíciója)

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és legyenek $A_1, \ldots, A_n$ ítéletváltozók, azaz olyan változók, amelyek ítéleteket jelölnek.

(1) Az ítéletváltozók mindegyike (ítéletkalkulusbeli) formula.

(2) Ha F és G formula, akkor az $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$ jelsorozatok mindegyike formula.

(3) Az ítéletkalkulus minden formulája megkapható az (1) és (2) szabály véges számú alkalmazásával.

Megjegyzések: A formula legkülső zárójelét többnyire elhagyjuk. A fenti definíció egy rekurzív definíció. Hasonló rekurzióval adható megtörténik egyes programozási nyelvek szintaktikája, pl. „
<eljárás> := <eljárásfej> BEGIN <utasítások> END
<utasítások>:=<utasítás>;<utasítások>
. . . ”

Formulák precíz definíciója

Definíció (Ítéletkalkulusbeli formula rekurzív definíciója)

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és legyenek $A_1, \ldots, A_n$ ítéletváltozók, azaz olyan változók, amelyek ítéleteket jelölnek.

(1) Az ítéletváltozók mindegyike (ítéletkalkulusbeli) formula.

(2) Ha F és G formula, akkor az $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \to G)$, $(F \leftrightarrow G)$ jelsorozatok mindegyike formula.

(3) Az ítéletkalkulus minden formulája megkapható az (1) és (2) szabály véges számú alkalmazásával.

Megjegyzések: A formula legkülső zárójelét többnyire elhagyjuk. A fenti definíció egy rekurzív definíció. Hasonló rekurzióval adható megtörténik egyes programozási nyelvek szintaktikája, pl. „

<eljárás> := <eljárásfej> BEGIN <utasítások> END

<utasítások>:=<utasítás>;<utasítások>

. . . ”

Példák formulákra

A formulák definíciójával az (is) a célunk, hogy megmondjuk, mit értünk szintaktikusan helyes formulán anélkül, hogy oldalakon át kellene magyarázni, hogy nem kezdődhet végzárójellel, nem lehet egymás mellett két változó, stb. Nem hivatalosan és nem túl precízen azt is lehet mondani, hogy *a formulák nem mások, mint a tanult logikai műveletjelekből, változókból és zárójelekből felépülő szintaktikusan helyes jelsorozatok.*

Természetesen más betűket is használhatunk az ítéletváltozók jelölésére. Például formulák: $A \vee B$, $(\neg(A \to B)) \to A$, stb.

Csúnya és fárasztó lenne az elemi számtan, ha $2^2 \cdot 3 + 4$ helyett $((2^2) \cdot 3) + 4$-et kellene írnunk. Ehelyett ún. **precedencia sorrendet** állapítunk meg a műveletekre, amely megmondja, hogy — zárójelek híján — melyik művelet végzendő el előbb.

Példák formulákra

A formulák definíciójával az (is) a célunk, hogy megmondjuk, mit értünk szintaktikusan helyes formulán anélkül, hogy oldalakon át kellene magyarázni, hogy nem kezdődhet végzárójellel, nem lehet egymás mellett két változó, stb. Nem hivatalosan és nem túl precízen azt is lehet mondani, hogy *a formulák nem mások, mint a tanult logikai műveletjelekből, változókból és zárójelekből felépülő szintaktikusan helyes jelsorozatok.*
Természetesen más betűket is használhatunk az ítéletváltozók jelölésére. Például formulák: $A \vee B$, $(\neg(A \to B)) \to A$, stb.

Csúnya és fárasztó lenne az elemi számtan, ha $2^2 \cdot 3 + 4$ helyett $((2^2) \cdot 3) + 4$-et kellene írnunk. Ehelyett ún. **precedencia sorrendet** állapítunk meg a műveletekre, amely megmondja, hogy — zárójelek híján — melyik művelet végzendő el előbb.

Példák formulákra

A formulák definíciójával az (is) a célunk, hogy megmondjuk, mit értünk szintaktikusan helyes formulán anélkül, hogy oldalakon át kellene magyarázni, hogy nem kezdődhet végzárójellel, nem lehet egymás mellett két változó, stb. Nem hivatalosan és nem túl precízen azt is lehet mondani, hogy *a formulák nem mások, mint a tanult logikai műveletjelekből, változókból és zárójelekből felépülő szintaktikusan helyes jelsorozatok.*
Természetesen más betűket is használhatunk az ítéletváltozók jelölésére. Például formulák: $A \vee B$, $(\neg(A \to B)) \to A$, stb.

Csúnya és fárasztó lenne az elemi számtan, ha $2^2 \cdot 3 + 4$ helyett $((2^2) \cdot 3) + 4$-et kellene írnunk. Ehelyett ún. **precedencia sorrendet** állapítunk meg a műveletekre, amely megmondja, hogy — zárójelek híján — melyik művelet végzendő el előbb.

Példák formulákra

A formulák definíciójával az (is) a célunk, hogy megmondjuk, mit értünk szintaktikusan helyes formulán anélkül, hogy oldalakon át kellene magyarázni, hogy nem kezdődhet végzárójellel, nem lehet egymás mellett két változó, stb. Nem hivatalosan és nem túl precízen azt is lehet mondani, hogy *a formulák nem mások, mint a tanult logikai műveletjelekből, változókból és zárójelekből felépülő szintaktikusan helyes jelsorozatok.*
Természetesen más betűket is használhatunk az ítéletváltozók jelölésére. Például formulák: $A \vee B$, $(\neg(A \to B)) \to A$, stb.

Csúnya és fárasztó lenne az elemi számtan, ha $2^2 \cdot 3 + 4$ helyett $((2^2) \cdot 3) + 4$-et kellene írnunk. Ehelyett ún. **precedencia sorrendet** állapítunk meg a műveletekre, amely megmondja, hogy — zárójelek híján — melyik művelet végzendő el előbb.

Precedencia sorrend

Az ítéletkalkulus is rendelkezik precedenciasorrenddel:

$$\neg, \qquad\qquad \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$$

Természetesen a precedenciasorrend által biztosított zárójelelhagyási lehetőséggel nem kötelező élni. (Az irodalom egy része nem is él vele.)

Most, a diszciplína elején, a túlzott zárójelelhagyás didaktikailag nem is lenne helyes. Ezért mi csak a negáció precedenciájára fogunk esetenként (de nem mindig) építeni.

Ha F logikai formula, amely legfeljebb az A_1, ..., A_n változókat tartalmazza, akkor ezt a tényt az $F(A_1, \dots, A_n)$ jelölés fejezi ki.

Az ítéletkalkulus is rendelkezik precedenciasorrenddel:

$$\neg, \qquad\qquad \wedge,\ \vee,\ \to,\ \leftrightarrow$$

Természetesen a precedenciasorrend által biztosított zárójelelhagyási lehetőséggel nem kötelező élni. (Az irodalom egy része nem is él vele.)

Most, a diszciplína elején, a túlzott zárójelelhagyás didaktikailag nem is lenne helyes. Ezért mi csak a negáció precedenciájára fogunk esetenként (de nem mindig) építeni.

Ha F logikai formula, amely legfeljebb az $A_1, \ldots, A_n$ változókat tartalmazza, akkor ezt a tényt az $F(A_1, \ldots, A_n)$ jelölés fejezi ki.

Precedencia sorrend

Az ítéletkalkulus is rendelkezik precedenciasorrenddel:

$$\neg, \qquad\qquad \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$$

Természetesen a precedenciasorrend által biztosított zárójelelhagyási lehetőséggel nem kötelező élni. (Az irodalom egy része nem is él vele.)

Most, a diszciplína elején, a túlzott zárójelelhagyás didaktikailag nem is lenne helyes. Ezért mi csak a negáció precedenciájára fogunk esetenként (de nem mindig) építeni.

Ha F logikai formula, amely legfeljebb az A_1, …, A_n változókat tartalmazza, akkor ezt a tényt az $F(A_1, \ldots, A_n)$ jelölés fejezi ki.

Részformulák

Definíció (Részformula)

Legyen F és G logikai formula. Azt mondjuk, hogy G **részformulája** F-nek, ha G fellép F-nek a rekurzív definíció szerinti előállítása során. (Természetesen ennek eldöntésekor **nem szabad** a precedenciasorrendre hivatkozva zárójelet elhagyni!)

Példa

$(A \to B) \to (\neg A \to C)$-nek részformulája $A \to B$, részformulája A, részformulája $\neg A$. De a látszat ellenére nem részformulája $A \to C$.

Mert a rekurzív definícióban a következők lépnek fel: A, B, C; $(A \to B)$, $(\neg A)$; $((\neg A) \to C)$; $((A \to B) \to ((\neg A) \to C))$. (Az egyes „szinteket" pontosvesszővel választottuk el.). A végén éppen a kérdéses formula áll (a legkülső zárójel elhagyható!). Jól látszik, hogy pl. $A \to B$, azaz (legkülső zárójel!) $(A \to B)$ fellépett, $A \to C$, azaz $(A \to C)$ pedig nem!

Részformulák

Definíció (Részformula)

Legyen F és G logikai formula. Azt mondjuk, hogy G **részformulája** F-nek, ha G fellép F-nek a rekurzív definíció szerinti előállítása során. (Természetesen ennek eldöntésekor **nem szabad** a precedenciasorrendre hivatkozva zárójelet elhagyni!)

Példa

$(A \to B) \to (\neg A \to C)$-nek részformulája $A \to B$, részformulája A, részformulája $\neg A$. De a látszat ellenére nem részformulája $A \to C$.

Mert a rekurzív definícióban a következők lépnek fel: A, B, C; $(A \to B)$, $(\neg A)$; $((\neg A) \to C)$; $((A \to B) \to ((\neg A) \to C))$. (Az egyes „szinteket" pontosvesszővel választottuk el.). A végén éppen a kérdéses formula áll (a legkülső zárójel elhagyható!). Jól látszik, hogy pl. $A \to B$, azaz (legkülső zárójel!) $(A \to B)$ fellépett, $A \to C$, azaz $(A \to C)$ pedig nem!

Részformulák

Definíció (Részformula)

Legyen F és G logikai formula. Azt mondjuk, hogy G **részformulája** F-nek, ha G fellép F-nek a rekurzív definíció szerinti előállítása során. (Természetesen ennek eldöntésekor **nem szabad** a precedenciasorrendre hivatkozva zárójelet elhagyni!)

Példa

$(A \to B) \to (\neg A \to C)$-nek részformulája $A \to B$, részformulája A, részformulája $\neg A$. De a látszat ellenére nem részformulája $A \to C$.

Mert a rekurzív definícióban a következők lépnek fel: A, B, C; $(A \to B)$, $(\neg A)$; $((\neg A) \to C)$; $((A \to B) \to ((\neg A) \to C))$. (Az egyes „szinteket” pontosvesszővel választottuk el.). A végén éppen a kérdéses formula áll (a legkülső zárójel elhagyható!). Jól látszik, hogy pl. $A \to B$, azaz (legkülső zárójel!) $(A \to B)$ fellépett, $A \to C$, azaz $(A \to C)$ pedig nem!

Részformulák

Definíció (Részformula)

Legyen F és G logikai formula. Azt mondjuk, hogy G **részformulája** F-nek, ha G fellép F-nek a rekurzív definíció szerinti előállítása során. (Természetesen ennek eldöntésekor **nem szabad** a precedenciasorrendre hivatkozva zárójelet elhagyni!)

Példa

$(A \to B) \to (\neg A \to C)$-nek részformulája $A \to B$, részformulája A, részformulája $\neg A$. De a látszat ellenére nem részformulája $A \to C$.

Mert a rekurzív definícióban a következők lépnek fel: A, B, C; $(A \to B)$, $(\neg A)$; $((\neg A) \to C)$; $((A \to B) \to ((\neg A) \to C))$. (Az egyes „szinteket" pontosvesszővel választottuk el.). A végén éppen a kérdéses formula áll (a legkülső zárójel elhagyható!). Jól látszik, hogy pl. $A \to B$, azaz (legkülső zárójel!) $(A \to B)$ fellépett, $A \to C$, azaz $(A \to C)$ pedig nem!

Részformulák

Definíció (Részformula)

Legyen F és G logikai formula. Azt mondjuk, hogy G **részformulája** F-nek, ha G fellép F-nek a rekurzív definíció szerinti előállítása során. (Természetesen ennek eldöntésekor **nem szabad** a precedenciasorrendre hivatkozva zárójelet elhagyni!)

Példa

$(A \to B) \to (\neg A \to C)$-nek részformulája $A \to B$, részformulája A, részformulája $\neg A$. De a látszat ellenére nem részformulája $A \to C$.

Mert a rekurzív definícióban a következők lépnek fel: A, B, C; $(A \to B)$, $(\neg A)$; $((\neg A) \to C)$; $((A \to B) \to ((\neg A) \to C))$. (Az egyes „szinteket" pontosvesszővel választottuk el.). A végén éppen a kérdéses formula áll (a legkülső zárójel elhagyható!). Jól látszik, hogy pl. $A \to B$, azaz (legkülső zárójel!) $(A \to B)$ fellépett, $A \to C$, azaz $(A \to C)$ pedig nem!

Részformulák

Definíció (Részformula)

Legyen F és G logikai formula. Azt mondjuk, hogy G **részformulája** F-nek, ha G fellép F-nek a rekurzív definíció szerinti előállítása során. (Természetesen ennek eldöntésekor **nem szabad** a precedenciasorrendre hivatkozva zárójelet elhagyni!)

Példa

$(A \to B) \to (\neg A \to C)$-nek részformulája $A \to B$, részformulája A, részformulája $\neg A$. De a látszat ellenére nem részformulája $A \to C$.

Mert a rekurzív definícióban a következők lépnek fel: A, B, C; $(A \to B)$, $(\neg A)$; $((\neg A) \to C)$; $((A \to B) \to ((\neg A) \to C))$. (Az egyes „szinteket” pontosvesszővel választottuk el.). A végén éppen a kérdéses formula áll (a legkülső zárójel elhagyható!). Jól látszik, hogy pl. $A \to B$, azaz (legkülső zárójel!) $(A \to B)$ fellépett, $A \to C$, azaz $(A \to C)$ pedig nem!

Részformulák

Definíció (Részformula)

Legyen F és G logikai formula. Azt mondjuk, hogy G **részformulája** F-nek, ha G fellép F-nek a rekurzív definíció szerinti előállítása során. (Természetesen ennek eldöntésekor **nem szabad** a precedenciasorrendre hivatkozva zárójelet elhagyni!)

Példa

$(A \to B) \to (\neg A \to C)$-nek részformulája $A \to B$, részformulája A, részformulája $\neg A$. De a látszat ellenére nem részformulája $A \to C$.

Mert a rekurzív definícióban a következők lépnek fel: A, B, C; $(A \to B)$, $(\neg A)$; $((\neg A) \to C)$; $((A \to B) \to ((\neg A) \to C))$. (Az egyes „szinteket” pontosvesszővel választottuk el.). A végén éppen a kérdéses formula áll (a legkülső zárójel elhagyható!). Jól látszik, hogy pl. $A \to B$, azaz (legkülső zárójel!) $(A \to B)$ fellépett, $A \to C$, azaz $(A \to C)$ pedig nem!

Részformulák

Definíció (Részformula)

Legyen F és G logikai formula. Azt mondjuk, hogy G **részformulája** F-nek, ha G fellép F-nek a rekurzív definíció szerinti előállítása során. (Természetesen ennek eldöntésekor **nem szabad** a precedenciasorrendre hivatkozva zárójelet elhagyni!)

Példa

$(A \to B) \to (\neg A \to C)$-nek részformulája $A \to B$, részformulája A, részformulája $\neg A$. De a látszat ellenére nem részformulája $A \to C$.

Mert a rekurzív definícióban a következők lépnek fel: A, B, C; $(A \to B)$, $(\neg A)$; $((\neg A) \to C)$; $((A \to B) \to ((\neg A) \to C))$. (Az egyes „szinteket” pontosvesszővel választottuk el.). A végén éppen a kérdéses formula áll (a legkülső zárójel elhagyható!). Jól látszik, hogy pl. $A \to B$, azaz (legkülső zárójel!) $(A \to B)$ fellépett, $A \to C$, azaz $(A \to C)$ pedig nem!

A részformulák keresgélésekor nem érdemes a zárójeleket elhagyni!

Mint jelsorozat, a részformula az eredeti formula „összefüggő része”, de a fenti példa is mutatja, hogy ha egy összefüggő részjelsorozat (mint az előbb az $A \to C$) önmagában szintaktikusan helyes, attól még nem biztos, hogy részformula is!

Feladat (tipikus vizsgafeladat)

Hány részformulája van az előbbi $(A \to B) \to (\neg A \to C)$ formulának?

Megoldás: 7. (Az előbb soroltuk fel.)

Részformulák összeszámlálása

A részformulák keresgélésekor nem érdemes a zárójeleket elhagyni!

Mint jelsorozat, a részformula az eredeti formula „összefüggő része”, de a fenti példa is mutatja, hogy ha egy összefüggő részjelsorozat (mint az előbb az $A \to C$) önmagában szintaktikusan helyes, attól még nem biztos, hogy részformula is!

Feladat (tipikus vizsgafeladat)

Hány részformulája van az előbbi $(A \to B) \to (\neg A \to C)$ formulának?

Megoldás: 7. (Az előbb soroltuk fel.)

A részformulák keresgélésekor nem érdemes a zárójeleket elhagyni!

Mint jelsorozat, a részformula az eredeti formula „összefüggő része”, de a fenti példa is mutatja, hogy ha egy összefüggő részjelsorozat (mint az előbb az $A \to C$) önmagában szintaktikusan helyes, attól még nem biztos, hogy részformula is!

Feladat (tipikus vizsgafeladat)

Hány részformulája van az előbbi $(A \to B) \to (\neg A \to C)$ formulának?

Megoldás: 7. (Az előbb soroltuk fel.)

Szöveg formalizálása

Feladat

Formalizáljuk az alábbi ítéletet:
„Amennyiben sáros vagy törött a reflektor és aznap földrengés volt, az operatőr pontosan akkor kap prémiumot, ha időben érkezik, de nincs napfogyatkozás.”

Megoldás: Legyen S: „sáros a reflektor”, T: „törött a reflektor”, F: „aznap földrengés volt”, P: „az operatőr prémiumot kap”, E: „az operatőr időben érkezik”, N: „napfogyatkozás van”. Ezek a prímítéletek. Ekkor a keresett formula:

$$((S \vee T) \wedge F) \ \rightarrow \ (P \leftrightarrow (E \wedge \neg N)).$$

Szöveg formalizálása

Feladat

Formalizáljuk az alábbi ítéletet:
„Amennyiben sáros vagy törött a reflektor és aznap földrengés volt, az operatőr pontosan akkor kap prémiumot, ha időben érkezik, de nincs napfogyatkozás."

Megoldás: Legyen S: „sáros a reflektor", T: „törött a reflektor", F: „aznap földrengés volt", P: „az operatőr prémiumot kap", E: „az operatőr időben érkezik", N: „napfogyatkozás van". Ezek a prímítéletek. Ekkor a keresett formula:

$$((S \vee T) \wedge F) \rightarrow (P \leftrightarrow (E \wedge \neg N)).$$

Feladat

Formalizáljuk az alábbi ítéletet:
„Amennyiben sáros vagy törött a reflektor és aznap földrengés volt, az operatőr pontosan akkor kap prémiumot, ha időben érkezik, de nincs napfogyatkozás.”

Megoldás: Legyen S: „sáros a reflektor”, T: „törött a reflektor”, F: „aznap földrengés volt”, P: „az operatőr prémiumot kap”, E: „az operatőr időben érkezik”, N: „napfogyatkozás van”. Ezek a prímítéletek. Ekkor a keresett formula:

$$((S \vee T) \wedge F) \;\rightarrow\; (P \leftrightarrow (E \wedge \neg N)).$$

Szöveg formalizálása

Feladat

Formalizáljuk az alábbi ítéletet:
„Amennyiben sáros vagy törött a reflektor és aznap földrengés volt, az operatőr pontosan akkor kap prémiumot, ha időben érkezik, de nincs napfogyatkozás.”

Megoldás: Legyen S: „sáros a reflektor”, T: „törött a reflektor”, F: „aznap földrengés volt”, P: „az operatőr prémiumot kap”, E: „az operatőr időben érkezik”, N: „napfogyatkozás van”. Ezek a prímítéletek. Ekkor a keresett formula:

$$((S \vee T) \wedge F) \;\rightarrow\; (P \leftrightarrow (E \wedge \neg N)).$$

Feladat

Formalizáljuk az alábbi ítéletet:
„Amennyiben sáros vagy törött a reflektor és aznap földrengés volt, az operatőr pontosan akkor kap prémiumot, ha időben érkezik, de nincs napfogyatkozás.”

Megoldás: Legyen S: „sáros a reflektor”, T: „törött a reflektor”, F: „aznap földrengés volt”, P: „az operatőr prémiumot kap”, E: „az operatőr időben érkezik”, N: „napfogyatkozás van”. Ezek a prímítéletek. Ekkor a keresett formula:

$$((S \vee T) \wedge F) \ \to \ (P \leftrightarrow (E \wedge \neg N)).$$

Feladat

Formalizáljuk az alábbi ítéletet:
„Amennyiben sáros vagy törött a reflektor és aznap földrengés volt, az operatőr pontosan akkor kap prémiumot, ha időben érkezik, de nincs napfogyatkozás.''

Megoldás: Legyen S: „sáros a reflektor'', T: „törött a reflektor'', F: „aznap földrengés volt'', P: „az operatőr prémiumot kap'', E: „az operatőr időben érkezik'', N: „napfogyatkozás van''. Ezek a prímítéletek. Ekkor a keresett formula:

$$((S \vee T) \wedge F) \rightarrow (P \leftrightarrow (E \wedge \neg N)).$$

Feladat

Formalizáljuk az alábbi ítéletet:
„Amennyiben sáros vagy törött a reflektor és aznap földrengés volt, az operatőr pontosan akkor kap prémiumot, ha időben érkezik, de nincs napfogyatkozás."

Megoldás: Legyen S: „sáros a reflektor", T: „törött a reflektor", F: „aznap földrengés volt", P: „az operatőr prémiumot kap", E: „az operatőr időben érkezik", N: „napfogyatkozás van". Ezek a prímítéletek. Ekkor a keresett formula:

$$((S \vee T) \wedge F) \ \rightarrow \ (P \leftrightarrow (E \wedge \neg N)).$$

Logikailag ekvivalens formulák és tautológiák

Értelemszerű rekurzióval definiálhatjuk egy formula **kiértékelését** vagy más szóval, a **helyettesítési értékének meghatározását**, amikor a logikai változók helyére igazságértékeket, azaz az **i** és **h** logikai értékeket helyettesítjük.

Definíció (Logikailag ekvivalens formulák)

Az ítéletkalkulus F és G formuláját **logikailag ekvivalens** formuláknak nevezzük (és ezt a tényt $F \equiv G$-vel jelöljük), ha értékük bármely kiértékelésnél megegyezik. Azaz bárhogy helyettesítünk konkrét logikai értékeket a fellépő változókhoz, a két formula esetén ugyanazt kapjuk. (Más szóval: a két formula igazságtáblázata azonos.)

Definíció (Tautológia)

Ha egy F formula minden kiértékelésnél igaz, akkor **tautológiának** nevezzük. Más szóval, F tautológia, ha logikailag ekvivalens egy azonosan igaz formulával (pl. az $A \vee \neg A$ formulával).

Értelemszerű rekurzióval definiálhatjuk egy formula **kiértékelését** vagy más szóval, a **helyettesítési értékének meghatározását**, amikor a logikai változók helyére igazságértékeket, azaz az **i** és **h** logikai értékeket helyettesítjük.

Definíció (Logikailag ekvivalens formulák)

Az ítéletkalkulus F és G formuláját **logikailag ekvivalens** formuláknak nevezzük (és ezt a tényt $F \equiv G$-vel jelöljük), ha értékük bármely kiértékelésnél megegyezik. Azaz bárhogy helyettesítünk konkrét logikai értékeket a fellépő változókhoz, a két formula esetén ugyanazt kapjuk. (Más szóval: a két formula igazságtáblázata azonos.)

Definíció (Tautológia)

Ha egy F formula minden kiértékelésnél igaz, akkor **tautológiának** nevezzük. Más szóval, F tautológia, ha logikailag ekvivalens egy azonosan igaz formulával (pl. az $A \vee \neg A$ formulával).

Logikailag ekvivalens formulák és tautológiák

Értelemszerű rekurzióval definiálhatjuk egy formula **kiértékelését** vagy más szóval, a **helyettesítési értékének meghatározását**, amikor a logikai változók helyére igazságértékeket, azaz az **i** és **h** logikai értékeket helyettesítjük.

Definíció (Logikailag ekvivalens formulák)

Az ítéletkalkulus F és G formuláját **logikailag ekvivalens** formuláknak nevezzük (és ezt a tényt $F \equiv G$-vel jelöljük), ha értékük bármely kiértékelésnél megegyezik. Azaz bárhogy helyettesítünk konkrét logikai értékeket a fellépő változókhoz, a két formula esetén ugyanazt kapjuk. (Más szóval: a két formula igazságtáblázata azonos.)

Definíció (Tautológia)

Ha egy F formula minden kiértékelésnél igaz, akkor **tautológiának** nevezzük. Más szóval, F tautológia, ha logikailag ekvivalens egy azonosan igaz formulával (pl. az $A \vee \neg A$ formulával).

Logikailag ekvivalens formulák és tautológiák

Értelemszerű rekurzióval definiálhatjuk egy formula **kiértékelését** vagy más szóval, a **helyettesítési értékének meghatározását**, amikor a logikai változók helyére igazságértékeket, azaz az **i** és **h** logikai értékeket helyettesítjük.

Definíció (Logikailag ekvivalens formulák)

Az ítéletkalkulus F és G formuláját **logikailag ekvivalens** formuláknak nevezzük (és ezt a tényt $F \equiv G$-vel jelöljük), ha értékük bármely kiértékelésnél megegyezik. Azaz bárhogy helyettesítünk konkrét logikai értékeket a fellépő változókhoz, a két formula esetén ugyanazt kapjuk. (Más szóval: a két formula igazságtáblázata azonos.)

Definíció (Tautológia)

Ha egy F formula minden kiértékelésnél igaz, akkor **tautológiának** nevezzük. Más szóval, F tautológia, ha logikailag ekvivalens egy azonosan igaz formulával (pl. az $A \vee \neg A$ formulával).

Példa logikailag ekvivalens formulákra

Példa

Az $F = (A \to B) \wedge (B \to A)$ formula logikailag ekvivalens a a $G = A \leftrightarrow B$ formulával.

Hogyan lehet erről meggyőződni? Például értéktáblázattal:

A	B	$A \to B$	$B \to A$	$(A \to B) \wedge (B \to A)$	$A \leftrightarrow B$
h	h	i	i	i	i
h	i	i	h	h	h
i	h	h	i	h	h
i	i	i	i	i	i

Megjegyzés: tipikus vizsgafeladat annak eldöntése, hogy két formula ekvivalens-e vagy hogy adott $G_1, \ldots, G_n$ formulák közül egy adott F formula melyikkel ekvivalens.

Bizonyos formulák esetén észben kell tartani, hogy azok logikailag ekvivalensek, ezeket az alábbi tétel foglalja össze.

Példa logikailag ekvivalens formulákra

Példa

Az $F = (A \to B) \wedge (B \to A)$ formula logikailag ekvivalens a a $G = A \leftrightarrow B$ formulával.

Hogyan lehet erről meggyőződni? Például értéktáblázattal:

A	B	$A \to B$	$B \to A$	$(A \to B) \wedge (B \to A)$	$A \leftrightarrow B$
h	h	i	i	i	i
h	i	i	h	h	h
i	h	h	i	h	h
i	i	i	i	i	i

Megjegyzés: tipikus vizsgafeladat annak eldöntése, hogy két formula ekvivalens-e vagy hogy adott $G_1, \ldots, G_n$ formulák közül egy adott F formula melyikkel ekvivalens.

Bizonyos formulák esetén észben kell tartani, hogy azok logikailag ekvivalensek, ezeket az alábbi tétel foglalja össze.

Tétel (Néhány alapvető logikai ekvivalencia)

(1) A "nyilak" kifejezése a többi logikai művelettel:
$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$, $\quad A \to B \equiv (\neg A) \vee B$.
(2) A konjunkció és diszjunkció alaptulajdonságai:
$A \wedge A \equiv A$, $\quad A \vee A \equiv A$ ***idempotencia***,
$A \wedge B \equiv B \wedge A$, $\quad A \vee B \equiv B \vee A$ ***kommutativitás***;
$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$, $\quad (A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ ***asszociativitás***;
$A \wedge (A \vee B) \equiv A$, $\quad A \vee (A \wedge B) \equiv A$ ***abszorptivitás***,
$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ ***disztributivitás***,
$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ ***disztributivitás***.

Ezek bármelyike könnyen igazolható a megfelelő igazságtáblázatok összehasonlításával.

Tétel (Néhány alapvető logikai ekvivalencia)

(1) A "nyilak" kifejezése a többi logikai művelettel:
$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$, $\quad A \to B \equiv (\neg A) \vee B$.
(2) A konjunkció és diszjunkció alaptulajdonságai:
$A \wedge A \equiv A$, $\quad A \vee A \equiv A$ ***idempotencia***,
$A \wedge B \equiv B \wedge A$, $\quad A \vee B \equiv B \vee A$ ***kommutativitás***;
$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$, $\quad (A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ ***asszociativitás***;
$A \wedge (A \vee B) \equiv A$, $\quad A \vee (A \wedge B) \equiv A$ ***abszorptivitás***,
$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ ***disztributivitás***,
$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ ***disztributivitás***.

Ezek bármelyike könnyen igazolható a megfelelő igazságtáblázatok összehasonlításával.

Néhány alapvető logikai ekvivalencia

Tétel (Néhány alapvető logikai ekvivalencia)

(1) A "nyilak" kifejezése a többi logikai művelettel:

$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A), \qquad A \rightarrow B \equiv (\neg A) \vee B.$

(2) A konjunkció és diszjunkció alaptulajdonságai:

$A \wedge A \equiv A, \quad A \vee A \equiv A$ ***idempotencia***,

$A \wedge B \equiv B \wedge A, \quad A \vee B \equiv B \vee A$ ***kommutativitás***;

$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C), \quad (A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ ***asszociativitás***;

$A \wedge (A \vee B) \equiv A, \qquad A \vee (A \wedge B) \equiv A$ ***abszorptivitás***,

$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ ***disztributivitás***,

$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ ***disztributivitás***.

Ezek bármelyike könnyen igazolható a megfelelő igazságtáblázatok összehasonlításával.

Néhány alapvető logikai ekvivalencia

Tétel (Néhány alapvető logikai ekvivalencia)

(1) A "nyilak" kifejezése a többi logikai művelettel:
$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$, $\quad A \to B \equiv (\neg A) \vee B$.
(2) A konjunkció és diszjunkció alaptulajdonságai:
$A \wedge A \equiv A$, $\quad A \vee A \equiv A$ ***idempotencia***,
$A \wedge B \equiv B \wedge A$, $\quad A \vee B \equiv B \vee A$ ***kommutativitás***;
$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$, $\quad (A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ ***asszociativitás***;
$A \wedge (A \vee B) \equiv A$, $\quad A \vee (A \wedge B) \equiv A$ ***abszorptivitás***,
$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ ***disztributivitás***,
$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ ***disztributivitás***.

Ezek bármelyike könnyen igazolható a megfelelő igazságtáblázatok összehasonlításával.

Néhány alapvető logikai ekvivalencia

Tétel (Néhány alapvető logikai ekvivalencia)

(1) A "nyilak" kifejezése a többi logikai művelettel:
$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A), \qquad A \to B \equiv (\neg A) \vee B.$
(2) A konjunkció és diszjunkció alaptulajdonságai:
$A \wedge A \equiv A, \quad A \vee A \equiv A$ ***idempotencia***,
$A \wedge B \equiv B \wedge A, \quad A \vee B \equiv B \vee A$ ***kommutativitás***;
$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C), \quad (A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
asszociativitás;
$A \wedge (A \vee B) \equiv A, \qquad A \vee (A \wedge B) \equiv A$ ***abszorptivitás***,
$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ ***disztributivitás***,
$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ ***disztributivitás***.

Ezek bármelyike könnyen igazolható a megfelelő igazságtáblázatok összehasonlításával.

További logikai ekvivalenciákk

Tétel (De Morgan azonosságok)

$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B), \qquad \neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$

Tétel (Az $\leftrightarrow$ néhány tulajdonsága)

$A \leftrightarrow B \equiv B \leftrightarrow A$ *(kommutativitás)*,
$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$ *(asszociativitás)*.

Tétel (Kontrapozíció)

$A \to B \equiv (\neg B) \to (\neg A)$ (***kontrapozíció***).

Tétel (Tagadás tagadása)

$\neg(\neg A) \equiv A.$

Ezek is hasonlóan könnyen igazolhatók a megfelelő igazságtáblázatok összehasonlításával.

További logikai ekvivalenciákk

Tétel (De Morgan azonosságok)

$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B), \qquad \neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$

Tétel (Az $\leftrightarrow$ néhány tulajdonsága)

$A \leftrightarrow B \equiv B \leftrightarrow A$ *(kommutativitás)*,
$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$ *(asszociativitás)*.

Tétel (Kontrapozíció)

$A \to B \equiv (\neg B) \to (\neg A)$ (***kontrapozíció***).

Tétel (Tagadás tagadása)

$\neg(\neg A) \equiv A$.

Ezek is hasonlóan könnyen igazolhatók a megfelelő igazságtáblázatok összehasonlításával.

További logikai ekvivalenciákk

Tétel (De Morgan azonosságok)

$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B), \qquad \neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$

Tétel (Az $\leftrightarrow$ néhány tulajdonsága)

$A \leftrightarrow B \equiv B \leftrightarrow A$ *(kommutativitás)*,
$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$ *(asszociativitás)*.

Tétel (Kontrapozíció)

$A \to B \equiv (\neg B) \to (\neg A)$ *(**kontrapozíció**)*.

Tétel (Tagadás tagadása)

$\neg(\neg A) \equiv A.$

Ezek is hasonlóan könnyen igazolhatók a megfelelő igazságtáblázatok összehasonlításával.

További logikai ekvivalenciákk

Tétel (De Morgan azonosságok)

$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B), \qquad \neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$

Tétel (Az $\leftrightarrow$ néhány tulajdonsága)

$A \leftrightarrow B \equiv B \leftrightarrow A \qquad$ *(kommutativitás)*,

$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C) \qquad$ *(asszociativitás)*.

Tétel (Kontrapozíció)

$A \rightarrow B \equiv (\neg B) \rightarrow (\neg A) \qquad$ (***kontrapozíció***).

Tétel (Tagadás tagadása)

$\neg(\neg A) \equiv A.$

Ezek is hasonlóan könnyen igazolhatók a megfelelő igazságtáblázatok összehasonlításával.

Mintafeladat (és megoldási fogás)

Feladat (Az implikáció kezelése)

Bizonyítsuk be, hogy $A \to (B \to C) \equiv (A \wedge B) \to C$.

Megoldás: Elég belátni, hogy a két oldal **pontosan ugyanakkor hamis**! A bal oldal pontosan akkor hamis, ha $A = \mathbf{i}$ és $B \to C$ hamis; azaz pontosan akkor, ha $A = \mathbf{i}$ igaz, $B = \mathbf{i}$ és $C = \mathbf{h}$.
A jobb oldal pontosan akkor hamis, ha $A \wedge B$ igaz és $C = \mathbf{h}$, azaz pontosan akkor ha $A = \mathbf{i}$ igaz, $B = \mathbf{i}$ és $C = \mathbf{h}$, tehát pontosak akkor, amikor a bal oldal. Q.e.d.

Megjegyzés

(Az $\to$ és a $\vee$ kezeléséről) A fenti módszer sikere azon múlik, hogy az implikáció ritkán hamis. (A négy lehetséges kiértékelés esetén csak az egyiknél.) Ugyanez érvényes a diszjunkcióra is; a fenti módszer arra is alkalmazható.

Mintafeladat (és megoldási fogás)

Feladat (Az implikáció kezelése)

Bizonyítsuk be, hogy $A \to (B \to C) \equiv (A \wedge B) \to C$.

Megoldás: Elég belátni, hogy a két oldal **pontosan ugyanakkor hamis**! A bal oldal pontosan akkor hamis, ha $A = \mathbf{i}$ és $B \to C$ hamis; azaz pontosan akkor, ha $A = \mathbf{i}$ igaz, $B = \mathbf{i}$ és $C = \mathbf{h}$.

A jobb oldal pontosan akkor hamis, ha $A \wedge B$ igaz és $C = \mathbf{h}$, azaz pontosan akkor ha $A = \mathbf{i}$ igaz, $B = \mathbf{i}$ és $C = \mathbf{h}$, tehát pontosak akkor, amikor a bal oldal. Q.e.d.

Megjegyzés

(Az $\to$ és a $\vee$ kezeléséről) A fenti módszer sikere azon múlik, hogy az implikáció ritkán hamis. (A négy lehetséges kiértékelés esetén csak az egyiknél.) Ugyanez érvényes a diszjunkcióra is; a fenti módszer arra is alkalmazható.

Mintafeladat (és megoldási fogás)

Feladat (Az implikáció kezelése)

Bizonyítsuk be, hogy $A \to (B \to C) \equiv (A \wedge B) \to C$.

Megoldás: Elég belátni, hogy a két oldal **pontosan ugyanakkor hamis**! A bal oldal pontosan akkor hamis, ha $A = \mathbf{i}$ és $B \to C$ hamis; azaz pontosan akkor, ha $A = \mathbf{i}$ igaz, $B = \mathbf{i}$ és $C = \mathbf{h}$.

A jobb oldal pontosan akkor hamis, ha $A \wedge B$ igaz és $C = \mathbf{h}$, azaz pontosan akkor ha $A = \mathbf{i}$ igaz, $B = \mathbf{i}$ és $C = \mathbf{h}$, tehát pontosak akkor, amikor a bal oldal. Q.e.d.

Megjegyzés

(Az $\to$ és a $\vee$ kezeléséről) A fenti módszer sikere azon múlik, hogy az implikáció ritkán hamis. (A négy lehetséges kiértékelés esetén csak az egyiknél.) Ugyanez érvényes a diszjunkcióra is; a fenti módszer arra is alkalmazható.

Mintafeladat (és megoldási fogás)

Feladat (Az implikáció kezelése)

Bizonyítsuk be, hogy $A \to (B \to C) \equiv (A \wedge B) \to C$.

Megoldás: Elég belátni, hogy a két oldal **pontosan ugyanakkor hamis**! A bal oldal pontosan akkor hamis, ha $A = \mathbf{i}$ és $B \to C$ hamis; azaz pontosan akkor, ha $A = \mathbf{i}$ igaz, $B = \mathbf{i}$ és $C = \mathbf{h}$.

A jobb oldal pontosan akkor hamis, ha $A \wedge B$ igaz és $C = \mathbf{h}$, azaz pontosan akkor ha $A = \mathbf{i}$ igaz, $B = \mathbf{i}$ és $C = \mathbf{h}$, tehát pontosak akkor, amikor a bal oldal. Q.e.d.

Megjegyzés

(Az $\to$ és a $\vee$ kezeléséről) A fenti módszer sikere azon múlik, hogy az implikáció ritkán hamis. (A négy lehetséges kiértékelés esetén csak az egyiknél.) Ugyanez érvényes a diszjunkcióra is; a fenti módszer arra is alkalmazható.

Mintafeladat (és megoldási fogás)

Feladat (Az implikáció kezelése)

Bizonyítsuk be, hogy $A \to (B \to C) \equiv (A \wedge B) \to C$.

Megoldás: Elég belátni, hogy a két oldal **pontosan ugyanakkor hamis**! A bal oldal pontosan akkor hamis, ha $A = \mathbf{i}$ és $B \to C$ hamis; azaz pontosan akkor, ha $A = \mathbf{i}$ igaz, $B = \mathbf{i}$ és $C = \mathbf{h}$.

A jobb oldal pontosan akkor hamis, ha $A \wedge B$ igaz és $C = \mathbf{h}$, azaz pontosan akkor ha $A = \mathbf{i}$ igaz, $B = \mathbf{i}$ és $C = \mathbf{h}$, tehát pontosak akkor, amikor a bal oldal. Q.e.d.

Megjegyzés

(Az $\to$ és a $\vee$ kezeléséről) A fenti módszer sikere azon múlik, hogy az implikáció ritkán hamis. (A négy lehetséges kiértékelés esetén csak az egyiknél.) Ugyanez érvényes a diszjunkcióra is; a fenti módszer arra is alkalmazható.

Mintafeladat (és megoldási fogás)

Feladat (Az implikáció kezelése)

Bizonyítsuk be, hogy $A \to (B \to C) \equiv (A \wedge B) \to C$.

Megoldás: Elég belátni, hogy a két oldal **pontosan ugyanakkor hamis**! A bal oldal pontosan akkor hamis, ha $A = \mathbf{i}$ és $B \to C$ hamis; azaz pontosan akkor, ha $A = \mathbf{i}$ igaz, $B = \mathbf{i}$ és $C = \mathbf{h}$.

A jobb oldal pontosan akkor hamis, ha $A \wedge B$ igaz és $C = \mathbf{h}$, azaz pontosan akkor ha $A = \mathbf{i}$ igaz, $B = \mathbf{i}$ és $C = \mathbf{h}$, tehát pontosak akkor, amikor a bal oldal. Q.e.d.

Megjegyzés

(Az $\to$ és a $\vee$ kezeléséről) A fenti módszer sikere azon múlik, hogy az implikáció ritkán hamis. (A négy lehetséges kiértékelés esetén csak az egyiknél.) Ugyanez érvényes a diszjunkcióra is; a fenti módszer arra is alkalmazható.

Mintafeladat (és megoldási fogás)

Feladat (Az implikáció kezelése)

Bizonyítsuk be, hogy $A \to (B \to C) \equiv (A \wedge B) \to C$.

Megoldás: Elég belátni, hogy a két oldal **pontosan ugyanakkor hamis**! A bal oldal pontosan akkor hamis, ha $A = \mathbf{i}$ és $B \to C$ hamis; azaz pontosan akkor, ha $A = \mathbf{i}$ igaz, $B = \mathbf{i}$ és $C = \mathbf{h}$.
A jobb oldal pontosan akkor hamis, ha $A \wedge B$ igaz és $C = \mathbf{h}$, azaz pontosan akkor ha $A = \mathbf{i}$ igaz, $B = \mathbf{i}$ és $C = \mathbf{h}$, tehát pontosak akkor, amikor a bal oldal. Q.e.d.

Megjegyzés

(Az $\to$ és a $\vee$ kezeléséről) A fenti módszer sikere azon múlik, hogy az implikáció ritkán hamis. (A négy lehetséges kiértékelés esetén csak az egyiknél.) Ugyanez érvényes a diszjunkcióra is; a fenti módszer arra is alkalmazható.

Mintafeladat (és megoldási fogás)

Feladat (Az implikáció kezelése)

Bizonyítsuk be, hogy $A \to (B \to C) \equiv (A \wedge B) \to C$.

Megoldás: Elég belátni, hogy a két oldal **pontosan ugyanakkor hamis**! A bal oldal pontosan akkor hamis, ha $A = \mathbf{i}$ és $B \to C$ hamis; azaz pontosan akkor, ha $A = \mathbf{i}$ igaz, $B = \mathbf{i}$ és $C = \mathbf{h}$.
A jobb oldal pontosan akkor hamis, ha $A \wedge B$ igaz és $C = \mathbf{h}$, azaz pontosan akkor ha $A = \mathbf{i}$ igaz, $B = \mathbf{i}$ és $C = \mathbf{h}$, tehát pontosak akkor, amikor a bal oldal. Q.e.d.

Megjegyzés

(Az $\to$ és a $\vee$ kezeléséről) A fenti módszer sikere azon múlik, hogy az implikáció ritkán hamis. (A négy lehetséges kiértékelés esetén csak az egyiknél.) Ugyanez érvényes a diszjunkcióra is; a fenti módszer arra is alkalmazható.

Néhány tautológia

Az alábbi állítások a definíciók evidens következményei. Segítségükkel újabb tautológiákat és logikailag ekvivalens formulapárokat gyárthatunk.

Állítás (logikai ekvivalenciákból tautológia)

Az ítéletkalkulus tetszőleges F és G formulájára érvényes, hogy $F \equiv G$ pontosak akkor, ha $F \leftrightarrow G$ tautológia.

Állítás (változók helyére formulák)

Ha egy tautológia változói helyére tetszőleges formulákat helyettesítünk (természetesen egyazon változó minden felléptekor ugyanazt a formulát), akkor tautológiát kapunk.

A fenti két állítás kombinálható is, amint azt a következő példa mutatja.

Néhány tautológia

Az alábbi állítások a definíciók evidens következményei. Segítségükkel újabb tautológiákat és logikailag ekvivalens formulapárokat gyárthatunk.

Állítás (logikai ekvivalenciákból tautológia)

Az ítéletkalkulus tetszőleges F és G formulájára érvényes, hogy $F \equiv G$ pontosak akkor, ha $F \leftrightarrow G$ tautológia.

Állítás (változók helyére formulák)

Ha egy tautológia változói helyére tetszőleges formulákat helyettesítünk (természetesen egyazon változó minden felléptekor ugyanazt a formulát), akkor tautológiát kapunk.

A fenti két állítás kombinálható is, amint azt a következő példa mutatja.

Néhány tautológia

Az alábbi állítások a definíciók evidens következményei. Segítségükkel újabb tautológiákat és logikailag ekvivalens formulapárokat gyárthatunk.

Állítás (logikai ekvivalenciákból tautológia)

Az ítéletkalkulus tetszőleges F és G formulájára érvényes, hogy $F \equiv G$ pontosak akkor, ha $F \leftrightarrow G$ tautológia.

Állítás (változók helyére formulák)

Ha egy tautológia változói helyére tetszőleges formulákat helyettesítünk (természetesen egyazon változó minden felléptekor ugyanazt a formulát), akkor tautológiát kapunk.

A fenti két állítás kombinálható is, amint azt a következő példa mutatja.

Néhány tautológia

Az alábbi állítások a definíciók evidens következményei. Segítségükkel újabb tautológiákat és logikailag ekvivalens formulapárokat gyárthatunk.

Állítás (logikai ekvivalenciákból tautológia)

Az ítéletkalkulus tetszőleges F és G formulájára érvényes, hogy $F \equiv G$ pontosak akkor, ha $F \leftrightarrow G$ tautológia.

Állítás (változók helyére formulák)

Ha egy tautológia változói helyére tetszőleges formulákat helyettesítünk (természetesen egyazon változó minden felléptekor ugyanazt a formulát), akkor tautológiát kapunk.

A fenti két állítás kombinálható is, amint azt a következő példa mutatja.

Példa változók helyettesítésére

Feladat

Ekvivalens-e logikailag az alábbi két formula:
$F = ((A \wedge B) \to C) \vee D$ és $G = \neg(\neg((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D)$?

Megoldás (Aprólékosan)

A de Morgan azonosság és a "logikai ekvivalenciákból tautológia" állításunk szerint $(A \vee B) \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$ tautológia. A helyére az $(A \wedge B) \to C$, a B helyére pedig a D formulát helyettesítve:

$$\big(\underbrace{((A \wedge B) \to C) \vee D}_{F}\big) \leftrightarrow \big(\underbrace{\neg(\neg((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D)}_{G}\big)$$

ami az előző állítás szerint tautológia. Így a "logikai ekvivalenciákból tautológia" állításunk szerint a válasz: igen.

Igazságtáblázattal - ami $2^4 = 16$ sorból állna) sokkal több munkát igényelne!

Példa változók helyettesítésére

Feladat

Ekvivalens-e logikailag az alábbi két formula:
$F = ((A \wedge B) \to C) \vee D$ és $G = \neg(\neg((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D)$?

Megoldás (Aprólékosan)

A de Morgan azonosság és a "logikai ekvivalenciákból tautológia" állításunk szerint $(A \vee B) \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$ tautológia. A helyére az $(A \wedge B) \to C$, a B helyére pedig a D formulát helyettesítve:

$$(\underbrace{((A \wedge B) \to C) \vee D}_{F}) \leftrightarrow (\underbrace{\neg(\neg((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D)}_{G})$$

ami az előző állítás szerint tautológia. Így a "logikai ekvivalenciákból tautológia" állításunk szerint a válasz: **igen**.

Igazságtáblázattal - ami $2^4 = 16$ sorból állna) sokkal több munkát igényelne!

Példa változók helyettesítésére

Feladat

Ekvivalens-e logikailag az alábbi két formula:
$F = ((A \wedge B) \to C) \vee D$ és $G = \neg(\neg((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D)$?

Megoldás (Aprólékosan)

A de Morgan azonosság és a "logikai ekvivalenciákból tautológia" állításunk szerint $(A \vee B) \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$ tautológia. A helyére az $(A \wedge B) \to C$, a B helyére pedig a D formulát helyettesítve:

$$\big(\underbrace{((A \wedge B) \to C) \vee D}_{F}\big) \leftrightarrow \big(\underbrace{\neg(\neg((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D)}_{G}\big)$$

ami az előző állítás szerint tautológia. Így a "logikai ekvivalenciákból tautológia" állításunk szerint a válasz: **igen**.

Igazságtáblázattal - ami $2^4 = 16$ sorból állna) sokkal több munkát igényelne!

Rövidebb megoldás

Megoldás (Gyorsabban)

Az előző állítás mintájára az is igaz, hogy a mondott helyettesítés logikailag ekvivalens formulákból logikailag ekvivalens formulákat ad. Ez a tény hasonló de kissé rövidebb megoldást tesz lehetővé, amelynek során nem kell a "logikai ekvivalenciákból tautológia" állításunkra hivatkozni.

Részformula helyettesítése logikailag ekvivalens formulával

Állítás

Ha egy formula valamely részformulája helyébe vele logikailag ekvivalens formulát írunk, akkor az eredetivel logikailag ekvivalens formulát kapunk.

Ez is a definíciók következménye (nem részletezzük, hogy miért).

Példa

Az $F = (A \to B) \to (C \wedge \neg D)$ formula logikailag ekvivalens a $F = (B \vee \neg A) \to (C \wedge \neg D)$ formulával, hiszen a piros részformula helyére a vele ekvivalens kék formulát helyettesítve kaptuk G-t.

(Igazságtáblázattal sokkal lassabb lenne.) Az alábbi előkészületek célja az, hogy tetszőleges formulához egy vele logikailag ekvivalens jól kezelhető formulát találjunk.

Részformula helyettesítése logikailag ekvivalens formulával

Állítás

Ha egy formula valamely részformulája helyébe vele logikailag ekvivalens formulát írunk, akkor az eredetivel logikailag ekvivalens formulát kapunk.

Ez is a definíciók következménye (nem részletezzük, hogy miért).

Példa

Az $F = (A \to B) \to (C \wedge \neg D)$ formula logikailag ekvivalens a $F = (B \vee \neg A) \to (C \wedge \neg D)$ formulával, hiszen a piros részformula helyére a vele ekvivalens kék formulát helyettesítve kaptuk G-t.

(Igazságtáblázattal sokkal lassabb lenne.) Az alábbi előkészületek célja az, hogy tetszőleges formulához egy vele logikailag ekvivalens jól kezelhető formulát találjunk.

Részformula helyettesítése logikailag ekvivalens formulával

Állítás

Ha egy formula valamely részformulája helyébe vele logikailag ekvivalens formulát írunk, akkor az eredetivel logikailag ekvivalens formulát kapunk.

Ez is a definíciók következménye (nem részletezzük, hogy miért).

Példa

Az $F = (A \to B) \to (C \wedge \neg D)$ formula logikailag ekvivalens a $F = (B \vee \neg A) \to (C \wedge \neg D)$ formulával, hiszen a piros részformula helyére a vele ekvivalens kék formulát helyettesítve kaptuk G-t.

(Igazságtáblázattal sokkal lassabb lenne.) Az alábbi előkészületek célja az, hogy tetszőleges formulához egy vele logikailag ekvivalens jól kezelhető formulát találjunk.

Részformula helyettesítése logikailag ekvivalens formulával

Állítás

Ha egy formula valamely részformulája helyébe vele logikailag ekvivalens formulát írunk, akkor az eredetivel logikailag ekvivalens formulát kapunk.

Ez is a definíciók következménye (nem részletezzük, hogy miért).

Példa

Az $F = (A \to B) \to (C \wedge \neg D)$ formula logikailag ekvivalens a $F = (B \vee \neg A) \to (C \wedge \neg D)$ formulával, hiszen a piros részformula helyére a vele ekvivalens kék formulát helyettesítve kaptuk G-t.

(Igazságtáblázattal sokkal lassabb lenne.) Az alábbi előkészületek célja az, hogy tetszőleges formulához egy vele logikailag ekvivalens jól kezelhető formulát találjunk.

Diszjunktív normálforma

Definíció (Diszjunktív normálforma)

Egy formulát **diszjunktív normálformának** hívunk, ha $K_1 \vee \cdots \vee K_m$ alakú, ahol minden egyes $K_i \quad (1 \leq i \leq m)$ változóknak és negáltjaiknak a konjunkciója oly módon, hogy K_i-ben mindegyik változó **legfeljebb egyszer** szerepel, továbbá a K_i-k páronként lényegesen különbözők (azaz nemcsak a konjunkció tényezőinek sorrendjében térnek el). A K_i-ket **elemi konjunkcióknak** nevezzük.
Ha egy n-változós diszjunktív normálforma esetén minden egyes K_i-ben mind az n változó fellép, akkor **teljes diszjunktív normálformáról** beszélünk.

A definíció épít a konjunkció és diszjunkció asszociativitására: ahogy mondjuk a $k_1 + \cdots + k_n$ összeget sem kell zárójelezni, mert mindegy, milyen sorrendben adjuk össze a számokat, éppúgy a $K_1 \vee \cdots \vee K_m$ diszjunkciót sem zárójelezzük.

Diszjunktív normálforma

Definíció (Diszjunktív normálforma)

Egy formulát **diszjunktív normálformának** hívunk, ha $K_1 \vee \cdots \vee K_m$ alakú, ahol minden egyes $K_i \quad (1 \leq i \leq m)$ változóknak és negáltjaiknak a konjunkciója oly módon, hogy K_i-ben mindegyik változó **legfeljebb egyszer** szerepel, továbbá a K_i-k páronként lényegesen különbözők (azaz nemcsak a konjunkció tényezőinek sorrendjében térnek el). A K_i-ket **elemi konjunkcióknak** nevezzük.

Ha egy n-változós diszjunktív normálforma esetén minden egyes K_i-ben mind az n változó fellép, akkor **teljes diszjunktív normálformáról** beszélünk.

A definíció épít a konjunkció és diszjunkció asszociativitására: ahogy mondjuk a $k_1 + \cdots + k_n$ összeget sem kell zárójelezni, mert mindegy, milyen sorrendben adjuk össze a számokat, éppúgy a $K_1 \vee \cdots \vee K_m$ diszjunkciót sem zárójelezzük.

Néhány példa

Példa

Ha $n = 3$, akkor
$F = (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3)$ egy teljes diszjunktív normálforma. Ha $n > 3$, akkor a fenti F ugyan diszjunktív normálforma, de nem teljes.
Az $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge \neg A_2)$ diszjunktív normálforma, de nem teljes. Ez utóbbit nem különböztetjük meg a $(\neg A_2 \wedge A_1) \vee (A_3 \wedge A_1 \wedge A_2)$ diszjunktív normálformától (hiszen eltérés csak a sorrendben van).
Az $A_1 \vee \neg A_2$ is diszjunktív normálforma (megengedjük az egytényezős konjunkciót is). Az $A_1 \wedge \neg A_2$ is d.n.f. (egytagú diszjunkció).
Megengedjük az üres (0-tagú) diszjunkciót **h**, valamint az üres (0-tényezőjű) konjunkciót **i** jelentéssel is, ezért a konstans **h** és a konstans **i** is diszjunktív normálformának tekintendő. A **h** teljes d.n.f. (üres diszjunkció), az **i** viszont nem teljes d.n.f.

Néhány példa

Példa

Ha $n = 3$, akkor
$F = (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3)$ egy teljes diszjunktív normálforma. Ha $n > 3$, akkor a fenti F ugyan diszjunktív normálforma, de nem teljes.
Az $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge \neg A_2)$ diszjunktív normálforma, de nem teljes. Ez utóbbit nem különböztetjük meg a $(\neg A_2 \wedge A_1) \vee (A_3 \wedge A_1 \wedge A_2)$ diszjunktív normálformától (hiszen eltérés csak a sorrendben van).
Az $A_1 \vee \neg A_2$ is diszjunktív normálforma (megengedjük az egytényezős konjunkciót is). Az $A_1 \wedge \neg A_2$ is d.n.f. (egytagú diszjunkció).
Megengedjük az üres (0-tagú) diszjunkciót **h**, valamint az üres (0-tényezőjű) konjunkciót **i** jelentéssel is, ezért a konstans **h** és a konstans **i** is diszjunktív normálformának tekintendő. A **h** teljes d.n.f. (üres diszjunkció), az **i** viszont nem teljes d.n.f.

Néhány példa

Példa

Ha $n = 3$, akkor
$F = (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3)$ egy teljes diszjunktív normálforma. Ha $n > 3$, akkor a fenti F ugyan diszjunktív normálforma, de nem teljes.
Az $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge \neg A_2)$ diszjunktív normálforma, de nem teljes. Ez utóbbit nem különböztetjük meg a $(\neg A_2 \wedge A_1) \vee (A_3 \wedge A_1 \wedge A_2)$ diszjunktív normálformától (hiszen eltérés csak a sorrendben van).
Az $A_1 \vee \neg A_2$ is diszjunktív normálforma (megengedjük az egytényezős konjunkciót is). Az $A_1 \wedge \neg A_2$ is d.n.f. (egytagú diszjunkció).
Megengedjük az üres (0-tagú) diszjunkciót **h**, valamint az üres (0-tényezőjű) konjunkciót **i** jelentéssel is, ezért a konstans **h** és a konstans **i** is diszjunktív normálformának tekintendő. A **h** teljes d.n.f. (üres diszjunkció), az **i** viszont nem teljes d.n.f.

Néhány példa

Példa

Ha $n = 3$, akkor
$F = (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3)$ egy teljes diszjunktív normálforma. Ha $n > 3$, akkor a fenti F ugyan diszjunktív normálforma, de nem teljes.
Az $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge \neg A_2)$ diszjunktív normálforma, de nem teljes. Ez utóbbit nem különböztetjük meg a $(\neg A_2 \wedge A_1) \vee (A_3 \wedge A_1 \wedge A_2)$ diszjunktív normálformától (hiszen eltérés csak a sorrendben van).
Az $A_1 \vee \neg A_2$ is diszjunktív normálforma (megengedjük az egytényezős konjunkciót is). Az $A_1 \wedge \neg A_2$ is d.n.f. (egytagú diszjunkció).
Megengedjük az üres (0-tagú) diszjunkciót **h**, valamint az üres (0-tényezőjű) konjunkciót **i** jelentéssel is, ezért a konstans **h** és a konstans **i** is diszjunktív normálformának tekintendő. A **h** teljes d.n.f. (üres diszjunkció), az **i** viszont nem teljes d.n.f.

Példa

Ha $n = 3$, akkor
$F = (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3)$ egy teljes diszjunktív normálforma. Ha $n > 3$, akkor a fenti F ugyan diszjunktív normálforma, de nem teljes.
Az $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge \neg A_2)$ diszjunktív normálforma, de nem teljes. Ez utóbbit nem különböztetjük meg a
$(\neg A_2 \wedge A_1) \vee (A_3 \wedge A_1 \wedge A_2)$ diszjunktív normálformától (hiszen eltérés csak a sorrendben van).
Az $A_1 \vee \neg A_2$ is diszjunktív normálforma (megengedjük az egytényezős konjunkciót is). Az $A_1 \wedge \neg A_2$ is d.n.f. (egytagú diszjunkció).
Megengedjük az üres (0-tagú) diszjunkciót **h**, valamint az üres (0-tényezőjű) konjunkciót **i** jelentéssel is, ezért a konstans **h** és a konstans **i** is diszjunktív normálformának tekintendő. A **h** teljes d.n.f. (üres diszjunkció), az **i** viszont nem teljes d.n.f.

Néhány példa

Példa

Ha $n = 3$, akkor
$F = (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3)$ egy teljes diszjunktív normálforma. Ha $n > 3$, akkor a fenti F ugyan diszjunktív normálforma, de nem teljes.
Az $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge \neg A_2)$ diszjunktív normálforma, de nem teljes. Ez utóbbit nem különböztetjük meg a $(\neg A_2 \wedge A_1) \vee (A_3 \wedge A_1 \wedge A_2)$ diszjunktív normálformától (hiszen eltérés csak a sorrendben van).
Az $A_1 \vee \neg A_2$ is diszjunktív normálforma (megengedjük az egytényezős konjunkciót is). Az $A_1 \wedge \neg A_2$ is d.n.f. (egytagú diszjunkció).
Megengedjük az üres (0-tagú) diszjunkciót **h**, valamint az üres (0-tényezőjű) konjunkciót **i** jelentéssel is, ezért a konstans **h** és a konstans **i** is diszjunktív normálformának tekintendő. A **h** teljes d.n.f. (üres diszjunkció), az **i** viszont nem teljes d.n.f.

Néhány példa

Példa

Ha $n = 3$, akkor $F = (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3)$ egy teljes diszjunktív normálforma. Ha $n > 3$, akkor a fenti F ugyan diszjunktív normálforma, de nem teljes.

Az $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge \neg A_2)$ diszjunktív normálforma, de nem teljes. Ez utóbbit nem különböztetjük meg a $(\neg A_2 \wedge A_1) \vee (A_3 \wedge A_1 \wedge A_2)$ diszjunktív normálformától (hiszen eltérés csak a sorrendben van).

Az $A_1 \vee \neg A_2$ is diszjunktív normálforma (megengedjük az egytényezős konjunkciót is). Az $A_1 \wedge \neg A_2$ is d.n.f. (egytagú diszjunkció).

Megengedjük az üres (0-tagú) diszjunkciót **h**, valamint az üres (0-tényezőjű) konjunkciót **i** jelentéssel is, ezért a konstans **h** és a konstans **i** is diszjunktív normálformának tekintendő. A **h** teljes d.n.f. (üres diszjunkció), az **i** viszont nem teljes d.n.f.

Néhány példa

Példa

Ha $n = 3$, akkor
$F = (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3)$ egy teljes diszjunktív normálforma. Ha $n > 3$, akkor a fenti F ugyan diszjunktív normálforma, de nem teljes.
Az $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge \neg A_2)$ diszjunktív normálforma, de nem teljes. Ez utóbbit nem különböztetjük meg a $(\neg A_2 \wedge A_1) \vee (A_3 \wedge A_1 \wedge A_2)$ diszjunktív normálformától (hiszen eltérés csak a sorrendben van).
Az $A_1 \vee \neg A_2$ is diszjunktív normálforma (megengedjük az egytényezős konjunkciót is). Az $A_1 \wedge \neg A_2$ is d.n.f. (egytagú diszjunkció).
Megengedjük az üres (0-tagú) diszjunkciót **h**, valamint az üres (0-tényezőjű) konjunkciót **i** jelentéssel is, ezért a konstans **h** és a konstans **i** is diszjunktív normálformának tekintendő. A **h** teljes d.n.f. (üres diszjunkció), az **i** viszont nem teljes d.n.f.

Mire jók a diszjunktív normálformák?

A diszjunktív normálformák egyik alkalmazása a logikai áramkörök tervezése. Tulajdonképpen minden logikai áramkör egy formula realizációjának tekinthető. A formulát felírjuk diszjunktív normálformában, majd speciális áramköri kapukból, ún. „és-kapukból" és „vagy-kapukból" drótok felhasználásával megépítjük — illetve szilíciumlapra integráljuk. Célszerű a diszjunktív normálformát úgy választani, hogy a lehető legolcsóbb legyen megépíteni. Ez nem triviális feladat, hiszen pl. egy ötváltozós formula átlagosan kb. $3,29 \cdot 10^{63}$ diszjunktív normálformával ekvivalens logikailag; hatváltozós esetben a megfelelő szám $1,53 \cdot 10^{200}$. Ilyen kérdésekkel pl. a Boole-függvények tantárgy foglalkozik. Természetesen amikor megszámoljuk a diszjunktív normálformákat, akkor nem különböztetjük meg azokat, amelyek csak a diszjunkciós tagok vagy a konjunkciós tényezők sorrendjében térnek el.

Mire jók a diszjunktív normálformák?

A diszjunktív normálformák egyik alkalmazása a logikai áramkörök tervezése. Tulajdonképpen minden logikai áramkör egy formula realizációjának tekinthető. A formulát felírjuk diszjunktív normálformában, majd speciális áramköri kapukból, ún. „és-kapukból" és „vagy-kapukból" drótok felhasználásával megépítjük — illetve szilíciumlapra integráljuk. Célszerű a diszjunktív normálformát úgy választani, hogy a lehető legolcsóbb legyen megépíteni. Ez nem triviális feladat, hiszen pl. egy ötváltozós formula átlagosan kb. $3,29 \cdot 10^{63}$ diszjunktív normálformával ekvivalens logikailag; hatváltozós esetben a megfelelő szám $1,53 \cdot 10^{200}$. Ilyen kérdésekkel pl. a Boole-függvények tantárgy foglalkozik. Természetesen amikor megszámoljuk a diszjunktív normálformákat, akkor nem különböztetjük meg azokat, amelyek csak a diszjunkciós tagok vagy a konjunkciós tényezők sorrendjében térnek el.

Mire jók a diszjunktív normálformák?

A diszjunktív normálformák egyik alkalmazása a logikai áramkörök tervezése. Tulajdonképpen minden logikai áramkör egy formula realizációjának tekinthető. A formulát felírjuk diszjunktív normálformában, majd speciális áramköri kapukból, ún. „és-kapukból” és „vagy-kapukból” drótok felhasználásával megépítjük — illetve szilíciumlapra integráljuk. Célszerű a diszjunktív normálformát úgy választani, hogy a lehető legolcsóbb legyen megépíteni. Ez nem triviális feladat, hiszen pl. egy ötváltozós formula átlagosan kb. $3,29 \cdot 10^{63}$ diszjunktív normálformával ekvivalens logikailag; hatváltozós esetben a megfelelő szám $1,53 \cdot 10^{200}$. Ilyen kérdésekkel pl. a Boole-függvények tantárgy foglalkozik. Természetesen amikor megszámoljuk a diszjunktív normálformákat, akkor nem különböztetjük meg azokat, amelyek csak a diszjunkciós tagok vagy a konjunkciós tényezők sorrendjében térnek el.

Teljes diszjunktív normálformák

Tétel (A t.d.n.f. egzisztenciája és unicitása)

*Az ítéletkalkulus tetszőleges F n-változós formulájához **létezik** egy vele logikailag ekvivalens teljes diszjunktív normálforma, amely a diszjunkció tagjainak és (azon belül) a konjunkciók tényezőinek sorrendjétől eltekintve **egyértelműen meghatározott**. Ez a teljes diszjunktív normálforma az F igazságtáblázatából az alábbi módon határozható meg: a keresett $K_1 \vee \cdots \vee K_m$ t.d.n.f.-ben m a táblázat azon sorainak a száma, ahol a formula az* i *logikai értéket veszi fel. Minden ilyen sorhoz a megfelelő K_i-t úgy kapjuk, hogy pontosan azon változókat negáljuk, amelyek a* h *értéket veszik fel, és ezek után vesszük az összes változót tartalmazó konjunkciót.*

Például az $F = A \leftrightarrow B$ formula esetén az alábbi módon kell eljárni. (A korábbi igazságtáblázatot idézzük, de abból most csak az első kettő és az utolsó oszlopra van szükség.)

Teljes diszjunktív normálformák

Tétel (A t.d.n.f. egzisztenciája és unicitása)

Az ítéletkalkulus tetszőleges F n-változós formulájához ***létezik*** *egy vele logikailag ekvivalens teljes diszjunktív normálforma, amely a diszjunkció tagjainak és (azon belül) a konjunkciók tényezőinek sorrendjétől eltekintve* ***egyértelműen meghatározott****. Ez a teljes diszjunktív normálforma az F igazságtáblázatából az alábbi módon határozható meg: a keresett $K_1 \vee \cdots \vee K_m$ t.d.n.f.-ben m a táblázat azon sorainak a száma, ahol a formula az* **i** *logikai értéket veszi fel. Minden ilyen sorhoz a megfelelő K_i-t úgy kapjuk, hogy pontosan azon változókat negáljuk, amelyek a* **h** *értéket veszik fel, és ezek után vesszük az összes változót tartalmazó konjunkciót.*

Például az $F = A \leftrightarrow B$ formula esetén az alábbi módon kell eljárni. (A korábbi igazságtáblázatot idézzük, de abból most csak az első kettő és az utolsó oszlopra van szükség.)

Teljes diszjunktív normálformák

Tétel (A t.d.n.f. egzisztenciája és unicitása)

Az ítéletkalkulus tetszőleges F n-változós formulájához ***létezik*** *egy vele logikailag ekvivalens teljes diszjunktív normálforma, amely a diszjunkció tagjainak és (azon belül) a konjunkciók tényezőinek sorrendjétől eltekintve* ***egyértelműen meghatározott****. Ez a teljes diszjunktív normálforma az F igazságtáblázatából az alábbi módon határozható meg: a keresett $K_1 \vee \cdots \vee K_m$ t.d.n.f.-ben m a táblázat azon sorainak a száma, ahol a formula az* **i** *logikai értéket veszi fel. Minden ilyen sorhoz a megfelelő K_i-t úgy kapjuk, hogy pontosan azon változókat negáljuk, amelyek a* **h** *értéket veszik fel, és ezek után vesszük az összes változót tartalmazó konjunkciót.*

Például az $F = A \leftrightarrow B$ formula esetén az alábbi módon kell eljárni. (A korábbi igazságtáblázatot idézzük, de abból most csak az első kettő és az utolsó oszlopra van szükség.)

Teljes diszjunktív normálformák

Tétel (A t.d.n.f. egzisztenciája és unicitása)

Az ítéletkalkulus tetszőleges F n-változós formulájához ***létezik*** *egy vele logikailag ekvivalens teljes diszjunktív normálforma, amely a diszjunkció tagjainak és (azon belül) a konjunkciók tényezőinek sorrendjétől eltekintve* ***egyértelműen meghatározott****. Ez a teljes diszjunktív normálforma az F igazságtáblázatából az alábbi módon határozható meg: a keresett $K_1 \vee \cdots \vee K_m$ t.d.n.f.-ben m a táblázat azon sorainak a száma, ahol a formula az* **i** *logikai értéket veszi fel. Minden ilyen sorhoz a megfelelő K_i-t úgy kapjuk, hogy pontosan azon változókat negáljuk, amelyek a* **h** *értéket veszik fel, és ezek után vesszük az összes változót tartalmazó konjunkciót.*

Például az $F = A \leftrightarrow B$ formula esetén az alábbi módon kell eljárni. (A korábbi igazságtáblázatot idézzük, de abból most csak az első kettő és az utolsó oszlopra van szükség.)

Az $A \leftrightarrow B$ teljes diszjunktív normálformája

A	B	$A \to B$	$B \to A$	$(A \to B) \wedge (B \to A)$	$A \leftrightarrow B$
h	**h**	**i**	**i**	**i**	**i**
h	**i**	**i**	**h**	**h**	**h**
i	**h**	**h**	**i**	**h**	**h**
i	**i**	**i**	**i**	**i**	**i**

Innen leolvasható, hogy az elemi konjunkciók száma $m = 2$ (ahány **i** van az utolsó oszlopban), $K_1 = \neg A \wedge \neg B$, $K_2 = A \wedge B$, tehát a keresett t.d.n.f.: $(\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$.

Az $A \leftrightarrow B$ teljes diszjunktív normálformája

A	B	$A \to B$	$B \to A$	$(A \to B) \wedge (B \to A)$	$A \leftrightarrow B$
h	**h**	**i**	**i**	**i**	**i**
h	**i**	**i**	**h**	**h**	**h**
i	**h**	**h**	**i**	**h**	**h**
i	**i**	**i**	**i**	**i**	**i**

Innen leolvasható, hogy az elemi konjunkciók száma $m = 2$ (ahány **i** van az utolsó oszlopban), $K_1 = \neg A \wedge \neg B$, $K_2 = A \wedge B$, tehát a keresett t.d.n.f.: $(\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$.

Az $A \leftrightarrow B$ teljes diszjunktív normálformája

A	B	$A \to B$	$B \to A$	$(A \to B) \wedge (B \to A)$	$A \leftrightarrow B$
h	h	i	i	i	i
h	i	i	h	h	h
i	h	h	i	h	h
i	i	i	i	i	i

Innen leolvasható, hogy az elemi konjunkciók száma $m = 2$ (ahány **i** van az utolsó oszlopban), $K_1 = \neg A \wedge \neg B$, $K_2 = A \wedge B$, tehát a keresett t.d.n.f.: $(\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$.

Az $F = \neg(A \to (B \wedge C))$ t.d.n. formája/1

Feladat

Határozzuk meg az $F = \neg(A \to (B \wedge C))$ formulával logikailag ekvivalens teljes diszjunktív normálformát! (Rövidebben fogalmazva, mi a mondott F teljes diszjunktív normálformája?)

Megoldás (sőt, egy frappáns megoldás)

A tétel szerint azt kell vizsgálni, hogy hol (milyen kiértékelésnél, más szóval milyen helyettesítésnél) lesz $F = \mathbf{i}$ (tehát az igazságtábláhat mely soraiban lesz $\mathbf{i}$.) Azaz mikor lesz $A \to (B \wedge C)$ hamis. Tudjuk, hogy pontosan akkor, amikor $A = \mathbf{i}$ és $B \wedge C$ hamis. Ez utóbbi pontosan akkor hamis, ha B hamis vagy C hamis. Tehát a keresett (A, B, C) helyettesítési értékek: $(\mathbf{i}, \mathbf{h}, \mathbf{h})$, $(\mathbf{i}, \mathbf{h}, \mathbf{i})$, $(\mathbf{i}, \mathbf{i}, \mathbf{h})$. Az eddigiek szerint a keresett t.d.n.f.:

$$(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C).$$

Az $F = \neg(A \to (B \wedge C))$ t.d.n. formája/1

Feladat

Határozzuk meg az $F = \neg(A \to (B \wedge C))$ formulával logikailag ekvivalens teljes diszjunktív normálformát! (Rövidebben fogalmazva, mi a mondott F teljes diszjunktív normálformája?)

Megoldás (sőt, egy frappáns megoldás)

A tétel szerint azt kell vizsgálni, hogy hol (milyen kiértékelésnél, más szóval milyen helyettesítésnél) lesz $F = \mathbf{i}$ (tehát az igazságtábláhat mely soraiban lesz **i**.) Azaz mikor lesz $A \to (B \wedge C)$ hamis. Tudjuk, hogy pontosan akkor, amikor $A = \mathbf{i}$ és $B \wedge C$ hamis. Ez utóbbi pontosan akkor hamis, ha B hamis vagy C hamis. Tehát a keresett (A, B, C) helyettesítési értékek: $(\mathbf{i}, \mathbf{h}, \mathbf{h})$, $(\mathbf{i}, \mathbf{h}, \mathbf{i})$, $(\mathbf{i}, \mathbf{i}, \mathbf{h})$. Az eddigiek szerint a keresett t.d.n.f.:

$$(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C).$$

Az $F = \neg(A \to (B \wedge C))$ t.d.n. formája/1

Feladat

Határozzuk meg az $F = \neg(A \to (B \wedge C))$ formulával logikailag ekvivalens teljes diszjunktív normálformát! (Rövidebben fogalmazva, mi a mondott F teljes diszjunktív normálformája?)

Megoldás (sőt, egy frappáns megoldás)

A tétel szerint azt kell vizsgálni, hogy hol (milyen kiértékelésnél, más szóval milyen helyettesítésnél) lesz $F = \mathbf{i}$ (tehát az igazságtáblához mely soraiban lesz **i**.) Azaz mikor lesz $A \to (B \wedge C)$ hamis. Tudjuk, hogy pontosan akkor, amikor $A = \mathbf{i}$ és $B \wedge C$ hamis. Ez utóbbi pontosan akkor hamis, ha B hamis vagy C hamis. Tehát a keresett (A, B, C) helyettesítési értékek: $(\mathbf{i}, \mathbf{h}, \mathbf{h})$, $(\mathbf{i}, \mathbf{h}, \mathbf{i})$, $(\mathbf{i}, \mathbf{i}, \mathbf{h})$. Az eddigiek szerint a keresett t.d.n.f.:

$$(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C).$$

Az $F = \neg(A \to (B \wedge C))$ t.d.n. formája/1

Feladat

Határozzuk meg az $F = \neg(A \to (B \wedge C))$ formulával logikailag ekvivalens teljes diszjunktív normálformát! (Rövidebben fogalmazva, mi a mondott F teljes diszjunktív normálformája?)

Megoldás (sőt, egy frappáns megoldás)

A tétel szerint azt kell vizsgálni, hogy hol (milyen kiértékelésnél, más szóval milyen helyettesítésnél) lesz $F = \mathbf{i}$ (tehát az igazságtáblához mely soraiban lesz **i**.) Azaz mikor lesz $A \to (B \wedge C)$ hamis. Tudjuk, hogy pontosan akkor, amikor $A = \mathbf{i}$ és $B \wedge C$ hamis. Ez utóbbi pontosan akkor hamis, ha B hamis vagy C hamis. Tehát a keresett (A, B, C) helyettesítési értékek: $(\mathbf{i}, \mathbf{h}, \mathbf{h})$, $(\mathbf{i}, \mathbf{h}, \mathbf{i})$, $(\mathbf{i}, \mathbf{i}, \mathbf{h})$.

Az eddigiek szerint a keresett t.d.n.f.:

$$(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C).$$

Az $F = \neg(A \to (B \wedge C))$ t.d.n. formája/1

Feladat

Határozzuk meg az $F = \neg(A \to (B \wedge C))$ formulával logikailag ekvivalens teljes diszjunktív normálformát! (Rövidebben fogalmazva, mi a mondott F teljes diszjunktív normálformája?)

Megoldás (sőt, egy frappáns megoldás)

A tétel szerint azt kell vizsgálni, hogy hol (milyen kiértékelésnél, más szóval milyen helyettesítésnél) lesz $F = \mathbf{i}$ (tehát az igazságtábláhat mely soraiban lesz $\mathbf{i}$.) Azaz mikor lesz $A \to (B \wedge C)$ hamis. Tudjuk, hogy pontosan akkor, amikor $A = \mathbf{i}$ és $B \wedge C$ hamis. Ez utóbbi pontosan akkor hamis, ha B hamis vagy C hamis. Tehát a keresett (A, B, C) helyettesítési értékek: $(\mathbf{i}, \mathbf{h}, \mathbf{h})$, $(\mathbf{i}, \mathbf{h}, \mathbf{i})$, $(\mathbf{i}, \mathbf{i}, \mathbf{h})$.
Az eddigiek szerint a keresett t.d.n.f.:

$$(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C).$$

Az $F = \neg(A \to (B \wedge C))$ t.d.n. formája/1

Feladat

Határozzuk meg az $F = \neg(A \to (B \wedge C))$ formulával logikailag ekvivalens teljes diszjunktív normálformát! (Rövidebben fogalmazva, mi a mondott F teljes diszjunktív normálformája?)

Megoldás (sőt, egy frappáns megoldás)

A tétel szerint azt kell vizsgálni, hogy hol (milyen kiértékelésnél, más szóval milyen helyettesítésnél) lesz $F = \mathbf{i}$ (tehát az igazságtábláhat mely soraiban lesz $\mathbf{i}$.) Azaz mikor lesz $A \to (B \wedge C)$ hamis. Tudjuk, hogy pontosan akkor, amikor $A = \mathbf{i}$ és $B \wedge C$ hamis. Ez utóbbi pontosan akkor hamis, ha B hamis vagy C hamis. Tehát a keresett (A, B, C) helyettesítési értékek: $(\mathbf{i}, \mathbf{h}, \mathbf{h})$, $(\mathbf{i}, \mathbf{h}, \mathbf{i})$, $(\mathbf{i}, \mathbf{i}, \mathbf{h})$. Az eddigiek szerint a keresett t.d.n.f.:

$$(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C).$$

Az $F = \neg(A \to (B \wedge C))$ t.d.n. formája/2

Megoldás (Igazságtáblázattal)

A	B	C	$B \wedge C$	$A \to (B \wedge C)$	$F = \neg(A \to (B \wedge C))$
h	**h**	**h**	**h**	**i**	**h**
h	**h**	**i**	**h**	**i**	**h**
h	**i**	**h**	**h**	**i**	**h**
h	**i**	**i**	**i**	**i**	**h**
i	**h**	**h**	**h**	**h**	**i**
i	**h**	**i**	**h**	**h**	**i**
i	**i**	**h**	**h**	**h**	**i**
i	**i**	**i**	**i**	**i**	**h**

Tehát $(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$.

További lehetőség: azonosságok alkalmazásával addig alakítjuk, míg teljes diszj. normálformához jutunk (ld. előző jegyzet); nem részletezzük.

Megoldás (Igazságtáblázattal)

A	B	C	$B \wedge C$	$A \to (B \wedge C)$	$F = \neg(A \to (B \wedge C))$
h	h	h	h	i	h
h	h	i	h	i	h
h	i	h	h	i	h
h	i	i	i	i	h
i	h	h	h	h	i
i	h	i	h	h	i
i	i	h	h	h	i
i	i	i	i	i	h

Tehát $(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$.

További lehetőség: azonosságok alkalmazásával addig alakítjuk, míg teljes diszj. normálformához jutunk (ld. előző jegyzet); nem részletezzük.

Az $F = \neg(A \to (B \wedge C))$ t.d.n. formája/2

Megoldás (Igazságtáblázattal)

A	B	C	$B \wedge C$	$A \to (B \wedge C)$	$F = \neg(A \to (B \wedge C))$
h	h	h	h	i	h
h	h	i	h	i	h
h	i	h	h	i	h
h	i	i	i	i	h
i	h	h	h	h	i
i	h	i	h	h	i
i	i	h	h	h	i
i	i	i	i	i	h

Tehát $(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$.

További lehetőség: azonosságok alkalmazásával addig alakítjuk, míg teljes diszj. normálformához jutunk (ld. előző jegyzet); nem részletezzük.

Modus ponens

Feladat (Modus ponens)

Mutassuk meg, hogy az $(A \wedge (A \to B)) \to B$ formula tautológia.

Lehetne igazságtáblázattal is, de

Megoldás (sőt, egy frappáns megoldás)

Ha a formulánk (jelölje F) hamis, akkor $B = \mathbf{h}$ és $A \wedge (A \to B)$ igaz. Mivel ez a konjunckió $\mathbf{i}$, ezért $A = \mathbf{i}$. De ekkor a konjunkció második tényezője, $A \to B$, azaz $\mathbf{i} \to \mathbf{h}$ hamis, és így a konjunkció mégsem lehet igaz. Ezért nem lehetséges olyan kiértékelés, amikor F hamis. Tehát bármely kiértékelésnél F igaz, és így F tautológia.

Ezt a tautológiát **modus ponens**-nek nevezzük; már Arisztotelész is ismerte. Fontos szerephez jut a logikában, de nem a jelen tananyagban. (Bővebben ld. korábbi jegyzet.)

Feladat (Modus ponens)

Mutassuk meg, hogy az $(A \wedge (A \to B)) \to B$ formula tautológia.

Lehetne igazságtáblázattal is, de

Megoldás (sőt, egy frappáns megoldás)

Ha a formulánk (jelölje F) hamis, akkor $B = \mathbf{h}$ és $A \wedge (A \to B)$ igaz. Mivel ez a konjunkció $\mathbf{i}$, ezért $A = \mathbf{i}$. De ekkor a konjunkció második tényezője, $A \to B$, azaz $\mathbf{i} \to \mathbf{h}$ hamis, és így a konjunkció mégsem lehet igaz. Ezért nem lehetséges olyan kiértékelés, amikor F hamis. Tehát bármely kiértékelésnél F igaz, és így F tautológia.

Ezt a tautológiát **modus ponens**-nek nevezzük; már Arisztotelész is ismerte. Fontos szerephez jut a logikában, de nem a jelen tananyagban. (Bővebben ld. korábbi jegyzet.)

Modus ponens

Feladat (Modus ponens)

Mutassuk meg, hogy az $(A \wedge (A \to B)) \to B$ formula tautológia.

Lehetne igazságtáblázattal is, de

Megoldás (sőt, egy frappáns megoldás)

Ha a formulánk (jelölje F) hamis, akkor $B = \mathbf{h}$ és $A \wedge (A \to B)$ igaz. Mivel ez a konjunckió $\mathbf{i}$, ezért $A = \mathbf{i}$. De ekkor a konjunkció második tényezője, $A \to B$, azaz $\mathbf{i} \to \mathbf{h}$ hamis, és így a konjunkció mégsem lehet igaz. Ezért nem lehetséges olyan kiértékelés, amikor F hamis. Tehát bármely kiértékelésnél F igaz, és így F tautológia.

Ezt a tautológiát **modus ponens**-nek nevezzük; már Arisztotelész is ismerte. Fontos szerephez jut a logikában, de nem a jelen tananyagban. (Bővebben ld. korábbi jegyzet.)

Modus ponens

Feladat (Modus ponens)

Mutassuk meg, hogy az $(A \wedge (A \to B)) \to B$ formula tautológia.

Lehetne igazságtáblázattal is, de

Megoldás (sőt, egy frappáns megoldás)

Ha a formulánk (jelölje F) hamis, akkor $B = \mathbf{h}$ és $A \wedge (A \to B)$ igaz. Mivel ez a konjunkció $\mathbf{i}$, ezért $A = \mathbf{i}$. De ekkor a konjunkció második tényezője, $A \to B$, azaz $\mathbf{i} \to \mathbf{h}$ hamis, és így a konjunkció mégsem lehet igaz. Ezért nem lehetséges olyan kiértékelés, amikor F hamis. Tehát bármely kiértékelésnél F igaz, és így F tautológia.

Ezt a tautológiát **modus ponens**-nek nevezzük; már Arisztotelész is ismerte. Fontos szerephez jut a logikában, de nem a jelen tananyagban. (Bővebben ld. korábbi jegyzet.)

A predikátumkalkulus elemei

Az ítéletkalkulus nem elegendő olyan bonyolultabb kijelentések részletes formalizálására, mint pl. „minden egész számhoz van olyan racionális szám, amelynek négyzetgyöke nagyobb a kiindulási egész számnál”. Ennek érdekében az ítéletkalkulust ki kell bővíteni:

— kvantorokkal: a „bármely, minden, összes, tetszőleges” jelentésű $\forall$ **univerzális kvantorral** és a „van olyan, létezik, található” jelentésű $\exists$ **egzisztenciális kvantorral**,

— műveletek jelölésére alkalmas ún. **függvényjelekkel** (mint esetünkben pl. a $\sqrt{\ }$ jellel), és

— predikátumok jelölésére szolgáló **predikátumjelekkel** (esetünkben pl. a „$>$” jellel) .

Predikátumon egy olyan egy- vagy többváltozós függényt (azaz leképezést) értünk, amelynek változói helyére alkalmas objektumokat helyettesítve logikai értékkel (**i**, **h**) bíró ítélet keletkezik.

A predikátumkalkulus elemei

Az ítéletkalkulus nem elegendő olyan bonyolultabb kijelentések részletes formalizálására, mint pl. „minden egész számhoz van olyan racionális szám, amelynek négyzetgyöke nagyobb a kiindulási egész számnál”. Ennek érdekében az ítéletkalkulust ki kell bővíteni:

— kvantorokkal: a „bármely, minden, összes, tetszőleges” jelentésű $\forall$ **univerzális kvantorral** és a „van olyan, létezik, található” jelentésű $\exists$ **egzisztenciális kvantorral**,

— műveletek jelölésére alkalmas ún. **függvényjelekkel** (mint esetünkben pl. a $\sqrt{}$ jellel), és

— predikátumok jelölésére szolgáló **predikátumjelekkel** (esetünkben pl. a „$>$” jellel) .

Predikátumon egy olyan egy- vagy többváltozós függényt (azaz leképezést) értünk, amelynek változói helyére alkalmas objektumokat helyettesítve logikai értékkel (**i**, **h**) bíró ítélet keletkezik.

A predikátumkalkulus elemei

Az ítéletkalkulus nem elegendő olyan bonyolultabb kijelentések részletes formalizálására, mint pl. „minden egész számhoz van olyan racionális szám, amelynek négyzetgyöke nagyobb a kiindulási egész számnál”. Ennek érdekében az ítéletkalkulust ki kell bővíteni:
— kvantorokkal: a „bármely, minden, összes, tetszőleges” jelentésű $\forall$ **univerzális kvantorral** és a „van olyan, létezik, található” jelentésű $\exists$ **egzisztenciális kvantorral**,
— műveletek jelölésére alkalmas ún. **függvényjelekkel** (mint esetünkben pl. a $\sqrt{\ }$ jellel), és
— predikátumok jelölésére szolgáló **predikátumjelekkel** (esetünkben pl. a „$>$” jellel) .
Predikátumon egy olyan egy- vagy többváltozós függényt (azaz leképezést) értünk, amelynek változói helyére alkalmas objektumokat helyettesítve logikai értékkel (**i**, **h**) bíró ítélet keletkezik.

A predikátumkalkulus elemei

Az ítéletkalkulus nem elegendő olyan bonyolultabb kijelentések részletes formalizálására, mint pl. „minden egész számhoz van olyan racionális szám, amelynek négyzetgyöke nagyobb a kiindulási egész számnál”. Ennek érdekében az ítéletkalkulust ki kell bővíteni:
— kvantorokkal: a „bármely, minden, összes, tetszőleges” jelentésű $\forall$ **univerzális kvantorral** és a „van olyan, létezik, található” jelentésű $\exists$ **egzisztenciális kvantorral**,
— műveletek jelölésére alkalmas ún. **függvényjelekkel** (mint esetünkben pl. a $\sqrt{}$ jellel), és
— predikátumok jelölésére szolgáló **predikátumjelekkel** (esetünkben pl. a „$>$” jellel) .

Predikátumon egy olyan egy- vagy többváltozós függényt (azaz leképezést) értünk, amelynek változói helyére alkalmas objektumokat helyettesítve logikai értékkel (**i**, **h**) bíró ítélet keletkezik.

A predikátumkalkulus elemei

Az ítéletkalkulus nem elegendő olyan bonyolultabb kijelentések részletes formalizálására, mint pl. „minden egész számhoz van olyan racionális szám, amelynek négyzetgyöke nagyobb a kiindulási egész számnál”. Ennek érdekében az ítéletkalkulust ki kell bővíteni:
— kvantorokkal: a „bármely, minden, összes, tetszőleges” jelentésű $\forall$ **univerzális kvantorral** és a „van olyan, létezik, található” jelentésű $\exists$ **egzisztenciális kvantorral**,
— műveletek jelölésére alkalmas ún. **függvényjelekkel** (mint esetünkben pl. a $\sqrt{}$ jellel), és
— predikátumok jelölésére szolgáló **predikátumjelekkel** (esetünkben pl. a „$>$” jellel) .
Predikátumon egy olyan egy- vagy többváltozós függényt (azaz leképezést) értünk, amelynek változói helyére alkalmas objektumokat helyettesítve logikai értékkel (**i**, **h**) bíró ítélet keletkezik.

Formalizálás kvantorokkal

Most már képesek vagyunk bonyolultabb kijelentéseket formalizálni. Az egzakt definíciót példák előzik meg.

Példa

Formalizáljuk a alábbi ítéletet: „Minden bogár rovar, de nem minden rovar bogár".

Megoldás

Két egyváltozós predikátumra kell jelölést bevezetnünk: jelölje pl. $R(x)$ azt, hogy „x rovar", $B(x)$ pedig azt, hogy „x bogár". Ekkor a keresett formula például:
$(\forall x)(B(x) \to R(x)) \wedge \neg(\forall y)(R(y) \to B(y))$
A kvantor immár nem gyorsírási jel, a használatának szintaktikai szabályai vannak: zárójelbe tesszük, és zárójel jelöli ki a hatókörét (azaz azt a részformulát, amelyre hat). (Később a szintaxist pontosítjuk.)

Formalizálás kvantorokkal

Most már képesek vagyunk bonyolultabb kijelentéseket formalizálni. Az egzakt definíciót példák előzik meg.

Példa

Formalizáljuk a alábbi ítéletet: „Minden bogár rovar, de nem minden rovar bogár”.

Megoldás

Két egyváltozós predikátumra kell jelölést bevezetnünk: jelölje pl. $R(x)$ azt, hogy „x rovar”, $B(x)$ pedig azt, hogy „x bogár”. Ekkor a keresett formula például:
$(\forall x)(B(x) \to R(x)) \wedge \neg(\forall y)(R(y) \to B(y))$
A kvantor immár nem gyorsírási jel, a használatának szintaktikai szabályai vannak: zárójelbe tesszük, és zárójel jelöli ki a hatókörét (azaz azt a részformulát, amelyre hat). (Később a szintaxist pontosítjuk.)

Formalizálás kvantorokkal

Most már képesek vagyunk bonyolultabb kijelentéseket formalizálni. Az egzakt definíciót példák előzik meg.

Példa

Formalizáljuk a alábbi ítéletet: „Minden bogár rovar, de nem minden rovar bogár”.

Megoldás

Két egyváltozós predikátumra kell jelölést bevezetnünk: jelölje pl. $R(x)$ azt, hogy „x rovar”, $B(x)$ pedig azt, hogy „x bogár”. Ekkor a keresett formula például:

$(\forall x)(B(x) \to R(x)) \land \neg(\forall y)(R(y) \to B(y))$

A kvantor immár nem gyorsírási jel, a használatának szintaktikai szabályai vannak: zárójelbe tesszük, és zárójel jelöli ki a hatókörét (azaz azt a részformulát, amelyre hat). (Később a szintaxist pontosítjuk.)

Most már képesek vagyunk bonyolultabb kijelentéseket formalizálni. Az egzakt definíciót példák előzik meg.

Példa

Formalizáljuk a alábbi ítéletet: „Minden bogár rovar, de nem minden rovar bogár”.

Megoldás

Két egyváltozós predikátumra kell jelölést bevezetnünk: jelölje pl. $R(x)$ azt, hogy „x rovar”, $B(x)$ pedig azt, hogy „x bogár”. Ekkor a keresett formula például:

$(\forall x)(B(x) \to R(x)) \land \neg(\forall y)(R(y) \to B(y))$

A kvantor immár nem gyorsírási jel, a használatának szintaktikai szabályai vannak: zárójelbe tesszük, és zárójel jelöli ki a hatókörét (azaz azt a részformulát, amelyre hat). (Később a szintaxist pontosítjuk.)

Formalizálás kvantorokkal

Most már képesek vagyunk bonyolultabb kijelentéseket formalizálni. Az egzakt definíciót példák előzik meg.

Példa

Formalizáljuk a alábbi ítéletet: „Minden bogár rovar, de nem minden rovar bogár”.

Megoldás

Két egyváltozós predikátumra kell jelölést bevezetnünk: jelölje pl. $R(x)$ azt, hogy „x rovar”, $B(x)$ pedig azt, hogy „x bogár”. Ekkor a keresett formula például:

$(\forall x)(B(x) \to R(x)) \wedge \neg(\forall y)(R(y) \to B(y))$

A kvantor immár nem gyorsírási jel, a használatának szintaktikai szabályai vannak: zárójelbe tesszük, és zárójel jelöli ki a hatókörét (azaz azt a részformulát, amelyre hat). (Később a szintaxist pontosítjuk.)

Formalizálás kvantorokkal

Most már képesek vagyunk bonyolultabb kijelentéseket formalizálni. Az egzakt definíciót példák előzik meg.

Példa

Formalizáljuk a alábbi ítéletet: „Minden bogár rovar, de nem minden rovar bogár”.

Megoldás

Két egyváltozós predikátumra kell jelölést bevezetnünk: jelölje pl. $R(x)$ azt, hogy „x rovar”, $B(x)$ pedig azt, hogy „x bogár”. Ekkor a keresett formula például:

$(\forall x)(B(x) \to R(x)) \wedge \neg(\forall y)(R(y) \to B(y))$

A kvantor immár nem gyorsírási jel, a használatának szintaktikai szabályai vannak: zárójelbe tesszük, és zárójel jelöli ki a hatókörét (azaz azt a részformulát, amelyre hat). (Később a szintaxist pontosítjuk.)

Formalizálás kvantorokkal

Most már képesek vagyunk bonyolultabb kijelentéseket formalizálni. Az egzakt definíciót példák előzik meg.

Példa

Formalizáljuk a alábbi ítéletet: „Minden bogár rovar, de nem minden rovar bogár”.

Megoldás

Két egyváltozós predikátumra kell jelölést bevezetnünk: jelölje pl. $R(x)$ azt, hogy „x rovar”, $B(x)$ pedig azt, hogy „x bogár”. Ekkor a keresett formula például:
$(\forall x)(B(x) \to R(x)) \wedge \neg(\forall y)(R(y) \to B(y))$
A kvantor immár nem gyorsírási jel, a használatának szintaktikai szabályai vannak: zárójelbe tesszük, és zárójel jelöli ki a hatókörét (azaz azt a részformulát, amelyre hat). (Később a szintaxist pontosítjuk.)

Máshogy is lehet formalizálni

Egy ilyen formalizálós feladatnak általában sok megoldása van: a predikátumok jelölése máshogy is megválasztható, de még azonos jelölés mellett is lehet más megoldás; esetünkben a
„Minden bogár rovar, de nem minden rovar bogár"
ítélet így is formalizálható:

$$(\forall x)(B(x) \to R(x)) \wedge (\exists x)(R(x) \wedge \neg B(x))$$

Tipikus vizsgafeladat: adott egy ítélet (szöveggel) és öt formula; válasszuk ki a formulák közül az ítéletet formalizáló(ka)t.

Máshogy is lehet formalizálni

Egy ilyen formalizálós feladatnak általában sok megoldása van: a predikátumok jelölése máshogy is megválasztható, de még azonos jelölés mellett is lehet más megoldás; esetünkben a
„Minden bogár rovar, de nem minden rovar bogár"
ítélet így is formalizálható:

$$(\forall x)(B(x) \to R(x)) \wedge (\exists x)(R(x) \wedge \neg B(x))$$

Tipikus vizsgafeladat: adott egy ítélet (szöveggel) és öt formula; válasszuk ki a formulák közül az ítéletet formalizáló(ka)t.

Egy ilyen formalizálós feladatnak általában sok megoldása van: a predikátumok jelölése máshogy is megválasztható, de még azonos jelölés mellett is lehet más megoldás; esetünkben a
„Minden bogár rovar, de nem minden rovar bogár"
ítélet így is formalizálható:

$$(\forall x)(B(x) \to R(x)) \land (\exists x)(R(x) \land \neg B(x))$$

Tipikus vizsgafeladat: adott egy ítélet (szöveggel) és öt formula; válasszuk ki a formulák közül az ítéletet formalizáló(ka)t.

Másik példa

Feladat

Formalizáljuk azt a (valós számokra vonatkozó) ítéletet, hogy „egy szám akkor és csak akkor áll elő pontosan egy szám négyzeteként, ha bármely másik számmal szorozva nem változik.”

Megoldás: az egyetlen predikátumjel az „=” lesz. Függvényjel is csak egy lesz: $\cdot$ (a szorzás jele). Hiba lenne itt a négyzetreemelésre függvényjelet bevezetni, hiszen az kifejezhető a szorzással. Az ilyen jellegű feladat úgy értendő, hogy valamilyen értelemben tovább nem bontható formulát akarunk, ezért nem vezethetünk be feleslegesen sok függvény- vagy predikátumjelet. Az mondatban az „egy” szó jelen esetben a „tetszőleges" szinonímája.

Másik példa

Feladat

Formalizáljuk azt a (valós számokra vonatkozó) ítéletet, hogy „egy szám akkor és csak akkor áll elő pontosan egy szám négyzeteként, ha bármely másik számmal szorozva nem változik.”

Megoldás: az egyetlen predikátumjel az „=” lesz. Függvényjel is csak egy lesz: $\cdot$ (a szorzás jele). Hiba lenne itt a négyzetreemelésre függvényjelet bevezetni, hiszen az kifejezhető a szorzással. Az ilyen jellegű feladat úgy értendő, hogy valamilyen értelemben tovább nem bontható formulát akarunk, ezért nem vezethetünk be feleslegesen sok függvény- vagy predikátumjelet. Az mondatban az „egy” szó jelen esetben a „tetszőleges" szinonímája.

A példa folyatása

Az „egy szám akkor és csak akkor áll elő pontosan egy szám négyzeteként, ha bármely másik számmal szorozva nem változik.” ítéletet formalizáló formula pl.:

$$(\forall x)($$
$$(\underbrace{(\exists y)(y \cdot y = x)}_{\text{előáll}} \wedge \underbrace{(\forall u)(\forall v)((u \cdot u = x \wedge v \cdot v = x) \to u = v)}_{\text{csak egyféleképpen áll elő}})$$
$$\leftrightarrow \qquad \underbrace{((\forall y)(x = x \cdot y))}_{\text{0-ként viselkedik}}).$$

Itt az is megfigyelhető, hogy az y-ra vonatkozó $\exists$ kvantor (azaz az első $\exists$ kvantor) hatóköre csak az „előáll” részformulára terjed ki. Ezt követően y „kiszabadult” a kvantor hatása alól, és újból szabadon felhasználható. Természetesen a „0-ként viselkedik” részben y helyett más betűt is írhattunk volna.

A példa folytatása

Az „egy szám akkor és csak akkor áll elő pontosan egy szám négyzeteként, ha bármely másik számmal szorozva nem változik.” ítéletet formalizáló formula pl.:

$$(\forall x)\Big(\underbrace{((\exists y)(y\cdot y = x)}_{\text{előáll}} \wedge \underbrace{(\forall u)(\forall v)((u\cdot u = x \wedge v\cdot v = x) \to u = v))}_{\text{csak egyféleképpen áll elő}} \leftrightarrow \underbrace{((\forall y)(x = x\cdot y))}_{\text{0-ként viselkedik}}\Big).$$

Itt az is megfigyelhető, hogy az y-ra vonatkozó $\exists$ kvantor (azaz az első $\exists$ kvantor) hatóköre csak az „előáll” részformulára terjed ki. Ezt követően y „kiszabadult” a kvantor hatása alól, és újból szabadon felhasználható. Természetesen a „0-ként viselkedik” részben y helyett más betűt is írhattunk volna.

A példa folytatása

Az „egy szám akkor és csak akkor áll elő pontosan egy szám négyzeteként, ha bármely másik számmal szorozva nem változik.” ítéletet formalizáló formula pl.:

$$(\forall x)\Big(\underbrace{((\exists y)(y \cdot y = x)}_{\text{előáll}} \wedge \underbrace{(\forall u)(\forall v)((u \cdot u = x \wedge v \cdot v = x) \to u = v))}_{\text{csak egyféleképpen áll elő}} \leftrightarrow \underbrace{((\forall y)(x = x \cdot y))}_{\text{0-ként viselkedik}}\Big).$$

Itt az is megfigyelhető, hogy az y-ra vonatkozó $\exists$ kvantor (azaz az első $\exists$ kvantor) hatóköre csak az „előáll” részformulára terjed ki. Ezt követően y „kiszabadult” a kvantor hatása alól, és újból szabadon felhasználható. Természetesen a „0-ként viselkedik” részben y helyett más betűt is írhattunk volna.

Definíció

Egy **elsőrendű predikátumkalkulus** (más néven: **elsőrendű nyelv**) szimbólumai az alábbiak:

— $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,), \exists, \forall$ és a vessző;

— az $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ $(n \in \mathbb{N})$ **individuumváltozók**;

— **predikátumjeleknek** egy nemüres $\mathcal{P}$ halmaza, ahol minden egyes $P \in \mathcal{P}$-re adott P változószáma: $n_P \geq 0$; a nullaváltozós predikátumjel nem más, mint egy ítéletváltozó;

— **függvényjeleknek** egy (esetleg üres) $\mathcal{F}$ halmaza, ahol minden egyes $f \in \mathcal{F}$-re adott f változószáma: $m_f \geq 0$; a nullaváltozós függvényjel nem más, mint egy individuumkonstans-jel.

A $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ párt a nyelv **típusának** nevezzük. Ezt a nyelvet a későbbiekben L jelöli.

Kvantorokat csak individuumváltozókra alkalmazhatunk, a függvény- és predikátumjelekre nem; ezért hívják „elsőrendű"-nek.

Elsőrendű nyelv

Definíció

Egy **elsőrendű predikátumkalkulus** (más néven: **elsőrendű nyelv**) szimbólumai az alábbiak:

— $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,), \exists, \forall$ és a vessző;

— az $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ $(n \in \mathbb{N})$ **individuumváltozók**;

— **predikátumjeleknek** egy nemüres $\mathcal{P}$ halmaza, ahol minden egyes $P \in \mathcal{P}$-re adott P változószáma: $n_P \geq 0$; a nullaváltozós predikátumjel nem más, mint egy ítéletváltozó;

— **függvényjeleknek** egy (esetleg üres) $\mathcal{F}$ halmaza, ahol minden egyes $f \in \mathcal{F}$-re adott f változószáma: $m_f \geq 0$; a nullaváltozós függvényjel nem más, mint egy individuumkonstans-jel.

A $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ párt a nyelv **típusának** nevezzük. Ezt a nyelvet a későbbiekben L jelöli.

Kvantorokat csak individuumváltozókra alkalmazhatunk, a függvény- és predikátumjelekre nem; ezért hívják „elsőrendű”-nek.

Definíció

Egy **elsőrendű predikátumkalkulus** (más néven: **elsőrendű nyelv**) szimbólumai az alábbiak:

— $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,), \exists, \forall$ és a vessző;

— az $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \quad (n \in \mathbb{N})$ **individuumváltozók**;

— **predikátumjeleknek** egy nemüres $\mathcal{P}$ halmaza, ahol minden egyes $P \in \mathcal{P}$-re adott P változószáma: $n_P \geq 0$; a nullaváltozós predikátumjel nem más, mint egy ítéletváltozó;

— **függvényjeleknek** egy (esetleg üres) $\mathcal{F}$ halmaza, ahol minden egyes $f \in \mathcal{F}$-re adott f változószáma: $m_f \geq 0$; a nullaváltozós függvényjel nem más, mint egy individuumkonstans-jel.

A $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ párt a nyelv **típusának** nevezzük. Ezt a nyelvet a későbbiekben L jelöli.

Kvantorokat csak individuumváltozókra alkalmazhatunk, a függvény- és predikátumjelekre nem; ezért hívják „elsőrendű”-nek.

Elsőrendű nyelv

Definíció

Egy **elsőrendű predikátumkalkulus** (más néven: **elsőrendű nyelv**) szimbólumai az alábbiak:

— $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,), \exists, \forall$ és a vessző;

— az $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ $(n \in \mathbb{N})$ **individuumváltozók**;

— **predikátumjeleknek** egy nemüres $\mathcal{P}$ halmaza, ahol minden egyes $P \in \mathcal{P}$-re adott P változószáma: $n_P \geq 0$; a nullaváltozós predikátumjel nem más, mint egy ítéletváltozó;

— **függvényjeleknek** egy (esetleg üres) $\mathcal{F}$ halmaza, ahol minden egyes $f \in \mathcal{F}$-re adott f változószáma: $m_f \geq 0$; a nullaváltozós függvényjel nem más, mint egy individuumkonstans-jel.

A $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ párt a nyelv **típusának** nevezzük. Ezt a nyelvet a későbbiekben L jelöli.

Kvantorokat csak individuumváltozókra alkalmazhatunk, a függvény- és predikátumjelekre nem; ezért hívják „elsőrendű”-nek.

Definíció

Egy **elsőrendű predikátumkalkulus** (más néven: **elsőrendű nyelv**) szimbólumai az alábbiak:

— $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,), \exists, \forall$ és a vessző;

— az $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ $(n \in \mathbb{N})$ **individuumváltozók**;

— **predikátumjeleknek** egy nemüres $\mathcal{P}$ halmaza, ahol minden egyes $P \in \mathcal{P}$-re adott P változószáma: $n_P \geq 0$; a nullaváltozós predikátumjel nem más, mint egy ítéletváltozó;

— **függvényjeleknek** egy (esetleg üres) $\mathcal{F}$ halmaza, ahol minden egyes $f \in \mathcal{F}$-re adott f változószáma: $m_f \geq 0$; a nullaváltozós függvényjel nem más, mint egy individuumkonstans-jel.

A $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ párt a nyelv **típusának** nevezzük. Ezt a nyelvet a későbbiekben L jelöli.

Kvantorokat csak individuumváltozókra alkalmazhatunk, a függvény- és predikátumjelekre nem; ezért hívják „elsőrendű”-nek.

Egy predikátumkalkulusbeli formula

Például az imént látott

$$(\forall x)\big(\underbrace{((\exists y)(y \cdot y = x)}_{\text{előáll}} \wedge \underbrace{(\forall u)(\forall v)((u \cdot u = x \wedge v \cdot v = x) \to u = v))}_{\text{bármely két gyöke egyenlő}} \leftrightarrow \underbrace{((\forall y)(x = x \cdot y))}_{\text{0-ként viselkedik}}\big).$$

formula esetén lehet $\mathcal{P} = \{„=”\}$ és $\mathcal{F} = \{\cdot\}$, ahol $n_= = 2$ és $m_\cdot = 2$. (Természetesen bővebb $\mathcal{P}$ és $\mathcal{F}$ halmazok is lehetnek.) Az $x_1, x_2, \ldots$ individuumváltozók helyett persze az $x, y, u, \ldots$ betűk is használhatók. Megvan a nyelv; a formulák definiálása során az első lépés a kifejezések definiálása.

Egy predikátumkalkulusbeli formula

Például az imént látott

$$(\forall x)\big(\underbrace{((\exists y)(y \cdot y = x)}_{\text{előáll}} \wedge \underbrace{(\forall u)(\forall v)((u \cdot u = x \wedge v \cdot v = x) \to u = v))}_{\text{bármely két gyöke egyenlő}} \leftrightarrow \underbrace{((\forall y)(x = x \cdot y)))}_{\text{0-ként viselkedik}}\big).$$

formula esetén lehet $\mathcal{P} = \{„=”\}$ és $\mathcal{F} = \{\cdot\}$, ahol $n_= = 2$ és $m_\cdot = 2$. (Természetesen bővebb $\mathcal{P}$ és $\mathcal{F}$ halmazok is lehetnek.) Az $x_1, x_2, \ldots$ individuumváltozók helyett persze az $x, y, u, \ldots$ betűk is használhatók. Megvan a nyelv; a formulák definiálása során az első lépés a kifejezések definiálása.

A predikátumkalkulus formulái

Definíció

A $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ típusú L nyelv **kifejezései** az alábbi rekurzióval megadott sorozatok:

— az x_i individuumváltozók és az individuumkonstansok (azaz $\mathcal{F}$ nullaváltozós elemei) kifejezések;

— ha $t_1, \ldots, t_n$ L kifejezései és $f \in \mathcal{F}$ n-változós függvényjel $(n \geq 1)$, akkor $f(t_1, \ldots, t_n)$ is kifejezése L-nek;

— L minden kifejezése megkapható a fenti két szabály véges számú alkalmazásával.

Példa

Ha $\mathcal{F} = \{f, g, h\}$, ahol a megadott függvényjelek rendre 2, 1 és 0-változósak, akkor $f(f(x_1, h), g(f(x_3, x_1)))$ kifejezése L-nek.

A predikátumkalkulus formulái

Definíció

A $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ típusú L nyelv **kifejezései** az alábbi rekurzióval megadott sorozatok:

— az x_i individuumváltozók és az individuumkonstansok (azaz $\mathcal{F}$ nullaváltozós elemei) kifejezések;

— ha $t_1, \ldots, t_n$ L kifejezései és $f \in \mathcal{F}$ n-változós függvényjel $(n \geq 1)$, akkor $f(t_1, \ldots, t_n)$ is kifejezése L-nek;

— L minden kifejezése megkapható a fenti két szabály véges számú alkalmazásával.

Példa

Ha $\mathcal{F} = \{f, g, h\}$, ahol a megadott függvényjelek rendre 2, 1 és 0-változósak, akkor $f(f(x_1, h), g(f(x_3, x_1)))$ kifejezése L-nek.

A predikátumkalkulus formulái

Definíció

A $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ típusú L nyelv **kifejezései** az alábbi rekurzióval megadott sorozatok:
— az x_i individuumváltozók és az individuumkonstansok (azaz $\mathcal{F}$ nullaváltozós elemei) kifejezések;
— ha $t_1, \dots, t_n$ L kifejezései és $f \in \mathcal{F}$ n-változós függvényjel $(n \geq 1)$, akkor $f(t_1, \dots, t_n)$ is kifejezése L-nek;
— L minden kifejezése megkapható a fenti két szabály véges számú alkalmazásával.

Példa

Ha $\mathcal{F} = \{f, g, h\}$, ahol a megadott függvényjelek rendre 2, 1 és 0-változósak, akkor $f(f(x_1, h), g(f(x_3, x_1)))$ kifejezése L-nek.

A predikátumkalkulus formulái

Definíció

A $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ típusú L nyelv **kifejezései** az alábbi rekurzióval megadott sorozatok:
— az x_i individuumváltozók és az individuumkonstansok (azaz $\mathcal{F}$ nullaváltozós elemei) kifejezések;
— ha $t_1, \ldots, t_n$ L kifejezései és $f \in \mathcal{F}$ n-változós függvényjel $(n \geq 1)$, akkor $f(t_1, \ldots, t_n)$ is kifejezése L-nek;
— L minden kifejezése megkapható a fenti két szabály véges számú alkalmazásával.

Példa

Ha $\mathcal{F} = \{f, g, h\}$, ahol a megadott függvényjelek rendre 2, 1 és 0-változósak, akkor $f(f(x_1, h), g(f(x_3, x_1)))$ kifejezése L-nek.

A predikátumkalkulus formulái

Definíció

A $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ típusú L nyelv **kifejezései** az alábbi rekurzióval megadott sorozatok:
— az x_i individuumváltozók és az individuumkonstansok (azaz $\mathcal{F}$ nullaváltozós elemei) kifejezések;
— ha $t_1, \ldots, t_n$ L kifejezései és $f \in \mathcal{F}$ n-változós függvényjel $(n \geq 1)$, akkor $f(t_1, \ldots, t_n)$ is kifejezése L-nek;
— L minden kifejezése megkapható a fenti két szabály véges számú alkalmazásával.

Példa

Ha $\mathcal{F} = \{f, g, h\}$, ahol a megadott függvényjelek rendre 2, 1 és 0-változósak, akkor $f(f(x_1, h), g(f(x_3, x_1)))$ kifejezése L-nek.

Kifejezés ≈ „szintaktikusan helyes jelsorozat”

Nem túl pontosan: arról van szó, hogy éppen azon jelsorozatok a kifejezések, amelyeket az „értelemszerű” szintaktikai szabályokat betartva írhat unk fel. (Pl. a függvényjelek változószámára ügyelünk.) De hogy mi az „értelemszerű”, azt legkönnyebben a fenti definícióra hivatkozva lehet megmondani.

A programozási nyelvek is definiálják a kifejezéseket; hasonló rekurzióval.

Kifejezés ≈ „szintaktikusan helyes jelsorozat”

Nem túl pontosan: arról van szó, hogy éppen azon jelsorozatok a kifejezések, amelyeket az „értelemszerű” szintaktikai szabályokat betartva írhat unk fel. (Pl. a függvényjelek változószámára ügyelünk.) De hogy mi az „értelemszerű”, azt legkönnyebben a fenti definícióra hivatkozva lehet megmondani.

A programozási nyelvek is definiálják a kifejezéseket; hasonló rekurzióval.

Kifejezés $\approx$ „szintaktikusan helyes jelsorozat”

Nem túl pontosan: arról van szó, hogy éppen azon jelsorozatok a kifejezések, amelyeket az „értelemszerű” szintaktikai szabályokat betartva írhat unk fel. (Pl. a függvényjelek változószámára ügyelünk.) De hogy mi az „értelemszerű”, azt legkönnyebben a fenti definícióra hivatkozva lehet megmondani.

A programozási nyelvek is definiálják a kifejezéseket; hasonló rekurzióval.

(Fordított) lengyel jelölés

Az természetesen csak megállapodás, hogy a függvényjelet (mondjuk f) és az „argumentumait" (mondjuk x_1 és x_2) ilyen sorrendben írjuk: $f(x_1, x_2)$.
Lengyel jelölés esetén ehelyett az fx_1x_2 jelsorozotot írjuk (tehát a függvényjelet (vagy más szóval műveletjelet) követik az operanduszok). **Fordított lengyel jelölés** esetén pedig azt írjuk, hogy x_1x_2f (azaz az operanduszokat követi a műveletjel).
Bár a lengyel (és a fordított lengyel) jelölés első látásra furcsának tűnhet, két előnye mégiscsak van: egyrészt sokkal könnyebb rájuk fordítóprogramot írni, másrészt nincs szükség zárójelekre!
Természetesen a „klasszikus" műveletjeleket többnyire a hagyományos módon írjuk, pl. $+(x, y)$ helyett $x + y$-t írunk. Ennek megfelelően, ha pl. $\mathcal{F} = \{+, \cdot, \sqrt{\ }\}$, ahol a megadott hagyományos műveletjelek rendre 2, 2 és 1-változósak (a szokott módon), akkor pl. kifejezés az alábbi:

Az természetesen csak megállapodás, hogy a függvényjelet (mondjuk f) és az „argumentumait” (mondjuk x_1 és x_2) ilyen sorrendben írjuk: $f(x_1, x_2)$.
Lengyel jelölés esetén ehelyett az fx_1x_2 jelsorozotot írjuk (tehát a függvényjelet (vagy más szóval műveletjelet) követik az operanduszok). **Fordított lengyel jelölés** esetén pedig azt írjuk, hogy x_1x_2f (azaz az operanduszokat követi a műveletjel).
Bár a lengyel (és a fordított lengyel) jelölés első látásra furcsának tűnhet, két előnye mégiscsak van: egyrészt sokkal könnyebb rájuk fordítóprogramot írni, másrészt nincs szükség zárójelekre!
Természetesen a „klasszikus” műveletjeleket többnyire a hagyományos módon írjuk, pl. $+(x, y)$ helyett $x + y$-t írunk. Ennek megfelelően, ha pl. $\mathcal{F} = \{+, \cdot, \sqrt{\ }\}$, ahol a megadott hagyományos műveletjelek rendre 2, 2 és 1-változósak (a szokott módon), akkor pl. kifejezés az alábbi:

(Fordított) lengyel jelölés

Az természetesen csak megállapodás, hogy a függvényjelet (mondjuk f) és az „argumentumait" (mondjuk x_1 és x_2) ilyen sorrendben írjuk: $f(x_1, x_2)$.
Lengyel jelölés esetén ehelyett az fx_1x_2 jelsorozotot írjuk (tehát a függvényjelet (vagy más szóval műveletjelet) követik az operanduszok). **Fordított lengyel jelölés** esetén pedig azt írjuk, hogy x_1x_2f (azaz az operanduszokat követi a műveletjel).
Bár a lengyel (és a fordított lengyel) jelölés első látásra furcsának tűnhet, két előnye mégiscsak van: egyrészt sokkal könnyebb rájuk fordítóprogramot írni, másrészt nincs szükség zárójelekre!
Természetesen a „klasszikus" műveletjeleket többnyire a hagyományos módon írjuk, pl. $+(x, y)$ helyett $x + y$-t írunk. Ennek megfelelően, ha pl. $\mathcal{F} = \{+, \cdot, \sqrt{\ }\}$, ahol a megadott hagyományos műveletjelek rendre 2, 2 és 1-változósak (a szokott módon), akkor pl. kifejezés az alábbi:

(Fordított) lengyel jelölés

Az természetesen csak megállapodás, hogy a függvényjelet (mondjuk f) és az „argumentumait" (mondjuk x_1 és x_2) ilyen sorrendben írjuk: $f(x_1, x_2)$.
Lengyel jelölés esetén ehelyett az fx_1x_2 jelsorozotot írjuk (tehát a függvényjelet (vagy más szóval műveletjelet) követik az operanduszok). **Fordított lengyel jelölés** esetén pedig azt írjuk, hogy x_1x_2f (azaz az operanduszokat követi a műveletjel).
Bár a lengyel (és a fordított lengyel) jelölés első látásra furcsának tűnhet, két előnye mégiscsak van: egyrészt sokkal könnyebb rájuk fordítóprogramot írni, másrészt nincs szükség zárójelekre!
Természetesen a „klasszikus" műveletjeleket többnyire a hagyományos módon írjuk, pl. $+(x, y)$ helyett $x + y$-t írunk. Ennek megfelelően, ha pl. $\mathcal{F} = \{+, \cdot, \sqrt{\ }\}$, ahol a megadott hagyományos műveletjelek rendre 2, 2 és 1-változósak (a szokott módon), akkor pl. kifejezés az alábbi:

Az természetesen csak megállapodás, hogy a függvényjelet (mondjuk f) és az „argumentumait" (mondjuk x_1 és x_2) ilyen sorrendben írjuk: $f(x_1, x_2)$.
Lengyel jelölés esetén ehelyett az fx_1x_2 jelsorozotot írjuk (tehát a függvényjelet (vagy más szóval műveletjelet) követik az operanduszok). **Fordított lengyel jelölés** esetén pedig azt írjuk, hogy x_1x_2f (azaz az operanduszokat követi a műveletjel).
Bár a lengyel (és a fordított lengyel) jelölés első látásra furcsának tűnhet, két előnye mégiscsak van: egyrészt sokkal könnyebb rájuk fordítóprogramot írni, másrészt nincs szükség zárójelekre!
Természetesen a „klasszikus" műveletjeleket többnyire a hagyományos módon írjuk, pl. $+(x, y)$ helyett $x + y$-t írunk. Ennek megfelelően, ha pl. $\mathcal{F} = \{+, \cdot, \sqrt{}\}$, ahol a megadott hagyományos műveletjelek rendre 2, 2 és 1-változósak (a szokott módon), akkor pl. kifejezés az alábbi:

Az természetesen csak megállapodás, hogy a függvényjelet (mondjuk f) és az „argumentumait" (mondjuk x_1 és x_2) ilyen sorrendben írjuk: $f(x_1, x_2)$.
Lengyel jelölés esetén ehelyett az fx_1x_2 jelsorozotot írjuk (tehát a függvényjelet (vagy más szóval műveletjelet) követik az operanduszok). **Fordított lengyel jelölés** esetén pedig azt írjuk, hogy x_1x_2f (azaz az operanduszokat követi a műveletjel).
Bár a lengyel (és a fordított lengyel) jelölés első látásra furcsának tűnhet, két előnye mégiscsak van: egyrészt sokkal könnyebb rájuk fordítóprogramot írni, másrészt nincs szükség zárójelekre!
Természetesen a „klasszikus" műveletjeleket többnyire a hagyományos módon írjuk, pl. $+(x, y)$ helyett $x + y$-t írunk. Ennek megfelelően, ha pl. $\mathcal{F} = \{+, \cdot, \sqrt{\ }\}$, ahol a megadott hagyományos műveletjelek rendre 2, 2 és 1-változósak (a szokott módon), akkor pl. kifejezés az alábbi:

Az természetesen csak megállapodás, hogy a függvényjelet (mondjuk f) és az „argumentumait" (mondjuk x_1 és x_2) ilyen sorrendben írjuk: $f(x_1, x_2)$.
Lengyel jelölés esetén ehelyett az fx_1x_2 jelsorozotot írjuk (tehát a függvényjelet (vagy más szóval műveletjelet) követik az operanduszok). **Fordított lengyel jelölés** esetén pedig azt írjuk, hogy x_1x_2f (azaz az operanduszokat követi a műveletjel).
Bár a lengyel (és a fordított lengyel) jelölés első látásra furcsának tűnhet, két előnye mégiscsak van: egyrészt sokkal könnyebb rájuk fordítóprogramot írni, másrészt nincs szükség zárójelekre!
Természetesen a „klasszikus" műveletjeleket többnyire a hagyományos módon írjuk, pl. $+(x, y)$ helyett $x + y$-t írunk. Ennek megfelelően, ha pl. $\mathcal{F} = \{+, \cdot, \sqrt{\ }\}$, ahol a megadott hagyományos műveletjelek rendre 2, 2 és 1-változósak (a szokott módon), akkor pl. kifejezés az alábbi:

(Fordított) lengyel jelölés

Az természetesen csak megállapodás, hogy a függvényjelet (mondjuk f) és az „argumentumait" (mondjuk x_1 és x_2) ilyen sorrendben írjuk: $f(x_1, x_2)$.
Lengyel jelölés esetén ehelyett az fx_1x_2 jelsorozatot írjuk (tehát a függvényjelet (vagy más szóval műveletjelet) követik az operanduszok). **Fordított lengyel jelölés** esetén pedig azt írjuk, hogy x_1x_2f (azaz az operanduszokat követi a műveletjel).
Bár a lengyel (és a fordított lengyel) jelölés első látásra furcsának tűnhet, két előnye mégiscsak van: egyrészt sokkal könnyebb rájuk fordítóprogramot írni, másrészt nincs szükség zárójelekre!
Természetesen a „klasszikus" műveletjeleket többnyire a hagyományos módon írjuk, pl. $+(x, y)$ helyett $x + y$-t írunk. Ennek megfelelően, ha pl. $\mathcal{F} = \{+, \cdot, \sqrt{}\}$, ahol a megadott hagyományos műveletjelek rendre 2, 2 és 1-változósak (a szokott módon), akkor pl. kifejezés az alábbi:

Példa lengyel jelölésre

$$\sqrt{x \cdot (x + \sqrt{x})} \cdot \sqrt{y + x}.$$

Feladat

Írjuk fel lengyel jelölésben az előbbi kifejezést!

Megoldás

Jelölje K a kifejezést. A külső művelettel kezdjük: $K = \bullet ab$ alakú. (A jobb láthatóság miatt a $\cdot$ helyett $\bullet$-et fogunk írni.) Most a helyére előbb azt írjuk, hogy $\sqrt{}\ c$, ekkor $K = \bullet \sqrt{}\ cb$. Majd c helyett $\bullet xd$-t írunk: $K = \bullet \sqrt{} \bullet xdb$. És így tovább, a végeredmény: $\bullet \sqrt{} \bullet x + x \sqrt{}\ x \sqrt{} + yx.$

(Kis gyakorlattal egyből fel lehetett volna írni, az $a, b, \ldots$ segédváltozók nélkül.)

Példa lengyel jelölésre

$$\textcolor{red}{\sqrt{x\cdot(x+\sqrt{x})}}\cdot\textcolor{blue}{\sqrt{y+x}}.$$

Feladat

Írjuk fel lengyel jelölésben az előbbi kifejezést!

Megoldás

Jelölje K a kifejezést. A külső művelettel kezdjük: $K=\bullet ab$ alakú. (A jobb láthatóság miatt a $\cdot$ helyett $\bullet$-et fogunk írni.) Most a helyére előbb azt írjuk, hogy $\sqrt{\ }\ c$, ekkor $K=\bullet\sqrt{\ }\ cb$. Majd c helyett $\bullet xd$-t írunk: $K=\bullet\sqrt{\ }\ \bullet xdb$. És így tovább, a végeredmény: $\bullet\sqrt{\ }\ \bullet x+x\sqrt{\ }\ x\sqrt{\ }\ +yx$.

(Kis gyakorlattal egyből fel lehetett volna írni, az $a, b, \dots$ segédváltozók nélkül.)

Példa lengyel jelölésre

$$\sqrt{x \cdot (x + \sqrt{x})} \cdot \sqrt{y + x}.$$

Feladat

Írjuk fel lengyel jelölésben az előbbi kifejezést!

Megoldás

Jelölje K a kifejezést. A külső művelettel kezdjük: $K = \bullet ab$ alakú. (A jobb láthatóság miatt a $\cdot$ helyett $\bullet$-et fogunk írni.) Most a helyére előbb azt írjuk, hogy $\sqrt{}\ c$, ekkor $K = \bullet \sqrt{}\ cb$. Majd c helyett $\bullet xd$-t írunk: $K = \bullet \sqrt{}\ \bullet xdb$. És így tovább, a végeredmény: $\bullet \sqrt{}\ \bullet x + x \sqrt{}\ x \sqrt{}\ + yx$.

(Kis gyakorlattal egyből fel lehetett volna írni, az $a, b, \ldots$ segédváltozók nélkül.)

Példa lengyel jelölésre

$$\sqrt{x \cdot (x + \sqrt{x})} \cdot \sqrt{y + x}.$$

Feladat

Írjuk fel lengyel jelölésben az előbbi kifejezést!

Megoldás

Jelölje K a kifejezést. A külső művelettel kezdjük: $K = \bullet ab$ alakú. (A jobb láthatóság miatt a $\cdot$ helyett $\bullet$-et fogunk írni.) Most a helyére előbb azt írjuk, hogy $\sqrt{}\; c$, ekkor $K = \bullet \sqrt{}\; cb$. Majd c helyett $\bullet xd$-t írunk: $K = \bullet \sqrt{}\; \bullet xdb$. És így tovább, a végeredmény: $\bullet \sqrt{}\; \bullet x + x \sqrt{}\; x \sqrt{}\; + yx$.

(Kis gyakorlattal egyből fel lehetett volna írni, az $a, b, \ldots$ segédváltozók nélkül.)

Példa lengyel jelölésre

$$\sqrt{x\cdot(x+\sqrt{x})}\cdot\sqrt{y+x}.$$

Feladat

Írjuk fel lengyel jelölésben az előbbi kifejezést!

Megoldás

Jelölje K a kifejezést. A külső művelettel kezdjük: $K = \bullet ab$ alakú. (A jobb láthatóság miatt a $\cdot$ helyett $\bullet$-et fogunk írni.) Most a helyére előbb azt írjuk, hogy $\sqrt{\ }\; c$, ekkor $K = \bullet\sqrt{\ }\; cb$. Majd c helyett $\bullet xd$-t írunk: $K = \bullet\sqrt{\ }\;\bullet xdb$. És így tovább, a végeredmény: $\bullet\sqrt{\ }\;\bullet x + x\sqrt{\ }\; x\sqrt{\ }\; + yx$.

(Kis gyakorlattal egyből fel lehetett volna írni, az $a, b, \ldots$ segédváltozók nélkül.)

Példa lengyel jelölésre

$$\sqrt{x \cdot (x + \sqrt{x})} \cdot \sqrt{y + x}.$$

Feladat

Írjuk fel lengyel jelölésben az előbbi kifejezést!

Megoldás

Jelölje K a kifejezést. A külső művelettel kezdjük: $K = \bullet ab$ alakú. (A jobb láthatóság miatt a $\cdot$ helyett $\bullet$-et fogunk írni.) Most a helyére előbb azt írjuk, hogy $\sqrt{}\ c$, ekkor $K = \bullet \sqrt{}\ cb$. Majd c helyett $\bullet xd$-t írunk: $K = \bullet \sqrt{}\ \bullet xdb$. És így tovább, a végeredmény: $\bullet \sqrt{}\ \bullet x + x \sqrt{}\ x \sqrt{}\ + yx$.

(Kis gyakorlattal egyből fel lehetett volna írni, az $a, b, \ldots$ segédváltozók nélkül.)

Példa lengyel jelölésre

$$\sqrt{x\cdot(x+\sqrt{x})}\cdot\sqrt{y+x}.$$

Feladat

Írjuk fel lengyel jelölésben az előbbi kifejezést!

Megoldás

Jelölje K a kifejezést. A külső művelettel kezdjük: $K = \bullet ab$ alakú. (A jobb láthatóság miatt a $\cdot$ helyett $\bullet$-et fogunk írni.) Most a helyére előbb azt írjuk, hogy $\sqrt{}\ c$, ekkor $K = \bullet\sqrt{}\ cb$. Majd c helyett $\bullet xd$-t írunk: $K = \bullet\sqrt{}\ \bullet xdb$. És így tovább, a végeredmény: $\bullet\sqrt{}\ \bullet x + x\sqrt{}\ x\sqrt{}\ + yx$.

(Kis gyakorlattal egyből fel lehetett volna írni, az $a, b, \ldots$ segédváltozók nélkül.)

Atomi formulák

Definíció

A $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ típusú L nyelv **atomi formulái** a $P(t_1, \ldots, t_n)$ alakú jelsorozatok, ahol $P \in \mathcal{P}$ n-változós predikátumjel ($n \geq 0$), $t_1, \ldots, t_n$ pedig L kifejezései. (Speciális eset: $n = 0$, ekkor P egy ítéletváltozó.)

Példa

Ha $\mathcal{P} = \{P, Q\}$ és $\mathcal{F} = \{f, g\}$ és minden jel kétváltozós, akkor pl. $Q(f(x, x), g(f(x, y), y))$ is és $P(x, f(y, y))$ is atomi formula.

Megjegyzés

Azért kötöttük ki, hogy $\mathcal{P} \neq \emptyset$, mert ellenkező esetben nem lennének atomi formulák (és egyéb formulák sem). Viszont az $\mathcal{F} = \emptyset$ esetet megengedjük, hiszen ez nem akadály: a változók ekkor is kifejezések és $P(x_1, \ldots, x_k)$ (ahol $P \in \mathcal{P}$ és $n_P = k$) egy atomi formula.

Atomi formulák

Definíció

A $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ típusú L nyelv **atomi formulái** a $P(t_1, \ldots, t_n)$ alakú jelsorozatok, ahol $P \in \mathcal{P}$ n-változós predikátumjel $(n \geq 0)$, $t_1, \ldots, t_n$ pedig L kifejezései. (Speciális eset: $n = 0$, ekkor P egy ítéletváltozó.)

Példa

Ha $\mathcal{P} = \{P, Q\}$ és $\mathcal{F} = \{f, g\}$ és minden jel kétváltozós, akkor pl. $Q(f(x,x), g(f(x,y),y))$ is és $P(x, f(y,y))$ is atomi formula.

Megjegyzés

Azért kötöttük ki, hogy $\mathcal{P} \neq \emptyset$, mert ellenkező esetben nem lennének atomi formulák (és egyéb formulák sem). Viszont az $\mathcal{F} = \emptyset$ esetet megengedjük, hiszen ez nem akadály: a változók ekkor is kifejezések és $P(x_1, \ldots, x_k)$ (ahol $P \in \mathcal{P}$ és $n_P = k$) egy atomi formula.

Atomi formulák

Definíció

A $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ típusú L nyelv **atomi formulái** a $P(t_1, \dots, t_n)$ alakú jelsorozatok, ahol $P \in \mathcal{P}$ n-változós predikátumjel ($n \geq 0$), $t_1, \dots, t_n$ pedig L kifejezései. (Speciális eset: $n = 0$, ekkor P egy ítéletváltozó.)

Példa

Ha $\mathcal{P} = \{P, Q\}$ és $\mathcal{F} = \{f, g\}$ és minden jel kétváltozós, akkor pl. $Q(f(x, x), g(f(x, y), y))$ is és $P(x, f(y, y))$ is atomi formula.

Megjegyzés

Azért kötöttük ki, hogy $\mathcal{P} \neq \emptyset$, mert ellenkező esetben nem lennének atomi formulák (és egyéb formulák sem). Viszont az $\mathcal{F} = \emptyset$ esetet megengedjük, hiszen ez nem akadály: a változók ekkor is kifejezések és $P(x_1, \dots, x_k)$ (ahol $P \in \mathcal{P}$ és $n_P = k$) egy atomi formula.

A predikátumkalkulus formulái

Definíció

A $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ típusú L nyelv **formulái**
— L atomi formulái egyúttal L formulái;
— ha F, G formulái L-nek és x_i tetszőleges individuumváltozó, akkor $(F \vee G)$, $(F \wedge G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$, $(\neg F)$, $((\forall x_i)F)$ és $((\exists x_i)F)$ is formulája L-nek;
— L minden formulája megkapható a fenti két szabály véges számú alkalmazásával.

Azaz az atomi formulákból az ítéletkalkulus eszközeivel és kvantorok használatával nyerünk formulákat.

Individuumváltozóként $x, y, \ldots$ is használható, és az ítéletkalkulushoz hasonlóan a formula legkülső zárójelét szokás elhagyni.

A predikátumkalkulus formulái

Definíció

A $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ típusú L nyelv **formulái**
— L atomi formulái egyúttal L formulái;
— ha F, G formulái L-nek és x_i tetszőleges individuumváltozó, akkor $(F \vee G)$, $(F \wedge G)$, $(F \to G)$, $(F \leftrightarrow G)$, $(\neg F)$, $((\forall x_i)F)$ és $((\exists x_i)F)$ is formulája L-nek;
— L minden formulája megkapható a fenti két szabály véges számú alkalmazásával.

Azaz az atomi formulákból az ítéletkalkulus eszközeivel és kvantorok használatával nyerünk formulákat.

Individuumváltozóként $x, y, \ldots$ is használható, és az ítéletkalkulushoz hasonlóan a formula legkülső zárójelét szokás elhagyni.

A predikátumkalkulus formulái

Definíció

A $(\mathcal{P},\mathcal{F})$ típusú L nyelv **formulái**
— L atomi formulái egyúttal L formulái;
— ha F, G formulái L-nek és x_i tetszőleges individuumváltozó, akkor $(F \vee G)$, $(F \wedge G)$, $(F \to G)$, $(F \leftrightarrow G)$, $(\neg F)$, $((\forall x_i)F)$ és $((\exists x_i)F)$ is formulája L-nek;
— L minden formulája megkapható a fenti két szabály véges számú alkalmazásával.

Azaz az atomi formulákból az ítéletkalkulus eszközeivel és kvantorok használatával nyerünk formulákat.

Individuumváltozóként $x, y, \ldots$ is használható, és az ítéletkalkulushoz hasonlóan a formula legkülső zárójelét szokás elhagyni.

A predikátumkalkulus formulái

Definíció

A $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ típusú L nyelv **formulái**
— L atomi formulái egyúttal L formulái;
— ha F, G formulái L-nek és x_i tetszőleges individuumváltozó, akkor $(F \vee G)$, $(F \wedge G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$, $(\neg F)$, $((\forall x_i)F)$ és $((\exists x_i)F)$ is formulája L-nek;
— L minden formulája megkapható a fenti két szabály véges számú alkalmazásával.

Azaz az atomi formulákból az ítéletkalkulus eszközeivel és kvantorok használatával nyerünk formulákat.

Individuumváltozóként $x, y, \ldots$ is használható, és az ítéletkalkulushoz hasonlóan a formula legkülső zárójelét szokás elhagyni.

A predikátumkalkulus formulái

Definíció

A $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ típusú L nyelv **formulái**
— L atomi formulái egyúttal L formulái;
— ha F, G formulái L-nek és x_i tetszőleges individuumváltozó, akkor $(F \vee G)$, $(F \wedge G)$, $(F \to G)$, $(F \leftrightarrow G)$, $(\neg F)$, $((\forall x_i)F)$ és $((\exists x_i)F)$ is formulája L-nek;
— L minden formulája megkapható a fenti két szabály véges számú alkalmazásával.

Azaz az atomi formulákból az ítéletkalkulus eszközeivel és kvantorok használatával nyerünk formulákat.

Individuumváltozóként $x, y, \ldots$ is használható, és az ítéletkalkulushoz hasonlóan a formula legkülső zárójelét szokás elhagyni.

Definíció

A $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ típusú L nyelv **formulái**
— L atomi formulái egyúttal L formulái;
— ha F, G formulái L-nek és x_i tetszőleges individuumváltozó, akkor $(F \vee G)$, $(F \wedge G)$, $(F \to G)$, $(F \leftrightarrow G)$, $(\neg F)$, $((\forall x_i)F)$ és $((\exists x_i)F)$ is formulája L-nek;
— L minden formulája megkapható a fenti két szabály véges számú alkalmazásával.

Azaz az atomi formulákból az ítéletkalkulus eszközeivel és kvantorok használatával nyerünk formulákat.

Individuumváltozóként $x, y, \ldots$ is használható, és az ítéletkalkulushoz hasonlóan a formula legkülső zárójelét szokás elhagyni.

A predikátumkalkulus formulái

Definíció

A $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ típusú L nyelv **formulái**
— L atomi formulái egyúttal L formulái;
— ha F, G formulái L-nek és x_i tetszőleges individuumváltozó, akkor $(F \vee G)$, $(F \wedge G)$, $(F \to G)$, $(F \leftrightarrow G)$, $(\neg F)$, $((\forall x_i)F)$ és $((\exists x_i)F)$ is formulája L-nek;
— L minden formulája megkapható a fenti két szabály véges számú alkalmazásával.

Azaz az atomi formulákból az ítéletkalkulus eszközeivel és kvantorok használatával nyerünk formulákat.

Individuumváltozóként $x, y, \ldots$ is használható, és az ítéletkalkulushoz hasonlóan a formula legkülső zárójelét szokás elhagyni.

Megállapodunk abban is, hogy — **zárójel** híján — **a kvantor** (azaz a $(\forall x_i)$ vagy $(\exists x_i)$) az utána következő **legrövidebb részformulára** vonatkozik. Ezért pl. $(\forall x)A \to G$ jelentése: $((\forall x)A) \to G$, és nem pedig $(\forall x)(A \to G)$.

Ugyanezen megállapodás teszi lehetővé, hogy $((\forall x)((\exists y)(F \wedge G)))$ helyett csak annyit írjunk, hogy $(\forall x)(\exists y)(F \wedge G)$.

Abban is megállapodunk, hogy a függvény(jel)ek előbb hajtandók végre, mint a predikátumjelek, a predikátumjelek pedig előbb, mint a logikai műveletek. Mindezen megállapodások eredménye: kevesebb zárójel, nagyobb áttekinthetőség. (Ezen természetes megállapodás szerint jártunk el egy korábbi példában is.)

Megállapodunk abban is, hogy — **zárójel** híján — **a kvantor** (azaz a $(\forall x_i)$ vagy $(\exists x_i)$) az utána következő **legrövidebb részformulára** vonatkozik. Ezért pl. $(\forall x)A \to G$ jelentése: $((\forall x)A) \to G$, és nem pedig $(\forall x)(A \to G)$.

Ugyanezen megállapodás teszi lehetővé, hogy $((\forall x)((\exists y)(F \wedge G)))$ helyett csak annyit írjunk, hogy $(\forall x)(\exists y)(F \wedge G)$.

Abban is megállapodunk, hogy a függvény(jel)ek előbb hajtandók végre, mint a predikátumjelek, a predikátumjelek pedig előbb, mint a logikai műveletek. Mindezen megállapodások eredménye: kevesebb zárójel, nagyobb áttekinthetőség. (Ezen természetes megállapodás szerint jártunk el egy korábbi példában is.)

Rövidebb írásmódot eredményező további konvenciók

Megállapodunk abban is, hogy — **zárójel** híján — **a kvantor** (azaz a $(\forall x_i)$ vagy $(\exists x_i)$) az utána következő **legrövidebb részformulára** vonatkozik. Ezért pl. $(\forall x)A \to G$ jelentése: $((\forall x)A) \to G$, és nem pedig $(\forall x)(A \to G)$.
Ugyanezen megállapodás teszi lehetővé, hogy $((\forall x)((\exists y)(F \wedge G)))$ helyett csak annyit írjunk, hogy $(\forall x)(\exists y)(F \wedge G)$.
Abban is megállapodunk, hogy a függvény(jel)ek előbb hajtandók végre, mint a predikátumjelek, a predikátumjelek pedig előbb, mint a logikai műveletek. Mindezen megállapodások eredménye: kevesebb zárójel, nagyobb áttekinthetőség. (Ezen természetes megállapodás szerint jártunk el egy korábbi példában is.)

Rövidebb írásmódot eredményező további konvenciók

Megállapodunk abban is, hogy — **zárójel** híján — **a kvantor** (azaz a $(\forall x_i)$ vagy $(\exists x_i)$) az utána következő **legrövidebb részformulára** vonatkozik. Ezért pl. $(\forall x)A \to G$ jelentése: $((\forall x)A) \to G$, és nem pedig $(\forall x)(A \to G)$.
Ugyanezen megállapodás teszi lehetővé, hogy $((\forall x)((\exists y)(F \wedge G)))$ helyett csak annyit írjunk, hogy $(\forall x)(\exists y)(F \wedge G)$.
Abban is megállapodunk, hogy a függvény(jel)ek előbb hajtandók végre, mint a predikátumjelek, a predikátumjelek pedig előbb, mint a logikai műveletek. Mindezen megállapodások eredménye: kevesebb zárójel, nagyobb áttekinthetőség. (Ezen természetes megállapodás szerint jártunk el egy korábbi példában is.)

Rövidebb írásmódot eredményező további konvenciók

Megállapodunk abban is, hogy — **zárójel** híján — **a kvantor** (azaz a $(\forall x_i)$ vagy $(\exists x_i)$) az utána következő **legrövidebb részformulára** vonatkozik. Ezért pl. $(\forall x)A \to G$ jelentése: $((\forall x)A) \to G$, és nem pedig $(\forall x)(A \to G)$.
Ugyanezen megállapodás teszi lehetővé, hogy $((\forall x)((\exists y)(F \wedge G)))$ helyett csak annyit írjunk, hogy $(\forall x)(\exists y)(F \wedge G)$.
Abban is megállapodunk, hogy a függvény(jel)ek előbb hajtandók végre, mint a predikátumjelek, a predikátumjelek pedig előbb, mint a logikai műveletek. Mindezen megállapodások eredménye: kevesebb zárójel, nagyobb áttekinthetőség. (Ezen természetes megállapodás szerint jártunk el egy korábbi példában is.)

Rövidebb írásmódot eredményező további konvenciók

Megállapodunk abban is, hogy — **zárójel** híján — **a kvantor** (azaz a $(\forall x_i)$ vagy $(\exists x_i)$) az utána következő **legrövidebb részformulára** vonatkozik. Ezért pl. $(\forall x)A \to G$ jelentése: $((\forall x)A) \to G$, és nem pedig $(\forall x)(A \to G)$.
Ugyanezen megállapodás teszi lehetővé, hogy $((\forall x)((\exists y)(F \wedge G)))$ helyett csak annyit írjunk, hogy $(\forall x)(\exists y)(F \wedge G)$.
Abban is megállapodunk, hogy a függvény(jel)ek előbb hajtandók végre, mint a predikátumjelek, a predikátumjelek pedig előbb, mint a logikai műveletek. Mindezen megállapodások eredménye: kevesebb zárójel, nagyobb áttekinthetőség. (Ezen természetes megállapodás szerint jártunk el egy korábbi példában is.)

Rövidebb írásmódot eredményező további konvenciók

Megállapodunk abban is, hogy — **zárójel** híján — **a kvantor** (azaz a $(\forall x_i)$ vagy $(\exists x_i)$) az utána következő **legrövidebb részformulára** vonatkozik. Ezért pl. $(\forall x)A \to G$ jelentése: $((\forall x)A) \to G$, és nem pedig $(\forall x)(A \to G)$.
Ugyanezen megállapodás teszi lehetővé, hogy $((\forall x)((\exists y)(F \wedge G)))$ helyett csak annyit írjunk, hogy $(\forall x)(\exists y)(F \wedge G)$.
Abban is megállapodunk, hogy a függvény(jel)ek előbb hajtandók végre, mint a predikátumjelek, a predikátumjelek pedig előbb, mint a logikai műveletek. Mindezen megállapodások eredménye: kevesebb zárójel, nagyobb áttekinthetőség. (Ezen természetes megállapodás szerint jártunk el egy korábbi példában is.)

Megállapodunk abban is, hogy — **zárójel** híján — **a kvantor** (azaz a $(\forall x_i)$ vagy $(\exists x_i)$) az utána következő **legrövidebb részformulára** vonatkozik. Ezért pl. $(\forall x)A \to G$ jelentése: $((\forall x)A) \to G$, és nem pedig $(\forall x)(A \to G)$.

Ugyanezen megállapodás teszi lehetővé, hogy $((\forall x)((\exists y)(F \wedge G)))$ helyett csak annyit írjunk, hogy $(\forall x)(\exists y)(F \wedge G)$.

Abban is megállapodunk, hogy a függvény(jel)ek előbb hajtandók végre, mint a predikátumjelek, a predikátumjelek pedig előbb, mint a logikai műveletek. Mindezen megállapodások eredménye: kevesebb zárójel, nagyobb áttekinthetőség. (Ezen természetes megállapodás szerint jártunk el egy korábbi példában is.)

Példa

Ha $\mathcal{P} = \{\le, =\}$ és $\mathcal{F} = \{+, \cdot, \sqrt{}\}$ (a szokásos változószámokkal, a függvényjeleket és predikátumjeleket a szokásos módon „középre írva"), akkor íme néhány formula:

$$F: \quad \underbrace{(\forall x)\,(\exists y)\,\underbrace{(\neg(x = y) \wedge y \le x)}_{\exists y \text{ hatásköre}}}_{\forall x \text{ hatásköre}},$$

$$G: \quad (\forall x)(\exists y)(\forall z)(x \cdot y \le z),$$

$$H: \quad (\exists x)\,\underbrace{(\forall y)\,\underbrace{((\forall z)\,\underbrace{(y \cdot z = z)}_{\forall z \text{ hatásköre}} \to (x \cdot x = y + y))}_{\forall y \text{ hatásköre}}}_{\exists x \text{ hatásköre}}.$$

Megjegyzés: az egyenlőség ($=$) predikátum szinte mindig $\in \mathcal{P}$.

Példák a predikátumkalkulus formuláira

Példa

Ha $\mathcal{P} = \{\leq, =\}$ és $\mathcal{F} = \{+, \cdot, \sqrt{\ }\}$ (a szokásos változószámokkal, a függvényjeleket és predikátumjeleket a szokásos módon „középre írva”), akkor íme néhány formula:

$$F: \qquad \underbrace{(\forall x)\,\underbrace{(\exists y)\,\underbrace{(\neg(x = y) \wedge y \leq x)}_{\exists y \text{ hatásköre}}}_{\forall x \text{ hatásköre}}}\,,$$

$$G: \qquad (\forall x)(\exists y)(\forall z)(x \cdot y \leq z),$$

$$H: \qquad (\exists x)\,\underbrace{(\forall y)\,\underbrace{((\forall z)\ \underbrace{(y \cdot z = z)}_{\forall z \text{ hatásköre}} \ \to (x \cdot x = y + y))}_{\forall y \text{ hatásköre}}}_{\exists x \text{ hatásköre}}\,.$$

Megjegyzés: az egyenlőség $(=)$ predikátum szintén mindig $\in \mathcal{P}$.

Példa

Ha $\mathcal{P} = \{\leq, =\}$ és $\mathcal{F} = \{+, \cdot, \sqrt{\ }\}$ (a szokásos változószámokkal, a függvényjeleket és predikátumjeleket a szokásos módon „középre írva''), akkor íme néhány formula:

$$F: \quad (\forall x)\underbrace{(\exists y)\underbrace{\big(\neg(x=y)\wedge y\leq x\big)}_{\exists y\ \text{hatásköre}}}_{\forall x\ \text{hatásköre}},$$

$$G: \quad (\forall x)(\exists y)(\forall z)(x\cdot y\leq z),$$

$$H: \quad (\exists x)\underbrace{(\forall y)\underbrace{\big((\forall z)\underbrace{(y\cdot z=z)}_{\forall z\ \text{hatásköre}} \to (x\cdot x=y+y)\big)}_{\forall y\ \text{hatásköre}}}_{\exists x\ \text{hatásköre}}.$$

Megjegyzés: az egyenlőség $(=)$ predikátum szinte mindig $\in \mathcal{P}$.

Példák a predikátumkalkulus formuláira

Példa

Ha $\mathcal{P} = \{\leq, =\}$ és $\mathcal{F} = \{+, \cdot, \sqrt{}\}$ (a szokásos változószámokkal, a függvényjeleket és predikátumjeleket a szokásos módon „középre írva"), akkor íme néhány formula:

$$F: \quad \underbrace{(\forall x)\,\underbrace{(\exists y)\,\underbrace{(\neg(x=y)\wedge y\leq x)}_{\exists y\text{ hatásköre}}}_{\forall x\text{ hatásköre}}}\,,$$

$$G: \quad (\forall x)(\exists y)(\forall z)(x\cdot y\leq z),$$

$$H: \quad (\exists x)\,\underbrace{(\forall y)\,\underbrace{((\forall z)\;\underbrace{(y\cdot z=z)}_{\forall z\text{ hatásköre}}\;\rightarrow(x\cdot x=y+y))}_{\forall y\text{ hatásköre}}}_{\exists x\text{ hatásköre}}\,.$$

Megjegyzés: az egyenlőség $(=)$ predikátum szinte mindig $\in \mathcal{P}$

Példák a predikátumkalkulus formuláira

Példa

Ha $\mathcal{P} = \{\leq, =\}$ és $\mathcal{F} = \{+, \cdot, \sqrt{\ }\}$ (a szokásos változószámokkal, a függvényjeleket és predikátumjeleket a szokásos módon „középre írva”), akkor íme néhány formula:

$$F: \quad (\forall x) \underbrace{(\exists y) \underbrace{(\neg(x = y) \wedge y \leq x)}_{\exists y \text{ hatásköre}}}_{\forall x \text{ hatásköre}},$$

$$G: \quad (\forall x)(\exists y)(\forall z)(x \cdot y \leq z),$$

$$H: \quad (\exists x) \underbrace{(\forall y) \underbrace{((\forall z) \underbrace{(y \cdot z = z)}_{\forall z \text{ hatásköre}} \rightarrow (x \cdot x = y + y))}_{\forall y \text{ hatásköre}}}_{\exists x \text{ hatásköre}}.$$

Megjegyzés: az egyenlőség $(=)$ predikátum szinte mindig $\in \mathcal{P}$

Példák a predikátumkalkulus formuláira

Példa

Ha $\mathcal{P} = \{\leq, =\}$ és $\mathcal{F} = \{+, \cdot, \sqrt{}\}$ (a szokásos változószámokkal, a függvényjeleket és predikátumjeleket a szokásos módon „középre írva”), akkor íme néhány formula:

$$F: \quad (\forall x)\underbrace{(\exists y)\underbrace{\big(\neg(x = y) \wedge y \leq x\big)}_{\exists y \text{ hatásköre}}}_{\forall x \text{ hatásköre}},$$

$$G: \quad (\forall x)(\exists y)(\forall z)(x \cdot y \leq z),$$

$$H: \quad (\exists x)\underbrace{(\forall y)\underbrace{\big((\forall z)\underbrace{(y \cdot z = z)}_{\forall z \text{ hatásköre}} \rightarrow (x \cdot x = y + y)\big)}_{\forall y \text{ hatásköre}}}_{\exists x \text{ hatásköre}}.$$

Megjegyzés: az egyenlőség ($=$) predikátum szinte mindig $\in \mathcal{P}$.

Példák a predikátumkalkulus formuláira

Példa

Ha $\mathcal{P}=\{\le,=\}$ és $\mathcal{F}=\{+,\cdot,\sqrt{\ \ }\}$ (a szokásos változószámokkal, a függvényjeleket és predikátumjeleket a szokásos módon „középre írva”), akkor íme néhány formula:

$$F:\qquad (\forall x)\underbrace{(\exists y)\underbrace{(\neg(x=y)\wedge y\le x)}_{\exists y\text{ hatásköre}}}_{\forall x\text{ hatásköre}},$$

$$G:\qquad (\forall x)(\exists y)(\forall z)(x\cdot y\le z),$$

$$H:\qquad (\exists x)\underbrace{(\forall y)\underbrace{((\forall z)\underbrace{(y\cdot z=z)}_{\forall z\text{ hatásköre}}\to(x\cdot x=y+y))}_{\forall y\text{ hatásköre}}}_{\exists x\text{ hatásköre}}.$$

Megjegyzés: az egyenlőség $(=)$ predikátum szintén mindig $\in\mathcal{P}$.

Példák a predikátumkalkulus formuláira

Példa

Ha $\mathcal{P} = \{\leq, =\}$ és $\mathcal{F} = \{+, \cdot, \sqrt{}\}$ (a szokásos változószámokkal, a függvényjeleket és predikátumjeleket a szokásos módon „középre írva"), akkor íme néhány formula:

$$F: \quad \underbrace{(\forall x)\,\underbrace{(\exists y)\,\underbrace{\big(\neg(x = y) \wedge y \leq x\big)}_{\exists y \text{ hatásköre}}}_{\forall x \text{ hatásköre}}}\,,$$

$$G: \quad (\forall x)(\exists y)(\forall z)(x \cdot y \leq z),$$

$$H: \quad (\exists x)\,\underbrace{(\forall y)\,\underbrace{\big((\forall z)\;\underbrace{(y \cdot z = z)}_{\forall z \text{ hatásköre}}\;\rightarrow (x \cdot x = y + y)\big)}_{\forall y \text{ hatásköre}}}_{\exists x \text{ hatásköre}}\,.$$

Megjegyzés: az egyenlőség $(=)$ predikátum szinte mindig $\in \mathcal{P}$.

Példák a predikátumkalkulus formuláira

Példa

Ha $\mathcal{P} = \{\leq, =\}$ és $\mathcal{F} = \{+, \cdot, \sqrt{\ \ }\}$ (a szokásos változószámokkal, a függvényjeleket és predikátumjeleket a szokásos módon „középre írva"), akkor íme néhány formula:

$$F: \quad \underbrace{(\forall x)\,\underbrace{(\exists y)\,\underbrace{(\neg(x = y) \wedge y \leq x)}_{\exists y \text{ hatásköre}}}_{\forall x \text{ hatásköre}}}\,,$$

$$G: \quad (\forall x)(\exists y)(\forall z)(x \cdot y \leq z),$$

$$H: \quad (\exists x)\,\underbrace{(\forall y)\,\underbrace{((\forall z)\,\underbrace{(y \cdot z = z)}_{\forall z \text{ hatásköre}} \to (x \cdot x = y + y))}_{\forall y \text{ hatásköre}}}_{\exists x \text{ hatásköre}}\,.$$

Megjegyzés: az egyenlőség (=) predikátum szinte mindig $\in \mathcal{P}$.

Példák a predikátumkalkulus formuláira

Példa

Ha $\mathcal{P} = \{\le, =\}$ és $\mathcal{F} = \{+, \cdot, \sqrt{}\}$ (a szokásos változószámokkal, a függvényjeleket és predikátumjeleket a szokásos módon „középre írva"), akkor íme néhány formula:

$$F: \quad (\forall x)\underbrace{(\exists y)\underbrace{(\neg(x = y) \wedge y \le x)}_{\exists y \text{ hatásköre}}}_{\forall x \text{ hatásköre}},$$

$$G: \quad (\forall x)(\exists y)(\forall z)(x \cdot y \le z),$$

$$H: \quad (\exists x)\underbrace{(\forall y)\underbrace{((\forall z)\underbrace{(y \cdot z = z)}_{\forall z \text{ hatásköre}} \to (x \cdot x = y + y))}_{\forall y \text{ hatásköre}}}_{\exists x \text{ hatásköre}}.$$

Megjegyzés: az egyenlőség $(=)$ predikátum szinte mindig $\in \mathcal{P}$.

Példák-e formulákra?

Feladat

Formulák-e (alkalmasan választott elsőrendű nyelvben, más néven predikátumkalkulusban) az alábbiak:
(a) $F(x) \to ((\exists x)F(F(x)))$,
(b) $U(f(x)) \to (\forall y)U(x)$,
(c) $Q(x) \wedge (\forall y)(P(y) \to Q(x, y))$?
(A feladatban nem tételezzük fel a mi jelölésbeli konvencióinkat a kis- és nagybetűk használatára, tehát akár x is lehet predikátumjel és Q is lehet individuumváltozó.)

Megoldás (Csak (a)-t részletezzük. (b) igen, (c) nem.)

(a) Mivel x-re kvantor hat, x individuumváltozó. Az $\to$ premisszája formula (és nem kifejezés), ezért F predikátumjel. Egy predikátumjel argumentumai csak kifejezések lehetnek, ezért az $F(F(x))$-szel baj van: a belső $F(x)$ formula, tehát rá a külső F predikátumjel nem alkalmazható. Az **(a) NEM formula**.

Példák-e formulákra?

Feladat

Formulák-e (alkalmasan választott elsőrendű nyelvben, más néven predikátumkalkulusban) az alábbiak:
(a) $F(x) \to ((\exists x)F(F(x)))$,
(b) $U(f(x)) \to (\forall y)U(x)$,
(c) $Q(x) \wedge (\forall y)(P(y) \to Q(x, y))$?
(A feladatban nem tételezzük fel a mi jelölésbeli konvencióinkat a kis- és nagybetűk használatára, tehát akár x is lehet predikátumjel és Q is lehet individuumváltozó.)

Megoldás (Csak (a)-t részletezzük. (b) igen, (c) nem.)

(a) Mivel x-re kvantor hat, x individuumváltozó. Az $\to$ premisszája formula (és nem kifejezés), ezért F predikátumjel. Egy predikátumjel argumentumai csak kifejezések lehetnek, ezért az $F(F(x))$-szel baj van: a belső $F(x)$ formula, tehát rá a külső F predikátumjel nem alkalmazható. Az **(a) NEM formula**.

Példák-e formulákra?

Feladat

Formulák-e (alkalmasan választott elsőrendű nyelvben, más néven predikátumkalkulusban) az alábbiak:
(a) $F(x) \to ((\exists x)F(F(x)))$,
(b) $U(f(x)) \to (\forall y)U(x)$,
(c) $Q(x) \wedge (\forall y)(P(y) \to Q(x,y))$?
(A feladatban nem tételezzük fel a mi jelölésbeli konvencióinkat a kis- és nagybetűk használatára, tehát akár x is lehet predikátumjel és Q is lehet individuumváltozó.)

Megoldás (Csak (a)-t részletezzük. (b) igen, (c) nem.)

(a) Mivel x-re kvantor hat, x individuumváltozó. Az $\to$ premisszája formula (és nem kifejezés), ezért F predikátumjel. Egy predikátumjel argumentumai csak kifejezések lehetnek, ezért az $F(F(x))$-szel baj van: a belső $F(x)$ formula, tehát rá a külső F predikátumjel nem alkalmazható. Az **(a) NEM formula**.

Példák-e formulákra?

Feladat

Formulák-e (alkalmasan választott elsőrendű nyelvben, más néven predikátumkalkulusban) az alábbiak:
(a) $F(x) \to ((\exists x)F(F(x)))$,
(b) $U(f(x)) \to (\forall y)U(x)$,
(c) $Q(x) \wedge (\forall y)(P(y) \to Q(x,y))$?
(A feladatban nem tételezzük fel a mi jelölésbeli konvencióinkat a kis- és nagybetűk használatára, tehát akár x is lehet predikátumjel és Q is lehet individuumváltozó.)

Megoldás (Csak (a)-t részletezzük. (b) igen, (c) nem.)

(a) Mivel x-re kvantor hat, x individuumváltozó. Az $\to$ premisszája formula (és nem kifejezés), ezért F predikátumjel. Egy predikátumjel argumentumai csak kifejezések lehetnek, ezért az $F(F(x))$-szel baj van: a belső $F(x)$ formula, tehát rá a külső F predikátumjel nem alkalmazható. Az **(a) NEM formula**.

Individuumtartomány

Formulákat úgy érdemes vizsgálni, hogy rögzítünk egy halmazt **individuumtartomány** néven, és arra „gondolunk”, hogy az individuumváltozók és individuumkonstansok az individuumtartományból veszik fel értékeiket. Ekkor — elég természetes módon — a formulák igaz vagy hamis logikai értéket nyernek. Egy formula logikai értéke nagyon sok mindentől függ: a függvényjelek és predikátumjelek jelentésétől, az individuumváltozók által felvett értékektől és még az individuumtartománytól is — részletek a korábbi jegyzetben (is) olvashatók, DE: a LILA színnel írt szöveg, mint pl. ez is, nem része a jelen tananyagnak.

Példa: a $(\forall x)(\exists y)(x = y + y)$ formula (ha a $+$ és az $=$ jelentése a szokásos) igaz, ha az individuumtartomány $\mathbb{R}$ (valós számok halmaza), de hamis, ha ez a tartomány $\mathbb{Z}$ (egész számok halmaza).

Individuumtartomány

Formulákat úgy érdemes vizsgálni, hogy rögzítünk egy halmazt **individuumtartomány** néven, és arra „gondolunk", hogy az individuumváltozók és individuumkonstansok az individuumtartományból veszik fel értékeiket. Ekkor — elég természetes módon — a formulák igaz vagy hamis logikai értéket nyernek. Egy formula logikai értéke nagyon sok mindentől függ: a függvényjelek és predikátumjelek jelentésétől, az individuumváltozók által felvett értékektől és még az individuumtartománytól is — részletek a korábbi jegyzetben (is) olvashatók, DE: a LILA színnel írt szöveg, mint pl. ez is, nem része a jelen tananyagnak. Példa: a $(\forall x)(\exists y)(x = y + y)$ formula (ha a $+$ és az $=$ jelentése a szokásos) igaz, ha az individuumtartomány $\mathbb{R}$ (valós számok halmaza), de hamis, ha ez a tartomány $\mathbb{Z}$ (egész számok halmaza).

Egy feladat

Ha mást nem mondunk, akkor a jólismert függvényjelek $(+, \leq, =, \cdot, \ldots)$ a jólismert halmazokon ($\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) és azok részhalmazain **mindig a szokásos** jelentéssel bírnak.

Feladat

Mi a $G: \quad (\forall x)(\exists y)(\forall z)(x \cdot y \leq z)$ formula logikai értéke az $\mathbb{N}_0$, illetve a $\mathbb{Z}$ halmazon (azaz interpretációs tartományon)?

Megoldás

$\mathbb{N}_0$ esetén: igaz. (Hiszen y választható 0-nak.)

$\mathbb{Z}$ esetén: hamis (hiszen nincs legkisebb egész szám).

Megoldás

$\mathbb{N}_0$ esetén: igaz. (Hiszen y választható 0-nak.)
$\mathbb{Z}$ esetén: hamis (hiszen nincs legkisebb egész szám).

Kontrapozíció (még egyszer) és indirekt bizonyítás

A kontrapozícióról szóló tétel szerint $A \to B \equiv (\neg B) \to (\neg A)$.

Definíció

Kontrapozícióval történő bizonyításról akkor beszélünk, ha $A \to B$ helyett azt bizonyítjuk, hogy $\neg B \to \neg A$.
Indirekt bizonyításról pedig akkor beszélünk, ha $A \to B$ helyett azt igazoljuk, hogy $A \wedge \neg B$-ből következik egy (azonosan) hamis formula (pl. $C \wedge \neg C$), azaz egy ellentmondás.

A fenti kettő egy tőről fakad és nem kell a különbséget tudnunk. Most csak az érdekes számunkra, hogy tagadni kell egy állítást (ítéletet), a B-t. A siker azon múlik, hogy tudunk-e *konstruktívan* tagadni.

Logikai ekvivalencia; példa indirekt bizonyításra és konstruktív tagadásra

Definíció

A predikátumkalkulus két formuláját **logikailag ekivalensnek mondjuk**, ha a benne szereplő predikátumjeleket és függvényjeleket bárhogy interpretálva és az individuumváltozóknak és individuumkonstansoknak bárhogy értéket adva az egyik formula pontosan akkor veszi fel az igaz logikai értéket, amikor a másik felveszi.

Tekintsük azt az (egész számokra vonatkozó) F állítást, hogy „mindegyiknél van nagyobb". Formalizálva, $F: \quad (\forall x)(\exists y)(x < y)$. Ekkor $\neg F: \quad \neg(\forall x)(\exists y)(x < y)$, de ezzel nem tudunk mit kezdeni. De ha észrevesszük, hogy $\neg F$ **logikailag ekvivalens** a $G: \quad (\exists x)(\forall y)(\neg(x < y))$ formulával, akkor már nyert ügyünk van, hiszen G nyilván ellentmondás: nem létezhet ilyen x, hiszen az $y := x + 1$-re a $\neg(x < y)$ formula hamis.

Logikai ekvivalencia; példa indirekt bizonyításra és konstruktív tagadásra

Definíció

A predikátumkalkulus két formuláját **logikailag ekivalensnek mondjuk**, ha a benne szereplő predikátumjeleket és függvényjeleket bárhogy interpretálva és az individuumváltozóknak és individuumkonstansoknak bárhogy értéket adva az egyik formula pontosan akkor veszi fel az igaz logikai értéket, amikor a másik felveszi.

Tekintsük azt az (egész számokra vonatkozó) F állítást, hogy „mindegyiknél van nagyobb". Formalizálva, $F: \quad (\forall x)(\exists y)(x < y)$. Ekkor $\neg F: \quad \neg(\forall x)(\exists y)(x < y)$, de ezzel nem tudunk mit kezdeni. De ha észrevesszük, hogy $\neg F$ **logikailag ekvivalens** a $G: \quad (\exists x)(\forall y)(\neg(x < y))$ formulával, akkor már nyert ügyünk van, hiszen G nyilván ellentmondás: nem létezhet ilyen x, hiszen az $y := x + 1$-re a $\neg(x < y)$ formula hamis.

Logikai ekvivalencia; példa indirekt bizonyításra és konstruktív tagadásra

Definíció

A predikátumkalkulus két formuláját **logikailag ekivalensnek mondjuk**, ha a benne szereplő predikátumjeleket és függvényjeleket bárhogy interpretálva és az individuumváltozóknak és individuumkonstansoknak bárhogy értéket adva az egyik formula pontosan akkor veszi fel az igaz logikai értéket, amikor a másik felveszi.

Tekintsük azt az (egész számokra vonatkozó) F állítást, hogy „mindegyiknél van nagyobb". Formalizálva, $F: \quad (\forall x)(\exists y)(x < y)$. Ekkor $\neg F: \quad \neg(\forall x)(\exists y)(x < y)$, de ezzel nem tudunk mit kezdeni. De ha észrevesszük, hogy $\neg F$ **logikailag ekvivalens** a $G: \quad (\exists x)(\forall y)(\neg(x < y))$ formulával, akkor már nyert ügyünk van, hiszen G nyilván ellentmondás: nem létezhet ilyen x, hiszen az $y := x + 1$-re a $\neg(x < y)$ formula hamis.

Logikai ekvivalencia; példa indirekt bizonyításra és konstruktív tagadásra

Definíció

A predikátumkalkulus két formuláját **logikailag ekivalensnek mondjuk**, ha a benne szereplő predikátumjeleket és függvényjeleket bárhogy interpretálva és az individuumváltozóknak és individuumkonstansoknak bárhogy értéket adva az egyik formula pontosan akkor veszi fel az igaz logikai értéket, amikor a másik felveszi.

Tekintsük azt az (egész számokra vonatkozó) F állítást, hogy „mindegyiknél van nagyobb". Formalizálva, $F: \quad (\forall x)(\exists y)(x < y)$. Ekkor $\neg F: \quad \neg(\forall x)(\exists y)(x < y)$, de ezzel nem tudunk mit kezdeni. De ha észrevesszük, hogy $\neg F$ **logikailag ekvivalens** a $G: \quad (\exists x)(\forall y)(\neg(x < y))$ formulával, akkor már nyert ügyünk van, hiszen G nyilván ellentmondás: nem létezhet ilyen x, hiszen az $y := x + 1$-re a $\neg(x < y)$ formula hamis.

Kvantor tagadása

Tétel

Ha F olyan formula, amely függhet x-től, akkor érvényesek az alábbi logikai ekvivalenciák:

$\neg((\forall x)F) \equiv (\exists x)(\neg F)$, $\qquad \neg((\exists x)F) \equiv (\forall x)(\neg F)$

azaz (kevesebb zárójellel)

$\neg(\forall x)F \equiv (\exists x)(\neg F)$, $\qquad \neg(\exists x)F \equiv (\forall x)(\neg F)$.

(Szemléletesen: ha a negáció jelét átvisszük egy kvantor másik oldalára, akkor a kvantor az ellenkezőjére vált.)

A tétel szinte evidens; erre mondjuk az F: „x szorgalmas” és interpretációs tartomány = emberek egy rögzített csoportja példa jól rávilágít. A bal oldali tautológia szerint ekkor „nem igaz, hogy mindenki szorgalmas" $\equiv$ „van olyan x, aki nem szorgalmas”. A jobboldali szerint „nincs olyan x, aki szorgalmas" $\equiv$ „minden x nem szorgalmas”. (Hétköznapi nyelven egy adott csoportra a „nincs köztük szorgalmas" és a „közülük mindenki lusta” ítéletek logikailag ekvivalensek.)

Kvantor tagadása

Tétel

Ha F olyan formula, amely függhet x-től, akkor érvényesek az alábbi logikai ekvivalenciák:

$\neg((\forall x)F) \equiv (\exists x)(\neg F), \qquad \neg((\exists x)F) \equiv (\forall x)(\neg F)$

azaz (kevesebb zárójellel)

$\neg(\forall x)F \equiv (\exists x)(\neg F), \qquad \neg(\exists x)F \equiv (\forall x)(\neg F).$

(Szemléletesen: ha a negáció jelét átvisszük egy kvantor másik oldalára, akkor a kvantor az ellenkezőjére vált.)

A tétel szinte evidens; erre mondjuk az F: „x szorgalmas" és interpretációs tartomány = emberek egy rögzített csoportja példa jól rávilágít. A bal oldali tautológia szerint ekkor „nem igaz, hogy mindenki szorgalmas" ≡ „van olyan x, aki nem szorgalmas". A jobboldali szerint „nincs olyan x, aki szorgalmas" ≡ „minden x nem szorgalmas". (Hétköznapi nyelven egy adott csoportra a „nincs köztük szorgalmas" és a „közülük mindenki lusta" ítéletek logikailag ekvivalensek.)

Kvantor tagadása

Tétel

Ha F olyan formula, amely függhet x-től, akkor érvényesek az alábbi logikai ekvivalenciák:
$\neg((\forall x)F) \equiv (\exists x)(\neg F)$, $\quad \neg((\exists x)F) \equiv (\forall x)(\neg F)$
azaz (kevesebb zárójellel)
$\neg(\forall x)F \equiv (\exists x)(\neg F)$, $\quad \neg(\exists x)F \equiv (\forall x)(\neg F)$.
(Szemléletesen: ha a negáció jelét átvisszük egy kvantor másik oldalára, akkor a kvantor az ellenkezőjére vált.)

A tétel szinte evidens; erre mondjuk az F: „x szorgalmas" és interpretációs tartomány = emberek egy rögzített csoportja példa jól rávilágít. A bal oldali tautológia szerint ekkor „nem igaz, hogy mindenki szorgalmas" ≡ „van olyan x, aki nem szorgalmas". A jobboldali szerint „nincs olyan x, aki szorgalmas" ≡ „minden x nem szorgalmas". (Hétköznapi nyelven egy adott csoportra a „nincs köztük szorgalmas" és a „közülük mindenki lusta" ítéletek logikailag ekvivalensek.)

Kvantor tagadása

Tétel

Ha F olyan formula, amely függhet x-től, akkor érvényesek az alábbi logikai ekvivalenciák:
$\neg((\forall x)F) \equiv (\exists x)(\neg F)$, $\qquad \neg((\exists x)F) \equiv (\forall x)(\neg F)$
azaz (kevesebb zárójellel)
$\neg(\forall x)F \equiv (\exists x)(\neg F)$, $\qquad \neg(\exists x)F \equiv (\forall x)(\neg F)$.
(Szemléletesen: ha a negáció jelét átvisszük egy kvantor másik oldalára, akkor a kvantor az ellenkezőjére vált.)

A tétel szinte evidens; erre mondjuk az F: „x szorgalmas” és interpretációs tartomány = emberek egy rögzített csoportja példa jól rávilágít. A bal oldali tautológia szerint ekkor „nem igaz, hogy mindenki szorgalmas" $\equiv$ „van olyan x, aki nem szorgalmas”. A jobboldali szerint „nincs olyan x, aki szorgalmas" $\equiv$ „minden x nem szorgalmas”. (Hétköznapi nyelven egy adott csoportra a „nincs köztük szorgalmas" és a „közülük mindenki lusta” ítéletek logikailag ekvivalensek.)

Feladat konstruktív tagadásra

Megmutatható (részben az előző tételt felhasználva), hogy a predikátumkalkulus minden formulája ekvivalens egy olyannal, amelyben kvantort már nem tagadunk.

Feladat (Tipikus vizsgafeladat!)

Legyen $F: (\forall x)(\exists y)(\forall z)(z < y \to x \cdot x < y)$. Az alábbi három formula közül pontosan egy olyan van, amelyik ekvivalens logikailag a $\neg F$ formulával; melyik az?

$G: \quad (\forall x)(\exists y)(\forall z)(y < z \to y < x \cdot x)$,

$H: \quad (\exists x)(\forall y)(\exists z)(z < y \to \neg(x \cdot x < y))$,

$K: \quad (\exists x)(\forall y)(\exists z)(z < y \wedge \neg(x \cdot x < y))$.

Célszerű azzal kezdeni, hogy F-et konstruktívan tagadjuk. (Arra egyébként sincs algoritmus, hogy eldöntsük, két formula logikailag ekvivalens-e; ellentétben az ítéletkalkulussal, itt nincs véges igazságtáblázat ...)

Feladat konstruktív tagadásra

Megmutatható (részben az előző tételt felhasználva), hogy a predikátumkalkulus minden formulája ekvivalens egy olyannal, amelyben kvantort már nem tagadunk.

Feladat (Tipikus vizsgafeladat!)

Legyen $F : (\forall x)(\exists y)(\forall z)(z < y \to x \cdot x < y)$. Az alábbi három formula közül pontosan egy olyan van, amelyik ekvivalens logikailag a $\neg F$ formulával; melyik az?

$G : \quad (\forall x)(\exists y)(\forall z)(y < z \to y < x \cdot x)$,

$H : \quad (\exists x)(\forall y)(\exists z)(z < y \to \neg(x \cdot x < y))$,

$K : \quad (\exists x)(\forall y)(\exists z)(z < y \wedge \neg(x \cdot x < y))$.

Célszerű azzal kezdeni, hogy F-et konstruktívan tagadjuk. (Arra egyébként sincs algoritmus, hogy eldöntsük, két formula logikailag ekvivalens-e; ellentétben az ítéletkalkulussal, itt nincs véges igazságtáblázat ...)

Feladat konstruktív tagadásra

Megmutatható (részben az előző tételt felhasználva), hogy a predikátumkalkulus minden formulája ekvivalens egy olyannal, amelyben kvantort már nem tagadunk.

Feladat (Tipikus vizsgafeladat!)

Legyen $F : (\forall x)(\exists y)(\forall z)(z < y \to x \cdot x < y)$. Az alábbi három formula közül pontosan egy olyan van, amelyik ekvivalens logikailag a $\neg F$ formulával; melyik az?

$G: \quad (\forall x)(\exists y)(\forall z)(y < z \to y < x \cdot x),$

$H: \quad (\exists x)(\forall y)(\exists z)(z < y \to \neg(x \cdot x < y)),$

$K: \quad (\exists x)(\forall y)(\exists z)(z < y \wedge \neg(x \cdot x < y)).$

Célszerű azzal kezdeni, hogy F-et konstruktívan tagadjuk. (Arra egyébként sincs algoritmus, hogy eldöntsük, két formula logikailag ekvivalens-e; ellentétben az ítéletkalkulussal, itt nincs véges igazságtáblázat ...)

$F:(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z<y\to x\cdot x<y)$ tagadása

Megoldás

Nézzük lépésenként:

$\neg F : \neg(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z<y\to x\cdot x<y)$,

$\neg F : (\exists x)\neg(\exists y)(\forall z)(z<y\to x\cdot x<y)$,

$\neg F : (\exists x)(\forall y)\neg(\forall z)(z<y\to x\cdot x<y)$,

$\neg F : (\exists x)(\forall y)(\exists z)\neg(z<y\to x\cdot x<y)$,

$\neg F : (\exists x)(\forall y)(\exists z)(z<y\wedge\neg(x\cdot x<y))$. Vessük ezt össze a feladattal:

$G:\quad(\forall x)(\exists y)(\forall z)(y<z\to y<x\cdot x)$,

$H:\quad(\exists x)(\forall y)(\exists z)(z<y\to\neg(x\cdot x<y))$,

$K:\quad(\exists x)(\forall y)(\exists z)(z<y\wedge\neg(x\cdot x<y))$.

Tehát amit kaptunk, az éppen K. Azaz, a válasz: K.

$F : (\forall x)(\exists y)(\forall z)(z < y \to x \cdot x < y)$ tagadása

Megoldás

Nézzük lépésenként:

$\neg F : \neg(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z < y \to x \cdot x < y)$,

$\neg F : (\exists x)\neg(\exists y)(\forall z)(z < y \to x \cdot x < y)$,

$\neg F : (\exists x)(\forall y)\neg(\forall z)(z < y \to x \cdot x < y)$,

$\neg F : (\exists x)(\forall y)(\exists z)\neg(z < y \to x \cdot x < y)$,

$\neg F : (\exists x)(\forall y)(\exists z)(z < y \wedge \neg(x \cdot x < y))$. Vessük ezt össze a feladattal:

$G : \quad (\forall x)(\exists y)(\forall z)(y < z \to y < x \cdot x)$,

$H : \quad (\exists x)(\forall y)(\exists z)(z < y \to \neg(x \cdot x < y))$,

$K : \quad (\exists x)(\forall y)(\exists z)(z < y \wedge \neg(x \cdot x < y))$.

Tehát amit kaptunk, az éppen K. Azaz, a válasz: K.

$F : (\forall x)(\exists y)(\forall z)(z < y \to x \cdot x < y)$ tagadása

Megoldás

Nézzük lépésenként:

$\neg F : \neg(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z < y \to x \cdot x < y)$,
$\neg F : (\exists x)\neg(\exists y)(\forall z)(z < y \to x \cdot x < y)$,
$\neg F : (\exists x)(\forall y)\neg(\forall z)(z < y \to x \cdot x < y)$,
$\neg F : (\exists x)(\forall y)(\exists z)\neg(z < y \to x \cdot x < y)$,
$\neg F : (\exists x)(\forall y)(\exists z)(z < y \wedge \neg(x \cdot x < y))$. Vessük ezt össze a feladattal:

$G : \quad (\forall x)(\exists y)(\forall z)(y < z \to y < x \cdot x)$,
$H : \quad (\exists x)(\forall y)(\exists z)(z < y \to \neg(x \cdot x < y))$,
$K : \quad (\exists x)(\forall y)(\exists z)(z < y \wedge \neg(x \cdot x < y))$.

Tehát amit kaptunk, az éppen K. Azaz, a válasz: K.

Megoldás

Nézzük lépésenként:

$\neg F : \neg(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z < y \to x \cdot x < y)$,

$\neg F : (\exists x)\neg(\exists y)(\forall z)(z < y \to x \cdot x < y)$,

$\neg F : (\exists x)(\forall y)\neg(\forall z)(z < y \to x \cdot x < y)$,

$\neg F : (\exists x)(\forall y)(\exists z)\neg(z < y \to x \cdot x < y)$,

$\neg F : (\exists x)(\forall y)(\exists z)(z < y \wedge \neg(x \cdot x < y))$. Vessük ezt össze a feladattal:

$G : \quad (\forall x)(\exists y)(\forall z)(y < z \to y < x \cdot x)$,

$H : \quad (\exists x)(\forall y)(\exists z)(z < y \to \neg(x \cdot x < y))$,

$K : \quad (\exists x)(\forall y)(\exists z)(z < y \wedge \neg(x \cdot x < y))$.

Tehát amit kaptunk, az éppen K. Azaz, a válasz: K.

$F : (\forall x)(\exists y)(\forall z)(z < y \to x \cdot x < y)$ tagadása

Megoldás

Nézzük lépésenként:

$\neg F : \neg(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z < y \to x \cdot x < y)$,

$\neg F : (\exists x)\neg(\exists y)(\forall z)(z < y \to x \cdot x < y)$,

$\neg F : (\exists x)(\forall y)\neg(\forall z)(z < y \to x \cdot x < y)$,

$\neg F : (\exists x)(\forall y)(\exists z)\neg(z < y \to x \cdot x < y)$,

$\neg F : (\exists x)(\forall y)(\exists z)(z < y \wedge \neg(x \cdot x < y))$. Vessük ezt össze a feladattal:

$G : \quad (\forall x)(\exists y)(\forall z)(y < z \to y < x \cdot x)$,

$H : \quad (\exists x)(\forall y)(\exists z)(z < y \to \neg(x \cdot x < y))$,

$K : \quad (\exists x)(\forall y)(\exists z)(z < y \wedge \neg(x \cdot x < y))$.

Tehát amit kaptunk, az éppen K. Azaz, **a válasz: K**.

$F : (\forall x)(\exists y)(\forall z)(z < y \to x \cdot x < y)$ tagadása

Megoldás

Nézzük lépésenként:

$\neg F : \neg(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z < y \to x \cdot x < y)$,
$\neg F : (\exists x)\neg(\exists y)(\forall z)(z < y \to x \cdot x < y)$,
$\neg F : (\exists x)(\forall y)\neg(\forall z)(z < y \to x \cdot x < y)$,
$\neg F : (\exists x)(\forall y)(\exists z)\neg(z < y \to x \cdot x < y)$,
$\neg F : (\exists x)(\forall y)(\exists z)(z < y \wedge \neg(x \cdot x < y))$. Vessük ezt össze a feladattal:

$G : \quad (\forall x)(\exists y)(\forall z)(y < z \to y < x \cdot x)$,
$H : \quad (\exists x)(\forall y)(\exists z)(z < y \to \neg(x \cdot x < y))$,
$K : \quad (\exists x)(\forall y)(\exists z)(z < y \wedge \neg(x \cdot x < y))$.

Tehát amit kaptunk, az éppen K. Azaz, **a válasz:** K.

$F : (\forall x)(\exists y)(\forall z)(z < y \to x \cdot x < y)$ tagadása

Megoldás

Nézzük lépésenként:

$\neg F : \neg(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z < y \to x \cdot x < y)$,

$\neg F : (\exists x)\neg(\exists y)(\forall z)(z < y \to x \cdot x < y)$,

$\neg F : (\exists x)(\forall y)\neg(\forall z)(z < y \to x \cdot x < y)$,

$\neg F : (\exists x)(\forall y)(\exists z)\neg(z < y \to x \cdot x < y)$,

$\neg F : (\exists x)(\forall y)(\exists z)(z < y \wedge \neg(x \cdot x < y))$. Vessük ezt össze a feladattal:

$G : \quad (\forall x)(\exists y)(\forall z)(y < z \to y < x \cdot x)$,

$H : \quad (\exists x)(\forall y)(\exists z)(z < y \to \neg(x \cdot x < y))$,

$K : \quad (\exists x)(\forall y)(\exists z)(z < y \wedge \neg(x \cdot x < y))$.

Tehát amit kaptunk, az éppen K. Azaz, **a válasz: K**.

Feladat formalizálásra a predikátumkalkulusban

Feladat

Egy megfelelően választott elsőrendű nyelven formalizáljuk az alábbi ítéletet: „Bizonyos jogászok csak bírókat és ügyészeket tisztelnek”.

Megoldás

Egyváltozós predikátumok: B (bíró), J (jogász), U (ügyész). Kétváltozós predikátum: $T(x, y)$: x tiszteli y-t. Ekkor a keresett formula

$$(\exists x)\Big(J(x) \wedge (\forall y)\big(T(x, y) \to (B(y) \vee U(y))\big)\,.\Big)$$

Érdemes megfigyelni, hogy a példabeli „és”-ből a formulában diszjunkció lett! Azaz, van olyan eset, amikor az „és” nemcsak hogy nem jelent konjunkciót, hanem diszjunkciót jelent!

Feladat formalizálásra a predikátumkalkulusban

Feladat

Egy megfelelően választott elsőrendű nyelven formalizáljuk az alábbi ítéletet: „Bizonyos jogászok csak bírókat és ügyészeket tisztelnek”.

Megoldás

Egyváltozós predikátumok: B (bíró), J (jogász), U (ügyész). Kétváltozós predikátum: $T(x, y)$: x tiszteli y-t. Ekkor a keresett formula

$$(\exists x)\Big(J(x) \wedge (\forall y)\big(T(x,y) \to (B(y) \vee U(y))\big) .\Big)$$

Érdemes megfigyelni, hogy a példabeli „és”-ből a formulában diszjunkció lett! Azaz, van olyan eset, amikor az „és” nemcsak hogy nem jelent konjunkciót, hanem diszjunkciót jelent!

Feladat formalizálásra a predikátumkalkulusban

Feladat

Egy megfelelően választott elsőrendű nyelven formalizáljuk az alábbi ítéletet: „Bizonyos jogászok csak bírókat és ügyészeket tisztelnek”.

Megoldás

Egyváltozós predikátumok: B (bíró), J (jogász), U (ügyész). Kétváltozós predikátum: $T(x, y)$: x tiszteli y-t. Ekkor a keresett formula

$$(\exists x)\Big(J(x) \wedge (\forall y)\Big(T(x,y) \to (B(y) \vee U(y))\Big) . \Big)$$

Érdemes megfigyelni, hogy a példabeli „és”-ből a formulában diszjunkció lett! Azaz, van olyan eset, amikor az „és” nemcsak hogy nem jelent konjunkciót, hanem diszjunkciót jelent!

Feladat formalizálásra a predikátumkalkulusban

Feladat

Egy megfelelően választott elsőrendű nyelven formalizáljuk az alábbi ítéletet: „Bizonyos jogászok csak bírókat és ügyészeket tisztelnek".

Megoldás

Egyváltozós predikátumok: B (bíró), J (jogász), U (ügyész). Kétváltozós predikátum: $T(x, y)$: x tiszteli y-t. Ekkor a keresett formula

$$(\exists x)\Big(J(x) \wedge (\forall y)\big(T(x, y) \to (B(y) \vee U(y))\big) . \Big)$$

Érdemes megfigyelni, hogy a példabeli „és"-ből a formulában diszjunkció lett! Azaz, van olyan eset, amikor az „és" nemcsak hogy nem jelent konjunkciót, hanem diszjunkciót jelent!

Feladat formalizálásra a predikátumkalkulusban

Feladat

Egy megfelelően választott elsőrendű nyelven formalizáljuk az alábbi ítéletet: „Bizonyos jogászok csak bírókat és ügyészeket tisztelnek”.

Megoldás

Egyváltozós predikátumok: B (bíró), J (jogász), U (ügyész). Kétváltozós predikátum: $T(x, y)$: x tiszteli y-t. Ekkor a keresett formula

$$(\exists x)\Big(J(x) \wedge (\forall y)\big(T(x, y) \to (B(y) \vee U(y))\big)\,.\Big)$$

Érdemes megfigyelni, hogy a példabeli „és”-ből a formulában diszjunkció lett! Azaz, van olyan eset, amikor az „és” nemcsak hogy nem jelent konjunkciót, hanem diszjunkciót jelent!

Feladat formalizálásra a predikátumkalkulusban

Feladat

Egy megfelelően választott elsőrendű nyelven formalizáljuk az alábbi ítéletet: „Bizonyos jogászok csak bírókat és ügyészeket tisztelnek".

Megoldás

Egyváltozós predikátumok: B (bíró), J (jogász), U (ügyész). Kétváltozós predikátum: $T(x,y)$: x tiszteli y-t. Ekkor a keresett formula

$$(\exists x)\Bigg(J(x) \wedge (\forall y)\bigg(T(x,y) \to (B(y) \vee U(y))\bigg).\Bigg)$$

Érdemes megfigyelni, hogy a példabeli „és"-ből a formulában diszjunkció lett! Azaz, van olyan eset, amikor az „és" nemcsak hogy nem jelent konjunkciót, hanem diszjunkciót jelent!

A formalizálás nem mindig egyértelmű

Megjegyzés

A jelölések választásától eltekintve sem mindig egyértelmű, hogy egy hétköznapi állítást (azaz ítéletet) hogyan kell formalizálni. Az előző példában még könnyű dolgunk volt a „bíró” fogalmának megragadására (erre szolgált a B predikátumjel). De vegyük pl. a „tarka tollú szarkát” a közismert nyelvtörő mondatban. (Bővebben ld. korábbi jegyzet; de nincs rá tényleges szükség, elég annyit tudnunk, hogy a mondás egyéb szarkákat is megenged.)
Mit jelent a tarka tollú? Van tarka tolla? Minden tolla tarka? Van fehér tolla is és fekete tolla is? — A formalizálás függ attól, hogy melyik választ fogadjuk el. A formalizálás nem egyértelmű, még logikai ekvivalencia erejéig sem az. A jelenség hátterében az áll, hogy a hétköznapi nyelv sem egyértelmű.

A formalizálás nem mindig egyértelmű

Megjegyzés

A jelölések választásától eltekintve sem mindig egyértelmű, hogy egy hétköznapi állítást (azaz ítéletet) hogyan kell formalizálni. Az előző példában még könnyű dolgunk volt a „bíró" fogalmának megragadására (erre szolgált a B predikátumjel). De vegyük pl. a „tarka tollú szarkát" a közismert nyelvtörő mondatban. (Bővebben ld. korábbi jegyzet; de nincs rá tényleges szükség, elég annyit tudnunk, hogy a mondás egyéb szarkákat is megenged.)
Mit jelent a tarka tollú? Van tarka tolla? Minden tolla tarka? Van fehér tolla is és fekete tolla is? — A formalizálás függ attól, hogy melyik választ fogadjuk el. A formalizálás nem egyértelmű, még logikai ekvivalencia erejéig sem az. A jelenség hátterében az áll, hogy a hétköznapi nyelv sem egyértelmű.

A formalizálás nem mindig egyértelmű

Megjegyzés

A jelölések választásától eltekintve sem mindig egyértelmű, hogy egy hétköznapi állítást (azaz ítéletet) hogyan kell formalizálni. Az előző példában még könnyű dolgunk volt a „bíró” fogalmának megragadására (erre szolgált a B predikátumjel). De vegyük pl. a „tarka tollú szarkát” a közismert nyelvtörő mondatban. (Bővebben ld. korábbi jegyzet; de nincs rá tényleges szükség, elég annyit tudnunk, hogy a mondás egyéb szarkákat is megenged.)
Mit jelent a tarka tollú? Van tarka tolla? Minden tolla tarka? Van fehér tolla is és fekete tolla is? — A formalizálás függ attól, hogy melyik választ fogadjuk el. A formalizálás nem egyértelmű, még logikai ekvivalencia erejéig sem az. A jelenség hátterében az áll, hogy a hétköznapi nyelv sem egyértelmű.

Egy meglepő formula

Feladat (Ilyen nehéz feladat távolról sem lesz a vizsgán)

Legyen $F = F(x)$ a predikátumkalkulus egy olyan formulája, amelyben x egy individuumváltozó, és t egy tetszőleges kifejezés. Tautológia-e szükségképpen az $F(t) \to (\exists x)F(x)$ formula?

Megoldás

Nem! Pl. legyen $F(x) : (\forall y)(x \leq y)$ és legyen $t = y$. Ekkor a kérdéses $F(t) \to (\exists x)F(x)$ nem más, mint

$G : \quad (\forall y)(y \leq y) \to (\exists x)(\forall y)(x \leq y).$

Ez a G nem teljesül $\mathbb{Z}$-ben, hiszen a premissza igaz, de a konklúzió hamis (ugyanis nincs legnagyobb egész szám).

Tanulság: a predikátumkalkulus „nehéz tudomány”; nem mélyedünk el benne. A matematika jelentős része megfogható a predikátumkalkulusban; egy apró példát ad a következő feladat.

Egy meglepő formula

Feladat (Ilyen nehéz feladat távolról sem lesz a vizsgán)

Legyen $F = F(x)$ a predikátumkalkulus egy olyan formulája, amelyben x egy individuumváltozó, és t egy tetszőleges kifejezés. Tautológia-e szükségképpen az $F(t) \to (\exists x)F(x)$ formula?

Megoldás

Nem! Pl. legyen $F(x) : (\forall y)(x \leq y)$ és legyen $t = y$. Ekkor a kérdéses $F(t) \to (\exists x)F(x)$ nem más, mint

$G: \qquad (\forall y)(y \leq y) \to (\exists x)(\forall y)(x \leq y).$

Ez a G nem teljesül $\mathbb{Z}$-ben, hiszen a premissza igaz, de a konklúzió hamis (ugyanis nincs legnagyobb egész szám).

Tanulság: a predikátumkalkulus „nehéz tudomány"; nem mélyedünk el benne. A matematika jelentős része megfogható a predikátumkalkulusban; egy apró példát ad a következő feladat.

Egy meglepő formula

Feladat (Ilyen nehéz feladat távolról sem lesz a vizsgán)

Legyen $F = F(x)$ a predikátumkalkulus egy olyan formulája, amelyben x egy individuumváltozó, és t egy tetszőleges kifejezés. Tautológia-e szükségképpen az $F(t) \to (\exists x)F(x)$ formula?

Megoldás

Nem! Pl. legyen $F(x) : (\forall y)(x \leq y)$ és legyen $t = y$. Ekkor a kérdéses $F(t) \to (\exists x)F(x)$ nem más, mint

$G : \qquad (\forall y)(y \leq y) \to (\exists x)(\forall y)(x \leq y).$

Ez a G nem teljesül $\mathbb{Z}$-ben, hiszen a premissza igaz, de a konklúzió hamis (ugyanis nincs legnagyobb egész szám).

Tanulság: a predikátumkalkulus „nehéz tudomány”; nem mélyedünk el benne. A matematika jelentős része megfogható a predikátumkalkulusban; egy apró példát ad a következő feladat.

„Háromelemű” formalizálva

Feladat

Az „=” jelnek a szokásos jelentést tulajdonítva formalizáljuk a „háromelemű” tulajdonságot. Azaz adjunk meg egy olyan F formulát, amely akkor és csak akkor teljesül, ha az interpretációs tartomány háromelemű halmaz.

Megoldás

$$(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\big(\neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge \neg(x_2 = x_3) \wedge (\forall y)(y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = x_3)\big).$$

Feladat

Az „='' jelnek a szokásos jelentést tulajdonítva formalizáljuk a „háromelemű'' tulajdonságot. Azaz adjunk meg egy olyan F formulát, amely akkor és csak akkor teljesül, ha az interpretációs tartomány háromelemű halmaz.

Megoldás

$$(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\ \neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge \neg(x_2 = x_3) \wedge$$
$$(\forall y)(y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = x_3)\ ).$$

A tananyagban vége a mat. logika résznek; mire is volt jó?

Megjegyzés (A matematikai logika jó arra, hogy például)

- Segítse az egyértelmű, szabatos fogalmazást és az ilyen készség fejlődését. Ellentétben a nem mindig egyértelmű köznyelvvel, a matematikában (és sok más helyen) egyértelműen kell fogalmazni. Egy mondat minden egyes x objektumáról tudnunk kell (megérteni és kifejezni), hogy $(\forall x)$ vagy $(\exists x)$-e a jelentés. (Súlyos és sajnos gyakori hiba — tanuláskor, vizsgázáskor — hogy ez nem így van.)
- Megkönnyíti a konstruktív tagadást.
- Kapcsolódik a programozáshoz és a számítógépekhez is.

Segíti, hogy logikusan gondolkozzunk, hogy helyes következtetéseket vonjunk le. Bonyolult következtetések levonása nagyon nehéz lehet, ha nem formalizáljuk. Ld. korábbi jegyzet is (amely heti 3 óra előadáshoz készült).

A tananyagban vége a mat. logika résznek; mire is volt jó?

Megjegyzés (A matematikai logika jó arra, hogy például)

- Segítse az egyértelmű, szabatos fogalmazást és az ilyen készség fejlődését. Ellentétben a nem mindig egyértelmű köznyelvvel, a matematikában (és sok más helyen) egyértelműen kell fogalmazni. Egy mondat minden egyes x objektumáról tudnunk kell (megérteni és kifejezni), hogy $(\forall x)$ vagy $(\exists x)$-e a jelentés. (Súlyos és sajnos gyakori hiba — tanuláskor, vizsgázáskor — hogy ez nem így van.)
- Megkönnyíti a konstruktív tagadást.
- Kapcsolódik a programozáshoz és a számítógépekhez is.

Segíti, hogy logikusan gondolkozzunk, hogy helyes következtetéseket vonjunk le. Bonyolult következtetések levonása nagyon nehéz lehet, ha nem formalizáljuk. Ld. korábbi jegyzet is (amely heti 3 óra előadáshoz készült).

A tananyagban vége a mat. logika résznek; mire is volt jó?

Megjegyzés (A matematikai logika jó arra, hogy például)

- Segítse az egyértelmű, szabatos fogalmazást és az ilyen készség fejlődését. Ellentétben a nem mindig egyértelmű köznyelvvel, a matematikában (és sok más helyen) egyértelműen kell fogalmazni. Egy mondat minden egyes x objektumáról tudnunk kell (megérteni és kifejezni), hogy $(\forall x)$ vagy $(\exists x)$-e a jelentés. (Súlyos és sajnos gyakori hiba — tanuláskor, vizsgázáskor — hogy ez nem így van.)
- Megkönnyíti a konstruktív tagadást.
- Kapcsolódik a programozáshoz és a számítógépekhez is.

Segíti, hogy logikusan gondolkozzunk, hogy helyes következtetéseket vonjunk le. Bonyolult következtetések levonása nagyon nehéz lehet, ha nem formalizáljuk. Ld. korábbi jegyzet is (amely heti 3 óra előadáshoz készült).

A tananyagban vége a mat. logika résznek; mire is volt jó?

Megjegyzés (A matematikai logika jó arra, hogy például)

- Segítse az egyértelmű, szabatos fogalmazást és az ilyen készség fejlődését. Ellentétben a nem mindig egyértelmű köznyelvvel, a matematikában (és sok más helyen) egyértelműen kell fogalmazni. Egy mondat minden egyes x objektumáról tudnunk kell (megérteni és kifejezni), hogy $(\forall x)$ vagy $(\exists x)$-e a jelentés. (Súlyos és sajnos gyakori hiba — tanuláskor, vizsgázáskor — hogy ez nem így van.)
- Megkönnyíti a konstruktív tagadást.
- Kapcsolódik a programozáshoz és a számítógépekhez is.

Segíti, hogy logikusan gondolkozzunk, hogy helyes következtetéseket vonjunk le. Bonyolult következtetések levonása nagyon nehéz lehet, ha nem formalizáljuk. Ld. korábbi jegyzet is (amely heti 3 óra előadáshoz készült).

Teljes indukció

Az **indukció** alapvető része a gondolkodásunknak: sok azonos esetből arra következtetünk, hogy most már mindig úgy lesz. Ez azonban még a mindennapi életben sem álja meg a helyét, a matematikában pedig még kevésbé!

Például Pierre Fermat (1601-1665) megvizsgálta az alábbi számokat: $2^{2^0}+1=3$, $2^{2^1}+1=5$, $2^{2^2}+1=17$, $2^{2^3}+1=257$, $2^{2^4}+1=65537$, és úgy találta, hogy ezek a számok mind prímszámok. (Azóta is Fermat-prímeknek nevezik ezeket.) Induktívan gondolkodva úgy vélte, hogy **bármely** $n \geq 0$ egész kitevőre a $2^{2^n}+1$ szám prím. A helyzet ezzel szemben az, hogy tévedett, hiszen már a következő szám sem prím: $2^{2^5}+1=4294967297=641 \cdot 6700417$, sőt egyetlen olyan $n \geq 5$ egész szám sem ismeretes, amelyről tudnánk, hogy $2^{2^n}+1$ prím.

Tehát ez a fajta, „sok esetből az összes esetre következtető" indukció bizonyítási módszerként nem állja meg a helyét! Arra viszont kiválóan alkalmas, hogy **megsejtsünk** valamit, amit szerencsés esetben valahogy be is lehet bizonyítani.

Teljes indukció

Az **indukció** alapvető része a gondolkodásunknak: sok azonos esetből arra következtetünk, hogy most már mindig úgy lesz. Ez azonban még a mindennapi életben sem álja meg a helyét, a matematikában pedig még kevésbé!

Például Pierre Fermat (1601-1665) megvizsgálta az alábbi számokat: $2^{2^0}+1=3$, $2^{2^1}+1=5$, $2^{2^2}+1=17$, $2^{2^3}+1=257$, $2^{2^4}+1=65537$, és úgy találta, hogy ezek a számok mind prímszámok. (Azóta is Fermat-prímeknek nevezik ezeket.) Induktívan gondolkodva úgy vélte, hogy **bármely** $n\geq 0$ egész kitevőre a $2^{2^n}+1$ szám prím. A helyzet ezzel szemben az, hogy tévedett, hiszen már a következő szám sem prím: $2^{2^5}+1=4294967297=641\cdot 6700417$, sőt egyetlen olyan $n\geq 5$ egész szám sem ismeretes, amelyről tudnánk, hogy $2^{2^n}+1$ prím.

Tehát ez a fajta, „sok esetből az összes esetre következtető” indukció bizonyítási módszerként nem állja meg a helyét! Arra viszont kiválóan alkalmas, hogy **megsejtsünk** valamit, amit szerencsés esetben valahogy be is lehet bizonyítani.

Az **indukció** alapvető része a gondolkodásunknak: sok azonos esetből arra következtetünk, hogy most már mindig úgy lesz. Ez azonban még a mindennapi életben sem álja meg a helyét, a matematikában pedig még kevésbé!

Például Pierre Fermat (1601-1665) megvizsgálta az alábbi számokat: $2^{2^0}+1=3$, $2^{2^1}+1=5$, $2^{2^2}+1=17$, $2^{2^3}+1=257$, $2^{2^4}+1=65537$, és úgy találta, hogy ezek a számok mind prímszámok. (Azóta is Fermat-prímeknek nevezik ezeket.) Induktívan gondolkodva úgy vélte, hogy **bármely** $n \geq 0$ egész kitevőre a $2^{2^n}+1$ szám prím. A helyzet ezzel szemben az, hogy tévedett, hiszen már a következő szám sem prím: $2^{2^5}+1=4294967297=641\cdot 6700417$, sőt egyetlen olyan $n \geq 5$ egész szám sem ismeretes, amelyről tudnánk, hogy $2^{2^n}+1$ prím.

Tehát ez a fajta, „sok esetből az összes esetre következtető" indukció bizonyítási módszerként nem állja meg a helyét! Arra viszont kiválóan alkalmas, hogy **megsejtsünk** valamit, amit szerencsés esetben valahogy be is lehet bizonyítani.

Az **indukció** alapvető része a gondolkodásunknak: sok azonos esetből arra következtetünk, hogy most már mindig úgy lesz. Ez azonban még a mindennapi életben sem álja meg a helyét, a matematikában pedig még kevésbé!

Például Pierre Fermat (1601-1665) megvizsgálta az alábbi számokat: $2^{2^0}+1=3$, $2^{2^1}+1=5$, $2^{2^2}+1=17$, $2^{2^3}+1=257$, $2^{2^4}+1=65537$, és úgy találta, hogy ezek a számok mind prímszámok. (Azóta is Fermat-prímeknek nevezik ezeket.) Induktívan gondolkodva úgy vélte, hogy **bármely** $n \geq 0$ egész kitevőre a $2^{2^n}+1$ szám prím. A helyzet ezzel szemben az, hogy tévedett, hiszen már a következő szám sem prím: $2^{2^5}+1=4294967297=641\cdot 6700417$, sőt egyetlen olyan $n \geq 5$ egész szám sem ismeretes, amelyről tudnánk, hogy $2^{2^n}+1$ prím.

Tehát ez a fajta, „sok esetből az összes esetre következtető" indukció bizonyítási módszerként nem állja meg a helyét! Arra viszont kiválóan alkalmas, hogy **megsejtsünk** valamit, amit szerencsés esetben valahogy be is lehet bizonyítani.

Az **indukció** alapvető része a gondolkodásunknak: sok azonos esetből arra következtetünk, hogy most már mindig úgy lesz. Ez azonban még a mindennapi életben sem álja meg a helyét, a matematikában pedig még kevésbé!

Például Pierre Fermat (1601-1665) megvizsgálta az alábbi számokat: $2^{2^0}+1=3$, $2^{2^1}+1=5$, $2^{2^2}+1=17$, $2^{2^3}+1=257$, $2^{2^4}+1=65537$, és úgy találta, hogy ezek a számok mind prímszámok. (Azóta is Fermat-prímeknek nevezik ezeket.) Induktívan gondolkodva úgy vélte, hogy **bármely** $n \geq 0$ egész kitevőre a $2^{2^n}+1$ szám prím. A helyzet ezzel szemben az, hogy tévedett, hiszen már a következő szám sem prím: $2^{2^5}+1=4294967297=641 \cdot 6700417$, sőt egyetlen olyan $n \geq 5$ egész szám sem ismeretes, amelyről tudnánk, hogy $2^{2^n}+1$ prím.

Tehát ez a fajta, „sok esetből az összes esetre következtető" indukció bizonyítási módszerként nem állja meg a helyét! Arra viszont kiválóan alkalmas, hogy **megsejtsünk** valamit, amit szerencsés esetben valahogy be is lehet bizonyítani.

Az **indukció** alapvető része a gondolkodásunknak: sok azonos esetből arra következtetünk, hogy most már mindig úgy lesz. Ez azonban még a mindennapi életben sem álja meg a helyét, a matematikában pedig még kevésbé!

Például Pierre Fermat (1601-1665) megvizsgálta az alábbi számokat: $2^{2^0}+1=3$, $2^{2^1}+1=5$, $2^{2^2}+1=17$, $2^{2^3}+1=257$, $2^{2^4}+1=65537$, és úgy találta, hogy ezek a számok mind prímszámok. (Azóta is Fermat-prímeknek nevezik ezeket.)

Induktívan gondolkodva úgy vélte, hogy **bármely** $n \geq 0$ egész kitevőre a $2^{2^n}+1$ szám prím. A helyzet ezzel szemben az, hogy tévedett, hiszen már a következő szám sem prím: $2^{2^5}+1=4294967297=641 \cdot 6700417$, sőt egyetlen olyan $n \geq 5$ egész szám sem ismeretes, amelyről tudnánk, hogy $2^{2^n}+1$ prím.

Tehát ez a fajta, „sok esetből az összes esetre következtető” indukció bizonyítási módszerként nem állja meg a helyét! Arra viszont kiválóan alkalmas, hogy **megsejtsünk** valamit, amit szerencsés esetben valahogy be is lehet bizonyítani.

Az **indukció** alapvető része a gondolkodásunknak: sok azonos esetből arra következtetünk, hogy most már mindig úgy lesz. Ez azonban még a mindennapi életben sem állja meg a helyét, a matematikában pedig még kevésbé!

Például Pierre Fermat (1601-1665) megvizsgálta az alábbi számokat: $2^{2^0}+1=3$, $2^{2^1}+1=5$, $2^{2^2}+1=17$, $2^{2^3}+1=257$, $2^{2^4}+1=65537$, és úgy találta, hogy ezek a számok mind prímszámok. (Azóta is Fermat-prímeknek nevezik ezeket.) Induktívan gondolkodva úgy vélte, hogy **bármely** $n \geq 0$ egész kitevőre a $2^{2^n}+1$ szám prím. A helyzet ezzel szemben az, hogy tévedett, hiszen már a következő szám sem prím: $2^{2^5}+1=4294967297=641\cdot 6700417$, sőt egyetlen olyan $n \geq 5$ egész szám sem ismeretes, amelyről tudnánk, hogy $2^{2^n}+1$ prím.

Tehát ez a fajta, „sok esetből az összes esetre következtető” indukció bizonyítási módszerként nem állja meg a helyét! Arra viszont kiválóan alkalmas, hogy **megsejtsünk** valamit, amit szerencsés esetben valahogy be is lehet bizonyítani.

Az **indukció** alapvető része a gondolkodásunknak: sok azonos esetből arra következtetünk, hogy most már mindig úgy lesz. Ez azonban még a mindennapi életben sem álja meg a helyét, a matematikában pedig még kevésbé!

Például Pierre Fermat (1601-1665) megvizsgálta az alábbi számokat: $2^{2^0}+1=3$, $2^{2^1}+1=5$, $2^{2^2}+1=17$, $2^{2^3}+1=257$, $2^{2^4}+1=65537$, és úgy találta, hogy ezek a számok mind prímszámok. (Azóta is Fermat-prímeknek nevezik ezeket.) Induktívan gondolkodva úgy vélte, hogy **bármely** $n \geq 0$ egész kitevőre a $2^{2^n}+1$ szám prím. A helyzet ezzel szemben az, hogy tévedett, hiszen már a következő szám sem prím:

$2^{2^5}+1=4294967297=641 \cdot 6700417$, sőt egyetlen olyan $n \geq 5$ egész szám sem ismeretes, amelyről tudnánk, hogy $2^{2^n}+1$ prím.

Tehát ez a fajta, „sok esetből az összes esetre következtető” indukció bizonyítási módszerként nem állja meg a helyét! Arra viszont kiválóan alkalmas, hogy **megsejtsünk** valamit, amit szerencsés esetben valahogy be is lehet bizonyítani.

Az **indukció** alapvető része a gondolkodásunknak: sok azonos esetből arra következtetünk, hogy most már mindig úgy lesz. Ez azonban még a mindennapi életben sem álja meg a helyét, a matematikában pedig még kevésbé!

Például Pierre Fermat (1601-1665) megvizsgálta az alábbi számokat: $2^{2^0}+1=3$, $2^{2^1}+1=5$, $2^{2^2}+1=17$, $2^{2^3}+1=257$, $2^{2^4}+1=65537$, és úgy találta, hogy ezek a számok mind prímszámok. (Azóta is Fermat-prímeknek nevezik ezeket.) Induktívan gondolkodva úgy vélte, hogy **bármely** $n \geq 0$ egész kitevőre a $2^{2^n}+1$ szám prím. A helyzet ezzel szemben az, hogy tévedett, hiszen már a következő szám sem prím: $2^{2^5}+1=4294967297=641\cdot 6700417$, sőt egyetlen olyan $n \geq 5$ egész szám sem ismeretes, amelyről tudnánk, hogy $2^{2^n}+1$ prím.

Tehát ez a fajta, „sok esetből az összes esetre következtető" indukció bizonyítási módszerként nem állja meg a helyét! Arra viszont kiválóan alkalmas, hogy **megsejtsünk** valamit, amit szerencsés esetben valahogy be is lehet bizonyítani.

Az **indukció** alapvető része a gondolkodásunknak: sok azonos esetből arra következtetünk, hogy most már mindig úgy lesz. Ez azonban még a mindennapi életben sem álja meg a helyét, a matematikában pedig még kevésbé!

Például Pierre Fermat (1601-1665) megvizsgálta az alábbi számokat: $2^{2^0}+1=3$, $2^{2^1}+1=5$, $2^{2^2}+1=17$, $2^{2^3}+1=257$, $2^{2^4}+1=65537$, és úgy találta, hogy ezek a számok mind prímszámok. (Azóta is Fermat-prímeknek nevezik ezeket.) Induktívan gondolkodva úgy vélte, hogy **bármely** $n \geq 0$ egész kitevőre a $2^{2^n}+1$ szám prím. A helyzet ezzel szemben az, hogy tévedett, hiszen már a következő szám sem prím: $2^{2^5}+1=4294967297=641\cdot 6700417$, sőt egyetlen olyan $n\geq 5$ egész szám sem ismeretes, amelyről tudnánk, hogy $2^{2^n}+1$ prím.

Tehát ez a fajta, „sok esetből az összes esetre következtető" indukció bizonyítási módszerként nem állja meg a helyét! Arra viszont kiválóan alkalmas, hogy **megsejtsünk** valamit, amit szerencsés esetben valahogy be is lehet bizonyítani.

A közismert számhalmazok állandó jelölése

Definíció (Néhány állandó jelölés)

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ a pozitív egész számok halmaza,
$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ a nemnegatív egész számok halmaza,
$\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ az egész számok halmaza,
$\mathbb{Q} := \{a/b : a \in \mathbb{Z},\ \ b \in \mathbb{N}\}$ a racionális számok halmaza,
$\mathbb{R}$ a valós számok halmaza.

A jelölések eredete: „natural" (természetes), „Zahl" (szám), „quotient" (kvóciens, azaz hányados), „real" (valós). Mivel a a hibás iskolai oktatás kétértelművé tette a „természetes szám" elnevezést, ezt a terminológiát kerülni fogom (kivéve, ha mindegy, hogy $\mathbb{N}$ vagy $\mathbb{N}_0$.). (Személyes álláspontom szerint a nulla nem természetes szám, hiszen az emberiség csak évezredekkel a pozitív törtekkel való számolási rutin után vezette be a nulla fogalmát, de vannak másként vélekedők is ...)

A közismert számhalmazok állandó jelölése

Definíció (Néhány állandó jelölés)

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ a pozitív egész számok halmaza,
$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ a nemnegatív egész számok halmaza,
$\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ az egész számok halmaza,
$\mathbb{Q} := \{a/b : a \in \mathbb{Z},\ \ b \in \mathbb{N}\}$ a racionális számok halmaza,
$\mathbb{R}$ a valós számok halmaza.

A jelölések eredete: „natural" (természetes), „Zahl" (szám), „quotient" (kvóciens, azaz hányados), „real" (valós). Mivel a a hibás iskolai oktatás kétértelművé tette a „természetes szám" elnevezést, ezt a terminológiát kerülni fogom (kivéve, ha mindegy, hogy $\mathbb{N}$ vagy $\mathbb{N}_0$.). (Személyes álláspontom szerint a nulla nem természetes szám, hiszen az emberiség csak évezredekkel a pozitív törtekkel való számolási rutin után vezette be a nulla fogalmát, de vannak másként vélekedők is . . .)

Mi a teljes indukció?

A teljes indukció egy **bizonyítási módszer**, amely
„**minden** n**-re** $H(n)$”
szerkezetű állítások bizonyítására szolgál, ahol $H(n)$ egy n-től függő matematikai állítás.

Például $H(n)$ jelölheti azt, hogy „az első n pozitív egész szám összege $n(n+1)/2$”; ez esetben a feladat a „minden n pozitív egész számra az első n pozitív egész szám összege n(n+1)/2” állítás bizonyítása, és ez teljes indukcióval (is) lehetséges.
Még nem mondtuk meg, mi a teljes indukció (csak azt, hogy mire való), de előrebocsátjuk, hogy az alábbi tételen alapul.

Mi a teljes indukció?

A teljes indukció egy **bizonyítási módszer**, amely
„**minden** n**-re** $H(n)$"
szerkezetű állítások bizonyítására szolgál, ahol $H(n)$ egy n-től függő matematikai állítás.
Például $H(n)$ jelölheti azt, hogy „az első n pozitív egész szám összege $n(n+1)/2$"; ez esetben a feladat a „minden n pozitív egész számra az első n pozitív egész szám összege n(n+1)/2" állítás bizonyítása, és ez teljes indukcióval (is) lehetséges.
Még nem mondtuk meg, mi a teljes indukció (csak azt, hogy mire való), de előrebocsátjuk, hogy az alábbi tételen alapul.

Mi a teljes indukció?

A teljes indukció egy **bizonyítási módszer**, amely
„**minden** n**-re** $H(n)$"
szerkezetű állítások bizonyítására szolgál, ahol $H(n)$ egy n-től függő matematikai állítás.
Például $H(n)$ jelölheti azt, hogy „az első n pozitív egész szám összege $n(n+1)/2$"; ez esetben a feladat a „minden n pozitív egész számra az első n pozitív egész szám összege n(n+1)/2" állítás bizonyítása, és ez teljes indukcióval (is) lehetséges.
Még nem mondtuk meg, mi a teljes indukció (csak azt, hogy mire való), de előrebocsátjuk, hogy az alábbi tételen alapul.

A teljes indukció alapjául szolgáló tétel

Tétel

Bármely nemüres, természetes számokból álló halmaznak van legkisebb eleme. (Mindegy, hogy $\mathbb{N}$ vagy $\mathbb{N}_0$ elemeire gondolunk.)

Szemléletesen ez a tétel evidens: ha H egy ilyen halmaz, akkor — mivel nemüres — vehetünk belőle egy k elemet. Az $1, 2, \ldots, k$ számok csak véges sokan vannak, így lesz köztük egy legelső, amelyik H-ban van. Ez lesz H legkisebb eleme. Igazi „precíz" matematikai bizonyítás csak axiomatikus felépítés esetén lenne lehetséges — ez azonban messze meghaladná a jelen kurzus kereteit.

Az alábbi tétel nemcsak egy tétel, hanem egyúttal azt is megmondja, hogyan kell teljes indukcióval bizonyítani.

A teljes indukció alapjául szolgáló tétel

Tétel

Bármely nemüres, természetes számokból álló halmaznak van legkisebb eleme. (Mindegy, hogy $\mathbb{N}$ vagy $\mathbb{N}_0$ elemeire gondolunk.)

Szemléletesen ez a tétel evidens: ha H egy ilyen halmaz, akkor — mivel nemüres — vehetünk belőle egy k elemet. Az $1, 2, \ldots, k$ számok csak véges sokan vannak, így lesz köztük egy legelső, amelyik H-ban van. Ez lesz H legkisebb eleme. Igazi „precíz" matematikai bizonyítás csak axiomatikus felépítés esetén lenne lehetséges — ez azonban messze meghaladná a jelen kurzus kereteit.

Az alábbi tétel nemcsak egy tétel, hanem egyúttal azt is megmondja, hogyan kell teljes indukcióval bizonyítani.

A teljes indukció alapjául szolgáló tétel

Tétel

Bármely nemüres, természetes számokból álló halmaznak van legkisebb eleme. (Mindegy, hogy $\mathbb{N}$ vagy $\mathbb{N}_0$ elemeire gondolunk.)

Szemléletesen ez a tétel evidens: ha H egy ilyen halmaz, akkor — mivel nemüres — vehetünk belőle egy k elemet. Az $1, 2, \ldots, k$ számok csak véges sokan vannak, így lesz köztük egy legelső, amelyik H-ban van. Ez lesz H legkisebb eleme. Igazi „precíz" matematikai bizonyítás csak axiomatikus felépítés esetén lenne lehetséges — ez azonban messze meghaladná a jelen kurzus kereteit.

Az alábbi tétel nemcsak egy tétel, hanem egyúttal azt is megmondja, hogyan kell teljes indukcióval bizonyítani.

A teljes indukció tétele (n-ről $(n+1)$ -re

Tétel (A teljes indukció tételének első alakja)

Legyen $H(n)$ egy n-től függő állítás. Ha

egyrészt $H(1)$ igaz,

másrészt bármely $n \in \mathbb{N}$-re $H(n)$ teljesüléséből következik $H(n+1)$ teljesülése,

akkor igaz a „$\forall n \in \mathbb{N}$-re $H(n)$” állítás.

Megjegyzés

$\mathbb{N}$ helyett az $\mathbb{N}_0$ halmaz vagy akár mondjuk a $\{7, 8, 9, \ldots\}$ halmaz is szerepelhetett volna a fenti tételben, de ekkor persze $H(1)$ helyett $H(0)$-at, illetve $H(7)$-et (azaz a legkisebb értelmes esetet) kellett volna mondanunk.

A teljes indukció tétele (n-ről $(n+1)$ -re

Tétel (A teljes indukció tételének első alakja)

Legyen $H(n)$ egy n-től függő állítás. Ha

egyrészt $H(1)$ igaz,

másrészt bármely $n \in \mathbb{N}$-re $H(n)$ teljesüléséből következik $H(n+1)$ teljesülése,

akkor igaz a „$\forall n \in \mathbb{N}$-re $H(n)$" állítás.

Megjegyzés

$\mathbb{N}$ helyett az $\mathbb{N}_0$ halmaz vagy akár mondjuk a $\{7, 8, 9, \ldots\}$ halmaz is szerepelhetett volna a fenti tételben, de ekkor persze $H(1)$ helyett $H(0)$-at, illetve $H(7)$-et (azaz a legkisebb értelmes esetet) kellett volna mondanunk.

A teljes indukció tétele (n-ről $(n+1)$ -re

Tétel (A teljes indukció tételének első alakja)

Legyen $H(n)$ egy n-től függő állítás. Ha

egyrészt $H(1)$ igaz,

másrészt bármely $n \in \mathbb{N}$-re $H(n)$ teljesüléséből következik $H(n+1)$ teljesülése,

akkor igaz a „$\forall n \in \mathbb{N}$-re $H(n)$" állítás.

Megjegyzés

$\mathbb{N}$ helyett az $\mathbb{N}_0$ halmaz vagy akár mondjuk a $\{7, 8, 9, \ldots\}$ halmaz is szerepelhetett volna a fenti tételben, de ekkor persze $H(1)$ helyett $H(0)$-at, illetve $H(7)$-et (azaz a legkisebb értelmes esetet) kellett volna mondanunk.

A teljes indukció tétele (n-ről $(n+1)$ -re

Tétel (A teljes indukció tételének első alakja)

Legyen $H(n)$ egy n-től függő állítás. Ha

egyrészt $H(1)$ igaz,

másrészt bármely $n \in \mathbb{N}$-re $H(n)$ teljesüléséből következik $H(n+1)$ teljesülése,

akkor igaz a „$\forall n \in \mathbb{N}$-re $H(n)$" állítás.

Megjegyzés

$\mathbb{N}$ helyett az $\mathbb{N}_0$ halmaz vagy akár mondjuk a $\{7, 8, 9, \ldots\}$ halmaz is szerepelhetett volna a fenti tételben, de ekkor persze $H(1)$ helyett $H(0)$-at, illetve $H(7)$-et (azaz a legkisebb értelmes esetet) kellett volna mondanunk.

A teljes indukció tétele (n-ről $(n+1)$ -re

Tétel (A teljes indukció tételének első alakja)

Legyen $H(n)$ egy n-től függő állítás. Ha

egyrészt $H(1)$ igaz,

másrészt bármely $n \in \mathbb{N}$-re $H(n)$ teljesüléséből következik $H(n+1)$ teljesülése,

akkor igaz a „$\forall n \in \mathbb{N}$-re $H(n)$” állítás.

Megjegyzés

$\mathbb{N}$ helyett az $\mathbb{N}_0$ halmaz vagy akár mondjuk a $\{7, 8, 9, \ldots\}$ halmaz is szerepelhetett volna a fenti tételben, de ekkor persze $H(1)$ helyett $H(0)$-at, illetve $H(7)$-et (azaz a legkisebb értelmes esetet) kellett volna mondanunk.

A teljes indukció tétele (n-re az összes előzőből)

Tétel (A teljes indukció tételének második alakja)

Legyen $H(n)$ egy n-től függő állítás. Ha bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $H(1)$, $H(2)$, $\ldots$, $H(n-1)$ együttes teljesüléséből következik $H(n)$ teljesülése, akkor igaz a „$\forall n \in \mathbb{N}$-re $H(n)$” állítás.

Megjegyzés

Itt sem marad ki $H(n)$, azaz az $n = 1$ eset, hiszen akkor $\{H(1), \ldots, H(n-1)\}$ állítások üres halmaza, amelyre a konjunkció automatikusan igaz. (A diszjunktív normálformáknál is láttuk, hogy az üres konjunkció azonosan igaz ...)

A teljes indukció tétele (n-re az összes előzőből)

Tétel (A teljes indukció tételének második alakja)

Legyen $H(n)$ egy n-től függő állítás. Ha bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $H(1)$, $H(2)$, $\ldots$, $H(n-1)$ együttes teljesüléséből következik $H(n)$ teljesülése, akkor igaz a „$\forall n \in \mathbb{N}$-re $H(n)$" állítás.

Megjegyzés

Itt sem marad ki $H(n)$, azaz az $n = 1$ eset, hiszen akkor $\{H(1), \ldots, H(n-1)\}$ állítások üres halmaza, amelyre a konjunkció automatikusan igaz. (A diszjunktív normálformáknál is láttuk, hogy az üres konjunkció azonosan igaz ...)

A teljes indukció tétele (n-re az összes előzőből)

Tétel (A teljes indukció tételének második alakja)

Legyen $H(n)$ egy n-től függő állítás. Ha bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $H(1)$, $H(2)$, $\ldots$, $H(n-1)$ együttes teljesüléséből következik $H(n)$ teljesülése, akkor igaz a „$\forall n \in \mathbb{N}$-re $H(n)$" állítás.

Megjegyzés

Itt sem marad ki $H(n)$, azaz az $n = 1$ eset, hiszen akkor $\{H(1), \ldots, H(n-1)\}$ állítások üres halmaza, amelyre a konjunkció automatikusan igaz. (A diszjunktív normálformáknál is láttuk, hogy az üres konjunkció azonosan igaz . . .)

Miért működik a teljes indukció?

Csak a teljes indukció tételének második alakját világítjuk meg; az első is hasonló (sőt, egyszerűbb).

Bizonyítás („Ha $\forall n \in \mathbb{N}$-re $(H(1) \wedge \ldots \wedge H(n-1)) \to H(n)$, akkor $\forall n \in \mathbb{N}$-re $H(n)$”).

Indirekt. T.f.h. (=tegyük fel, hogy) a feltevés dacára a $B := \{k \in \mathbb{N} : H(k) = \mathbf{h}\}$ halmaz nem üres. Korábbi tételünk szerint B-nek van legkisebb eleme; jelölje azt n. Az n választása folytán $1, \ldots, n-1 \notin B$, tehát $H(1) \wedge \ldots \wedge H(n-1) = \mathbf{i}$. Ekkor azonban a feltett implikáció miatt $H(n) = \mathbf{i}$, ami ellentmond annak, hogy $n \in B$. Q.e.d. $\square$

Feladat

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n természetes számra $n^3 + 5n$ osztható 6-tal.

Miért működik a teljes indukció?

Csak a teljes indukció tételének második alakját világítjuk meg; az első is hasonló (sőt, egyszerűbb).

Bizonyítás („Ha $\forall n \in \mathbb{N}$-re $(H(1) \wedge \ldots \wedge H(n-1)) \to H(n)$, akkor $\forall n \in \mathbb{N}$-re $H(n)$”).

Indirekt. T.f.h. (=tegyük fel, hogy) a feltevés dacára a $B := \{k \in \mathbb{N} : H(k) = \mathbf{h}\}$ halmaz nem üres. Korábbi tételünk szerint B-nek van legkisebb eleme; jelölje azt n. Az n választása folytán $1, \ldots, n-1 \notin B$, tehát $H(1) \wedge \ldots \wedge H(n-1) = \mathbf{i}$. Ekkor azonban a feltett implikáció miatt $H(n) = \mathbf{i}$, ami ellentmond annak, hogy $n \in B$. Q.e.d. □

Feladat

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n természetes számra $n^3 + 5n$ osztható 6-tal.

Miért működik a teljes indukció?

Csak a teljes indukció tételének második alakját világítjuk meg; az első is hasonló (sőt, egyszerűbb).

Bizonyítás („Ha $\forall n \in \mathbb{N}$-re $(H(1) \wedge \ldots \wedge H(n-1)) \rightarrow H(n)$, akkor $\forall n \in \mathbb{N}$-re $H(n)$”).

Indirekt. T.f.h. (=tegyük fel, hogy) a feltevés dacára a $B := \{k \in \mathbb{N} : H(k) = \mathbf{h}\}$ halmaz nem üres. Korábbi tételünk szerint B-nek van legkisebb eleme; jelölje azt n. Az n választása folytán $1, \ldots, n-1 \notin B$, tehát $H(1) \wedge \ldots \wedge H(n-1) = \mathbf{i}$. Ekkor azonban a feltett implikáció miatt $H(n) = \mathbf{i}$, ami ellentmond annak, hogy $n \in B$. Q.e.d. $\square$

Feladat

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n természetes számra $n^3 + 5n$ osztható 6-tal.

A $6 \mid n^3 + 5n$ feladat megoldása /1

A feladatból nem derül ki, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$-re vagy $\forall n \in \mathbb{N}_0$-ra vonatkozik-e a feladat; ezt a **javunkra** fordíthatjuk: az utóbbi verziót tekintjük, és úgy nemcsak többet bizonyítunk, hanem a bizonyítás is könnyebb lesz.

Megoldás ($6 \mid n^3 + 5n$)

Első lépés: a legkisebb esetre belátjuk. Ez evidens, hiszen $0^3 + 5 \cdot 0 = 0$, ami csakugyan osztható 6-tal.
Második (az ún. **indukciós**) lépés: Legyen $n \in \mathbb{N}_0$ tetszőleges, és tegyük fel, hogy $n^3 + 5n$ osztható 6-tal. (Ez az ún. **indukciós hipotézis**.) Az indukciós hipotézist felhasználva azt kell belátnunk, hogy $(n+1)^3 + 5(n+1)$ osztható 6-tal. Számoljunk:

A $6 \mid n^3 + 5n$ feladat megoldása /1

A feladatból nem derül ki, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$-re vagy $\forall n \in \mathbb{N}_0$-ra vonatkozik-e a feladat; ezt a **javunkra** fordíthatjuk: az utóbbi verziót tekintjük, és úgy nemcsak többet bizonyítunk, hanem a bizonyítás is könnyebb lesz.

Megoldás ($6 \mid n^3 + 5n$)

Első lépés: a legkisebb esetre belátjuk. Ez evidens, hiszen $0^3 + 5 \cdot 0 = 0$, ami csakugyan osztható 6-tal.
Második (az ún. **indukciós**) lépés: Legyen $n \in \mathbb{N}_0$ tetszőleges, és tegyük fel, hogy $n^3 + 5n$ osztható 6-tal. (Ez az ún. **indukciós hipotézis**.) Az indukciós hipotézist felhasználva azt kell belátnunk, hogy $(n+1)^3 + 5(n+1)$ osztható 6-tal. Számoljunk:

A $6 \mid n^3 + 5n$ feladat megoldása /1

A feladatból nem derül ki, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$-re vagy $\forall n \in \mathbb{N}_0$-ra vonatkozik-e a feladat; ezt a **javunkra** fordíthatjuk: az utóbbi verziót tekintjük, és úgy nemcsak többet bizonyítunk, hanem a bizonyítás is könnyebb lesz.

Megoldás ($6 \mid n^3 + 5n$)

Első lépés: a legkisebb esetre belátjuk. Ez evidens, hiszen $0^3 + 5 \cdot 0 = 0$, ami csakugyan osztható 6-tal.
Második (az ún. **indukciós**) lépés: Legyen $n \in \mathbb{N}_0$ tetszőleges, és tegyük fel, hogy $n^3 + 5n$ osztható 6-tal. (Ez az ún. **indukciós hipotézis**.) Az indukciós hipotézist felhasználva azt kell belátnunk, hogy $(n+1)^3 + 5(n+1)$ osztható 6-tal. Számoljunk:

Megoldás (folytatás))

$$(n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5$$
$$\underbrace{(n^3+5n)}_{\text{ind. hip.miatt osztható 6-tal}} + \underbrace{3n(n+1)}_{\text{mert } n(n+1) \text{ páros}} + \underbrace{6}_{\text{nyilván}}$$

Azaz, tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$-ra, ha n-re a mondott kifejezés osztható 6-tal, akkor $(n+1)$-re is osztható. Q.e.d.

Ismeretes, hogy ∞ sok prímszám van.

Feladat

Bizonyítsuk be, hogy bármely n pozitív egész számra az n-edik prímszám legfeljebb $2^{2^{n-1}}$.

Megoldás (folytatás))

$$(n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5$$

$$\underbrace{(n^3+5n)}_{\text{ind. hip.miatt osztható 6-tal}} + \underbrace{3n(n+1)}_{\text{mert } n(n+1) \text{ páros}} + \underbrace{6}_{\text{nyilván}}$$

Azaz, tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$-ra, ha n-re a mondott kifejezés osztható 6-tal, akkor $(n+1)$-re is osztható. Q.e.d.

Ismeretes, hogy ∞ sok prímszám van.

Feladat

Bizonyítsuk be, hogy bármely n pozitív egész számra az n-edik prímszám legfeljebb $2^{2^{n-1}}$.

A 6 | $n^3 + 5n$ feladat megoldása /2

Megoldás (folytatás))

$$(n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5$$

$$\underbrace{(n^3+5n)}_{\text{ind. hip.miatt osztható 6-tal}} + \underbrace{3n(n+1)}_{\text{mert } n(n+1) \text{ páros}} + \underbrace{6}_{\text{nyilván}}$$

Azaz, tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$-ra, ha n-re a mondott kifejezés osztható 6-tal, akkor $(n+1)$-re is osztható. Q.e.d.

Ismeretes, hogy ∞ sok prímszám van.

Feladat

Bizonyítsuk be, hogy bármely n pozitív egész számra az n-edik prímszám legfeljebb $2^{2^{n-1}}$.

Megoldás (folytatás))

$$(n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5$$
$$\underbrace{(n^3+5n)}_{\text{ind. hip.miatt osztható 6-tal}} + \underbrace{3n(n+1)}_{\text{mert } n(n+1) \text{ páros}} + \underbrace{6}_{\text{nyilván}}$$

Azaz, tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$-ra, ha n-re a mondott kifejezés osztható 6-tal, akkor $(n+1)$-re is osztható. Q.e.d.

Ismeretes, hogy ∞ sok prímszám van.

Feladat

Bizonyítsuk be, hogy bármely n pozitív egész számra az n-edik prímszám legfeljebb $2^{2^{n-1}}$.

A $6 \mid n^3 + 5n$ feladat megoldása /2

Megoldás (folytatás))

$$(n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5$$

$$\underbrace{(n^3+5n)}_{\text{ind. hip.miatt osztható 6-tal}} + \underbrace{3n(n+1)}_{\text{mert } n(n+1) \text{ páros}} + \underbrace{6}_{\text{nyilván}}$$

Azaz, tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$-ra, ha n-re a mondott kifejezés osztható 6-tal, akkor $(n+1)$-re is osztható. Q.e.d.

Ismeretes, hogy ∞ sok prímszám van.

Feladat

Bizonyítsuk be, hogy bármely n pozitív egész számra az n-edik prímszám legfeljebb $2^{2^{n-1}}$.

Megoldás

Itt a teljes indukció második alakját alkalmazzuk (az elsővel elég reménytelen lenne). Az i-edik prímszámot jelölje p_i. Tehát $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, stb. Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, és tegyük fel, hogy

$$p_1 \leq 2^{2^{1-1}},\ p_2 \leq 2^{2^{2-1}},\ \ldots,\ p_{n-1} \leq 2^{2^{(n-1)-1}}$$

(most ez az indukciós hipotézis). (Vigyázat és később se feledjük: ha $n = 1$, akkor az indukciós hipotézis „üres”, azaz semmit se mond. Azaz most sem kerülhetjük el, hogy $n = 1$-re az állítást igazoljuk.) Azt kell az indukciós hipotézis felhasználásával belátnunk, hogy $p_n \leq 2^{2^{n-1}}$. Eddig nem kellett semmiféle ötlet, de most kelleni fog:

Megoldás

Itt a teljes indukció második alakját alkalmazzuk (az elsővel elég reménytelen lenne). Az i-edik prímszámot jelölje p_i. Tehát $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, stb. Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, és tegyük fel, hogy

$$p_1 \leq 2^{2^{1-1}}, \; p_2 \leq 2^{2^{2-1}}, \; \ldots, \; p_{n-1} \leq 2^{2^{(n-1)-1}}$$

(most ez az indukciós hipotézis). (Vigyázat és később se feledjük: ha $n = 1$, akkor az indukciós hipotézis „üres”, azaz semmit se mond. Azaz most sem kerülhetjük el, hogy $n = 1$-re az állítást igazoljuk.) Azt kell az indukciós hipotézis felhasználásával belátnunk, hogy $p_n \leq 2^{2^{n-1}}$. Eddig nem kellett semmiféle ötlet, de most kelleni fog:

Megoldás

Itt a teljes indukció második alakját alkalmazzuk (az elsővel elég reménytelen lenne). Az i-edik prímszámot jelölje p_i. Tehát $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, stb. Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, és tegyük fel, hogy

$$p_1 \leq 2^{2^{1-1}},\ p_2 \leq 2^{2^{2-1}},\ \ldots,\ p_{n-1} \leq 2^{2^{(n-1)-1}}$$

(most ez az indukciós hipotézis). (Vigyázat és később se feledjük: ha $n = 1$, akkor az indukciós hipotézis „üres", azaz semmit se mond. Azaz most sem kerülhetjük el, hogy $n = 1$-re az állítást igazoljuk.) Azt kell az indukciós hipotézis felhasználásával belátnunk, hogy $p_n \leq 2^{2^{n-1}}$. Eddig nem kellett semmiféle ötlet, de most kelleni fog:

Megoldás

Itt a teljes indukció második alakját alkalmazzuk (az elsővel elég reménytelen lenne). Az i-edik prímszámot jelölje p_i. Tehát $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, stb. Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, és tegyük fel, hogy

$$p_1 \leq 2^{2^{1-1}},\ p_2 \leq 2^{2^{2-1}},\ \ldots,\ p_{n-1} \leq 2^{2^{(n-1)-1}}$$

(most ez az indukciós hipotézis). (Vigyázat és később se feledjük: ha $n = 1$, akkor az indukciós hipotézis „üres”, azaz semmit se mond. Azaz most sem kerülhetjük el, hogy $n = 1$-re az állítást igazoljuk.) Azt kell az indukciós hipotézis felhasználásával belátnunk, hogy $p_n \leq 2^{2^{n-1}}$. Eddig nem kellett semmiféle ötlet, de most kelleni fog:

Megoldás

Itt a teljes indukció második alakját alkalmazzuk (az elsővel elég reménytelen lenne). Az i-edik prímszámot jelölje p_i. Tehát $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, stb. Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, és tegyük fel, hogy

$$p_1 \leq 2^{2^{1-1}},\ p_2 \leq 2^{2^{2-1}},\ \ldots,\ p_{n-1} \leq 2^{2^{(n-1)-1}}$$

(most ez az indukciós hipotézis). (Vigyázat és később se feledjük: ha $n = 1$, akkor az indukciós hipotézis „üres”, azaz semmit se mond. Azaz most sem kerülhetjük el, hogy $n = 1$-re az állítást igazoljuk.)

Azt kell az indukciós hipotézis felhasználásával belátnunk, hogy $p_n \leq 2^{2^{n-1}}$. Eddig nem kellett semmiféle ötlet, de most kelleni fog:

Megoldás

Itt a teljes indukció második alakját alkalmazzuk (az elsővel elég reménytelen lenne). Az i-edik prímszámot jelölje p_i. Tehát $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, stb. Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, és tegyük fel, hogy

$$p_1 \leq 2^{2^{1-1}},\ p_2 \leq 2^{2^{2-1}},\ \ldots,\ p_{n-1} \leq 2^{2^{(n-1)-1}}$$

(most ez az indukciós hipotézis). (Vigyázat és később se feledjük: ha $n = 1$, akkor az indukciós hipotézis „üres", azaz semmit se mond. Azaz most sem kerülhetjük el, hogy $n = 1$-re az állítást igazoljuk.) Azt kell az indukciós hipotézis felhasználásával belátnunk, hogy $p_n \leq 2^{2^{n-1}}$. Eddig nem kellett semmiféle ötlet, de most kelleni fog:

Megoldás (folytatás/1)

Tekintsük az

$$m := p_1 p_2 \dots p_{n-1} + 1$$

számot, és jelölje q az m egyik prímosztóját. (A korábbi tanulmányok szerint m prímtényezők szorzatára bontható, tehát van prímosztója.) Ha $q = p_1$ lenne, akkor m is és $p_1 p_2 \dots p_{n-1}$ is, tehát ezek különbsége, azaz az $1 = m - p_1 p_2 \dots p_{n-1}$ is osztható lenne q-val, ami nem lehetséges. Tehát $q \neq p_1$. Hasonlóan kapjuk, hogy $q \neq p_2$, ..., $q \neq p_{n-1}$. Ezért q a $p_n, p_{n+1}, \dots$ további prímszámok közül kerül ki, tehát

$$p_n \leq q \leq m.$$

Az indukciós hipotézist a most következő számolásban fogjuk használni:

Megoldás (folytatás/1)

Tekintsük az

$$m := p_1 p_2 \dots p_{n-1} + 1$$

számot, és jelölje q az m egyik prímosztóját. (A korábbi tanulmányok szerint m prímtényezők szorzatára bontható, tehát van prímosztója.) Ha $q = p_1$ lenne, akkor m is és $p_1 p_2 \dots p_{n-1}$ is, tehát ezek különbsége, azaz az $1 = m - p_1 p_2 \dots p_{n-1}$ is osztható lenne q-val, ami nem lehetséges. Tehát $q \neq p_1$. Hasonlóan kapjuk, hogy $q \neq p_2$, ..., $q \neq p_{n-1}$. Ezért q a $p_n, p_{n+1}, \dots$ további prímszámok közül kerül ki, tehát

$$p_n \leq q \leq m.$$

Az indukciós hipotézist a most következő számolásban fogjuk használni:

Megoldás (folytatás/1)

Tekintsük az

$$m := p_1 p_2 \dots p_{n-1} + 1$$

számot, és jelölje q az m egyik prímosztóját. (A korábbi tanulmányok szerint m prímtényezők szorzatára bontható, tehát van prímosztója.) Ha $q = p_1$ lenne, akkor m is és $p_1 p_2 \dots p_{n-1}$ is, tehát ezek különbsége, azaz az $1 = m - p_1 p_2 \dots p_{n-1}$ is osztható lenne q-val, ami nem lehetséges. Tehát $q \neq p_1$. Hasonlóan kapjuk, hogy $q \neq p_2$, …, $q \neq p_{n-1}$. Ezért q a $p_n, p_{n+1}, \dots$ további prímszámok közül kerül ki, tehát

$$p_n \leq q \leq m.$$

Az indukciós hipotézist a most következő számolásban fogjuk használni:

Megoldás (folytatás/1)

Tekintsük az

$$m := p_1 p_2 \dots p_{n-1} + 1$$

számot, és jelölje q az m egyik prímosztóját. (A korábbi tanulmányok szerint m prímtényezők szorzatára bontható, tehát van prímosztója.) Ha $q = p_1$ lenne, akkor m is és $p_1 p_2 \dots p_{n-1}$ is, tehát ezek különbsége, azaz az $1 = m - p_1 p_2 \dots p_{n-1}$ is osztható lenne q-val, ami nem lehetséges. Tehát $q \ne p_1$. Hasonlóan kapjuk, hogy $q \ne p_2$, ..., $q \ne p_{n-1}$. Ezért q a $p_n, p_{n+1}, \dots$ további prímszámok közül kerül ki, tehát

$$p_n \le q \le m.$$

Az indukciós hipotézist a most következő számolásban fogjuk használni:

Megoldás (folytatás/1)

Tekintsük az

$$m := p_1 p_2 \dots p_{n-1} + 1$$

számot, és jelölje q az m egyik prímosztóját. (A korábbi tanulmányok szerint m prímtényezők szorzatára bontható, tehát van prímosztója.) Ha $q = p_1$ lenne, akkor m is és $p_1 p_2 \dots p_{n-1}$ is, tehát ezek különbsége, azaz az $1 = m - p_1 p_2 \dots p_{n-1}$ is osztható lenne q-val, ami nem lehetséges. Tehát $q \neq p_1$. Hasonlóan kapjuk, hogy $q \neq p_2$, ..., $q \neq p_{n-1}$. Ezért q a $p_n, p_{n+1}, \dots$ további prímszámok közül kerül ki, tehát

$$p_n \leq q \leq m.$$

Az indukciós hipotézist a most következő számolásban fogjuk használni:

Megoldás (folytatás/1)

Tekintsük az

$$m := p_1 p_2 \dots p_{n-1} + 1$$

számot, és jelölje q az m egyik prímosztóját. (A korábbi tanulmányok szerint m prímtényezők szorzatára bontható, tehát van prímosztója.) Ha $q = p_1$ lenne, akkor m is és $p_1 p_2 \dots p_{n-1}$ is, tehát ezek különbsége, azaz az $1 = m - p_1 p_2 \dots p_{n-1}$ is osztható lenne q-val, ami nem lehetséges. Tehát $q \neq p_1$. Hasonlóan kapjuk, hogy $q \neq p_2$, ..., $q \neq p_{n-1}$. Ezért q a $p_n, p_{n+1}, \dots$ további prímszámok közül kerül ki, tehát

$$p_n \le q \le m.$$

Az indukciós hipotézist a most következő számolásban fogjuk használni:

Megoldás (folytatás/1)

Tekintsük az

$$m := p_1 p_2 \dots p_{n-1} + 1$$

számot, és jelölje q az m egyik prímosztóját. (A korábbi tanulmányok szerint m prímtényezők szorzatára bontható, tehát van prímosztója.) Ha $q = p_1$ lenne, akkor m is és $p_1 p_2 \dots p_{n-1}$ is, tehát ezek különbsége, azaz az $1 = m - p_1 p_2 \dots p_{n-1}$ is osztható lenne q-val, ami nem lehetséges. Tehát $q \ne p_1$. Hasonlóan kapjuk, hogy $q \ne p_2$, ..., $q \ne p_{n-1}$. Ezért q a $p_n, p_{n+1}, \dots$ további prímszámok közül kerül ki, tehát

$$p_n \le q \le m.$$

Az indukciós hipotézist a most következő számolásban fogjuk használni:

$p_1 \le 2^{2^{1-1}}$, $p_2 \le 2^{2^{2-1}}$, …, $p_{n-1} \le 2^{2^{(n-1)-1}}$ és tudjuk, hogy $p_n \le m = p_1 \dots p_{n-1} + 1$

Megoldás (folytatás/2)

$$p_n \le m =$$

$$p_1 p_2 \dots p_{n-1} + 1 \le \text{(tényezőnként az ind. hip.-t alkalmazva)}$$

$$\le 2^{2^{1-1}} \cdot 2^{2^{2-1}} \cdot \dots \cdot 2^{2^{(n-1)-1}} + 1 =$$

$$2^{2^0} \cdot 2^{2^1} \cdot \dots \cdot 2^{2^{n-2}} + 1 = \text{(azonos alapú hatványok szorzása:)}$$

$$= 2^{2^0+2^1+\dots+2^{n-2}} + 1 = \text{(mértani sor összege:)}$$

$$2^{2^{n-1}-1} + 1 \le \text{(most az 1-et növelem, ld. } (\sharp) \text{ lent)}$$

$$2^{2^{n-1}-1} + 2^{2^{n-1}-1} = 2 \cdot 2^{2^{n-1}-1} = 2^{2^{n-1}}. \text{ Q.e.d}$$

($\sharp$): $n = 1$ esetén „=", de arra inkább külön ellenőrizzük az állítást, hiszen akkor az indukciós hipotézis semmitmondó.

Megjegyzés

A fentiekből az is következik, hogy ∞ sok prímszám van.

Megoldás (folytatás/2)

$$p_n \le m =$$
$$p_1 p_2 \dots p_{n-1} + 1 \le \text{(tényezőnként az ind. hip.-t alkalmazva)}$$
$$\le 2^{2^{1-1}} \cdot 2^{2^{2-1}} \cdot \dots \cdot 2^{2^{(n-1)-1}} + 1 =$$
$$2^{2^0} \cdot 2^{2^1} \cdot \dots \cdot 2^{2^{n-2}} + 1 = \text{(azonos alapú hatványok szorzása:)}$$
$$= 2^{2^0+2^1+\dots+2^{n-2}} + 1 = \text{(mértani sor összege:)}$$
$$2^{2^{n-1}-1} + 1 \le \text{(most az 1-et növelem, ld. } (\sharp) \text{ lent)}$$
$$2^{2^{n-1}-1} + 2^{2^{n-1}-1} = 2 \cdot 2^{2^{n-1}-1} = 2^{2^{n-1}}. \text{ Q.e.d}$$

($\sharp$): $n = 1$ esetén „=", de arra inkább külön ellenőrizzük az állítást, hiszen akkor az indukciós hipotézis semmitmondó.

Megjegyzés

A fentiekből az is következik, hogy ∞ sok prímszám van.

$p_1 \leq 2^{2^{1-1}}$, $p_2 \leq 2^{2^{2-1}}$, …, $p_{n-1} \leq 2^{2^{(n-1)-1}}$ és tudjuk, hogy $p_n \leq m = p_1 \dots p_{n-1} + 1$

Megoldás (folytatás/2)

$$p_n \leq m =$$
$$p_1 p_2 \dots p_{n-1} + 1 \leq \text{(tényezőnként az ind. hip.-t alkalmazva)}$$
$$\leq 2^{2^{1-1}} \cdot 2^{2^{2-1}} \cdot \dots \cdot 2^{2^{(n-1)-1}} + 1 =$$
$$2^{2^0} \cdot 2^{2^1} \cdot \dots \cdot 2^{2^{n-2}} + 1 = \text{(azonos alapú hatványok szorzása:)}$$
$$= 2^{2^0+2^1+\dots+2^{n-2}} + 1 = \text{(mértani sor összege:)}$$
$$2^{2^{n-1}-1} + 1 \leq \text{(most az 1-et növelem, ld. } (\sharp) \text{ lent)}$$
$$2^{2^{n-1}-1} + 2^{2^{n-1}-1} = 2 \cdot 2^{2^{n-1}-1} = 2^{2^{n-1}}. \text{ Q.e.d}$$

($\sharp$): $n = 1$ esetén „=", de arra inkább külön ellenőrizzük az állítást, hiszen akkor az indukciós hipotézis semmitmondó.

Megjegyzés

A fentiekből az is következik, hogy ∞ sok prímszám van.

$p_1 \le 2^{2^{1-1}}$, $p_2 \le 2^{2^{2-1}}$, …, $p_{n-1} \le 2^{2^{(n-1)-1}}$ és tudjuk, hogy $p_n \le m = p_1 \dots p_{n-1} + 1$

Megoldás (folytatás/2)

$$p_n \le m =$$
$$p_1 p_2 \dots p_{n-1} + 1 \le \text{(tényezőnként az ind. hip.-t alkalmazva)}$$
$$\le 2^{2^{1-1}} \cdot 2^{2^{2-1}} \cdot \dots \cdot 2^{2^{(n-1)-1}} + 1 =$$
$$2^{2^0} \cdot 2^{2^1} \cdot \dots \cdot 2^{2^{n-2}} + 1 = \text{(azonos alapú hatványok szorzása:)}$$
$$= 2^{2^0+2^1+\dots+2^{n-2}} + 1 = \text{(mértani sor összege:)}$$
$$2^{2^{n-1}-1} + 1 \le \text{(most az 1-et növelem, ld. } (\sharp) \text{ lent)}$$
$$2^{2^{n-1}-1} + 2^{2^{n-1}-1} = 2 \cdot 2^{2^{n-1}-1} = 2^{2^{n-1}}. \text{ Q.e.d}$$

($\sharp$): $n = 1$ esetén „=", de arra inkább külön ellenőrizzük az állítást, hiszen akkor az indukciós hipotézis semmitmondó.

Megjegyzés

A fentiekből az is következik, hogy ∞ sok prímszám van.

$p_1 \le 2^{2^{1-1}}$, $p_2 \le 2^{2^{2-1}}$, …, $p_{n-1} \le 2^{2^{(n-1)-1}}$ és tudjuk, hogy $p_n \le m = p_1 \dots p_{n-1} + 1$

Megoldás (folytatás/2)

$$p_n \le m =$$
$$p_1 p_2 \dots p_{n-1} + 1 \le \text{(tényezőnként az ind. hip.-t alkalmazva)}$$
$$\le 2^{2^{1-1}} \cdot 2^{2^{2-1}} \cdot \dots \cdot 2^{2^{(n-1)-1}} + 1 =$$
$$2^{2^0} \cdot 2^{2^1} \cdot \dots \cdot 2^{2^{n-2}} + 1 = \text{(azonos alapú hatványok szorzása:)}$$
$$= 2^{2^0+2^1+\dots+2^{n-2}} + 1 = \text{(mértani sor összege:)}$$
$$2^{2^{n-1}-1} + 1 \le \text{(most az 1-et növelem, ld. } (\sharp) \text{ lent)}$$
$$2^{2^{n-1}-1} + 2^{2^{n-1}-1} = 2 \cdot 2^{2^{n-1}-1} = 2^{2^{n-1}}. \text{ Q.e.d}$$

($\sharp$): $n = 1$ esetén „=”, de arra inkább külön ellenőrizzük az állítást, hiszen akkor az indukciós hipotézis semmitmondó.

Megjegyzés

A fentiekből az is következik, hogy ∞ sok prímszám van.

$p_1 \le 2^{2^{1-1}}$, $p_2 \le 2^{2^{2-1}}$, ..., $p_{n-1} \le 2^{2^{(n-1)-1}}$ és tudjuk, hogy $p_n \le m = p_1 \dots p_{n-1} + 1$

Megoldás (folytatás/2)

$$p_n \le m =$$
$$p_1 p_2 \dots p_{n-1} + 1 \le \text{(tényezőnként az ind. hip.-t alkalmazva)}$$
$$\le 2^{2^{1-1}} \cdot 2^{2^{2-1}} \cdot \dots \cdot 2^{2^{(n-1)-1}} + 1 =$$
$$2^{2^0} \cdot 2^{2^1} \cdot \dots \cdot 2^{2^{n-2}} + 1 = \text{(azonos alapú hatványok szorzása:)}$$
$$= 2^{2^0+2^1+\dots+2^{n-2}} + 1 = \text{(mértani sor összege:)}$$
$$2^{2^{n-1}-1} + 1 \le \text{(most az 1-et növelem, ld. } (\sharp) \text{ lent)}$$
$$2^{2^{n-1}-1} + 2^{2^{n-1}-1} = 2 \cdot 2^{2^{n-1}-1} = 2^{2^{n-1}}. \text{ Q.e.d}$$

($\sharp$): $n = 1$ esetén „=”, de arra inkább külön ellenőrizzük az állítást, hiszen akkor az indukciós hipotézis semmitmondó.

Megjegyzés

A fentiekből az is következik, hogy ∞ sok prímszám van.

$p_1 \leq 2^{2^{1-1}}$, $p_2 \leq 2^{2^{2-1}}$, $\ldots$, $p_{n-1} \leq 2^{2^{(n-1)-1}}$ és tudjuk, hogy $p_n \leq m = p_1 \ldots p_{n-1} + 1$

Megoldás (folytatás/2)

$$p_n \leq m =$$
$$p_1 p_2 \ldots p_{n-1} + 1 \leq \text{(tényezőnként az ind. hip.-t alkalmazva)}$$
$$\leq 2^{2^{1-1}} \cdot 2^{2^{2-1}} \cdot \cdots \cdot 2^{2^{(n-1)-1}} + 1 =$$
$$2^{2^0} \cdot 2^{2^1} \cdot \cdots \cdot 2^{2^{n-2}} + 1 = \text{(azonos alapú hatványok szorzása:)}$$
$$= 2^{2^0+2^1+\cdots+2^{n-2}} + 1 = \text{(mértani sor összege:)}$$
$$2^{2^{n-1}-1} + 1 \leq \text{(most az 1-et növelem, ld. } (\sharp) \text{ lent)}$$
$$2^{2^{n-1}-1} + 2^{2^{n-1}-1} = 2 \cdot 2^{2^{n-1}-1} = 2^{2^{n-1}}. \text{ Q.e.d}$$

($\sharp$): $n = 1$ esetén „=”, de arra inkább külön ellenőrizzük az állítást, hiszen akkor az indukciós hipotézis semmitmondó.

Megjegyzés

A fentiekből az is következik, hogy ∞ sok prímszám van.

További indukciós feladatok önálló gyakorlásra

Feladat

Mutassuk meg teljes indukcióval, hogy

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \cdots + n(3n+1) = n(n+1)^2.$$

Az ilyen típusú feladatokat úgy kell értelmezni, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$-re! (Az más kérdés, hogy könnyebb bármely $n \in \mathbb{N}_0$-ra megoldani.)

Feladat

Mutassuk meg teljes indukcióval, hogy ha egy pozitív egész szám 3^n egyforma számjegyből áll, akkor ez a szám osztható 3^n-nel.

Gyakran nem bizonyítani, hanem definiálni akarunk valamit. A teljes indukció párja a **rekurzív definíció**. Ez a következőt jelenti: minden $n \in \mathbb{N}$-re szeretnénk egy n-től függő fogalmat — jelölje azt $F(n)$ — definiálni.

Ehhez definiáljuk a fogalmat $n = 1$-re, azaz definiáljuk $F(1)$-et, majd

ezt követően megadjuk azt, hogy tetszőleges n-re hogyan kapjuk $F(n+1)$-et $F(n)$-ből (és n-ből).

Megjegyzés

Természetesen $\mathbb{N}$ helyett $\mathbb{N}_0$-at is mondhattunk volna.

Megmutatható, hogy a rekurzív definíció egyértelműen definálja az $F(n)$ fogalmat minden n-re.

Rekurzív definíció: n-ről $(n+1)$-re

Gyakran nem bizonyítani, hanem definiálni akarunk valamit. A teljes indukció párja a **rekurzív definíció**. Ez a következőt jelenti: minden $n \in \mathbb{N}$-re szeretnénk egy n-től függő fogalmat — jelölje azt $F(n)$ — definiálni.
Ehhez definiáljuk a fogalmat $n = 1$-re, azaz definiáljuk $F(1)$-et, majd
ezt követően megadjuk azt, hogy tetszőleges n-re hogyan kapjuk $F(n+1)$-et $F(n)$-ből (és n-ből).

Megjegyzés

Természetesen $\mathbb{N}$ helyett $\mathbb{N}_0$-at is mondhattunk volna.

Megmutatható, hogy a rekurzív definíció egyértelműen definálja az $F(n)$ fogalmat minden n-re.

Rekurzív definíció: n-ről $(n+1)$-re

Gyakran nem bizonyítani, hanem definiálni akarunk valamit. A teljes indukció párja a **rekurzív definíció**. Ez a következőt jelenti: minden $n \in \mathbb{N}$-re szeretnénk egy n-től függő fogalmat — jelölje azt $F(n)$ — definiálni.
Ehhez definiáljuk a fogalmat $n = 1$-re, azaz definiáljuk $F(1)$-et, majd
ezt követően megadjuk azt, hogy tetszőleges n-re hogyan kapjuk $F(n+1)$-et $F(n)$-ből (és n-ből).

Megjegyzés

Természetesen $\mathbb{N}$ helyett $\mathbb{N}_0$-at is mondhattunk volna.

Megmutatható, hogy a rekurzív definíció egyértelműen definálja az $F(n)$ fogalmat minden n-re.

Rekurzív definíció: n-ről $(n+1)$-re

Gyakran nem bizonyítani, hanem definiálni akarunk valamit. A teljes indukció párja a **rekurzív definíció**. Ez a következőt jelenti: minden $n \in \mathbb{N}$-re szeretnénk egy n-től függő fogalmat — jelölje azt $F(n)$ — definiálni.
Ehhez definiáljuk a fogalmat $n = 1$-re, azaz definiáljuk $F(1)$-et, majd
ezt követően megadjuk azt, hogy tetszőleges n-re hogyan kapjuk $F(n+1)$-et $F(n)$-ből (és n-ből).

Megjegyzés

Természetesen $\mathbb{N}$ helyett $\mathbb{N}_0$-at is mondhattunk volna.

Megmutatható, hogy a rekurzív definíció egyértelműen definálja az $F(n)$ fogalmat minden n-re.

Rekurzív definíció: az összes kisebbről n-re

A rekurzív definíciónak is megvan a másik alakja, amikor nem az előző fogalom felhasználásával definiáljuk a következőt, hanem az **összes előző** felhasználásával.

Feladat

Hol láttunk példát a rekurzív definíció második alakjára?

Megoldás

Az ítéletkalkulus formuláinak definiálásakor. A predikátumkalkulus kifejezéseinek definiálásakor, A predikátumkalkulus formuláinak definiálásakor.

Példa

Legyen $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, és $n > 2$ esetén $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$. Ezzel rekurzív módon definiáltuk f_n-et minden $n \in \mathbb{N}$-re, azaz rekurzióval definiáltunk egy $f_1, f_2, f_3, \ldots$ végtelen számsorozatot (az ún. híres-nevezetes Fibonacci-sorozat).

Rekurzív definíció: az összes kisebbről n-re

A rekurzív definíciónak is megvan a másik alakja, amikor nem az előző fogalom felhasználásával definiáljuk a következőt, hanem az **összes előző** felhasználásával.

Feladat

Hol láttunk példát a rekurzív definíció második alakjára?

Megoldás

Az ítéletkalkulus formuláinak definiálásakor. A predikátumkalkulus kifejezéseinek definiálásakor, A predikátumkalkulus formuláinak definiálásakor.

Példa

Legyen $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, és $n > 2$ esetén $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$. Ezzel rekurzív módon definiáltuk f_n-et minden $n \in \mathbb{N}$-re, azaz rekurzióval definiáltunk egy $f_1, f_2, f_3, \ldots$ végtelen számsorozatot (az ún. híres-nevezetes Fibonacci-sorozat).

Rekurzív definíció: az összes kisebbről n-re

A rekurzív definíciónak is megvan a másik alakja, amikor nem az előző fogalom felhasználásával definiáljuk a következőt, hanem az **összes előző** felhasználásával.

Feladat

Hol láttunk példát a rekurzív definíció második alakjára?

Megoldás

Az ítéletkalkulus formuláinak definiálásakor. A predikátumkalkulus kifejezéseinek definiálásakor, A predikátumkalkulus formuláinak definiálásakor.

Példa

Legyen $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, és $n > 2$ esetén $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$. Ezzel rekurzív módon definiáltuk f_n-et minden $n \in \mathbb{N}$-re, azaz rekurzióval definiáltunk egy $f_1, f_2, f_3, \ldots$ végtelen számsorozatot (az ún. híres-nevezetes Fibonacci-sorozat).

Rekurzív definíció: az összes kisebbről n-re

A rekurzív definíciónak is megvan a másik alakja, amikor nem az előző fogalom felhasználásával definiáljuk a következőt, hanem az **összes előző** felhasználásával.

Feladat

Hol láttunk példát a rekurzív definíció második alakjára?

Megoldás

Az ítéletkalkulus formuláinak definiálásakor. A predikátumkalkulus kifejezéseinek definiálásakor, A predikátumkalkulus formuláinak definiálásakor.

Példa

Legyen $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, és $n > 2$ esetén $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$. Ezzel rekurzív módon definiáltuk f_n-et minden $n \in \mathbb{N}$-re, azaz rekurzióval definiáltunk egy $f_1, f_2, f_3, \ldots$ végtelen számsorozatot (az ún. híres-nevezetes Fibonacci-sorozat).

Rekurzió nélkül (triviális eseteket leszámítva) aligha lehetne

programozni vagy programozási nyelveket definiálni!

Bizonyítás nélkül gyakran nem lehet előre tudni valamit; pl. azt, hogy hány lépésen át fut egy algoritmus vagy program. (Ha egymillió évig, akkor hozzá se fogjunk.) Az előzetes becslés és számolás egyik kelléke a teljes indukciós bizonyítás.

Előadáson nem azért bizonyítunk be nagy ritkán egy-két dolgot, mert kételkedünk elődeink eredményeiben, hanem hogy gyakoroljuk az újonnan megismert fogalmakat, tételeket, hogy hozzászokjunk azok használatához. Másrészt — ha egyszer megértettük — a bizonyítás segít majd a tételeket, definíciókat felidézni, pontosan felidézni. És persze a bizonyításokban megismert fogások gyakran kellenek a feladatok megoldásához.

Rekurzió nélkül (triviális eseteket leszámítva) aligha lehetne

programozni vagy programozási nyelveket definiálni!
Bizonyítás nélkül gyakran nem lehet **előre tudni** valamit; pl. azt, hogy hány lépésen át fut egy algoritmus vagy program. (Ha egymillió évig, akkor hozzá se fogjunk.) Az előzetes becslés és számolás egyik kelléke a teljes indukciós bizonyítás.
Előadáson nem azért bizonyítunk be nagy ritkán egy-két dolgot, mert kételkedünk elődeink eredményeiben, hanem hogy gyakoroljuk az újonnan megismert fogalmakat, tételeket, hogy hozzászokjunk azok használatához. Másrészt — ha egyszer megértettük — a bizonyítás segít majd a tételeket, definíciókat felidézni, **pontosan** felidézni. És persze a bizonyításokban megismert fogások gyakran kellenek a feladatok megoldásához.

Rekurzió nélkül (triviális eseteket leszámítva) aligha lehetne

programozni vagy programozási nyelveket definiálni!
Bizonyítás nélkül gyakran nem lehet **előre tudni** valamit; pl. azt, hogy hány lépésen át fut egy algoritmus vagy program. (Ha egymillió évig, akkor hozzá se fogjunk.) Az előzetes becslés és számolás egyik kelléke a teljes indukciós bizonyítás.
Előadáson nem azért bizonyítunk be nagy ritkán egy-két dolgot, mert kételkedünk elődeink eredményeiben, hanem hogy gyakoroljuk az újonnan megismert fogalmakat, tételeket, hogy hozzászokjunk azok használatához. Másrészt — ha egyszer megértettük — a bizonyítás segít majd a tételeket, definíciókat felidézni, **pontosan** felidézni. És persze a bizonyításokban megismert fogások gyakran kellenek a feladatok megoldásához.

Halmazon elemek **egyértelműen meghatározott** és nem túlságosan nagy **összességét** értjük.
Azt nem definiáljuk — ez az axiomatikus halmazelmélet dolga lenne — hogy mi számít túlságosan nagynak. Pl. az összes halmazból álló összesség túlságosan nagy. A mi összességeink sose lesznek túlságosan nagyok, ezért a későbbiekben ezzel a kérdéssel nem törődünk.
Fontos, hogy **bármely** x-re (a kismacskától a $\sqrt{2}$-ig, a tavalyi jelesre vizsgázott hallgatóktól a leghosszabb fordítóprogramig, tehát bármire), objektíven meghatározott legyen, hogy x eleme-e vagy nem eleme a kérdéses összességnek! Pl. a jelenlevők közül a szorgalmas hallgatók összessége nem alkot halmazt, hiszen a szorgalom megítélése szubjektív, mindenki mást és mást ért alatta.

Halmazon elemek **egyértelműen meghatározott** és nem túlságosan nagy **összességét** értjük.
Azt nem definiáljuk — ez az axiomatikus halmazelmélet dolga lenne — hogy mi számít túlságosan nagynak. Pl. az összes halmazból álló összesség túlságosan nagy. A mi összességeink sose lesznek túlságosan nagyok, ezért a későbbiekben ezzel a kérdéssel nem törődünk.
Fontos, hogy **bármely** x-re (a kismacskától a $\sqrt{2}$-ig, a tavalyi jelesre vizsgázott hallgatóktól a leghosszabb fordítóprogramig, tehát bármire), objektíven meghatározott legyen, hogy x eleme-e vagy nem eleme a kérdéses összességnek! Pl. a jelenlevők közül a szorgalmas hallgatók összessége nem alkot halmazt, hiszen a szorgalom megítélése szubjektív, mindenki mást és mást ért alatta.

Halmazon elemek **egyértelműen meghatározott** és nem túlságosan nagy **összességét** értjük.
Azt nem definiáljuk — ez az axiomatikus halmazelmélet dolga lenne — hogy mi számít túlságosan nagynak. Pl. az összes halmazból álló összesség túlságosan nagy. A mi összességeink sose lesznek túlságosan nagyok, ezért a későbbiekben ezzel a kérdéssel nem törődünk.
Fontos, hogy **bármely** x-re (a kismacskától a $\sqrt{2}$-ig, a tavalyi jelesre vizsgázott hallgatóktól a leghosszabb fordítóprogramig, tehát bármire), objektíven meghatározott legyen, hogy x eleme-e vagy nem eleme a kérdéses összességnek! Pl. a jelenlevők közül a szorgalmas hallgatók összessége nem alkot halmazt, hiszen a szorgalom megítélése szubjektív, mindenki mást és mást ért alatta.

Halmazon elemek **egyértelműen meghatározott** és nem túlságosan nagy **összességét** értjük.
Azt nem definiáljuk — ez az axiomatikus halmazelmélet dolga lenne — hogy mi számít túlságosan nagynak. Pl. az összes halmazból álló összesség túlságosan nagy. A mi összességeink sose lesznek túlságosan nagyok, ezért a későbbiekben ezzel a kérdéssel nem törődünk.
Fontos, hogy **bármely** x-re (a kismacskától a $\sqrt{2}$-ig, a tavalyi jelesre vizsgázott hallgatóktól a leghosszabb fordítóprogramig, tehát bármire), objektíven meghatározott legyen, hogy x eleme-e vagy nem eleme a kérdéses összességnek! Pl. a jelenlevők közül a szorgalmas hallgatók összessége nem alkot halmazt, hiszen a szorgalom megítélése szubjektív, mindenki mást és mást ért alatta.

Halmazon elemek **egyértelműen meghatározott** és nem túlságosan nagy **összességét** értjük.
Azt nem definiáljuk — ez az axiomatikus halmazelmélet dolga lenne — hogy mi számít túlságosan nagynak. Pl. az összes halmazból álló összesség túlságosan nagy. A mi összességeink sose lesznek túlságosan nagyok, ezért a későbbiekben ezzel a kérdéssel nem törődünk.
Fontos, hogy **bármely** x-re (a kismacskától a $\sqrt{2}$-ig, a tavalyi jelesre vizsgázott hallgatóktól a leghosszabb fordítóprogramig, tehát bármire), objektíven meghatározott legyen, hogy x eleme-e vagy nem eleme a kérdéses összességnek! Pl. a jelenlevők közül a szorgalmas hallgatók összessége nem alkot halmazt, hiszen a szorgalom megítélése szubjektív, mindenki mást és mást ért alatta.

„elemek egyértelműen meghatározott összessége", „egyértelműen"=?

Az "egyértelműen meghatározott" az objektivitásra utal, tehát arra, hogy mindenki pontosan ugyanazon x-eket tekintse a összesség elemeinek. Ez persze nem jelenti azt, hogy minden egyes x esetén ténylegesen el tudjuk (most vagy később) dönteni, hogy x eleme-e a kérdéses halmaznak.

Például legyen A azon (i, j) egész koordinátájú pontok összessége, amelyekre $1 \leq i \leq 8$, $1 \leq j \leq 2$ és kezdőlépésként az i-edik oszlopbeli gyaloggal j-t lépve világosnak a sakkban nyerő stratégiája van. Ekkor A halmaz, de pl. az $x = (4, 2)$-ről nem tudjuk jelenleg eldönteni, hogy hozzátartozik-e A-hoz.

„elemek egyértelműen meghatározott összessége", „egyértelműen"=?

Az "egyértelműen meghatározott" az objektivitásra utal, tehát arra, hogy mindenki pontosan ugyanazon x-eket tekintse a összesség elemeinek. Ez persze nem jelenti azt, hogy minden egyes x esetén ténylegesen el tudjuk (most vagy később) dönteni, hogy x eleme-e a kérdéses halmaznak.
Például legyen A azon (i, j) egész koordinátájú pontok összessége, amelyekre $1 \leq i \leq 8$, $1 \leq j \leq 2$ és kezdőlépésként az i-edik oszlopbeli gyaloggal j-t lépve világosnak a sakkban nyerő stratégiája van. Ekkor A halmaz, de pl. az $x = (4, 2)$-ről nem tudjuk jelenleg eldönteni, hogy hozzátartozik-e A-hoz.

$x \in A$ jelöli azt, hogy x eleme az A halmaznak (azaz x hozzátartozik A-hoz). Ahogy korábban is, a halmazt többnyire a {, } zárójelek segítségével adjuk meg. Erre példák:
$\{2, 3, 5, 7\}$ az egyjegyű prímszámok halmaza.
$\{2, 3, 4, 5, \dots\}$ az 1-nél nagyobb egész számok halmaza.
Legalább ilyen gyakori, hogy a halmazt ún. általános elem és definiáló tulajdonság segítségével adjuk meg. Példák:
$\{x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N}, \text{ hogy } x = 3y\}$ a hárommal osztható pozitív egészek halmaza. A : helyett a | is használható.
$\{(x, y) \mid x \text{ és } y \text{ valós szám és } x^2 + y^2 < 1\}$ az origó középpontú egységkör belső pontjainak halmaza.

$x \in A$ jelöli azt, hogy x eleme az A halmaznak (azaz x hozzátartozik A-hoz). Ahogy korábban is, a halmazt többnyire a {, } zárójelek segítségével adjuk meg. Erre példák:

$\{2, 3, 5, 7\}$ az egyjegyű prímszámok halmaza.

$\{2, 3, 4, 5, \ldots\}$ az 1-nél nagyobb egész számok halmaza.

Legalább ilyen gyakori, hogy a halmazt ún. általános elem és definiáló tulajdonság segítségével adjuk meg. Példák:

$\{x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N}$, hogy $x = 3y\}$ a hárommal osztható pozitív egészek halmaza. A : helyett a | is használható.

$\{(x, y) \mid x$ és y valós szám és $x^2 + y^2 < 1\}$ az origó középpontú egységkör belső pontjainak halmaza.

$x \in A$ jelöli azt, hogy x eleme az A halmaznak (azaz x hozzátartozik A-hoz). Ahogy korábban is, a halmazt többnyire a {, } zárójelek segítségével adjuk meg. Erre példák:
$\{2, 3, 5, 7\}$ az egyjegyű prímszámok halmaza.
$\{2, 3, 4, 5, \ldots\}$ az 1-nél nagyobb egész számok halmaza.
Legalább ilyen gyakori, hogy a halmazt ún. általános elem és definiáló tulajdonság segítségével adjuk meg. Példák:
$\{x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N}$, hogy $x = 3y\}$ a hárommal osztható pozitív egészek halmaza. A : helyett a | is használható.
$\{(x, y) \mid x$ és y valós szám és $x^2 + y^2 < 1\}$ az origó középpontú egységkör belső pontjainak halmaza.

$x \in A$ jelöli azt, hogy x eleme az A halmaznak (azaz x hozzátartozik A-hoz). Ahogy korábban is, a halmazt többnyire a {, } zárójelek segítségével adjuk meg. Erre példák:
$\{2, 3, 5, 7\}$ az egyjegyű prímszámok halmaza.
$\{2, 3, 4, 5, \dots\}$ az 1-nél nagyobb egész számok halmaza.
Legalább ilyen gyakori, hogy a halmazt ún. általános elem és definiáló tulajdonság segítségével adjuk meg. Példák:
$\{x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N}, \text{ hogy } x = 3y\}$ a hárommal osztható pozitív egészek halmaza. A : helyett a | is használható.
$\{(x, y) \mid x \text{ és } y \text{ valós szám és } x^2 + y^2 < 1\}$ az origó középpontú egységkör belső pontjainak halmaza.

Halmaz megadása

$x \in A$ jelöli azt, hogy x eleme az A halmaznak (azaz x hozzátartozik A-hoz). Ahogy korábban is, a halmazt többnyire a {, } zárójelek segítségével adjuk meg. Erre példák:
$\{2, 3, 5, 7\}$ az egyjegyű prímszámok halmaza.
$\{2, 3, 4, 5, \ldots\}$ az 1-nél nagyobb egész számok halmaza.
Legalább ilyen gyakori, hogy a halmazt ún. általános elem és definiáló tulajdonság segítségével adjuk meg. Példák:
$\{x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N}$, hogy $x = 3y\}$ a hárommal osztható pozitív egészek halmaza. A : helyett a | is használható.
$\{(x, y) \mid x$ és y valós szám és $x^2 + y^2 < 1\}$ az origó középpontú egységkör belső pontjainak halmaza.

$x \in A$ jelöli azt, hogy x eleme az A halmaznak (azaz x hozzátartozik A-hoz). Ahogy korábban is, a halmazt többnyire a {, } zárójelek segítségével adjuk meg. Erre példák:
$\{2, 3, 5, 7\}$ az egyjegyű prímszámok halmaza.
$\{2, 3, 4, 5, \ldots\}$ az 1-nél nagyobb egész számok halmaza.
Legalább ilyen gyakori, hogy a halmazt ún. általános elem és definiáló tulajdonság segítségével adjuk meg. Példák:
$\{x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N}$, hogy $x = 3y\}$ a hárommal osztható pozitív egészek halmaza. A : helyett a | is használható.
$\{(x, y) \mid x$ és y valós szám és $x^2 + y^2 < 1\}$ az origó középpontú egységkör belső pontjainak halmaza.

Halmaz megadása

$x \in A$ jelöli azt, hogy x eleme az A halmaznak (azaz x hozzátartozik A-hoz). Ahogy korábban is, a halmazt többnyire a {, } zárójelek segítségével adjuk meg. Erre példák:
$\{2, 3, 5, 7\}$ az egyjegyű prímszámok halmaza.
$\{2, 3, 4, 5, \ldots\}$ az 1-nél nagyobb egész számok halmaza.
Legalább ilyen gyakori, hogy a halmazt ún. általános elem és definiáló tulajdonság segítségével adjuk meg. Példák:
$\{x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N}$, hogy $x = 3y\}$ a hárommal osztható pozitív egészek halmaza. A : helyett a | is használható.
$\{(x, y) \mid x$ és y valós szám és $x^2 + y^2 < 1\}$ az origó középpontú egységkör belső pontjainak halmaza.

Egyenlőség, részhalmaz

Definíció

Két halmazt akkor és csak akkor tekintünk **egyenlőnek**, ha pontosan ugyanazok az elemeik. Ebben az is benne van, hogy halmaz esetén minden elem **csak egyszer számít**. Például $\{1, 2, 3, 1, 2, 2\}$ és $\{1, 2, 3\}$ ugyanazok a halmazok.

Definíció

Legyenek A és B tetszőleges halmazok. Pontosan akkor mondjuk, hogy B **részhalmaza** A-nak — ennek jelölése: $B \subseteq A$ —, ha bármely B-beli elem egyúttal A-nak is eleme. Ha $B \subseteq A$ és emellett $A \neq B$, akkor **valódi részhalmazról** beszélünk; ennek jelölése: $B \subset A$.

Egyenlőség, részhalmaz

Definíció

Két halmazt akkor és csak akkor tekintünk **egyenlőnek**, ha pontosan ugyanazok az elemeik. Ebben az is benne van, hogy halmaz esetén minden elem **csak egyszer számít**. Például $\{1,2,3,1,2,2\}$ és $\{1,2,3\}$ ugyanazok a halmazok.

Definíció

Legyenek A és B tetszőleges halmazok. Pontosan akkor mondjuk, hogy B **részhalmaza** A-nak — ennek jelölése: $B \subseteq A$ —, ha bármely B-beli elem egyúttal A-nak is eleme. Ha $B \subseteq A$ és emellett $A \neq B$, akkor **valódi részhalmazról** beszélünk; ennek jelölése: $B \subset A$.

Üreshalmaz, nemtriviális részhalmaz

Definíció

Az **üreshalmazt** $\emptyset$ jelöli. Ennek nincs eleme.

Az üreshalmaz sokféleképpen is felírható, pl. $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = -1\}$. Az üreshalmazzal kapcsolatban a határozott névelőt azért használhattuk, mert **csak egyetlen üreshalmaz van**. Csakugyan, bármelyik két üres halmaznak ugyanazok az elemei (tudniillik nincsenek), ezért a korábbiak szerint bármely két üreshalmaz egyenlő.

A „$\subseteq$" definíciójából adódik, hogy bármely B halmazra $\emptyset \subseteq B$ és $B \subseteq B$. B-t és az üreshalmazt a B halmaz **triviális részhalmazainak** nevezzük.

Definíció

Az **üreshalmazt** $\emptyset$ jelöli. Ennek nincs eleme.

Az üreshalmaz sokféleképpen is felírható, pl. $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = -1\}$. Az üreshalmazzal kapcsolatban a határozott névelőt azért használhattuk, mert **csak egyetlen üreshalmaz van**. Csakugyan, bármelyik két üres halmaznak ugyanazok az elemei (tudniillik nincsenek), ezért a korábbiak szerint bármely két üreshalmaz egyenlő.

A „$\subseteq$" definíciójából adódik, hogy bármely B halmazra $\emptyset \subseteq B$ és $B \subseteq B$. B-t és az üreshalmazt a B halmaz **triviális részhalmazainak** nevezzük.

Üreshalmaz, nemtriviális részhalmaz

Definíció

Az **üreshalmazt** $\emptyset$ jelöli. Ennek nincs eleme.

Az üreshalmaz sokféleképpen is felírható, pl. $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = -1\}$. Az üreshalmazzal kapcsolatban a határozott névelőt azért használhattuk, mert **csak egyetlen üreshalmaz van**. Csakugyan, bármelyik két üres halmaznak ugyanazok az elemei (tudniillik nincsenek), ezért a korábbiak szerint bármely két üreshalmaz egyenlő.

A „$\subseteq$" definíciójából adódik, hogy bármely B halmazra $\emptyset \subseteq B$ és $B \subseteq B$. B-t és az üreshalmazt a B halmaz **triviális részhalmazainak** nevezzük.

Üreshalmaz, nemtriviális részhalmaz

Definíció

Az **üreshalmazt** $\emptyset$ jelöli. Ennek nincs eleme.

Az üreshalmaz sokféleképpen is felírható, pl.
$\emptyset = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = -1\}$. Az üreshalmazzal kapcsolatban a határozott névelőt azért használhattuk, mert **csak egyetlen üreshalmaz van**. Csakugyan, bármelyik két üres halmaznak ugyanazok az elemei (tudniillik nincsenek), ezért a korábbiak szerint bármely két üreshalmaz egyenlő.
A „$\subseteq$" definíciójából adódik, hogy bármely B halmazra $\emptyset \subseteq B$ és $B \subseteq B$. B-t és az üreshalmazt a B halmaz **triviális részhalmazainak** nevezzük.

Valódi részhalmaz

Példák *nemtriviális* (és egyúttal valódi) részhalmazokra: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$. Természetesen azt is írhatnánk, hogy $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

Megjegyzés

Mi a $\subset$ jelet (a $<$ jelhez analóg módon) **mindig** csakis a valódi részhalmaz jelölésére használjuk, azaz

$$A \subseteq B \overset{\text{def}}{\iff} (A \subseteq B \land \neg(A = B)).$$

Tehát ha $A \subseteq B$, akkor $A \neq B$.

A matematika egyes régebbi ágaiban (az akkori nyomtatechnikai okok miatt) ez a megállapodás nem érvényes. A valódi tartalmazást a matematika minden ágában félreérthetetlen módon $A \subsetneq B$ jelöli, de mi azt nem fogjuk használni.

Valódi részhalmaz

Példák *nemtriviális* (és egyúttal valódi) részhalmazokra: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$. Természetesen azt is írhatnánk, hogy $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

Megjegyzés

Mi a $\subset$ jelet (a $<$ jelhez analóg módon) **mindig** csakis a valódi részhalmaz jelölésére használjuk, azaz

$$A \subseteq B \overset{\text{def}}{\iff} (A \subseteq B \wedge \neg(A = B)).$$

Tehát ha $A \subseteq B$, akkor $A \neq B$.

A matematika egyes régebbi ágaiban (az akkori nyomtatechnikai okok miatt) ez a megállapodás nem érvényes. A valódi tartalmazást a matematika minden ágában félreérthetetlen módon $A \subsetneq B$ jelöli, de mi azt nem fogjuk használni.

Példák *nemtriviális* (és egyúttal valódi) részhalmazokra: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$. Természetesen azt is írhatnánk, hogy $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

Megjegyzés

Mi a $\subset$ jelet (a $<$ jelhez analóg módon) **mindig** csakis a valódi részhalmaz jelölésére használjuk, azaz

$$A \subseteq B \stackrel{\text{def}}{\iff} (A \subseteq B \wedge \neg(A = B)).$$

Tehát ha $A \subseteq B$, akkor $A \neq B$.

A matematika egyes régebbi ágaiban (az akkori nyomtatechnikai okok miatt) ez a megállapodás nem érvényes. A valódi tartalmazást a matematika minden ágában félreérthetetlen módon $A \subsetneq B$ jelöli, de mi azt nem fogjuk használni.

A részhalmaz viszony tulajdonságai

Az alábbi tétel a definíciók közvetlen következménye:

Állítás

Legyen A, B és C tetszőleges halmaz. Ekkor
(1) ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$. (ún. tranzitivitás)
(2) ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$, akkor $A = B$. (ún. antiszimmetria)

Az állítás második része (az antiszimmetria) gyakran hasznos annak kimutatására, hogy két halmaz egyenlő.

Az alábbi tétel a definíciók közvetlen következménye:

Állítás

Legyen A, B és C tetszőleges halmaz. Ekkor
(1) ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$. (ún. tranzitivitás)
(2) ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$, akkor $A = B$. (ún. antiszimmetria)

Az állítás második része (az antiszimmetria) gyakran hasznos annak kimutatására, hogy két halmaz egyenlő.

Az alábbi tétel a definíciók közvetlen következménye:

Állítás

Legyen A, B és C tetszőleges halmaz. Ekkor
(1) ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$. (ún. tranzitivitás)
(2) ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$, akkor $A = B$. (ún. antiszimmetria)

Az állítás második része (az antiszimmetria) gyakran hasznos annak kimutatására, hogy két halmaz egyenlő.

Az alábbi tétel a definíciók közvetlen következménye:

Állítás

Legyen A, B és C tetszőleges halmaz. Ekkor
(1) ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$. (ún. tranzitivitás)
(2) ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$, akkor $A = B$. (ún. antiszimmetria)

Az állítás második része (az antiszimmetria) gyakran hasznos annak kimutatására, hogy két halmaz egyenlő.

Únió és metszet

Definíció (Únió)

Adott két halmaz unióját így definiáljuk:
$A \cup B := \{x : x \in A \ \vee \ x \in B\}$. De lehetne így is:
$A_1 \cup A_2 := \{x : (\exists i)(i \in \{1, 2\} \wedge x \in A_i)\}$.

Definíció (Metszet)

Adott két halmaz metszetét így definiáljuk:
$A \cap B := \{x : x \in A \ \wedge \ x \in B\}$. De lehetne így is:
$A_1 \cap A_2 := \{x : (\forall i)(i \in \{1, 2\} \to x \in A_i)\}$.

Mindét esetben a második verzió könnyen kiterjeszthető több (akár ∞ sok) halmazra is.

Únió és metszet

Definíció (Únió)

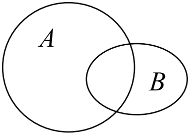
Adott két halmaz unióját így definiáljuk:
$A \cup B := \{x : x \in A \ \vee \ x \in B\}$. De lehetne így is:
$A_1 \cup A_2 := \{x : (\exists i)(i \in \{1,2\} \wedge x \in A_i)\}$.

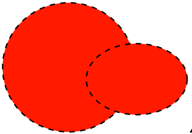
Definíció (Metszet)

Adott két halmaz metszetét így definiáljuk:
$A \cap B := \{x : x \in A \ \wedge \ x \in B\}$. De lehetne így is:
$A_1 \cap A_2 := \{x : (\forall i)(i \in \{1,2\} \rightarrow x \in A_i)\}$.

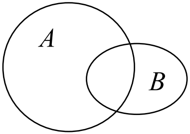
Mindét esetben a második verzió könnyen kiterjeszthető több (akár ∞ sok) halmazra is.

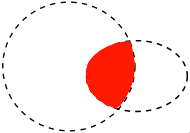
Szokás a halmazokat síkbeli tartományokkal, azaz ún. **Venn-diagrammokkal** szemléltetni. (Ez nagyon helyes, csak tudnunk kell, hogy nem mindegyik halmaz „fér el a síkon”, és még ha el is fér, a Venn-diagramm nem mindig szemlélteti az általánosságot, tehát Venn-diagrammokkal egzakt bizonyítás nem adható!) Az únió művelete Venn-diagrammal így szemléltethető:





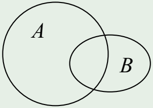
Különbség, szimmetrikus differencia

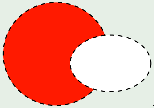




$A \cap B$.

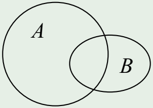
Definíció (Két halmaz különbsége)

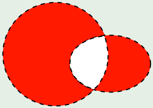




$$A \setminus B = \{x : x \in A, \quad x \notin B\}.$$

Definíció (Két halmaz szimmetrikus differenciája)





$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Halmazműveletekkel kapcsolatos azonosságok

Tétel

Tetszőleges A, B, C halmazokra érvényesek az alábbi azonosságok:

$$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A,\ A \triangle B = B \triangle A \quad \textit{(kommutativitás)};$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$
$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C) \quad \textit{(asszociativitás)};$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C) \quad \textit{(disztributivitás)};$$

$$A \cap (A \cup B) = A,\ A \cup (A \cap B) = A \quad \textit{(abszorptivitás)}.$$

A fenti azonosságok többsége nagyon emlékeztet a tanult alapvető logikai ekivalenciákra; ez nem meglepő, hiszen a halmazműveleteket logikai műveletek segítségével definiáltuk.

Halmazműveletekkel kapcsolatos azonosságok

Tétel

Tetszőleges A, B, C halmazokra érvényesek az alábbi azonosságok:

$$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A,\ A \triangle B = B \triangle A$$

(kommutativitás);

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$$ *(asszociativitás);*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$$ *(disztributivitás);*

$$A \cap (A \cup B) = A,\ A \cup (A \cap B) = A$$

(abszorptivitás).

A fenti azonosságok többsége nagyon emlékeztet a tanult alapvető logikai ekivalenciákra; ez nem meglepő, hiszen a halmazműveleteket logikai műveletek segítségével definiáltuk.

Halmazműveletekkel kapcsolatos azonosságok

Tétel

Tetszőleges A, B, C halmazokra érvényesek az alábbi azonosságok:

$$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A,\ A \triangle B = B \triangle A$$

(kommutativitás);

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$$ *(asszociativitás);*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$$ *(disztributivitás);*

$$A \cap (A \cup B) = A,\ A \cup (A \cap B) = A$$

(abszorptivitás).

A fenti azonosságok többsége nagyon emlékeztet a tanult alapvető logikai ekivalenciákra; ez nem meglepő, hiszen a halmazműveleteket logikai műveletek segítségével definiáltuk.

Tétel

Tetszőleges A, B, C halmazokra érvényesek az alábbi azonosságok:

$$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A,\ A \triangle B = B \triangle A$$

(kommutativitás);

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$$ *(asszociativitás);*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$$ *(disztributivitás);*

$$A \cap (A \cup B) = A,\ A \cup (A \cap B) = A$$

(abszorptivitás).

A fenti azonosságok többsége nagyon emlékeztet a tanult alapvető logikai ekivalenciákra; ez nem meglepő, hiszen a halmazműveleteket logikai műveletek segítségével definiáltuk.

Tétel

Tetszőleges A, B, C halmazokra érvényesek az alábbi azonosságok:

$$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A,\ A \triangle B = B \triangle A$$

(kommutativitás);

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$$ *(asszociativitás);*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$$ *(disztributivitás);*

$$A \cap (A \cup B) = A,\ A \cup (A \cap B) = A$$

(abszorptivitás).

A fenti azonosságok többsége nagyon emlékeztet a tanult alapvető logikai ekvivalenciákra; ez nem meglepő, hiszen a halmazműveleteket logikai műveletek segítségével definiáltuk.

Tétel

Tetszőleges A, B, C halmazokra érvényesek az alábbi azonosságok:

$$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A,\ A \triangle B = B \triangle A$$

(kommutativitás);

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$$ *(asszociativitás);*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$$ *(disztributivitás);*

$$A \cap (A \cup B) = A,\ A \cup (A \cap B) = A$$

(abszorptivitás).

A fenti azonosságok többsége nagyon emlékeztet a tanult alapvető logikai ekivalenciákra; ez nem meglepő, hiszen a halmazműveleteket logikai műveletek segítségével definiáltuk.

Halmazműveletekkel kapcsolatos azonosságok

Tétel

Tetszőleges A, B, C halmazokra érvényesek az alábbi azonosságok:

$$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A,\ A \triangle B = B \triangle A$$

(kommutativitás);

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$$ *(asszociativitás);*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$$ *(disztributivitás);*

$$A \cap (A \cup B) = A,\ A \cup (A \cap B) = A$$

(abszorptivitás).

A fenti azonosságok többsége nagyon emlékeztet a tanult alapvető logikai ekivalenciákra; ez nem meglepő, hiszen a halmazműveleteket logikai műveletek segítségével definiáltuk.

Tétel

Tetszőleges A, B, C halmazokra érvényesek az alábbi azonosságok:

$$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A,\ A \triangle B = B \triangle A$$

(kommutativitás);

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$$ *(asszociativitás);*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$$ *(disztributivitás);*

$$A \cap (A \cup B) = A,\ A \cup (A \cap B) = A$$

(abszorptivitás).

A fenti azonosságok többsége nagyon emlékeztet a tanult alapvető logikai ekvivalenciákra; ez nem meglepő, hiszen a halmazműveleteket logikai műveletek segítségével definiáltuk.

Akárhány halmaz metszete és uniója

A fenti tételben szereplő azonosságok, továbbá egyéb azonosságok bizonyítása, érvényességüknek a eldöntése tantárgyi követelmény. (Hamarosan megoldunk két feladatot.) Kettőnél több halmaz metszetét és unióját is definiáljuk. Legyen I tetszőleges indexhalmaz (tehát tetszőleges nemüres halmaz, amelynek elemeit indexelésre használjuk), és minden egyes $i \in I$-re legyen adott egy A_i halmaz. Ekkor

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x : \forall i \in I\text{-re } x \in A_i\} \qquad \text{(metszet)},$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x : \exists i \in I, \text{ hogy } x \in A_i\} \qquad \text{(unió)}.$$

Ha $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, akkor a fenti helyett az alábbi jelölések is szokásosak:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i, \qquad \text{vagy} \qquad A_1 \cup \cdots \cup A_n.$$

A fenti tételben szereplő azonosságok, továbbá egyéb azonosságok bizonyítása, érvényességüknek a eldöntése tantárgyi követelmény. (Hamarosan megoldunk két feladatot.) Kettőnél több halmaz metszetét és unióját is definiáljuk. Legyen I tetszőleges indexhalmaz (tehát tetszőleges nemüres halmaz, amelynek elemeit indexelésre használjuk), és minden egyes $i \in I$-re legyen adott egy A_i halmaz. Ekkor

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x : \forall i \in I\text{-re } x \in A_i\} \qquad \text{(metszet)},$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x : \exists i \in I, \text{ hogy } x \in A_i\} \qquad \text{(unió)}.$$

Ha $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, akkor a fenti helyett az alábbi jelölések is szokásosak:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i, \qquad \text{vagy} \qquad A_1 \cup \cdots \cup A_n.$$

A fenti tételben szereplő azonosságok, továbbá egyéb azonosságok bizonyítása, érvényességüknek a eldöntése tantárgyi követelmény. (Hamarosan megoldunk két feladatot.) Kettőnél több halmaz metszetét és unióját is definiáljuk. Legyen I tetszőleges indexhalmaz (tehát tetszőleges nemüres halmaz, amelynek elemeit indexelésre használjuk), és minden egyes $i \in I$-re legyen adott egy A_i halmaz. Ekkor

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x : \forall i \in I\text{-re } x \in A_i\} \qquad \text{(metszet)},$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x : \exists i \in I, \text{ hogy } x \in A_i\} \qquad \text{(unió)}.$$

Ha $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, akkor a fenti helyett az alábbi jelölések is szokásosak:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i, \qquad \text{vagy} \qquad A_1 \cup \cdots \cup A_n.$$

A fenti tételben szereplő azonosságok, továbbá egyéb azonosságok bizonyítása, érvényességüknek a eldöntése tantárgyi követelmény. (Hamarosan megoldunk két feladatot.) Kettőnél több halmaz metszetét és unióját is definiáljuk. Legyen I tetszőleges indexhalmaz (tehát tetszőleges nemüres halmaz, amelynek elemeit indexelésre használjuk), és minden egyes $i \in I$-re legyen adott egy A_i halmaz. Ekkor

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x : \forall i \in I\text{-re } x \in A_i\} \quad \text{(metszet)},$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x : \exists i \in I, \text{ hogy } x \in A_i\} \quad \text{(unió)}.$$

Ha $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, akkor a fenti helyett az alábbi jelölések is szokásosak:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i, \qquad \text{vagy} \qquad A_1 \cup \cdots \cup A_n.$$

A fenti tételben szereplő azonosságok, továbbá egyéb azonosságok bizonyítása, érvényességüknek a eldöntése tantárgyi követelmény. (Hamarosan megoldunk két feladatot.) Kettőnél több halmaz metszetét és unióját is definiáljuk. Legyen I tetszőleges indexhalmaz (tehát tetszőleges nemüres halmaz, amelynek elemeit indexelésre használjuk), és minden egyes $i \in I$-re legyen adott egy A_i halmaz. Ekkor

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x : \forall i \in I\text{-re } x \in A_i\} \qquad \text{(metszet)},$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x : \exists i \in I, \text{ hogy } x \in A_i\} \qquad \text{(unió)}.$$

Ha $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, akkor a fenti helyett az alábbi jelölések is szokásosak:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i, \qquad \text{vagy} \qquad A_1 \cup \cdots \cup A_n.$$

Egy feladat

Feladat

Mutassuk meg, hogy a (kéttagú) unió (azaz a $\cup$) disztributív az akárhánytagú metszetre, azaz tetszőleges A és B_i halmazok esetén

$$A \cup \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i).$$

Megoldás

Jelölje L és R a bizonyítandó egyenlőség bal-, illetve jobboldalát. Figyeljük meg, hogy $R \neq \mathbb{R}$ — az utóbbi a valós számok halmaza és más betűtípus! Elég belátni (és ez a szokásos eljárás), hogy $L \subseteq R$ és $R \subseteq L$.

Egy feladat

Feladat

Mutassuk meg, hogy a (kéttagú) unió (azaz a $\cup$) disztributív az akárhánytagú metszetre, azaz tetszőleges A és B_i halmazok esetén

$$A \cup \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i).$$

Megoldás

Jelölje L és R a bizonyítandó egyenlőség bal-, illetve jobboldalát. Figyeljük meg, hogy $R \neq \mathbb{R}$ — az utóbbi a valós számok halmaza és más betűtípus! Elég belátni (és ez a szokásos eljárás), hogy $L \subseteq R$ és $R \subseteq L$.

Egy feladat

Feladat

Mutassuk meg, hogy a (kéttagú) unió (azaz a $\cup$) disztributív az akárhánytagú metszetre, azaz tetszőleges A és B_i halmazok esetén

$$A \cup \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i).$$

Megoldás

Jelölje L és R a bizonyítandó egyenlőség bal-, illetve jobboldalát.
Figyeljük meg, hogy $R \neq \mathbb{R}$ — az utóbbi a valós számok halmaza és más betűtípus! Elég belátni (és ez a szokásos eljárás), hogy $L \subseteq R$ és $R \subseteq L$.

Feladat

Mutassuk meg, hogy a (kéttagú) unió (azaz a $\cup$) disztributív az akárhánytagú metszetre, azaz tetszőleges A és B_i halmazok esetén

$$A \cup \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i).$$

Megoldás

Jelölje L és R a bizonyítandó egyenlőség bal-, illetve jobboldalát. Figyeljük meg, hogy $R \neq \mathbb{R}$ — az utóbbi a valós számok halmaza és más betűtípus! Elég belátni (és ez a szokásos eljárás), hogy $L \subseteq R$ és $R \subseteq L$.

$A \cup \bigcap_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i)$, a megoldás folytatása

Megoldás (folytatás)

Az $L \subseteq R$ bizonyítása: legyen $x \in L = A \cup \bigcap_{i\in I} B_i$. Az unió definíciója miatt $x \in A$ vagy $x \in \bigcap_{i\in I} B_i$. Ha $x \in A$, akkor minden egyes $i \in I$-re $x \in A \cup B_i$. Ha pedig $x \notin A$, akkor $x \in \bigcap_{i\in I} B_i$, tehát a metszet definíciója miatt minden $i \in I$-re $x \in B_i$, és innen megintcsak $x \in A \cup B_i$ következik. Tehát minden esetben $\forall i \in I$-re $x \in A \cup B_i$, és innen $x \in \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i) = R$. Megmutattuk, hogy tetszőleges $x \in L$-re $x \in R$, azaz $L \subseteq R$.
Az $R \subseteq L$ bizonyítása: legyen x egy tetszőleges eleme $R = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i)$-nek. Ekkor minden $i \in I$-re $x \in A \cup B_i$. Ha $x \in A$, akkor $x \in A \cup \bigcap_{i\in I} B_i = L$, és nincs további tennivalónk. Ezen észrevételünk után feltehetjük, hogy $x \notin A$. Ekkor $x \in A \cup B_i$-ből $x \in B_i$ következik. Mivel i tetszőleges volt, $x \in \bigcap_{i\in I} B_i$, és innen $x \in L$ adódik. Ezzel beláttuk, hogy $R \subseteq L$. Q.e.d.

$A \cup \bigcap_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i)$, a megoldás folytatása

Megoldás (folytatás)

Az $L \subseteq R$ bizonyítása: legyen $x \in L = A \cup \bigcap_{i\in I} B_i$. Az unió definíciója miatt $x \in A$ vagy $x \in \bigcap_{i\in I} B_i$. Ha $x \in A$, akkor minden egyes $i \in I$-re $x \in A \cup B_i$. Ha pedig $x \notin A$, akkor $x \in \bigcap_{i\in I} B_i$, tehát a metszet definíciója miatt minden $i \in I$-re $x \in B_i$, és innen megintcsak $x \in A \cup B_i$ következik. Tehát minden esetben $\forall i \in I$-re $x \in A \cup B_i$, és innen $x \in \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i) = R$. Megmutattuk, hogy tetszőleges $x \in L$-re $x \in R$, azaz $L \subseteq R$.

Az $R \subseteq L$ bizonyítása: legyen x egy tetszőleges eleme $R = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i)$-nek. Ekkor minden $i \in I$-re $x \in A \cup B_i$. Ha $x \in A$, akkor $x \in A \cup \bigcap_{i\in I} B_i = L$, és nincs további tennivalónk. Ezen észrevételünk után feltehetjük, hogy $x \notin A$. Ekkor $x \in A \cup B_i$-ből $x \in B_i$ következik. Mivel i tetszőleges volt, $x \in \bigcap_{i\in I} B_i$, és innen $x \in L$ adódik. Ezzel beláttuk, hogy $R \subseteq L$. Q.e.d.

Megoldás (folytatás)

Az $L \subseteq R$ bizonyítása: legyen $x \in L = A \cup \bigcap_{i \in I} B_i$. Az unió definíciója miatt $x \in A$ vagy $x \in \bigcap_{i \in I} B_i$. Ha $x \in A$, akkor minden egyes $i \in I$-re $x \in A \cup B_i$. Ha pedig $x \notin A$, akkor $x \in \bigcap_{i \in I} B_i$, tehát a metszet definíciója miatt minden $i \in I$-re $x \in B_i$, és innen megintcsak $x \in A \cup B_i$ következik. Tehát minden esetben $\forall i \in I$-re $x \in A \cup B_i$, és innen $x \in \bigcap_{i \in I}(A \cup B_i) = R$. Megmutattuk, hogy tetszőleges $x \in L$-re $x \in R$, azaz $L \subseteq R$.
Az $R \subseteq L$ bizonyítása: legyen x egy tetszőleges eleme $R = \bigcap_{i \in I}(A \cup B_i)$-nek. Ekkor minden $i \in I$-re $x \in A \cup B_i$. Ha $x \in A$, akkor $x \in A \cup \bigcap_{i \in I} B_i = L$, és nincs további tennivalónk. Ezen észrevételünk után feltehetjük, hogy $x \notin A$. Ekkor $x \in A \cup B_i$-ből $x \in B_i$ következik. Mivel i tetszőleges volt, $x \in \bigcap_{i \in I} B_i$, és innen $x \in L$ adódik. Ezzel beláttuk, hogy $R \subseteq L$.
Q.e.d.

Megoldás (folytatás)

Az $L \subseteq R$ bizonyítása: legyen $x \in L = A \cup \bigcap_{i\in I} B_i$. Az unió definíciója miatt $x \in A$ vagy $x \in \bigcap_{i\in I} B_i$. Ha $x \in A$, akkor minden egyes $i \in I$-re $x \in A \cup B_i$. Ha pedig $x \notin A$, akkor $x \in \bigcap_{i\in I} B_i$, tehát a metszet definíciója miatt minden $i \in I$-re $x \in B_i$, és innen megintcsak $x \in A \cup B_i$ következik. Tehát minden esetben $\forall i \in I$-re $x \in A \cup B_i$, és innen $x \in \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i) = R$. Megmutattuk, hogy tetszőleges $x \in L$-re $x \in R$, azaz $L \subseteq R$.

Az $R \subseteq L$ bizonyítása: legyen x egy tetszőleges eleme $R = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i)$-nek. Ekkor minden $i \in I$-re $x \in A \cup B_i$. Ha $x \in A$, akkor $x \in A \cup \bigcap_{i\in I} B_i = L$, és nincs további tennivalónk. Ezen észrevételünk után feltehetjük, hogy $x \notin A$. Ekkor $x \in A \cup B_i$-ből $x \in B_i$ következik. Mivel i tetszőleges volt, $x \in \bigcap_{i\in I} B_i$, és innen $x \in L$ adódik. Ezzel beláttuk, hogy $R \subseteq L$. Q.e.d.

$A \cup \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I}(A \cup B_i)$, a megoldás folytatása

Megoldás (folytatás)

Az $L \subseteq R$ bizonyítása: legyen $x \in L = A \cup \bigcap_{i \in I} B_i$. Az unió definíciója miatt $x \in A$ vagy $x \in \bigcap_{i \in I} B_i$. Ha $x \in A$, akkor minden egyes $i \in I$-re $x \in A \cup B_i$. Ha pedig $x \notin A$, akkor $x \in \bigcap_{i \in I} B_i$, tehát a metszet definíciója miatt minden $i \in I$-re $x \in B_i$, és innen megintcsak $x \in A \cup B_i$ következik. Tehát minden esetben $\forall i \in I$-re $x \in A \cup B_i$, és innen $x \in \bigcap_{i \in I}(A \cup B_i) = R$. Megmutattuk, hogy tetszőleges $x \in L$-re $x \in R$, azaz $L \subseteq R$.

Az $R \subseteq L$ bizonyítása: legyen x egy tetszőleges eleme $R = \bigcap_{i \in I}(A \cup B_i)$-nek. Ekkor minden $i \in I$-re $x \in A \cup B_i$. Ha $x \in A$, akkor $x \in A \cup \bigcap_{i \in I} B_i = L$, és nincs további tennivalónk. Ezen észrevételünk után feltehetjük, hogy $x \notin A$. Ekkor $x \in A \cup B_i$-ből $x \in B_i$ következik. Mivel i tetszőleges volt, $x \in \bigcap_{i \in I} B_i$, és innen $x \in L$ adódik. Ezzel beláttuk, hogy $R \subseteq L$. Q.e.d.

$A \cup \bigcap_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i)$, a megoldás folytatása

Megoldás (folytatás)

Az $L \subseteq R$ bizonyítása: legyen $x \in L = A \cup \bigcap_{i\in I} B_i$. Az unió definíciója miatt $x \in A$ vagy $x \in \bigcap_{i\in I} B_i$. Ha $x \in A$, akkor minden egyes $i \in I$-re $x \in A \cup B_i$. Ha pedig $x \notin A$, akkor $x \in \bigcap_{i\in I} B_i$, tehát a metszet definíciója miatt minden $i \in I$-re $x \in B_i$, és innen megintcsak $x \in A \cup B_i$ következik. Tehát minden esetben $\forall i \in I$-re $x \in A \cup B_i$, és innen $x \in \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i) = R$. Megmutattuk, hogy tetszőleges $x \in L$-re $x \in R$, azaz $L \subseteq R$.

Az $R \subseteq L$ bizonyítása: legyen x egy tetszőleges eleme $R = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i)$-nek. Ekkor minden $i \in I$-re $x \in A \cup B_i$. Ha $x \in A$, akkor $x \in A \cup \bigcap_{i\in I} B_i = L$, és nincs további tennivalónk. Ezen észrevételünk után feltehetjük, hogy $x \notin A$. Ekkor $x \in A \cup B_i$-ből $x \in B_i$ következik. Mivel i tetszőleges volt, $x \in \bigcap_{i\in I} B_i$, és innen $x \in L$ adódik. Ezzel beláttuk, hogy $R \subseteq L$. Q.e.d.

$A \cup \bigcap_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i)$, a megoldás folytatása

Megoldás (folytatás)

Az $L \subseteq R$ bizonyítása: legyen $x \in L = A \cup \bigcap_{i\in I} B_i$. Az unió definíciója miatt $x \in A$ vagy $x \in \bigcap_{i\in I} B_i$. Ha $x \in A$, akkor minden egyes $i \in I$-re $x \in A \cup B_i$. Ha pedig $x \notin A$, akkor $x \in \bigcap_{i\in I} B_i$, tehát a metszet definíciója miatt minden $i \in I$-re $x \in B_i$, és innen megintcsak $x \in A \cup B_i$ következik. Tehát minden esetben $\forall i \in I$-re $x \in A \cup B_i$, és innen $x \in \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i) = R$. Megmutattuk, hogy tetszőleges $x \in L$-re $x \in R$, azaz $L \subseteq R$.
Az $R \subseteq L$ bizonyítása: legyen x egy tetszőleges eleme $R = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i)$-nek. Ekkor minden $i \in I$-re $x \in A \cup B_i$. Ha $x \in A$, akkor $x \in A \cup \bigcap_{i\in I} B_i = L$, és nincs további tennivalónk. Ezen észrevételünk után feltehetjük, hogy $x \notin A$. Ekkor $x \in A \cup B_i$-ből $x \in B_i$ következik. Mivel i tetszőleges volt, $x \in \bigcap_{i\in I} B_i$, és innen $x \in L$ adódik. Ezzel beláttuk, hogy $R \subseteq L$. Q.e.d.

$A \cup \bigcap_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i)$, a megoldás folytatása

Megoldás (folytatás)

Az $L \subseteq R$ bizonyítása: legyen $x \in L = A \cup \bigcap_{i\in I} B_i$. Az unió definíciója miatt $x \in A$ vagy $x \in \bigcap_{i\in I} B_i$. Ha $x \in A$, akkor minden egyes $i \in I$-re $x \in A \cup B_i$. Ha pedig $x \notin A$, akkor $x \in \bigcap_{i\in I} B_i$, tehát a metszet definíciója miatt minden $i \in I$-re $x \in B_i$, és innen megintcsak $x \in A \cup B_i$ következik. Tehát minden esetben $\forall i \in I$-re $x \in A \cup B_i$, és innen $x \in \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i) = R$. Megmutattuk, hogy tetszőleges $x \in L$-re $x \in R$, azaz $L \subseteq R$.

Az $R \subseteq L$ bizonyítása: legyen x egy tetszőleges eleme $R = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i)$-nek. Ekkor minden $i \in I$-re $x \in A \cup B_i$. Ha $x \in A$, akkor $x \in A \cup \bigcap_{i\in I} B_i = L$, és nincs további tennivalónk. Ezen észrevételünk után feltehetjük, hogy $x \notin A$. Ekkor $x \in A \cup B_i$-ből $x \in B_i$ következik. Mivel i tetszőleges volt, $x \in \bigcap_{i\in I} B_i$, és innen $x \in L$ adódik. Ezzel beláttuk, hogy $R \subseteq L$. Q.e.d.

Megoldás (folytatás)

Az $L \subseteq R$ bizonyítása: legyen $x \in L = A \cup \bigcap_{i \in I} B_i$. Az unió definíciója miatt $x \in A$ vagy $x \in \bigcap_{i \in I} B_i$. Ha $x \in A$, akkor minden egyes $i \in I$-re $x \in A \cup B_i$. Ha pedig $x \notin A$, akkor $x \in \bigcap_{i \in I} B_i$, tehát a metszet definíciója miatt minden $i \in I$-re $x \in B_i$, és innen megintcsak $x \in A \cup B_i$ következik. Tehát minden esetben $\forall i \in I$-re $x \in A \cup B_i$, és innen $x \in \bigcap_{i \in I}(A \cup B_i) = R$. Megmutattuk, hogy tetszőleges $x \in L$-re $x \in R$, azaz $L \subseteq R$.

Az $R \subseteq L$ bizonyítása: legyen x egy tetszőleges eleme $R = \bigcap_{i \in I}(A \cup B_i)$-nek. Ekkor minden $i \in I$-re $x \in A \cup B_i$. Ha $x \in A$, akkor $x \in A \cup \bigcap_{i \in I} B_i = L$, és nincs további tennivalónk. Ezen észrevételünk után feltehetjük, hogy $x \notin A$. Ekkor $x \in A \cup B_i$-ből $x \in B_i$ következik. Mivel i tetszőleges volt, $x \in \bigcap_{i \in I} B_i$, és innen $x \in L$ adódik. Ezzel beláttuk, hogy $R \subseteq L$. Q.e.d.

Megoldás (folytatás)

Az $L \subseteq R$ bizonyítása: legyen $x \in L = A \cup \bigcap_{i\in I} B_i$. Az unió definíciója miatt $x \in A$ vagy $x \in \bigcap_{i\in I} B_i$. Ha $x \in A$, akkor minden egyes $i \in I$-re $x \in A \cup B_i$. Ha pedig $x \notin A$, akkor $x \in \bigcap_{i\in I} B_i$, tehát a metszet definíciója miatt minden $i \in I$-re $x \in B_i$, és innen megintcsak $x \in A \cup B_i$ következik. Tehát minden esetben $\forall i \in I$-re $x \in A \cup B_i$, és innen $x \in \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i) = R$. Megmutattuk, hogy tetszőleges $x \in L$-re $x \in R$, azaz $L \subseteq R$.

Az $R \subseteq L$ bizonyítása: legyen x egy tetszőleges eleme $R = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i)$-nek. Ekkor minden $i \in I$-re $x \in A \cup B_i$. Ha $x \in A$, akkor $x \in A \cup \bigcap_{i\in I} B_i = L$, és nincs további tennivalónk. Ezen észrevételünk után feltehetjük, hogy $x \notin A$. Ekkor $x \in A \cup B_i$-ből $x \in B_i$ következik. Mivel i tetszőleges volt, $x \in \bigcap_{i\in I} B_i$, és innen $x \in L$ adódik. Ezzel beláttuk, hogy $R \subseteq L$. Q.e.d.

$A \cup \bigcap_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i)$, a megoldás folytatása

Megoldás (folytatás)

Az $L \subseteq R$ bizonyítása: legyen $x \in L = A \cup \bigcap_{i\in I} B_i$. Az unió definíciója miatt $x \in A$ vagy $x \in \bigcap_{i\in I} B_i$. Ha $x \in A$, akkor minden egyes $i \in I$-re $x \in A \cup B_i$. Ha pedig $x \notin A$, akkor $x \in \bigcap_{i\in I} B_i$, tehát a metszet definíciója miatt minden $i \in I$-re $x \in B_i$, és innen megintcsak $x \in A \cup B_i$ következik. Tehát minden esetben $\forall i \in I$-re $x \in A \cup B_i$, és innen $x \in \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i) = R$. Megmutattuk, hogy tetszőleges $x \in L$-re $x \in R$, azaz $L \subseteq R$.

Az $R \subseteq L$ bizonyítása: legyen x egy tetszőleges eleme $R = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i)$-nek. Ekkor minden $i \in I$-re $x \in A \cup B_i$. Ha $x \in A$, akkor $x \in A \cup \bigcap_{i\in I} B_i = L$, és nincs további tennivalónk. Ezen észrevételünk után feltehetjük, hogy $x \notin A$. Ekkor $x \in A \cup B_i$-ből $x \in B_i$ következik. Mivel i tetszőleges volt, $x \in \bigcap_{i\in I} B_i$, és innen $x \in L$ adódik. Ezzel beláttuk, hogy $R \subseteq L$. Q.e.d.

Technikai megjegyzés

Tulajdonképpen meglettünk volna az $L \subseteq R$ és $R \subseteq L$ említése nélkül is, hiszen valójában azt mutattuk ki, hogy L-nek és R-nek ugyanazok az elemei. De könnyebben meg tudtuk a bizonyítást fogalmazni $L \subseteq R$ és $R \subseteq L$ emlegetésével. A következő feladathoz csak utat (sőt, utakat) mutatunk; a részletek kidolgozása a hallgatóságra marad.

Technikai megjegyzés

Tulajdonképpen meglettünk volna az $L \subseteq R$ és $R \subseteq L$ említése nélkül is, hiszen valójában azt mutattuk ki, hogy L-nek és R-nek ugyanazok az elemei. De könnyebben meg tudtuk a bizonyítást fogalmazni $L \subseteq R$ és $R \subseteq L$ emlegetésével. A következő feladathoz csak utat (sőt, utakat) mutatunk; a részletek kidolgozása a hallgatóságra marad.

A metszet disztributív a szimmetrikus differenciára

Feladat

Mutassuk meg tételünk azon állítását, hogy a metszet disztributív a szimmetrikus differenciára.

Megoldás (Első megoldás)

Legyenek A, B és C tetszőleges halmazok, vezessük be az $L := A \cap (B \triangle C)$ és az $R := (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ jelölést. Azt kell megmutatnunk, hogy tetszőleges x-re $x \in L$ pontosan akkor teljesül, amikor $x \in R$. Különböztessünk meg összesen nyolc esetet annak megfelelően, hogy az A, B, C halmazok közül az x melyiknek eleme. Az alábbi táblázatban az $\in$, illetve $\notin$ úgy értendő, hogy x eleme, illetve nem eleme az oszlopfejlécként írt halmaznak. A gondos kitöltés után látható, hogy $x \in L$ pontosan akkor teljesül, ha $x \in R$. Tehát $L = R$.

$L := A \cap (B \triangle C)$ és az $R := (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

A	B	C	$B \triangle C$	L	$A \cap B$	$A \cap C$	R
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$

, q.e.d.

Megjegyzés

Nagyon emlékeztet az ítéletkalkulusnál látott igazságtáblázatokra. Ez nem véletlen, hiszen a halmazműveleteket logikai műveletek segítségével definiáltuk.

$L := A \cap (B \triangle C)$ és az $R := (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

A	B	C	$B \triangle C$	L	$A \cap B$	$A \cap C$	R
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$

, q.e.d.

Megjegyzés

Nagyon emlékeztet az ítéletkalkulusnál látott igazságtáblázatokra. Ez nem véletlen, hiszen a halmazműveleteket logikai műveletek segítségével definiáltuk.

Megoldás (2. megoldás: Venn-diagrammal)

A Venn-diagram segítségével ??? Említettük, hogy a Venn-diagram nem mindig ad korrekt bizonyítást, de most a bizonyításunk mégis korrekt lesz, hiszen lényegében az előző bizonyításunkat ismételjük meg szemléletesebb formában. A korrektség azon múlik, hogy olyan síkidomokkal reprezentált halmazokat vegyünk fel az ábrán, hogy az előző nyolc eset mindegyike fellépjen, azaz (pongyolán fogalmazva) a három síkidom metszeteiként előálló nyolc síktartomány egyike se legyen üres. Ha erre ügyelünk, akkor esetleg gyorsabban célt érünk, mint az előző táblázattal. Lássuk a megfontolás lépéseit: zöld színnel a bal-, pirossal a jobboldalt „számoljuk" ki, és látható, hogy a végén ugyanazt kapjuk.

$L := A \cap (B \triangle C)$, $R := (A \cap B) \triangle (A \cap C)$, Venn-diagram

Megoldás (2. megoldás: Venn-diagrammal)

A Venn-diagram segítségével ??? Említettük, hogy a Venn-diagram nem mindig ad korrekt bizonyítást, de most a bizonyításunk mégis korrekt lesz, hiszen lényegében az előző bizonyításunkat ismételjük meg szemléletesebb formában. A korrektség azon múlik, hogy olyan síkidomokkal reprezentált halmazokat vegyünk fel az ábrán, hogy az előző nyolc eset mindegyike fellépjen, azaz (pongyolán fogalmazva) a három síkidom metszeteiként előálló nyolc síktartomány egyike se legyen üres. Ha erre ügyelünk, akkor esetleg gyorsabban célt érünk, mint az előző táblázattal. Lássuk a megfontolás lépéseit: zöld színnel a bal-, pirossal a jobboldalt „számoljuk" ki, és látható, hogy a végén ugyanazt kapjuk.

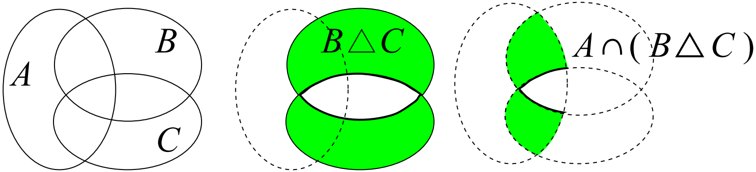
Megoldás (2. megoldás: Venn-diagrammal)

A Venn-diagram segítségével ??? Említettük, hogy a Venn-diagram nem mindig ad korrekt bizonyítást, de most a bizonyításunk mégis korrekt lesz, hiszen lényegében az előző bizonyításunkat ismételjük meg szemléletesebb formában. A korrektség azon múlik, hogy olyan síkidomokkal reprezentált halmazokat vegyünk fel az ábrán, hogy az előző nyolc eset mindegyike fellépjen, azaz (pongyolán fogalmazva) a három síkidom metszeteiként előálló nyolc síktartomány egyike se legyen üres. Ha erre ügyelünk, akkor esetleg gyorsabban célt érünk, mint az előző táblázattal. Lássuk a megfontolás lépéseit: zöld színnel a bal-, pirossal a jobboldalt „számoljuk" ki, és látható, hogy a végén ugyanazt kapjuk.

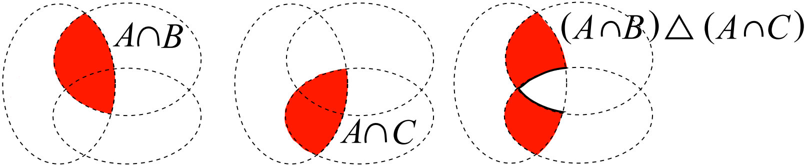
Megoldás (2. megoldás: Venn-diagrammal)

A Venn-diagram segítségével ??? Említettük, hogy a Venn-diagram nem mindig ad korrekt bizonyítást, de most a bizonyításunk mégis korrekt lesz, hiszen lényegében az előző bizonyításunkat ismételjük meg szemléletesebb formában. A korrektség azon múlik, hogy olyan síkidomokkal reprezentált halmazokat vegyünk fel az ábrán, hogy az előző nyolc eset mindegyike fellépjen, azaz (pongyolán fogalmazva) a három síkidom metszeteiként előálló nyolc síktartomány egyike se legyen üres. Ha erre ügyelünk, akkor esetleg gyorsabban célt érünk, mint az előző táblázattal. Lássuk a megfontolás lépéseit: zöld színnel a bal-, pirossal a jobboldalt „számoljuk" ki, és látható, hogy a végén ugyanazt kapjuk.

$L := A \cap (B \triangle C)$, $R := (A \cap B) \triangle (A \cap C)$



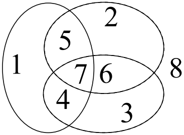
Ez volt L, a bal oldal, és jöjjön R:



Ugyanazt kaptuk, de ...

Jó volt-e a Venn-diagramos ábra?

Most már csak az van hátra, hogy — az előrebocsátottak szerint meggyőződjünk arról, hogy a Venn-diagramjaink tényleg nyolc tartományra osztják a síkot:

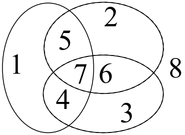


;

tényleg ez a helyzet. (Több, mondjuk n halmaz esetén a Venn-diagram problematikus, mert nehéz olyan áttekinthető ábrát rajzolni és használni, amely a síkot 2^n részre osztja.)

Jó volt-e a Venn-diagramos ábra?

Most már csak az van hátra, hogy — az előrebocsátottak szerint meggyőződjünk arról, hogy a Venn-diagramjaink tényleg nyolc tartományra osztják a síkot:

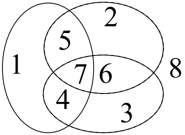


;

tényleg ez a helyzet. (Több, mondjuk n halmaz esetén a Venn-diagram problematikus, mert nehéz olyan áttekinthető ábrát rajzolni és használni, amely a síkot 2^n részre osztja.)

Jó volt-e a Venn-diagramos ábra?

Most már csak az van hátra, hogy — az előrebocsátottak szerint meggyőződjünk arról, hogy a Venn-diagramjaink tényleg nyolc tartományra osztják a síkot:



;

tényleg ez a helyzet. (Több, mondjuk n halmaz esetén a Venn-diagram problematikus, mert nehéz olyan áttekinthető ábrát rajzolni és használni, amely a síkot 2^n részre osztja,) Gyakran egy rögzített U halmaz részhalmazaival foglalkozunk. Ezen U-t **alaphalmaznak** vagy **univerzumnak** nevezzük. Pl. a geométerek gyakran a sík pontjait választják univerzumnak, a számelméletben az univerzum lehet pl. $\mathbb{Z}$, a kalkulusban pedig $\mathbb{R}$.

Definíció (komplementer halmaz)

Ha $A \subseteq U$, akkor az $U \setminus A$ halmazt az A halmaz **komplementer halmazának** nevezzük, és $\overline{A}$-sal jelöljük. (A komplementer természetesen függ az alaphalmaz választásától, de az rögzített.)

Az eddigi halmazműveletekkel ($\cup$, $\cap$, $\triangle$, $\setminus$, $\overline{}$) rengeteg további azonosságot lehet felírni — ezek egy része a gyakorlaton és a vizsgán feladatként tűzhető ki. Mi most csak egy fontos nevezetes azonosságot említünk.

Univerzum, komplementer halmaz

Gyakran egy rögzített U halmaz részhalmazaival foglalkozunk. Ezen U-t **alaphalmaznak** vagy **univerzumnak** nevezzük. Pl. a geométerek gyakran a sík pontjait választják univerzumnak, a számelméletben az univerzum lehet pl. $\mathbb{Z}$, a kalkulusban pedig $\mathbb{R}$.

Definíció (komplementer halmaz)

Ha $A \subseteq U$, akkor az $U \setminus A$ halmazt az A halmaz **komplementer halmazának** nevezzük, és $\overline{A}$-sal jelöljük. (A komplementer természetesen függ az alaphalmaz választásától, de az rögzített.)

Az eddigi halmazműveletekkel ($\cup$, $\cap$, $\triangle$, $\setminus$, $\overline{}$) rengeteg további azonosságot lehet felírni — ezek egy része a gyakorlaton és a vizsgán feladatként tűzhető ki. Mi most csak egy fontos nevezetes azonosságot említünk.

Univerzum, komplementer halmaz

Gyakran egy rögzített U halmaz részhalmazaival foglalkozunk. Ezen U-t **alaphalmaznak** vagy **univerzumnak** nevezzük. Pl. a geométerek gyakran a sík pontjait választják univerzumnak, a számelméletben az univerzum lehet pl. $\mathbb{Z}$, a kalkulusban pedig $\mathbb{R}$.

Definíció (komplementer halmaz)

Ha $A \subseteq U$, akkor az $U \setminus A$ halmazt az A halmaz **komplementer halmazának** nevezzük, és $\overline{A}$-sal jelöljük. (A komplementer természetesen függ az alaphalmaz választásától, de az rögzített.)

Az eddigi halmazműveletekkel ($\cup$, $\cap$, $\triangle$, $\setminus$, $\overline{}$) rengeteg további azonosságot lehet felírni — ezek egy része a gyakorlaton és a vizsgán feladatként tűzhető ki. Mi most csak egy fontos nevezetes azonosságot említünk.

Univerzum, komplementer halmaz

Gyakran egy rögzített U halmaz részhalmazaival foglalkozunk. Ezen U-t **alaphalmaznak** vagy **univerzumnak** nevezzük. Pl. a geométerek gyakran a sík pontjait választják univerzumnak, a számelméletben az univerzum lehet pl. $\mathbb{Z}$, a kalkulusban pedig $\mathbb{R}$.

Definíció (komplementer halmaz)

Ha $A \subseteq U$, akkor az $U \setminus A$ halmazt az A halmaz **komplementer halmazának** nevezzük, és $\overline{A}$-sal jelöljük. (A komplementer természetesen függ az alaphalmaz választásától, de az rögzített.)

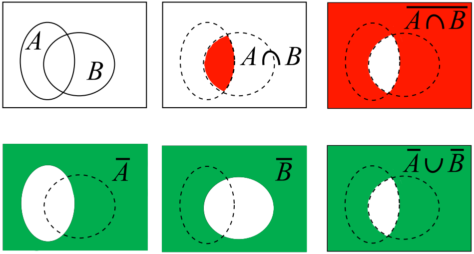
Az eddigi halmazműveletekkel ($\cup$, $\cap$, $\triangle$, $\setminus$, $\overline{}$) rengeteg további azonosságot lehet felírni — ezek egy része a gyakorlaton és a vizsgán feladatként tűzhető ki. Mi most csak egy fontos nevezetes azonosságot említünk.

Tétel

Ha A és B az U univerzum tetszőleges részhalmazai, akkor érvényesek az ún. ***de Morgan-azonosságok****:*

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

A másodikhoz (a korábban mondottak mintájára az ábra teljes értékű bizonyítássá tehető; ez elmarad.)



$\overline{A \cap B}$

$\overline{A} \cup \overline{B}$

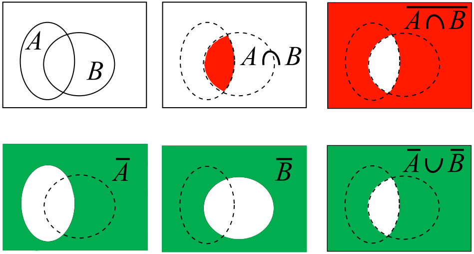
de Morgan-azonosságok halmazokra

Tétel

Ha A és B az U univerzum tetszőleges részhalmazai, akkor érvényesek az ún. ***de Morgan-azonosságok****:*

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

A másodikhoz (a korábban mondottak mintájára az ábra teljes értékű bizonyítássá tehető; ez elmarad.)



$\overline{A \cap B}$

$\overline{A} \cup \overline{B}$

Descartes-szorzat, Descartes-hatvány

A Descartes-féle koordinátarendszer motiválja az alábbiakat.

Definíció (elempár)

Tetszőleges a és b matematikai objektumra (azaz elemekre) értelmezzük a belőlük képezett (a, b) **elempár** fogalmát. Ha (a_1, b_1) és (a_2, b_2) egy-egy (rendezett) elempár, akkor pontosan akkor tekintjük őket egyenlőnek, ha $a_1 = a_2$ és $b_1 = b_2$.

Az ún. komponensek sorrendje fontos, tehát (az $a = b$ esetet leszámítva) $(a, b) \neq (b, a)$. Ezzel szemben halmazok esetében a sorrend lényegtelen, tehát $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Definíció (Descartes-szorzat)

Legyen A és B halmaz. Ekkor **Descartes-szorzatukon** az $\{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$ halmazt értjük. Az A és B halmaz Descartes-szorzatát $A \times B$ jelöli. Az azonos tényezők szorzatát most is hatványnak nevezzük; A^2 az $A \times A$-t jelöli.

A Descartes-féle koordinátarendszer motiválja az alábbiakat.

Definíció (elempár)

Tetszőleges a és b matematikai objektumra (azaz elemekre) értelmezzük a belőlük képezett (a, b) **elempár** fogalmát. Ha (a_1, b_1) és (a_2, b_2) egy-egy (rendezett) elempár, akkor pontosan akkor tekintjük őket egyenlőnek, ha $a_1 = a_2$ és $b_1 = b_2$.

Az ún. komponensek sorrendje fontos, tehát (az $a = b$ esetet leszámítva) $(a, b) \neq (b, a)$. Ezzel szemben halmazok esetében a sorrend lényegtelen, tehát $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Definíció (Descartes-szorzat)

Legyen A és B halmaz. Ekkor **Descartes-szorzatukon** az $\{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$ halmazt értjük. Az A és B halmaz Descartes-szorzatát $A \times B$ jelöli. Az azonos tényezők szorzatát most is hatványnak nevezzük; A^2 az $A \times A$-t jelöli.

Descartes-szorzat, Descartes-hatvány

A Descartes-féle koordinátarendszer motiválja az alábbiakat.

Definíció (elempár)

Tetszőleges a és b matematikai objektumra (azaz elemekre) értelmezzük a belőlük képezett (a, b) **elempár** fogalmát. Ha (a_1, b_1) és (a_2, b_2) egy-egy (rendezett) elempár, akkor pontosan akkor tekintjük őket egyenlőnek, ha $a_1 = a_2$ és $b_1 = b_2$.

Az ún. komponensek sorrendje fontos, tehát (az $a = b$ esetet leszámítva) $(a, b) \neq (b, a)$. Ezzel szemben halmazok esetében a sorrend lényegtelen, tehát $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Definíció (Descartes-szorzat)

Legyen A és B halmaz. Ekkor **Descartes-szorzatukon** az $\{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$ halmazt értjük. Az A és B halmaz Descartes-szorzatát $A \times B$ jelöli. Az azonos tényezők szorzatát most is hatványnak nevezzük; A^2 az $A \times A$-t jelöli.

Descartes-szorzat, Descartes-hatvány

A Descartes-féle koordinátarendszer motiválja az alábbiakat.

Definíció (elempár)

Tetszőleges a és b matematikai objektumra (azaz elemekre) értelmezzük a belőlük képezett (a, b) **elempár** fogalmát. Ha (a_1, b_1) és (a_2, b_2) egy-egy (rendezett) elempár, akkor pontosan akkor tekintjük őket egyenlőnek, ha $a_1 = a_2$ és $b_1 = b_2$.

Az ún. komponensek sorrendje fontos, tehát (az $a = b$ esetet leszámítva) $(a, b) \neq (b, a)$. Ezzel szemben halmazok esetében a sorrend lényegtelen, tehát $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Definíció (Descartes-szorzat)

Legyen A és B halmaz. Ekkor **Descartes-szorzatukon** az $\{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$ halmazt értjük. Az A és B halmaz Descartes-szorzatát $A \times B$ jelöli. Az azonos tényezők szorzatát most is hatványnak nevezzük; A^2 az $A \times A$-t jelöli.

Descartes-szorzat, Descartes-hatvány

A Descartes-féle koordinátarendszer motiválja az alábbiakat.

Definíció (elempár)

Tetszőleges a és b matematikai objektumra (azaz elemekre) értelmezzük a belőlük képezett (a, b) **elempár** fogalmát. Ha (a_1, b_1) és (a_2, b_2) egy-egy (rendezett) elempár, akkor pontosan akkor tekintjük őket egyenlőnek, ha $a_1 = a_2$ és $b_1 = b_2$.

Az ún. komponensek sorrendje fontos, tehát (az $a = b$ esetet leszámítva) $(a, b) \neq (b, a)$. Ezzel szemben halmazok esetében a sorrend lényegtelen, tehát $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Definíció (Descartes-szorzat)

Legyen A és B halmaz. Ekkor **Descartes-szorzatukon** az $\{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$ halmazt értjük. Az A és B halmaz Descartes-szorzatát $A \times B$ jelöli. Az azonos tényezők szorzatát most is hatványnak nevezzük; A^2 az $A \times A$-t jelöli.

Hatványhalmaz

Van még egy további mód arra, hogy ismert halmaz(ok)ból újabbakat képezzünk.

Definíció

Legyen B halmaz. A B **hatványhalmazán** a B összes részhalmazából álló halmazt értjük, és ezt $P(B)$ jelöli. Tehát $P(B) = \{X : X \subseteq B\}$.

Feladat

Hány elemű a $P(P(\emptyset)) \times P(P(P(\emptyset)))$ halmaz? Adjuk meg a szokásos „explicit” alakban is!

Hatványhalmaz

Van még egy további mód arra, hogy ismert halmaz(ok)ból újabbakat képezzünk.

Definíció

Legyen B halmaz. A B **hatványhalmazán** a B összes részhalmazából álló halmazt értjük, és ezt $P(B)$ jelöli. Tehát $P(B) = \{X : X \subseteq B\}$.

Feladat

Hány elemű a $P(P(\emptyset)) \times P(P(P(\emptyset)))$ halmaz? Adjuk meg a szokásos „explicit" alakban is!

Van még egy további mód arra, hogy ismert halmaz(ok)ból újabbakat képezzünk.

Definíció

Legyen B halmaz. A B **hatványhalmazán** a B összes részhalmazából álló halmazt értjük, és ezt $P(B)$ jelöli. Tehát $P(B) = \{X : X \subseteq B\}$.

Feladat

Hány elemű a $P(P(\emptyset)) \times P(P(P(\emptyset)))$ halmaz? Adjuk meg a szokásos „explicit” alakban is!

Feladat: $|P(P(\emptyset)) \times P(P(P(\emptyset)))| = ?$

Megoldás

Mivel minden halmaz részhalmaza saját magának, $\emptyset \subseteq \emptyset$. Az üres halmaznak más részhalmaza nincs. Tehát $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$, ami egyelemű. Ennek már két részhalmaza van: az üreshalmaz és önmaga. Tehát

$A := P(P(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, ami kételemű. Tetszőleges kételemű halmaznak négy részhalmaza van: az üreshalmaz, két darab egyelemű részhalmaz és önmaga. Ezek szerint (váltott színekkel, hogy könnyebb legyen a négy elemet megszámolni): $B := P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Ezek után

$$\begin{aligned} A \times B = \{ & (\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{\emptyset\}), (\emptyset, \{\{\emptyset\}\}), (\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}), \\ & (\{\emptyset\}, \emptyset), (\{\emptyset\}, \{\emptyset\}), (\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}), (\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}) \}. \end{aligned}$$

A keresett halmaz a fenti, és nyolcelemű.

Feladat: $|P(P(\emptyset)) \times P(P(P(\emptyset)))| = ?$

Megoldás

Mivel minden halmaz részhalmaza saját magának, $\emptyset \subseteq \emptyset$. Az üres halmaznak más részhalmaza nincs. Tehát $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$, ami egyelemű. Ennek már két részhalmaza van: az üreshalmaz és önmaga. Tehát
$A := P(P(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, ami kételemű. Tetszőleges kételemű halmaznak négy részhalmaza van: az üreshalmaz, két darab egyelemű részhalmaz és önmaga. Ezek szerint (váltott színekkel, hogy könnyebb legyen a négy elemet megszámolni): $B := P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Ezek után

$$\begin{aligned} A \times B = \{ & (\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{\emptyset\}), (\emptyset, \{\{\emptyset\}\}), (\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}), \\ & (\{\emptyset\}, \emptyset), (\{\emptyset\}, \{\emptyset\}), (\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}), (\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}) \}. \end{aligned}$$

A keresett halmaz a fenti, és nyolcelemű.

Feladat: $|P(P(\emptyset)) \times P(P(P(\emptyset)))| = ?$

Megoldás

Mivel minden halmaz részhalmaza saját magának, $\emptyset \subseteq \emptyset$. Az üres halmaznak más részhalmaza nincs. Tehát $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$, ami egyelemű. Ennek már két részhalmaza van: az üreshalmaz és önmaga. Tehát
$A := P(P(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, ami kételemű. Tetszőleges kételemű halmaznak négy részhalmaza van: az üreshalmaz, két darab egyelemű részhalmaz és önmaga. Ezek szerint (váltott színekkel, hogy könnyebb legyen a négy elemet megszámolni): $B := P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Ezek után

$$A \times B = \{ (\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{\emptyset\}), (\emptyset, \{\{\emptyset\}\}), (\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}), (\{\emptyset\}, \emptyset), (\{\emptyset\}, \{\emptyset\}), (\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}), (\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}) \}.$$

A keresett halmaz a fenti, és nyolcelemű.

Feladat: $|P(P(\emptyset)) \times P(P(P(\emptyset)))| = ?$

Megoldás

Mivel minden halmaz részhalmaza saját magának, $\emptyset \subseteq \emptyset$. Az üres halmaznak más részhalmaza nincs. Tehát $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$, ami egyelemű. Ennek már két részhalmaza van: az üreshalmaz és önmaga. Tehát
$A := P(P(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, ami kételemű. Tetszőleges kételemű halmaznak négy részhalmaza van: az üreshalmaz, két darab egyelemű részhalmaz és önmaga. Ezek szerint (váltott színekkel, hogy könnyebb legyen a négy elemet megszámolni): $B := P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Ezek után

$$\begin{aligned} A \times B = \{ & (\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{\emptyset\}), (\emptyset, \{\{\emptyset\}\}), (\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}), \\ & (\{\emptyset\}, \emptyset), (\{\emptyset\}, \{\emptyset\}), (\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}), (\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}) \}. \end{aligned}$$

A keresett halmaz a fenti, és nyolcelemű.

Feladat: $|P(P(\emptyset)) \times P(P(P(\emptyset)))| = ?$

Megoldás

Mivel minden halmaz részhalmaza saját magának, $\emptyset \subseteq \emptyset$. Az üres halmaznak más részhalmaza nincs. Tehát $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$, ami egyelemű. Ennek már két részhalmaza van: az üreshalmaz és önmaga. Tehát
$A := P(P(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, ami kételemű. Tetszőleges kételemű halmaznak négy részhalmaza van: az üreshalmaz, két darab egyelemű részhalmaz és önmaga. Ezek szerint (váltott színekkel, hogy könnyebb legyen a négy elemet megszámolni): $B := P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Ezek után

$$\begin{aligned} A \times B = \{ & (\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{\emptyset\}), (\emptyset, \{\{\emptyset\}\}), (\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}), \\ & (\{\emptyset\}, \emptyset), (\{\emptyset\}, \{\emptyset\}), (\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}), (\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}) \}. \end{aligned}$$

A keresett halmaz a fenti, és nyolcelemű.

Megfeleltetés, reláció

"Axiomatikus tárgyalásban az egész matematika felépíthető a „semmiből”, azaz az üres halmazból kiindulva.

Definíció

Legyen A és B halmaz. Az $A \times B$ részhalmazait A-ból B-be történő **megfeleltetéseknek** nevezzük. Egy ilyen megfeleltetésnek A az **indulási halmaza**, B az **érkezési halmaza**. Ha $A = B$, akkor a megfeleltetést **relációnak** nevezzük.

Megjegyzés

Sokan a reláció szót a megfeleltetés helyett használják, tehát $A \neq B$ esetén is, de mi nem. A reláció, illetve a megfeleltetés fenti definíciója a matematika szintjén ragadja meg a reláció (pl. rokonsági reláció) fogalmát: megadjuk a relációban, azaz viszonyban álló párok halmazát.

Megfeleltetés, reláció

"Axiomatikus tárgyalásban az egész matematika felépíthető a „semmiből'', azaz az üres halmazból kiindulva.

Definíció

Legyen A és B halmaz. Az $A \times B$ részhalmazait A-ból B-be történő **megfeleltetéseknek** nevezzük. Egy ilyen megfeleltetésnek A az **indulási halmaza**, B az **érkezési halmaza**. Ha $A = B$, akkor a megfeleltetést **relációnak** nevezzük.

Megjegyzés

Sokan a reláció szót a megfeleltetés helyett használják, tehát $A \neq B$ esetén is, de mi nem. A reláció, illetve a megfeleltetés fenti definíciója a matematika szintjén ragadja meg a reláció (pl. rokonsági reláció) fogalmát: megadjuk a relációban, azaz viszonyban álló párok halmazát.

Megfeleltetés, reláció

"Axiomatikus tárgyalásban az egész matematika felépíthető a „semmiből”, azaz az üres halmazból kiindulva.

Definíció

Legyen A és B halmaz. Az $A \times B$ részhalmazait A-ból B-be történő **megfeleltetéseknek** nevezzük. Egy ilyen megfeleltetésnek A az **indulási halmaza**, B az **érkezési halmaza**. Ha $A = B$, akkor a megfeleltetést **relációnak** nevezzük.

Megjegyzés

Sokan a reláció szót a megfeleltetés helyett használják, tehát $A \neq B$ esetén is, de mi nem. A reláció, illetve a megfeleltetés fenti definíciója a matematika szintjén ragadja meg a reláció (pl. rokonsági reláció) fogalmát: megadjuk a relációban, azaz viszonyban álló párok halmazát.

Kétváltozós predikátum vagy reláció?

A relációk **lényegében ugyanazok**, mint a kétváltozós predikátumok, hiszen az egyik a másikat meghatározza. (Tehát csak más felfogásban, más jelölésrendszerben beszélünk ugyanarról.)

Példa

Relációként a „kisebb” az $\mathbb{N}$ halmazon nem más, mint az $\{(1,2),(1,3),\dots,(2,3),(2,4),\dots,(3,4),\dots\}$ halmaz. *Predikátumként* a „kisebb” az $\mathbb{N}$ halmazonaz az $\mathbb{N}^2 \to \{\mathbf{i},\mathbf{h}\}$ leképezés, ahol pl. $(1,2) \mapsto \mathbf{i}$, $(1,3) \mapsto \mathbf{i}$, de pl. $(4,2) \mapsto \mathbf{h}$, stb.

A predikátum meghatározza a relációt, hiszen az pontosan azon elempárokból áll, ahol a predikátum az **i** logikai értéket veszi fel. A reláció pedig az által határozza meg a predikátumot, hogy a predikátum a relációbeli párokhoz az **i**, a többbi párhoz pedig a **h** logikai értéket rendeli.

Kétváltozós predikátum vagy reláció?

A relációk **lényegében ugyanazok**, mint a kétváltozós predikátumok, hiszen az egyik a másikat meghatározza. (Tehát csak más felfogásban, más jelölésrendszerben beszélünk ugyanarról.)

Példa

Relációként a „kisebb” az $\mathbb{N}$ halmazon nem más, mint az $\{(1,2),(1,3),\ldots,(2,3),(2,4),\ldots,(3,4),\ldots\}$ halmaz.
Predikátumként a „kisebb” az $\mathbb{N}$ halmazonaz az $\mathbb{N}^2 \to \{\mathbf{i},\mathbf{h}\}$ leképezés, ahol pl. $(1,2) \mapsto \mathbf{i}$, $(1,3) \mapsto \mathbf{i}$, de pl. $(4,2) \mapsto \mathbf{h}$, stb.

A predikátum meghatározza a relációt, hiszen az pontosan azon elempárokból áll, ahol a predikátum az **i** logikai értéket veszi fel. A reláció pedig az által határozza meg a predikátumot, hogy a predikátum a relációbeli párokhoz az **i**, a többi párhoz pedig a **h** logikai értéket rendeli.

Kétváltozós predikátum vagy reláció?

A relációk **lényegében ugyanazok**, mint a kétváltozós predikátumok, hiszen az egyik a másikat meghatározza. (Tehát csak más felfogásban, más jelölésrendszerben beszélünk ugyanarról.)

Példa

Relációként a „kisebb" az $\mathbb{N}$ halmazon nem más, mint az $\{(1,2),(1,3),\ldots,(2,3),(2,4),\ldots,(3,4),\ldots\}$ halmaz. *Predikátumként* a „kisebb" az $\mathbb{N}$ halmazonaz az $\mathbb{N}^2 \to \{\mathbf{i},\mathbf{h}\}$ leképezés, ahol pl. $(1,2) \mapsto \mathbf{i}$, $(1,3) \mapsto \mathbf{i}$, de pl. $(4,2) \mapsto \mathbf{h}$, stb.

A predikátum meghatározza a relációt, hiszen az pontosan azon elempárokból áll, ahol a predikátum az **i** logikai értéket veszi fel. A reláció pedig az által határozza meg a predikátumot, hogy a predikátum a relációbeli párokhoz az **i**, a többi párhoz pedig a **h** logikai értéket rendeli.

Kétváltozós predikátum vagy reláció?

A relációk **lényegében ugyanazok**, mint a kétváltozós predikátumok, hiszen az egyik a másikat meghatározza. (Tehát csak más felfogásban, más jelölésrendszerben beszélünk ugyanarról.)

Példa

Relációként a „kisebb" az $\mathbb{N}$ halmazon nem más, mint az $\{(1,2),(1,3),\ldots,(2,3),(2,4),\ldots,(3,4),\ldots\}$ halmaz. *Predikátumként* a „kisebb" az $\mathbb{N}$ halmazonaz az $\mathbb{N}^2 \to \{\mathbf{i},\mathbf{h}\}$ leképezés, ahol pl. $(1,2) \mapsto \mathbf{i}$, $(1,3) \mapsto \mathbf{i}$, de pl. $(4,2) \mapsto \mathbf{h}$, stb.

A predikátum meghatározza a relációt, hiszen az pontosan azon elempárokból áll, ahol a predikátum az **i** logikai értéket veszi fel. A reláció pedig az által határozza meg a predikátumot, hogy a predikátum a relációbeli párokhoz az **i**, a többi párhoz pedig a **h** logikai értéket rendeli.

Kétváltozós predikátum vagy reláció?

A relációk **lényegében ugyanazok**, mint a kétváltozós predikátumok, hiszen az egyik a másikat meghatározza. (Tehát csak más felfogásban, más jelölésrendszerben beszélünk ugyanarról.)

Példa

Relációként a „kisebb” az $\mathbb{N}$ halmazon nem más, mint az $\{(1,2),(1,3),\ldots,(2,3),(2,4),\ldots,(3,4),\ldots\}$ halmaz. *Predikátumként* a „kisebb” az $\mathbb{N}$ halmazonaz az $\mathbb{N}^2 \to \{\mathbf{i},\mathbf{h}\}$ leképezés, ahol pl. $(1,2) \mapsto \mathbf{i}$, $(1,3) \mapsto \mathbf{i}$, de pl. $(4,2) \mapsto \mathbf{h}$, stb.

A predikátum meghatározza a relációt, hiszen az pontosan azon elempárokból áll, ahol a predikátum az **i** logikai értéket veszi fel. A reláció pedig az által határozza meg a predikátumot, hogy a predikátum a relációbeli párokhoz az **i**, a többi párhoz pedig a **h** logikai értéket rendeli.

Példák megfeleltetésekre, relációkra

Példa (Oszthatósági reláció)

$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x \mid y\}$.

Példa (megfeleltetésre)

A: a sík háromszögeinek halmaza.
B: a sík pontjainak halmaza. Ekkor
$\{(h, p) \in A \times B : p \text{ a } h \text{ háromszög súlypontja}\}$ egy megfeleltetés A-ból B-be.

Példák megfeleltetésekre, relációkra

Példa (Oszthatósági reláció)

$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x \mid y\}$.

Példa (megfeleltetésre)

A: a sík háromszögeinek halmaza.
B: a sík pontjainak halmaza. Ekkor
$\{(h, p) \in A \times B : p$ a h háromszög súlypontja$\}$ egy megfeleltetés A-ból B-be.

Megfeleltetések szemléltetése

A megfeleltetéseket pl. **nyíldiagrammal** szemléltethetjük, amelynek az a lényege, hogy az (a, b) párt egy a-ból b-be irányított nyíllal ábrázoljuk.

Egy másik lehetőség: az $A \times B$ Descartes-szorzatot úgy ábrázoljuk, mintha „koordinátarendszerben lennénk", és valamilyen módon megjelöljük a részhalmazba tartozó elemeket.

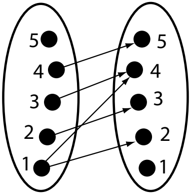
Az $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz „feletti" relációkat (azaz az $A \times A$ részhalmazait) az **informatikában** gyakran a bitmátrixukkal adjuk meg: aszerint írunk 1-et illetve 0-t a mátrix (azaz számtáblázat) i-edik sorának j-edik helyére, hogy (i, j) benne van-e vagy nincs benne a relációban.

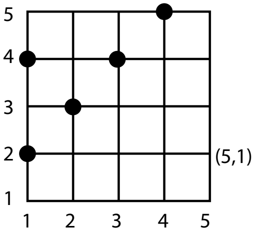
A megfeleltetéseket pl. **nyíldiagrammal** szemléltethetjük, amelynek az a lényege, hogy az (a, b) párt egy a-ból b-be irányított nyíllal ábrázoljuk.
Egy másik lehetőség: az $A \times B$ Descartes-szorzatot úgy ábrázoljuk, mintha „koordinátarendszerben lennénk", és valamilyen módon megjelöljük a részhalmazba tartozó elemeket.
Az $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz „feletti" relációkat (azaz az $A \times A$ részhalmazait) az **informatikában** gyakran a bitmátrixukkal adjuk meg: aszerint írunk 1-et illetve 0-t a mátrix (azaz számtáblázat) i-edik sorának j-edik helyére, hogy (i, j) benne van-e vagy nincs benne a relációban.

A megfeleltetéseket pl. **nyíldiagrammal** szemléltethetjük, amelynek az a lényege, hogy az (a, b) párt egy a-ból b-be irányított nyíllal ábrázoljuk.
Egy másik lehetőség: az $A \times B$ Descartes-szorzatot úgy ábrázoljuk, mintha „koordinátarendszerben lennénk", és valamilyen módon megjelöljük a részhalmazba tartozó elemeket.
Az $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz „feletti" relációkat (azaz az $A \times A$ részhalmazait) az **informatikában** gyakran a bitmátrixukkal adjuk meg: aszerint írunk 1-et illetve 0-t a mátrix (azaz számtáblázat) i-edik sorának j-edik helyére, hogy (i, j) benne van-e vagy nincs benne a relációban.

Példa megfeleltetés szemléltetésére

Lássunk példát mindháromra: az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz feletti $\{(a, b) \in \{1, 2, 3, 4, 5\}^2 : a + 1 \text{ osztja } b\text{-t}\}$ relációt adjuk meg ily módon.



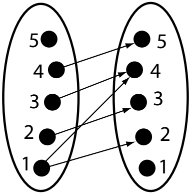


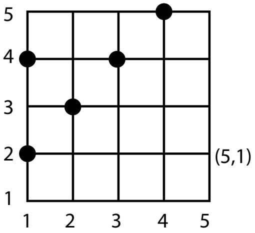
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ha $\rho \subseteq A \times B$ egy megfeleltetés, akkor $(a, b) \in \rho$ helyett gyakran az $a\rho b$ jelölést alkalmazzuk. Általában ez jellemző a jól ismert relációkra: pl. azt írjuk, hogy $a \leq b$ ahelyett hogy $(a, b) \in \leq$.

Példa megfeleltetés szemléltetésére

Lássunk példát mindháromra: az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz feletti $\{(a, b) \in \{1, 2, 3, 4, 5\}^2 : a + 1 \text{ osztja } b\text{-t}\}$ relációt adjuk meg ily módon.





$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ha $\rho \subseteq A \times B$ egy megfeleltetés, akkor $(a, b) \in \rho$ helyett gyakran az $a\rho b$ jelölést alkalmazzuk. Általában ez jellemző a jól ismert relációkra: pl. azt írjuk, hogy $a \leq b$ ahelyett hogy $(a, b) \in \leq$.

Leképezés fogalma

A megfeleltetések közül különösen fontosak az úgynevezett leképezések.

Definíció

Egy $f \subseteq A \times B$ megfeleltetést A-ból B-be történő **leképezésnek** nevezünk, ha bármely $a \in A$-ra létezik egy és csakis egy $b \in B$, hogy $(a, b) \in f$.

A nyíldiagrammon ez azt jelenti, hogy az indulási halmaz minden pontjából indul ki nyíl, és csak egy nyíl indul ki. Ha mindkét halmaz számokból áll (sőt néha máskor is), akkor a leképezéseket **függvényeknek** is nevezik. Ha egy relációt bitmátrixxal adunk meg, akkor a kérdéses reláció pontosan akkor leképezés, ha minden sorban pontosan egy darab 1-es van.

Leképezés fogalma

A megfeleltetések közül különösen fontosak az úgynevezett leképezések.

Definíció

Egy $f \subseteq A \times B$ megfeleltetést A-ból B-be történő **leképezésnek** nevezünk, ha bármely $a \in A$-ra létezik egy és csakis egy $b \in B$, hogy $(a, b) \in f$.

A nyíldiagrammon ez azt jelenti, hogy az indulási halmaz minden pontjából indul ki nyíl, és csak egy nyíl indul ki. Ha mindkét halmaz számokból áll (sőt néha máskor is), akkor a leképezéseket **függvényeknek** is nevezik. Ha egy relációt bitmátrixxal adunk meg, akkor a kérdéses reláció pontosan akkor leképezés, ha minden sorban pontosan egy darab 1-es van.

A megfeleltetések közül különösen fontosak az úgynevezett leképezések.

Definíció

Egy $f \subseteq A \times B$ megfeleltetést A-ból B-be történő **leképezésnek** nevezünk, ha bármely $a \in A$-ra létezik egy és csakis egy $b \in B$, hogy $(a, b) \in f$.

A nyíldiagrammon ez azt jelenti, hogy az indulási halmaz minden pontjából indul ki nyíl, és csak egy nyíl indul ki. Ha mindkét halmaz számokból áll (sőt néha máskor is), akkor a leképezéseket **függvényeknek** is nevezik. Ha egy relációt bitmátrixxal adunk meg, akkor a kérdéses reláció pontosan akkor leképezés, ha minden sorban pontosan egy darab 1-es van.

A megfeleltetések közül különösen fontosak az úgynevezett leképezések.

Definíció

Egy $f \subseteq A \times B$ megfeleltetést A-ból B-be történő **leképezésnek** nevezünk, ha bármely $a \in A$-ra létezik egy és csakis egy $b \in B$, hogy $(a, b) \in f$.

A nyíldiagrammon ez azt jelenti, hogy az indulási halmaz minden pontjából indul ki nyíl, és csak egy nyíl indul ki. Ha mindkét halmaz számokból áll (sőt néha máskor is), akkor a leképezéseket **függvényeknek** is nevezik. Ha egy relációt bitmátrixxal adunk meg, akkor a kérdéses reláció pontosan akkor leképezés, ha minden sorban pontosan egy darab 1-es van.

A megfeleltetések közül különösen fontosak az úgynevezett leképezések.

Definíció

Egy $f \subseteq A \times B$ megfeleltetést A-ból B-be történő **leképezésnek** nevezünk, ha bármely $a \in A$-ra létezik egy és csakis egy $b \in B$, hogy $(a, b) \in f$.

A nyíldiagrammon ez azt jelenti, hogy az indulási halmaz minden pontjából indul ki nyíl, és csak egy nyíl indul ki. Ha mindkét halmaz számokból áll (sőt néha máskor is), akkor a leképezéseket **függvényeknek** is nevezik. Ha egy relációt bitmátrixxal adunk meg, akkor a kérdéses reláció pontosan akkor leképezés, ha minden sorban pontosan egy darab 1-es van.

Leképezéssel kapcsolatos jelölések

Jelölés

Ha $f \subseteq A \times B$ egy leképezés A-ból B-be, akkor ennek a ténynek a kifejezésére az $\boxed{f : A \to B}$ jelölést alkalmazzuk. Ha $(a, b) \in f$ és f leképezés, akkor azt írjuk, hogy $af = b$. Ugyanezt **talpas nyíllal** felírva: $f : a \mapsto b$, vagy $a \overset{f}{\mapsto} b$, vagy csak $a \mapsto b$. (Látható: leképezés esetén igyekszünk elkerülni a megfeleltetésekre vonatkozó jelöléseket.)

Figyelem!

Az $f : A \to B$, $f : a \mapsto b$, $a \overset{f}{\mapsto} b$ jelölések bármelyike önmagában is kifejezi azt, hogy f egy *leképezés*, nem csak egy megfeleltetés.

Leképezéssel kapcsolatos jelölések

Jelölés

Ha $f \subseteq A \times B$ egy leképezés A-ból B-be, akkor ennek a ténynek a kifejezésére az $f : A \to B$ jelölést alkalmazzuk. Ha $(a, b) \in f$ és f leképezés, akkor azt írjuk, hogy $af = b$. Ugyanezt **talpas nyíllal** felírva: $f : a \mapsto b$, vagy $a \overset{f}{\mapsto} b$, vagy csak $a \mapsto b$. (Látható: leképezés esetén igyekszünk elkerülni a megfeleltetésekre vonatkozó jelöléseket.)

Figyelem!

Az $f : A \to B$, $f : a \mapsto b$, $a \overset{f}{\mapsto} b$ jelölések bármelyike önmagában is kifejezi azt, hogy f egy *leképezés*, nem csak egy megfeleltetés.

Leképezéssel kapcsolatos jelölések

Jelölés

Ha $f \subseteq A \times B$ egy leképezés A-ból B-be, akkor ennek a ténynek a kifejezésére az $f : A \to B$ jelölést alkalmazzuk. Ha $(a, b) \in f$ és f leképezés, akkor azt írjuk, hogy $af = b$. Ugyanezt **talpas nyíllal** felírva: $f : a \mapsto b$, vagy $a \overset{f}{\mapsto} b$, vagy csak $a \mapsto b$. (Látható: leképezés esetén igyekszünk elkerülni a megfeleltetésekre vonatkozó jelöléseket.)

Figyelem!

Az $f : A \to B$, $f : a \mapsto b$, $a \overset{f}{\mapsto} b$ jelölések bármelyike önmagában is kifejezi azt, hogy f egy *leképezés*, nem csak egy megfeleltetés.

Leképezéssel kapcsolatos egyéb jelölések

A matematikában rengeteg módon jelölik a leképezéseket; lássunk néhány példát!

$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$. (Nincs zárójel, a leképezés jelét balról írjuk.)

$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$. (Nincs zárójel, az elemet a kitevőbe írjuk.)

$\sqrt{} : \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$. (Van zárójel, a leképezést balról írjuk.)

$g \mapsto g'$, $\quad u \mapsto u^*$, $\quad x \mapsto 1/x \quad$ (alkalmi vagy egyéb jelölések)

Definíció

$f : A \to B$ (tehát egy leképezés) esetén az A indulási halmazt **értelmezési tartománynak nevezzük**. Az $\{af : a \in A\}$ halmaz neve **értékkészlet**; ez részhalmaza az érkezési halmaznak.

Leképezéssel kapcsolatos egyéb jelölések

A matematikában rengeteg módon jelölik a leképezéseket; lássunk néhány példát!

sin : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$. (Nincs zárójel, a leképezés jelét balról írjuk.)

exp : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$. (Nincs zárójel, az elemet a kitevőbe írjuk.)

$\sqrt{} : \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$. (Van zárójel, a leképezést balról írjuk.)

$g \mapsto g'$, $u \mapsto u^*$, $x \mapsto 1/x$ (alkalmi vagy egyéb jelölések)

Definíció

$f : A \to B$ (tehát egy leképezés) esetén az A indulási halmazt **értelmezési tartománynak nevezzük**. Az $\{af : a \in A\}$ halmaz neve **értékkészlet**; ez részhalmaza az érkezési halmaznak.

Leképezéssel kapcsolatos egyéb jelölések

A matematikában rengeteg módon jelölik a leképezéseket; lássunk néhány példát!

$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$. (Nincs zárójel, a leképezés jelét balról írjuk.)

$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$. (Nincs zárójel, az elemet a kitevőbe írjuk.)

$\sqrt{} : \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$. (Van zárójel, a leképezést balról írjuk.)

$g \mapsto g'$, $\quad u \mapsto u^*$, $\quad x \mapsto 1/x \quad$ (alkalmi vagy egyéb jelölések)

Definíció

$f : A \to B$ (tehát egy leképezés) esetén az A indulási halmazt **értelmezési tartománynak nevezzük**. Az $\{af : a \in A\}$ halmaz neve **értékkészlet**; ez részhalmaza az érkezési halmaznak.

Leképezéssel kapcsolatos egyéb jelölések

A matematikában rengeteg módon jelölik a leképezéseket; lássunk néhány példát!

$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$. (Nincs zárójel, a leképezés jelét balról írjuk.)

$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$. (Nincs zárójel, az elemet a kitevőbe írjuk.)

$\sqrt{} : \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$. (Van zárójel, a leképezést balról írjuk.)

$g \mapsto g'$, $u \mapsto u^*$, $x \mapsto 1/x$ (alkalmi vagy egyéb jelölések)

Definíció

$f : A \to B$ (tehát egy leképezés) esetén az A indulási halmazt **értelmezési tartománynak nevezzük**. Az $\{af : a \in A\}$ halmaz neve **értékkészlet**; ez részhalmaza az érkezési halmaznak.

A matematikában rengeteg módon jelölik a leképezéseket; lássunk néhány példát!

$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin x$. (Nincs zárójel, a leképezés jelét balról írjuk.)

$\exp\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^x$. (Nincs zárójel, az elemet a kitevőbe írjuk.)

$\sqrt{\ } : \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$. (Van zárójel, a leképezést balról írjuk.)

$g \mapsto g'$, $\quad u \mapsto u^*$, $\quad x \mapsto 1/x \qquad$ (alkalmi vagy egyéb jelölések)

Definíció

$f : A \to B$ (tehát egy leképezés) esetén az A indulási halmazt **értelmezési tartománynak nevezzük**. Az $\{af : a \in A\}$ halmaz neve **értékkészlet**; ez részhalmaza az érkezési halmaznak.

A matematikában rengeteg módon jelölik a leképezéseket; lássunk néhány példát!
$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$. (Nincs zárójel, a leképezés jelét balról írjuk.)
$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$. (Nincs zárójel, az elemet a kitevőbe írjuk.)
$\sqrt{} : \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$. (Van zárójel, a leképezést balról írjuk.)
$g \mapsto g'$, $\quad u \mapsto u^*$, $\quad x \mapsto 1/x$ $\quad$ (alkalmi vagy egyéb jelölések)

Definíció

$f : A \to B$ (tehát egy leképezés) esetén az A indulási halmazt **értelmezési tartománynak nevezzük**. Az $\{af : a \in A\}$ halmaz neve **értékkészlet**; ez részhalmaza az érkezési halmaznak.

Injektív leképezés

Definíció

Egy $f : A \to B$ leképezést **injektívnek** nevezünk, ha bármely $a_1, a_2 \in A$ esetén ha $a_1 f = a_2 f$, akkor $a_1 = a_2$.

Tehát az injektvitás azt jelenti, hogy különböző elemek képe szükségképpen különböző. Más szóval, ha két elem képe egyenlő, akkor maguk a kiindulási elemek is egyenlőek. Nyíldiagrammon az injektív leképezés onnan ismerhető fel, hogy leképezés és B minden elemébe legfeljebb egy nyíl érkezik. Bitmátrixos megadás esetén pedig onnan, hogy leképezés és minden oszlopban legfeljebb egy darab 1 van.

Megjegyzés

Az „injektív leképezés" szinonímája: „kölcsönösen egyértelmű leképezés" (amelyet viszont egyesek más értelemben használnak, ezért *kerülni fogom*).

Injektív leképezés

Definíció

Egy $f : A \to B$ leképezést **injektívnek** nevezünk, ha bármely $a_1, a_2 \in A$ esetén ha $a_1 f = a_2 f$, akkor $a_1 = a_2$.

Tehát az injektvitás azt jelenti, hogy különböző elemek képe szükségképpen különböző. Más szóval, ha két elem képe egyenlő, akkor maguk a kiindulási elemek is egyenlőek. Nyíldiagrammon az injektív leképezés onnan ismerhető fel, hogy leképezés és B minden elemébe legfeljebb egy nyíl érkezik. Bitmátrixos megadás esetén pedig onnan, hogy leképezés és minden oszlopban legfeljebb egy darab 1 van.

Megjegyzés

Az „injektív leképezés" szinonímája: „kölcsönösen egyértelmű leképezés" (amelyet viszont egyesek más értelemben használnak, ezért *kerülni fogom*).

Injektív leképezés

Definíció

Egy $f : A \to B$ leképezést **injektívnek** nevezünk, ha bármely $a_1, a_2 \in A$ esetén ha $a_1 f = a_2 f$, akkor $a_1 = a_2$.

Tehát az injektvitás azt jelenti, hogy különböző elemek képe szükségképpen különböző. Más szóval, ha két elem képe egyenlő, akkor maguk a kiindulási elemek is egyenlőek. Nyíldiagrammon az injektív leképezés onnan ismerhető fel, hogy leképezés és B minden elemébe legfeljebb egy nyíl érkezik. Bitmátrixos megadás esetén pedig onnan, hogy leképezés és minden oszlopban legfeljebb egy darab 1 van.

Megjegyzés

Az „injektív leképezés” szinonímája: „kölcsönösen egyértelmű leképezés” (amelyet viszont egyesek más értelemben használnak, ezért *kerülni fogom*).

Injektív leképezés

Definíció

Egy $f : A \to B$ leképezést **injektívnek** nevezünk, ha bármely $a_1, a_2 \in A$ esetén ha $a_1 f = a_2 f$, akkor $a_1 = a_2$.

Tehát az injektvitás azt jelenti, hogy különböző elemek képe szükségképpen különböző. Más szóval, ha két elem képe egyenlő, akkor maguk a kiindulási elemek is egyenlőek. Nyíldiagrammon az injektív leképezés onnan ismerhető fel, hogy leképezés és B minden elemébe legfeljebb egy nyíl érkezik. Bitmátrixos megadás esetén pedig onnan, hogy leképezés és minden oszlopban legfeljebb egy darab 1 van.

Megjegyzés

Az „injektív leképezés" szinonímája: „kölcsönösen egyértelmű leképezés" (amelyet viszont egyesek más értelemben használnak, ezért *kerülni fogom*).

Injektív leképezés

Definíció

Egy $f : A \to B$ leképezést **injektívnek** nevezünk, ha bármely $a_1, a_2 \in A$ esetén ha $a_1 f = a_2 f$, akkor $a_1 = a_2$.

Tehát az injektvitás azt jelenti, hogy különböző elemek képe szükségképpen különböző. Más szóval, ha két elem képe egyenlő, akkor maguk a kiindulási elemek is egyenlőek. Nyíldiagrammon az injektív leképezés onnan ismerhető fel, hogy leképezés és B minden elemébe legfeljebb egy nyíl érkezik. Bitmátrixos megadás esetén pedig onnan, hogy leképezés és minden oszlopban legfeljebb egy darab 1 van.

Megjegyzés

Az „injektív leképezés" szinonímája: „kölcsönösen egyértelmű leképezés" (amelyet viszont egyesek más értelemben használnak, ezért *kerülni fogom*).

Definíció

Az $f : A \to B$ leképezést **szürjektív leképezésnek** vagy más szóval **ráképezésnek** nevezzük, ha bármely $b \in B$ elemnek van „**őse**”, azaz van olyan $a \in A$ elem, hogy $b = f(a)$. Más szóval, ha B minden eleme képelem. Más szóval, ha az értékkészlete megegyezik az érkezési halmazával.

Megjegyzés

Nyíldiagrammon a szürjektív leképezés onnan ismerhető fel, hogy leképezés és B minden elemébe megy nyíl. Bitmátrixos megadás esetén pedig onnan, hogy leképezés és minden oszlopban van 1.

Szürjektív leképezés, bijektív leképezés

Definíció

Az $f : A \to B$ leképezést **szürjektív leképezésnek** vagy más szóval **ráképezésnek** nevezzük, ha bármely $b \in B$ elemnek van „**őse**”, azaz van olyan $a \in A$ elem, hogy $b = f(a)$. Más szóval, ha B minden eleme képelem. Más szóval, ha az értékkészlete megegyezik az érkezési halmazával.

Megjegyzés

Nyíldiagrammon a szürjektív leképezés onnan ismerhető fel, hogy leképezés és B minden elemébe megy nyíl. Bitmátrixos megadás esetén pedig onnan, hogy leképezés és minden oszlopban van 1.

Definíció

Az $f : A \to B$ leképezést **szürjektív leképezésnek** vagy más szóval **ráképezésnek** nevezzük, ha bármely $b \in B$ elemnek van „**őse**”, azaz van olyan $a \in A$ elem, hogy $b = f(a)$. Más szóval, ha B minden eleme képelem. Más szóval, ha az értékkészlete megegyezik az érkezési halmazával.

Megjegyzés

Nyíldiagrammon a szürjektív leképezés onnan ismerhető fel, hogy leképezés és B minden elemébe megy nyíl. Bitmátrixos megadás esetén pedig onnan, hogy leképezés és minden oszlopban van 1.

Szürjektív leképezés, bijektív leképezés

Definíció

Az $f : A \to B$ leképezést **szürjektív leképezésnek** vagy más szóval **ráképezésnek** nevezzük, ha bármely $b \in B$ elemnek van „**őse**”, azaz van olyan $a \in A$ elem, hogy $b = f(a)$. Más szóval, ha B minden eleme képelem. Más szóval, ha az értékkészlete megegyezik az érkezési halmazával.

Megjegyzés

Nyíldiagrammon a szürjektív leképezés onnan ismerhető fel, hogy leképezés és B minden elemébe megy nyíl. Bitmátrixos megadás esetén pedig onnan, hogy leképezés és minden oszlopban van 1.

Szürjektív leképezés, bijektív leképezés

Definíció

Az $f : A \to B$ leképezést **szürjektív leképezésnek** vagy más szóval **ráképezésnek** nevezzük, ha bármely $b \in B$ elemnek van „**őse**”, azaz van olyan $a \in A$ elem, hogy $b = f(a)$. Más szóval, ha B minden eleme képelem. Más szóval, ha az értékkészlete megegyezik az érkezési halmazával.

Megjegyzés

Nyíldiagrammon a szürjektív leképezés onnan ismerhető fel, hogy leképezés és B minden elemébe megy nyíl. Bitmátrixos megadás esetén pedig onnan, hogy leképezés és minden oszlopban van 1.

Szürjektív leképezés, bijektív leképezés

Definíció

Az $f : A \to B$ leképezést **szürjektív leképezésnek** vagy más szóval **ráképezésnek** nevezzük, ha bármely $b \in B$ elemnek van „**őse**”, azaz van olyan $a \in A$ elem, hogy $b = f(a)$. Más szóval, ha B minden eleme képelem. Más szóval, ha az értékkészlete megegyezik az érkezési halmazával.

Megjegyzés

Nyíldiagrammon a szürjektív leképezés onnan ismerhető fel, hogy leképezés és B minden elemébe megy nyíl. Bitmátrixos megadás esetén pedig onnan, hogy leképezés és minden oszlopban van 1.

Szürjektív leképezés, bijektív leképezés

Definíció

Egy $f : A \to B$ leképezést **bijektív leképezésnek** vagy **bijekciónak** nevezünk, ha f injektív és szürjektív.

Szokták a „bijektív leképezés" helyett a „kölcsönösen egyértelmű ráképezés" elnevezést is használni. (Félreérthetőség csak egyesek azon gyakorlatából származik, hogy nem kötik ki, hogy a leképezés **rá**képezés legyen.)

Mi a továbbiakban csak az injektív, szürjektív és bijektív jelzőket használjuk.

Definíció

Egy $f : A \to B$ leképezést **bijektív leképezésnek** vagy **bijekciónak** nevezünk, ha f injektív és szürjektív.

Szokták a „bijektív leképezés” helyett a „kölcsönösen egyértelmű ráképezés” elnevezést is használni. (Félreérthetőség csak egyesek azon gyakorlatából származik, hogy nem kötik ki, hogy a leképezés **rá**képezés legyen.)

Mi a továbbiakban csak az injektív, szürjektív és bijektív jelzőket használjuk.

Definíció

Egy $f : A \to B$ leképezést **bijektív leképezésnek** vagy **bijekciónak** nevezünk, ha f injektív és szürjektív.

Szokták a „bijektív leképezés” helyett a „kölcsönösen egyértelmű ráképezés” elnevezést is használni. (Félreérthetőség csak egyesek azon gyakorlatából származik, hogy nem kötik ki, hogy a leképezés **rá**képezés legyen.)

Mi a továbbiakban csak az injektív, szürjektív és bijektív jelzőket használjuk.

Feladat

Válogassuk ki az alábbi megfeleltetések közül a leképezéseket, az injektív leképezéseket, a szürjektív leképezéseket és a bijekciókat!

(a) $f = \{(x, 6x+1) : x \in \mathbb{N},\ \text{és } x \text{ páros}\} \cup \{(x, 6x-1) : x \in \mathbb{N},\ \text{és } x \text{ páratlan}\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$;

(b) $f = \{(x, y) : y^2 = x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

(c) $f = \{(x, y) : y^3 = x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

(d) $f = \{(x, y) : x^2 = y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

(e) $f = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

(f) $f = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \{0, 1\} \times \{0, 1\}$;

Egy feladat leképezések tulajdonságaira

Feladat

Válogassuk ki az alábbi megfeleltetések közül a leképezéseket, az injektív leképezéseket, a szürjektív leképezéseket és a bijekciókat!

(a) $f = \{(x, 6x+1) : x \in \mathbb{N},\ \text{és } x \text{ páros}\} \cup \{(x, 6x-1) : x \in \mathbb{N},\ \text{és } x \text{ páratlan}\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$;

(b) $f = \{(x, y) : y^2 = x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

(c) $f = \{(x, y) : y^3 = x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

(d) $f = \{(x, y) : x^2 = y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

(e) $f = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

(f) $f = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \{0, 1\} \times \{0, 1\}$;

A feladat megoldása: (a)

$f = \{(x, 6x+1) : x \in \mathbb{N},\ \text{és } x \text{ páros}\} \cup \{(x, 6x-1) : x \in \mathbb{N},\ \text{és } x \text{ páratlan}\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ esetén: Legyen $(x, y_1), (x, y_2) \in f$. Ha x páros, akkor mindkét pár az únió első tagjában van, és így $y_1 = 6x+1 = y_2$. Hasonlóan látható $y_1 = y_2$ az x páratlan esetben is. Tehát tetszőleges x-nek *legfeljebb egy képe* van. Ha $x \in \mathbb{N}$, akkor *van képe* x-nek, hiszen a $6x \pm 1$ is egész szám és pozitív (≥ 5). Tehát $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ leképezés. Ha x_1 páros és x_2 páratlan (azaz különböző **paritásúak**), akkor $x_1 f$ 6-tal osztva 1-et, $x_2 f$ pedig 6-tal osztva 5-öt ad maradékul, tehát ezen esetben a képelemek különböznek. Ezért ha feltesszük, hogy az $y_1 := x_1 f$ és $y_2 := x_2 f$ egyenlőek, akkor máris tudjuk, hogy x_1 és x_2 azonos paritásúak. Ha mindkettő páros, akkor $6x_1 + 1 = x_1 f = x_2 f = 6x_2 + 1$-ből $x_1 = x_2$ adódik. Ha pedig mindkettő páratlan, akkor $6x_1 - 1 = x_1 f = x_2 f = 6x_2 - 1$-ből szintén következik $x_1 = x_2$. Tehát ha a képelemek azonosak, akkor az ősök is. Azaz f injektív. Nem szürjektív és így nem bijektív, hiszen pl. a $3 \in \mathbb{N}$ nem képelem.

(b) $f = \{(x, y) : y^2 = x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$?

Megoldás ((b) $f = \{(x, y) : y^2 = x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$)

Az első kérdés az, hogy tartozik-e minden x-hez y? Nem, hiszen a negatív x-ek nem állnak elő négyzet alakban. Tehát f nem leképezés.
De az is lehet az első kérdés (hiszen mindenki másként gondolkodik), hogy igaz-e, hogy tetszőleges x-hez csak egy y tartozik? Ez sem igaz, hiszen pl. $(1, -1) \in f$ és $(1, 1) \in f$. Innen is az adódik, hogy f nem leképezés.
A többi kérdés nem releváns, hiszen azok *leképezés*tulajdonságokra vonatkoztak.

Megoldás ((b) $f = \{(x, y) : y^2 = x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$)

Az első kérdés az, hogy tartozik-e minden x-hez y? Nem, hiszen a negatív x-ek nem állnak elő négyzet alakban. Tehát f nem leképezés.

De az is lehet az első kérdés (hiszen mindenki másként gondolkodik), hogy igaz-e, hogy tetszőleges x-hez csak egy y tartozik? Ez sem igaz, hiszen pl. $(1, -1) \in f$ és $(1, 1) \in f$. Innen is az adódik, hogy f nem leképezés.

A többi kérdés nem releváns, hiszen azok *leképezés*tulajdonságokra vonatkoztak.

(b) $f = \{(x, y) : y^2 = x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$?

Megoldás ((b) $f = \{(x, y) : y^2 = x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$)

Az első kérdés az, hogy tartozik-e minden x-hez y? Nem, hiszen a negatív x-ek nem állnak elő négyzet alakban. Tehát f nem leképezés.

De az is lehet az első kérdés (hiszen mindenki másként gondolkodik), hogy igaz-e, hogy tetszőleges x-hez csak egy y tartozik? Ez sem igaz, hiszen pl. $(1, -1) \in f$ és $(1, 1) \in f$. Innen is az adódik, hogy f nem leképezés.

A többi kérdés nem releváns, hiszen azok *leképezés*tulajdonságokra vonatkoztak.

(b) $f = \{(x, y) : y^2 = x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$?

Megoldás ((b) $f = \{(x, y) : y^2 = x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$)

Az első kérdés az, hogy tartozik-e minden x-hez y? Nem, hiszen a negatív x-ek nem állnak elő négyzet alakban. Tehát f nem leképezés.

De az is lehet az első kérdés (hiszen mindenki másként gondolkodik), hogy igaz-e, hogy tetszőleges x-hez csak egy y tartozik? Ez sem igaz, hiszen pl. $(1, -1) \in f$ és $(1, 1) \in f$. Innen is az adódik, hogy f nem leképezés.

A többi kérdés nem releváns, hiszen azok *leképezés*tulajdonságokra vonatkoztak.

(b) $f = \{(x, y) : y^2 = x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$?

Megoldás ((b) $f = \{(x, y) : y^2 = x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$)

Az első kérdés az, hogy tartozik-e minden x-hez y? Nem, hiszen a negatív x-ek nem állnak elő négyzet alakban. Tehát f nem leképezés.

De az is lehet az első kérdés (hiszen mindenki másként gondolkodik), hogy igaz-e, hogy tetszőleges x-hez csak egy y tartozik? Ez sem igaz, hiszen pl. $(1, -1) \in f$ és $(1, 1) \in f$. Innen is az adódik, hogy f nem leképezés.

A többi kérdés nem releváns, hiszen azok *leképezés*tulajdonságokra vonatkoztak.

(c) $f = \{(x, y) : y^3 = x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$?

Megoldás ((c) $f = \{(x, y) : y^3 = x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$?)

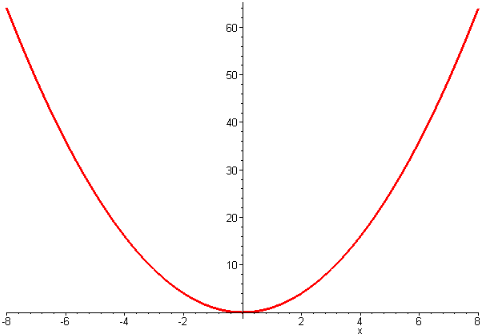
Mivel az a kérdés, hogy vajon egy tetszőleges x meghatároz-e egy y-t és azt egyértelműen teszi-e, fejezzük ki y-t: $y = \sqrt[3]{x}$. Minden x-hez pontosan egy y létezik, tehát leképezésről van szó. Minden valós értéket felvesz így szürjektív, és (a monotonitás miatt) mindegyiket csak egyszer, így injektív. Tehát bijektív.

Megoldás ((c) $f = \{(x, y) : y^3 = x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$?)

Mivel az a kérdés, hogy vajon egy tetszőleges x meghatároz-e egy y-t és azt egyértelműen teszi-e, fejezzük ki y-t: $y = \sqrt[3]{x}$. Minden x-hez pontosan egy y létezik, tehát leképezésről van szó. Minden valós értéket felvesz így szürjektív, és (a monotonitás miatt) mindegyiket csak egyszer, így injektív. Tehát bijektív.

Megoldás ((d) $f = \{(x, y) : x^2 = y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$?)

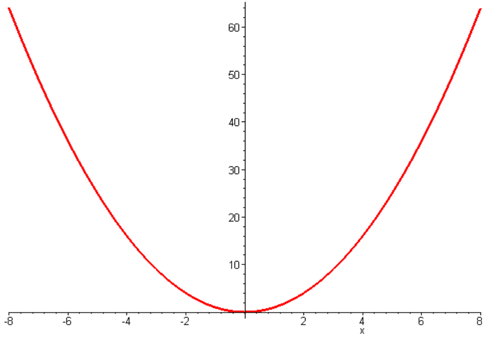
Ez leképezés, hiszen minden egyes x valós számhoz pontosan egy y tartozik: az x négyzete. A függvény nem szürjektív (mert negatív valós számokat nem vesz fel értékként), és nem injektív (mert pl. a -1 és az 1 helyen azonos értékeket vesz fel). Mindez egy pillanat alatt leolvasható a grafikonról:



(d) $f = \{(x,y) : x^2 = y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$?

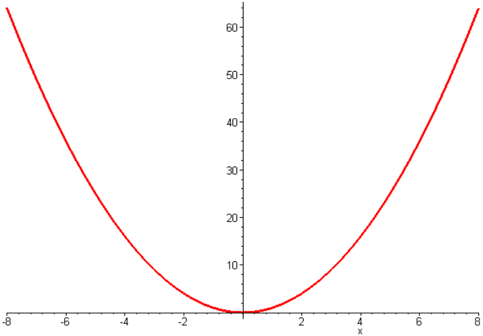
Megoldás ((d) $f = \{(x,y) : x^2 = y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$?)

Ez leképezés, hiszen minden egyes x valós számhoz pontosan egy y tartozik: az x négyzete. A függvény nem szürjektív (mert negatív valós számokat nem vesz fel értékként), és nem injektív (mert pl. a -1 és az 1 helyen azonos értékeket vesz fel). Mindez egy pillanat alatt leolvasható a grafikonról:



Megoldás ((d) $f = \{(x, y) : x^2 = y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$?)

Ez leképezés, hiszen minden egyes x valós számhoz pontosan egy y tartozik: az x négyzete. A függvény nem szürjektív (mert negatív valós számokat nem vesz fel értékként), és nem injektív (mert pl. a -1 és az 1 helyen azonos értékeket vesz fel). Mindez egy pillanat alatt leolvasható a grafikonról:



Meglepetés: $f = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \{0, 1\} \times \{0, 1\}$?

Megoldás ((f) $\quad f = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \{0, 1\} \times \{0, 1\}$?)

Most $A = B = \{0, 1\}$, és könnyen látszik, hogy $f = \{(0, 1), (1, 0)\}$, ami egy bijektív leképezés; tehát szürjektív is és injektív is.

A feladat (d) részében ugyanez a képlet adta meg az $\{(x, y) : x^2 = y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, függvényt, ami nem volt szürjektív. **Egy leképezés megadása nemcsak egy egyenlőség (formula, képlet) megadását jelenti, hanem meg kell adni az értelmezési tartományt és az érkezési halmazt is!** (Kivéve ha a szövegkörnyezetből ez kiderül.)

Példa (Az érkezési halmaztól is függ a szürjektivitás)

Az $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $x \mapsto x^2$ leképezés bijektív.
Az $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ leképezés **nem** bijektív.

Relációk, megfeleltetések tulajdonságaival kapcsolatban is érvényes, hogy meg kell adni az indulási halmazt és az érkezési halmazt is.

Meglepetés: $f = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \{0,1\} \times \{0,1\}$?

Megoldás ((f) $f = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \{0,1\} \times \{0,1\}$?)

Most $A = B = \{0,1\}$, és könnyen látszik, hogy $f = \{(0,1),(1,0)\}$, ami egy bijektív leképezés; tehát szürjektív is és injektív is.

A feladat (d) részében ugyanez a képlet adta meg az $\{(x,y) : x^2 = y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, függvényt, ami nem volt szürjektív. Egy leképezés megadása nemcsak egy egyenlőség (formula, képlet) megadását jelenti, hanem meg kell adni az értelmezési tartományt és az érkezési halmazt is! (Kivéve ha a szövegkörnyezetből ez kiderül.)

Példa (Az érkezési halmaztól is függ a szürjektivitás)

Az $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $x \mapsto x^2$ leképezés bijektív.
Az $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ leképezés nem bijektív.

Relációk, megfeleltetések tulajdonságaival kapcsolatban is érvényes, hogy meg kell adni az indulási halmazt és az érkezési halmazt is.

Meglepetés: $f = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \{0,1\} \times \{0,1\}$?

Megoldás ((f) $f = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \{0,1\} \times \{0,1\}$?)

Most $A = B = \{0,1\}$, és könnyen látszik, hogy $f = \{(0,1),(1,0)\}$, ami egy bijektív leképezés; tehát szürjektív is és injektív is.

A feladat (d) részében ugyanez a képlet adta meg az $\{(x,y) : x^2 = y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, függvényt, ami nem volt szürjektív.
Egy leképezés megadása nemcsak egy egyenlőség (formula, képlet) megadását jelenti, hanem meg kell adni az értelmezési tartományt és az érkezési halmazt is! (Kivéve ha a szövegkörnyezetből ez kiderül.)

Példa (Az érkezési halmaztól is függ a szürjektivitás)

Az $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $x \mapsto x^2$ leképezés bijektív.
Az $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ leképezés **nem** bijektív.

Relációk, megfeleltetések tulajdonságaival kapcsolatban is érvényes, hogy meg kell adni az indulási halmazt és az érkezési halmazt is.

Meglepetés: $f = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \{0, 1\} \times \{0, 1\}$?

Megoldás ((f) $\quad f = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \{0, 1\} \times \{0, 1\}$?)

Most $A = B = \{0, 1\}$, és könnyen látszik, hogy $f = \{(0, 1), (1, 0)\}$, ami egy bijektív leképezés; tehát szürjektív is és injektív is.

A feladat (d) részében ugyanez a képlet adta meg az $\{(x, y) : x^2 = y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, függvényt, ami nem volt szürjektív. **Egy leképezés megadása nemcsak egy egyenlőség (formula, képlet) megadását jelenti, hanem meg kell adni az értelmezési tartományt és az érkezési halmazt is!** (Kivéve ha a szövegkörnyezetből ez kiderül.)

Példa (Az érkezési halmaztól is függ a szürjektivitás)

Az $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $x \mapsto x^2$ leképezés bijektív.
Az $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ leképezés **nem** bijektív.

Relációk, megfeleltetések tulajdonságaival kapcsolatban is érvényes, hogy meg kell adni az indulási halmazt és az érkezési halmazt is.

Meglepetés: $f = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \{0,1\} \times \{0,1\}$?

Megoldás ((f) $f = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \{0,1\} \times \{0,1\}$?)

Most $A = B = \{0,1\}$, és könnyen látszik, hogy $f = \{(0,1),(1,0)\}$, ami egy bijektív leképezés; tehát szürjektív is és injektív is.

A feladat (d) részében ugyanez a képlet adta meg az $\{(x,y) : x^2 = y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, függvényt, ami nem volt szürjektív. **Egy leképezés megadása nemcsak egy egyenlőség (formula, képlet) megadását jelenti, hanem meg kell adni az értelmezési tartományt és az érkezési halmazt is!** (Kivéve ha a szövegkörnyezetből ez kiderül.)

Példa (Az érkezési halmaztól is függ a szürjektivitás)

Az $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $x \mapsto x^2$ leképezés bijektív.
Az $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ leképezés **nem** bijektív.

Relációk, megfeleltetések tulajdonságaival kapcsolatban is érvényes, hogy meg kell adni az indulási halmazt és az érkezési halmazt is.

Megfeleltetések szorzata

Definíció

Legyen α A-ból B-be, β pedig B-ből C-be való megfeleltetés. (Azaz $\alpha \subseteq A \times B$ és $\beta \subseteq B \times C$; speciális esetben az A, B, C halmazok azonosak is lehetnek.) Definiáljuk a két megfeleltetés szorzatát:

$$\alpha \circ \beta := \{(a, c) \in A \times C : \exists b \in B \textbf{ hogy } (a, b) \in \alpha \textbf{ és } (b, c) \in \beta\} \subseteq A \times C.$$

A karikát gyakran elhagyjuk, azaz $\alpha \circ \beta$ **helyett csak azt írjuk, hogy** $\alpha \circ \beta$.

Megfeleltetések szorzata

Definíció

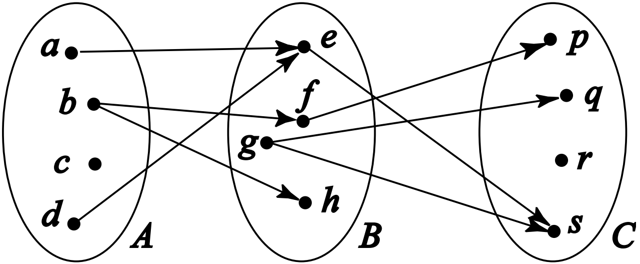
Legyen α A-ból B-be, β pedig B-ből C-be való megfeleltetés. (Azaz $\alpha \subseteq A \times B$ és $\beta \subseteq B \times C$; speciális esetben az A, B, C halmazok azonosak is lehetnek.) Definiáljuk a két megfeleltetés szorzatát:

$$\alpha \circ \beta := \{(a, c) \in A \times C : \exists b \in B \textbf{ hogy } (a, b) \in \alpha \textbf{ és } (b, c) \in \beta\} \subseteq A \times C.$$

A karikát gyakran elhagyjuk, azaz $\alpha \circ \beta$ **helyett csak azt írjuk, hogy** $\alpha \circ \beta$.

Megfeleltetésszorzás nyíldiagrammal

Nyíldiagramm segítségével a megfeleltetések szorzata úgy szemléltethető, hogy pontosan azon $(a, c) \in A \times C$ elempárok vannak a szorzat-megfeleltetésben, amelyekre a-ból „irányított α-β-úton" el lehet jutni c-be. Íme egy példa:



Itt $\alpha = \{(a, e), (b, f), (b, h), (d, e)\}$,
$\beta = \{(e, s), (f, p), (g, q), (g, s)\}$, és a szorzatuk
$\alpha\beta = \{(a, s), (b, p), (d, s)\}$.

Feladat megfeleltetések szorzására

Feladat

Legyen $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |x - y| < 3\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Határozzuk meg α^2-et (azaz az $\alpha \circ \alpha$ relációt).

Megoldás

Megoldás: $(x, y) \in \alpha$ (vagy más jelöléssel $x \,\alpha\, y$) azt jelenti, hogy a számegyenesen az x és y egész számok távolsága 0, 1, vagy 2. Tehát a nyíldiagramon a nyilak hossza 0, 1, vagy 2. (Természetesen ezen nyilak balra is és jobbra is mehetnek.) Ha két ilyen nyilat „egymás után fűzünk", akkor olyan nyilat kapunk, amelynek a hossza legfeljebb 4, és nyilván minden ilyen nyilat megkapunk két α-nyíl egymás után fűzésével. Ezek szerint az eredmény: $\alpha^2 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |x - y| \leq 4\}$

Feladat megfeleltetések szorzására

Feladat

Legyen $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |x - y| < 3\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Határozzuk meg α^2-et (azaz az $\alpha \circ \alpha$ relációt).

Megoldás

Megoldás: $(x, y) \in \alpha$ (vagy más jelöléssel $x \, \alpha \, y$) azt jelenti, hogy a számegyenesen az x és y egész számok távolsága 0, 1, vagy 2. Tehát a nyíldiagramon a nyilak hossza 0, 1, vagy 2. (Természetesen ezen nyilak balra is és jobbra is mehetnek.) Ha két ilyen nyilat „egymás után fűzünk”, akkor olyan nyilat kapunk, amelynek a hossza legfeljebb 4, és nyilván minden ilyen nyilat megkapunk két α-nyíl egymás után fűzésével. Ezek szerint az eredmény:
$\alpha^2 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |x - y| \leq 4\}$

Feladat megfeleltetések szorzására

Feladat

Legyen $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |x - y| < 3\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Határozzuk meg α^2-et (azaz az $\alpha \circ \alpha$ relációt).

Megoldás

Megoldás: $(x, y) \in \alpha$ (vagy más jelöléssel $x \, \alpha \, y$) azt jelenti, hogy a számegyenesen az x és y egész számok távolsága 0, 1, vagy 2. Tehát a nyíldiagramon a nyilak hossza 0, 1, vagy 2. (Természetesen ezen nyilak balra is és jobbra is mehetnek.) Ha két ilyen nyilat „egymás után fűzünk”, akkor olyan nyilat kapunk, amelynek a hossza legfeljebb 4, és nyilván minden ilyen nyilat megkapunk két α-nyíl egymás után fűzésével. Ezek szerint az eredmény: $\alpha^2 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |x - y| \leq 4\}$

Feladat megfeleltetések szorzására

Feladat

Legyen $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |x - y| < 3\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Határozzuk meg α^2-et (azaz az $\alpha \circ \alpha$ relációt).

Megoldás

Megoldás: $(x, y) \in \alpha$ (vagy más jelöléssel $x \, \alpha \, y$) azt jelenti, hogy a számegyenesen az x és y egész számok távolsága 0, 1, vagy 2. Tehát a nyíldiagramon a nyilak hossza 0, 1, vagy 2. (Természetesen ezen nyilak balra is és jobbra is mehetnek.) Ha két ilyen nyilat „egymás után fűzünk", akkor olyan nyilat kapunk, amelynek a hossza legfeljebb 4, és nyilván minden ilyen nyilat megkapunk két α-nyíl egymás után fűzésével. Ezek szerint az eredmény:

$\alpha^2 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |x - y| \leq 4\}$

Feladat megfeleltetések szorzására

Feladat

Legyen $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |x - y| < 3\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Határozzuk meg α^2-et (azaz az $\alpha \circ \alpha$ relációt).

Megoldás

Megoldás: $(x, y) \in \alpha$ (vagy más jelöléssel $x \, \alpha \, y$) azt jelenti, hogy a számegyenesen az x és y egész számok távolsága 0, 1, vagy 2. Tehát a nyíldiagramon a nyilak hossza 0, 1, vagy 2. (Természetesen ezen nyilak balra is és jobbra is mehetnek.) Ha két ilyen nyilat „egymás után fűzünk", akkor olyan nyilat kapunk, amelynek a hossza legfeljebb 4, és nyilván minden ilyen nyilat megkapunk két α-nyíl egymás után fűzésével. Ezek szerint az eredmény: $\alpha^2 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |x - y| \leq 4\}$

Megjegyzés: a feladat nem volt teljesen egyértelműen fogalmazva, mert nem mondtuk meg, hogy mit jelent „α^2 meghatározása”. Például a szőrszálhasogatók ilyen eredményt is kihozhattak volna:

$$\alpha^2 = \alpha^3 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |x-y| \in \{5,6\}\},$$

amely szintén korrekt. De a feladat — hallgatólagosan — úgy értendő, hogy az eredményt minél egyszerűbb alakban adjuk meg. Persze „≤ 4” helyett „< 5” is írható lett volna.

Definíció

Az $\alpha \subseteq A \times B$ megfeleltetés **inverzén** az

$$\alpha^{-1} = \{(x,y) : (y,x) \in \alpha\} \subseteq B \times A$$

B-ből A-ba való megfeleltetést értjük. A nyíldiagrammon ezt úgy kapjuk, hogy minden nyilat megfordítunk.

Megjegyzés: a feladat nem volt teljesen egyértelműen fogalmazva, mert nem mondtuk meg, hogy mit jelent „α^2 meghatározása”. Például a szőrszálhasogatók ilyen eredményt is kihozhattak volna:

$$\alpha^2 = \alpha^3 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |x-y| \in \{5,6\}\},$$

amely szintén korrekt. De a feladat — hallgatólagosan — úgy értendő, hogy az eredményt minél egyszerűbb alakban adjuk meg. Persze „≤ 4” helyett „< 5” is írható lett volna.

Definíció

Az $\alpha \subseteq A \times B$ megfeleltetés **inverzén** az

$$\alpha^{-1} = \{(x,y) : (y,x) \in \alpha\} \subseteq B \times A$$

B-ből A-ba való megfeleltetést értjük. A nyíldiagrammon ezt úgy kapjuk, hogy minden nyilat megfordítunk.

Relációtulajdonságok

Definíció (Egy $\alpha \subseteq A \times A$ reláció esetén azt mondjuk, hogy α)

- **reflexív**, ha bármely $x \in A$-ra $(x, x) \in \alpha$.
- **szimmetrikus**, ha bármely $x, y \in A$-ra ha $(x, y) \in \alpha$, akkor $(y, x) \in \alpha$.
- **tranzitív**, ha bármely $x, y, z \in A$-ra ha $(x, y), (y, z) \in \alpha$, akkor $(x, z) \in \alpha$.
- **ekvivalencia(reláció)**, ha egyszerre reflexív, szimmetrikus és tranzitív.
- **antiszimmetrikus**, ha bármely $x, y \in A$-ra ha $(x, y), (y, x) \in \alpha$, akkor $x = y$.
- **dichotom**, ha bármely $x, y \in A$-ra $(x, y) \in \alpha$ vagy $(y, x) \in \alpha$.
- **részbenrendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív,
- **rendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív és dichotom.

Relációtulajdonságok

Definíció (Egy $\alpha \subseteq A \times A$ reláció esetén azt mondjuk, hogy α)

- **reflexív**, ha bármely $x \in A$-ra $(x, x) \in \alpha$.
- **szimmetrikus**, ha bármely $x, y \in A$-ra ha $(x, y) \in \alpha$, akkor $(y, x) \in \alpha$.
- **tranzitív**, ha bármely $x, y, z \in A$-ra ha $(x, y), (y, z) \in \alpha$, akkor $(x, z) \in \alpha$.
- **ekvivalencia(reláció)**, ha egyszerre reflexív, szimmetrikus és tranzitív.
- **antiszimmetrikus**, ha bármely $x, y \in A$-ra ha $(x, y), (y, x) \in \alpha$, akkor $x = y$.
- **dichotom**, ha bármely $x, y \in A$-ra $(x, y) \in \alpha$ vagy $(y, x) \in \alpha$.
- **részbenrendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív,
- **rendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív és dichotom.

Relációtulajdonságok

Definíció (Egy $\alpha \subseteq A \times A$ reláció esetén azt mondjuk, hogy α)

- **reflexív**, ha bármely $x \in A$-ra $(x, x) \in \alpha$.
- **szimmetrikus**, ha bármely $x, y \in A$-ra ha $(x, y) \in \alpha$, akkor $(y, x) \in \alpha$.
- **tranzitív**, ha bármely $x, y, z \in A$-ra ha $(x, y), (y, z) \in \alpha$, akkor $(x, z) \in \alpha$.
- **ekvivalencia(reláció)**, ha egyszerre reflexív, szimmetrikus és tranzitív.
- **antiszimmetrikus**, ha bármely $x, y \in A$-ra ha $(x, y), (y, x) \in \alpha$, akkor $x = y$.
- **dichotom**, ha bármely $x, y \in A$-ra $(x, y) \in \alpha$ vagy $(y, x) \in \alpha$.
- **részbenrendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív,
- **rendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív és dichotom.

Relációtulajdonságok

Definíció (Egy $\alpha \subseteq A \times A$ reláció esetén azt mondjuk, hogy α)

- **reflexív**, ha bármely $x \in A$-ra $(x, x) \in \alpha$.
- **szimmetrikus**, ha bármely $x, y \in A$-ra ha $(x, y) \in \alpha$, akkor $(y, x) \in \alpha$.
- **tranzitív**, ha bármely $x, y, z \in A$-ra ha $(x, y), (y, z) \in \alpha$, akkor $(x, z) \in \alpha$.
- **ekvivalencia(reláció)**, ha egyszerre reflexív, szimmetrikus és tranzitív.
- **antiszimmetrikus**, ha bármely $x, y \in A$-ra ha $(x, y), (y, x) \in \alpha$, akkor $x = y$.
- **dichotom**, ha bármely $x, y \in A$-ra $(x, y) \in \alpha$ vagy $(y, x) \in \alpha$.
- **részbenrendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív,
- **rendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív és dichotom.

Relációtulajdonságok

Definíció (Egy $\alpha \subseteq A \times A$ reláció esetén azt mondjuk, hogy α)

- **reflexív**, ha bármely $x \in A$-ra $(x, x) \in \alpha$.
- **szimmetrikus**, ha bármely $x, y \in A$-ra ha $(x, y) \in \alpha$, akkor $(y, x) \in \alpha$.
- **tranzitív**, ha bármely $x, y, z \in A$-ra ha $(x, y), (y, z) \in \alpha$, akkor $(x, z) \in \alpha$.
- **ekvivalencia(reláció)**, ha egyszerre reflexív, szimmetrikus és tranzitív.
- **antiszimmetrikus**, ha bármely $x, y \in A$-ra ha $(x, y), (y, x) \in \alpha$, akkor $x = y$.
- **dichotom**, ha bármely $x, y \in A$-ra $(x, y) \in \alpha$ vagy $(y, x) \in \alpha$.
- **részbenrendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív,
- **rendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív és dichotom.

Relációtulajdonságok

Definíció (Egy $\alpha \subseteq A \times A$ reláció esetén azt mondjuk, hogy α)

- **reflexív**, ha bármely $x \in A$-ra $(x, x) \in \alpha$.
- **szimmetrikus**, ha bármely $x, y \in A$-ra ha $(x, y) \in \alpha$, akkor $(y, x) \in \alpha$.
- **tranzitív**, ha bármely $x, y, z \in A$-ra ha $(x, y), (y, z) \in \alpha$, akkor $(x, z) \in \alpha$.
- **ekvivalencia(reláció)**, ha egyszerre reflexív, szimmetrikus és tranzitív.
- **antiszimmetrikus**, ha bármely $x, y \in A$-ra ha $(x, y), (y, x) \in \alpha$, akkor $x = y$.
- **dichotom**, ha bármely $x, y \in A$-ra $(x, y) \in \alpha$ vagy $(y, x) \in \alpha$.
- **részbenrendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív,
- **rendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív és dichotom.

Relációtulajdonságok

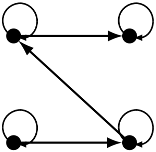
Definíció (Egy $\alpha \subseteq A \times A$ reláció esetén azt mondjuk, hogy α)

- **reflexív**, ha bármely $x \in A$-ra $(x, x) \in \alpha$.
- **szimmetrikus**, ha bármely $x, y \in A$-ra ha $(x, y) \in \alpha$, akkor $(y, x) \in \alpha$.
- **tranzitív**, ha bármely $x, y, z \in A$-ra ha $(x, y), (y, z) \in \alpha$, akkor $(x, z) \in \alpha$.
- **ekvivalencia(reláció)**, ha egyszerre reflexív, szimmetrikus és tranzitív.
- **antiszimmetrikus**, ha bármely $x, y \in A$-ra ha $(x, y), (y, x) \in \alpha$, akkor $x = y$.
- **dichotom**, ha bármely $x, y \in A$-ra $(x, y) \in \alpha$ vagy $(y, x) \in \alpha$.
- **részbenrendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív,
- **rendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív és dichotom.

Relációtulajdonságok

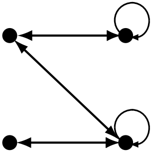
Definíció (Egy $\alpha \subseteq A \times A$ reláció esetén azt mondjuk, hogy α)

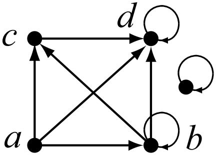
- **reflexív**, ha bármely $x \in A$-ra $(x, x) \in \alpha$.
- **szimmetrikus**, ha bármely $x, y \in A$-ra ha $(x, y) \in \alpha$, akkor $(y, x) \in \alpha$.
- **tranzitív**, ha bármely $x, y, z \in A$-ra ha $(x, y), (y, z) \in \alpha$, akkor $(x, z) \in \alpha$.
- **ekvivalencia(reláció)**, ha egyszerre reflexív, szimmetrikus és tranzitív.
- **antiszimmetrikus**, ha bármely $x, y \in A$-ra ha $(x, y), (y, x) \in \alpha$, akkor $x = y$.
- **dichotom**, ha bármely $x, y \in A$-ra $(x, y) \in \alpha$ vagy $(y, x) \in \alpha$.
- **részbenrendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív,
- **rendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív és dichotom.



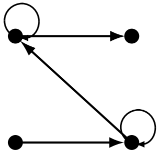
reflexív = minden pontban hurokél

szimmetrikus = minden él kétirányú (a kétirányú él két - eltérő irányítású élet jelent)

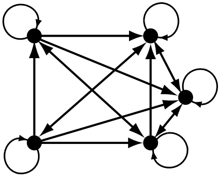




tranzitív = bármely két pontra, ha az egyikből irányított élek mentén eljuthatunk a másikba, akkor egyetlen irányított él mentén is eljuthatunk. Pl. az a - b - c - d útvonal miatt kell hogy legyen él a -ból d -be.

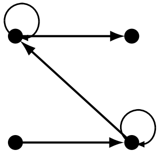


antiszimmetrikus = két különböző pont között legfeljebb csak az egyik irányban megy él.

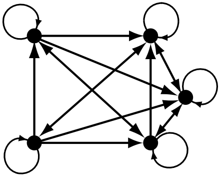


dichotom = bármely két pont között - legalább az egyik irányban - megy él.

Nyilvánvaló, hogy minden dichotom reláció egyúttal reflexív is (hiszen a „bármely két pont” egybe is eshet).



antiszimmetrikus = két különböző pont között legfeljebb csak az egyik irányban megy él.



dichotom = bármely két pont között - legalább az egyik irányban - megy él.

Nyilvánvaló, hogy minden dichotom reláció egyúttal reflexív is (hiszen a „bármely két pont” egybe is eshet).

Feladat

A tanultak közül mely relációtulajdonsággal rendelkeznek az alábbi relációk:

- $\alpha = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a + b = 2\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,
- $\beta = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : a \mid b\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,
- $\gamma = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a \leq b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,
- $\delta = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : |a| \leq |b|\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,
- $\mu = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : |a| = |b|\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,
- $\rho = \{(X, Y) \in P(A) : X \subseteq Y\} \subseteq P(A) \times P(A)$, ahol A halmaz és $|A| \geq 2$.

Megoldás/α

Megoldás ($\alpha = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : a+b=2\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$)

Reflexív? Pl. $3+3 \neq 2$, így $(3,3) \notin \alpha$, tehát NEM reflexív.
Szimmetrikus? IGEN, hiszen $x+y=2$ akkor és csak akkor, ha $y+x=2$ (mert az összeadás kommutatív).
Tranzitív? Igaz-e, hogy ha $a+b=2$ és $b+c=2$, akkor $a+c=2$? Nyilván NEM, hiszen pl. $a=c=0$, $b=2$ esetén sem teljesül.
Antiszimmetrikus? Igaz-e, hogy ha $a+b=2$ és $b+a=2$, akkor szükségképpen $a=b$? NEM, pl. $a=-1$, $b=3$ ellenpélda.
Az eddigiekből: NEM ekvivalencia, NEM részbenrendezés, és NEM rendezés. Végül NEM dichotom, hiszen pl. $(3,4) \notin \alpha$ és $(4,3) \notin \alpha$.

Megoldás/α

Megoldás ($\alpha = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a + b = 2\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$)

Reflexív? Pl. $3 + 3 \neq 2$, így $(3, 3) \notin \alpha$, tehát NEM reflexív.
Szimmetrikus? IGEN, hiszen $x + y = 2$ akkor és csak akkor, ha $y + x = 2$ (mert az összeadás kommutatív).
Tranzitív? Igaz-e, hogy ha $a + b = 2$ és $b + c = 2$, akkor $a + c = 2$? Nyilván NEM, hiszen pl. $a = c = 0$, $b = 2$ esetén sem teljesül.
Antiszimmetrikus? Igaz-e, hogy ha $a + b = 2$ és $b + a = 2$, akkor szükségképpen $a = b$? NEM, pl. $a = -1$, $b = 3$ ellenpélda.
Az eddigiekből: NEM ekvivalencia, NEM részbenrendezés, és NEM rendezés. Végül NEM dichotom, hiszen pl. $(3, 4) \notin \alpha$ és $(4, 3) \notin \alpha$.

Megoldás ($\alpha = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a + b = 2\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$)

Reflexív? Pl. $3 + 3 \neq 2$, így $(3, 3) \notin \alpha$, tehát NEM reflexív.
Szimmetrikus? **IGEN**, hiszen $x + y = 2$ akkor és csak akkor, ha $y + x = 2$ (mert az összeadás kommutatív).
Tranzitív? Igaz-e, hogy ha $a + b = 2$ és $b + c = 2$, akkor $a + c = 2$? Nyilván NEM, hiszen pl. $a = c = 0$, $b = 2$ esetén sem teljesül.
Antiszimmetrikus? Igaz-e, hogy ha $a + b = 2$ és $b + a = 2$, akkor szükségképpen $a = b$? NEM, pl. $a = -1$, $b = 3$ ellenpélda.
Az eddigiekből: NEM ekvivalencia, NEM részbenrendezés, és NEM rendezés. Végül NEM dichotom, hiszen pl. $(3, 4) \notin \alpha$ és $(4, 3) \notin \alpha$.

Megoldás/α

Megoldás ($\alpha = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a + b = 2\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$)

Reflexív? Pl. $3 + 3 \neq 2$, így $(3, 3) \notin \alpha$, tehát NEM reflexív.
Szimmetrikus? **IGEN**, hiszen $x + y = 2$ akkor és csak akkor, ha $y + x = 2$ (mert az összeadás kommutatív).
Tranzitív? Igaz-e, hogy ha $a + b = 2$ és $b + c = 2$, akkor $a + c = 2$? Nyilván NEM, hiszen pl. $a = c = 0$, $b = 2$ esetén sem teljesül.
Antiszimmetrikus? Igaz-e, hogy ha $a + b = 2$ és $b + a = 2$, akkor szükségképpen $a = b$? NEM, pl. $a = -1$, $b = 3$ ellenpélda.
Az eddigiekből: NEM ekvivalencia, NEM részbenrendezés, és NEM rendezés. Végül NEM dichotom, hiszen pl. $(3, 4) \notin \alpha$ és $(4, 3) \notin \alpha$.

Megoldás ($\alpha = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a + b = 2\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$)

Reflexív? Pl. $3 + 3 \neq 2$, így $(3, 3) \notin \alpha$, tehát NEM reflexív.
Szimmetrikus? **IGEN**, hiszen $x + y = 2$ akkor és csak akkor, ha $y + x = 2$ (mert az összeadás kommutatív).
Tranzitív? Igaz-e, hogy ha $a + b = 2$ és $b + c = 2$, akkor $a + c = 2$?
Nyilván NEM, hiszen pl. $a = c = 0$, $b = 2$ esetén sem teljesül.
Antiszimmetrikus? Igaz-e, hogy ha $a + b = 2$ és $b + a = 2$, akkor szükségképpen $a = b$? NEM, pl. $a = -1$, $b = 3$ ellenpélda.
Az eddigiekből: NEM ekvivalencia, NEM részbenrendezés, és NEM rendezés. Végül NEM dichotom, hiszen pl. $(3, 4) \notin \alpha$ és $(4, 3) \notin \alpha$.

Megoldás ($\alpha = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : a+b=2\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$)

Reflexív? Pl. $3+3 \neq 2$, így $(3,3) \notin \alpha$, tehát NEM reflexív.
Szimmetrikus? **IGEN**, hiszen $x+y=2$ akkor és csak akkor, ha $y+x=2$ (mert az összeadás kommutatív).
Tranzitív? Igaz-e, hogy ha $a+b=2$ és $b+c=2$, akkor $a+c=2$? Nyilván NEM, hiszen pl. $a=c=0$, $b=2$ esetén sem teljesül.
Antiszimmetrikus? Igaz-e, hogy ha $a+b=2$ és $b+a=2$, akkor szükségképpen $a=b$? NEM, pl. $a=-1$, $b=3$ ellenpélda.
Az eddigiekből: NEM ekvivalencia, NEM részbenrendezés, és NEM rendezés. Végül NEM dichotom, hiszen pl. $(3,4) \notin \alpha$ és $(4,3) \notin \alpha$.

Megoldás/α

Megoldás ($\alpha = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a + b = 2\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$)

Reflexív? Pl. $3 + 3 \neq 2$, így $(3, 3) \notin \alpha$, tehát NEM reflexív.
Szimmetrikus? **IGEN**, hiszen $x + y = 2$ akkor és csak akkor, ha $y + x = 2$ (mert az összeadás kommutatív).
Tranzitív? Igaz-e, hogy ha $a + b = 2$ és $b + c = 2$, akkor $a + c = 2$? Nyilván NEM, hiszen pl. $a = c = 0$, $b = 2$ esetén sem teljesül.
Antiszimmetrikus? Igaz-e, hogy ha $a + b = 2$ és $b + a = 2$, akkor szükségképpen $a = b$? NEM, pl. $a = -1$, $b = 3$ ellenpélda.
Az eddigiekből: NEM ekvivalencia, NEM részbenrendezés, és NEM rendezés. Végül NEM dichotom, hiszen pl. $(3, 4) \notin \alpha$ és $(4, 3) \notin \alpha$.

Megoldás ($\alpha = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a + b = 2\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$)

Reflexív? Pl. $3 + 3 \neq 2$, így $(3, 3) \notin \alpha$, tehát NEM reflexív.
Szimmetrikus? **IGEN**, hiszen $x + y = 2$ akkor és csak akkor, ha $y + x = 2$ (mert az összeadás kommutatív).
Tranzitív? Igaz-e, hogy ha $a + b = 2$ és $b + c = 2$, akkor $a + c = 2$? Nyilván NEM, hiszen pl. $a = c = 0$, $b = 2$ esetén sem teljesül.
Antiszimmetrikus? Igaz-e, hogy ha $a + b = 2$ és $b + a = 2$, akkor szükségképpen $a = b$? NEM, pl. $a = -1$, $b = 3$ ellenpélda.
Az eddigiekből: NEM ekvivalencia, NEM részbenrendezés, és NEM rendezés. Végül NEM dichotom, hiszen pl. $(3, 4) \notin \alpha$ és $(4, 3) \notin \alpha$.

Megoldás ($\alpha = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : a+b=2\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$)

Reflexív? Pl. $3+3 \neq 2$, így $(3,3) \notin \alpha$, tehát NEM reflexív.
Szimmetrikus? **IGEN**, hiszen $x+y=2$ akkor és csak akkor, ha $y+x=2$ (mert az összeadás kommutatív).
Tranzitív? Igaz-e, hogy ha $a+b=2$ és $b+c=2$, akkor $a+c=2$? Nyilván NEM, hiszen pl. $a=c=0$, $b=2$ esetén sem teljesül.
Antiszimmetrikus? Igaz-e, hogy ha $a+b=2$ és $b+a=2$, akkor szükségképpen $a=b$? NEM, pl. $a=-1$, $b=3$ ellenpélda.
Az eddigiekből: NEM ekvivalencia, NEM részbenrendezés, és NEM rendezés. Végül NEM dichotom, hiszen pl. $(3,4) \notin \alpha$ és $(4,3) \notin \alpha$.

Megoldás ($\alpha = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : a+b=2\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$)

Reflexív? Pl. $3+3 \neq 2$, így $(3,3) \notin \alpha$, tehát NEM reflexív.
Szimmetrikus? **IGEN**, hiszen $x+y=2$ akkor és csak akkor, ha $y+x=2$ (mert az összeadás kommutatív).
Tranzitív? Igaz-e, hogy ha $a+b=2$ és $b+c=2$, akkor $a+c=2$? Nyilván NEM, hiszen pl. $a=c=0$, $b=2$ esetén sem teljesül.
Antiszimmetrikus? Igaz-e, hogy ha $a+b=2$ és $b+a=2$, akkor szükségképpen $a=b$? NEM, pl. $a=-1$, $b=3$ ellenpélda.
Az eddigiekből: NEM ekvivalencia, NEM részbenrendezés, és NEM rendezés. Végül NEM dichotom, hiszen pl. $(3,4) \notin \alpha$ és $(4,3) \notin \alpha$.

Megoldás ($\beta = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : a \mid b\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$)

Ez az ún. **oszthatósági reláció** $\mathbb{N}$-en. Nyilván reflexív (minden szám osztható önmagával) . Antiszimmetrikus, hiszen ha két pozitív egész szám egymást kölcsönösen osztja, akkor egyenlőek. Tranzitív is (ha a osztja b-t és b osztja c-t, akkor a osztja c-t: csakugyan, ha alkalmas x, y pozitív egész számokra $b = xa$ és $c = yb$, akkor $c = yxa$, azaz $a \mid c$. Nem szimmetrikus, hiszen pl. $2 \mid 6$, de a 6 nem osztja a 2-t. Nem dichotom, hiszen pl. a 3 és az 5 számokat tekintve egyik sem osztja a másikat.
Az összetett tulajdonságokra a válasz a fentiekből adódik: β részbenrendezés, de nem rendezés és nem ekvivalencia.

Megoldás/β

Megoldás ($\beta = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : a \mid b\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$)

Ez az ún. **oszthatósági reláció** $\mathbb{N}$-en. Nyilván reflexív (minden szám osztható önmagával) . Antiszimmetrikus, hiszen ha két pozitív egész szám egymást kölcsönösen osztja, akkor egyenlőek. Tranzitív is (ha a osztja b-t és b osztja c-t, akkor a osztja c-t: csakugyan, ha alkalmas x, y pozitív egész számokra $b = xa$ és $c = yb$, akkor $c = yxa$, azaz $a \mid c$. Nem szimmetrikus, hiszen pl. $2 \mid 6$, de a 6 nem osztja a 2-t. Nem dichotom, hiszen pl. a 3 és az 5 számokat tekintve egyik sem osztja a másikat.

Az összetett tulajdonságokra a válasz a fentiekből adódik: β részbenrendezés, de nem rendezés és nem ekvivalencia.

Megoldás/β

Megoldás ($\beta = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : a \mid b\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$)

Ez az ún. **oszthatósági reláció** $\mathbb{N}$-en. Nyilván reflexív (minden szám osztható önmagával) . Antiszimmetrikus, hiszen ha két pozitív egész szám egymást kölcsönösen osztja, akkor egyenlőek. Tranzitív is (ha a osztja b-t és b osztja c-t, akkor a osztja c-t: csakugyan, ha alkalmas x, y pozitív egész számokra $b = xa$ és $c = yb$, akkor $c = yxa$, azaz $a \mid c$. Nem szimmetrikus, hiszen pl. $2 \mid 6$, de a 6 nem osztja a 2-t. Nem dichotom, hiszen pl. a 3 és az 5 számokat tekintve egyik sem osztja a másikat.
Az összetett tulajdonságokra a válasz a fentiekből adódik: β részbenrendezés, de nem rendezés és nem ekvivalencia.

Megoldás ($\beta = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : a \mid b\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$)

Ez az ún. **oszthatósági reláció** $\mathbb{N}$-en. Nyilván reflexív (minden szám osztható önmagával) . Antiszimmetrikus, hiszen ha két pozitív egész szám egymást kölcsönösen osztja, akkor egyenlőek. Tranzitív is (ha a osztja b-t és b osztja c-t, akkor a osztja c-t: csakugyan, ha alkalmas x, y pozitív egész számokra $b = xa$ és $c = yb$, akkor $c = yxa$, azaz $a \mid c$. Nem szimmetrikus, hiszen pl. $2 \mid 6$, de a 6 nem osztja a 2-t. Nem dichotom, hiszen pl. a 3 és az 5 számokat tekintve egyik sem osztja a másikat.

Az összetett tulajdonságokra a válasz a fentiekből adódik: β részbenrendezés, de nem rendezés és nem ekvivalencia.

Megoldás ($\beta = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : a \mid b\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$)

Ez az ún. **oszthatósági reláció** $\mathbb{N}$-en. Nyilván reflexív (minden szám osztható önmagával) . Antiszimmetrikus, hiszen ha két pozitív egész szám egymást kölcsönösen osztja, akkor egyenlőek. Tranzitív is (ha a osztja b-t és b osztja c-t, akkor a osztja c-t: csakugyan, ha alkalmas x, y pozitív egész számokra $b = xa$ és $c = yb$, akkor $c = yxa$, azaz $a \mid c$. Nem szimmetrikus, hiszen pl. $2 \mid 6$, de a 6 nem osztja a 2-t. Nem dichotom, hiszen pl. a 3 és az 5 számokat tekintve egyik sem osztja a másikat.

Az összetett tulajdonságokra a válasz a fentiekből adódik: β részbenrendezés, de nem rendezés és nem ekvivalencia.

Megoldás/β

Megoldás ($\beta = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : a \mid b\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$)

Ez az ún. **oszthatósági reláció** $\mathbb{N}$-en. Nyilván reflexív (minden szám osztható önmagával) . Antiszimmetrikus, hiszen ha két pozitív egész szám egymást kölcsönösen osztja, akkor egyenlőek. Tranzitív is (ha a osztja b-t és b osztja c-t, akkor a osztja c-t: csakugyan, ha alkalmas x, y pozitív egész számokra $b = xa$ és $c = yb$, akkor $c = yxa$, azaz $a \mid c$. Nem szimmetrikus, hiszen pl. $2 \mid 6$, de a 6 nem osztja a 2-t. Nem dichotom, hiszen pl. a 3 és az 5 számokat tekintve egyik sem osztja a másikat.
Az összetett tulajdonságokra a válasz a fentiekből adódik: β részbenrendezés, de nem rendezés és nem ekvivalencia.

Megoldás/γ, stb.

Megoldás

- $\gamma = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a \le b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív, dichotom, tehát rendezés és persze részbenrendezés is. De nem szimmetrikus, ezért nem ekvivalencia.
- $\delta = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : |a| \le |b|\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: reflexív, tranzitív, dichotom, de nem szimmetrikus és nem antiszimmetrikus (mert pl. $(1, -1), (-1, 1) \in \delta$, de $1 \ne -1$). Ezért nem ekvivalencia, nem részbenrendezés, és akkor persze nem rendezés.
- $\mu = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : |a| = |b|\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: reflexív, szimmetrikus, tranzitív, tehát ekvivalencia. Nem dichotom. Nem antiszimmetrikus (mert pl. $(1, -1), (-1, 1) \in \mu$, de $1 \ne -1$). Ezért nem részbenrendezés, és akkor persze nem rendezés.
- $\rho = \{(X, Y) \in P(A) : X \subseteq Y\} \subseteq P(A) \times P(A)$, ahol A halmaz és $|A| \ge 2$: reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív, tehát részbenrendezés. Mivel $|A| \ge 2$, nem dichotom. Ezért nem rendezés. Nem szimmetrikus, ezért nem ekvivalencia.

Feladat relációszorzásra és relációtulajdonságokra

Feladat

Mutassuk meg, hogy tetszőleges α reláció akkor és csak akkor tranzitív, ha $\alpha\alpha \subseteq \alpha$.

Megoldás

Tegyük fel, hogy $\alpha \subseteq A^2$ tranzitív. Ha $(x, z) \in \alpha\alpha$, akkor a szorzás definíciója miatt van olyan $y \in A$, hogy $(x, y), (y, z) \in \alpha$. De α tranzitivitása miatt innen $(x, z) \in \alpha$. Tehát $\alpha\alpha \subseteq \alpha$, hiszen a baloldal tetszőleges (x, z) eleme a jobboldalnak is eleme.
Most azt tegyük fel, hogy $\alpha\alpha \subseteq \alpha$. A tranzitivitás kimutatásához legyen $(x, y) \in \alpha$ és $(y, z) \in \alpha$. Mivel most x és z „között" létezik y, kapjuk, hogy $(x, z) \in \alpha\alpha$. A feltevés szerint így $(x, z) \in \alpha$. Ezzel α tranzitivitását igazoltuk.

Feladat relációszorzásra és relációtulajdonságokra

Feladat

Mutassuk meg, hogy tetszőleges α reláció akkor és csak akkor tranzitív, ha $\alpha\alpha \subseteq \alpha$.

Megoldás

Tegyük fel, hogy $\alpha \subseteq A^2$ tranzitív. Ha $(x, z) \in \alpha\alpha$, akkor a szorzás definíciója miatt van olyan $y \in A$, hogy $(x, y), (y, z) \in \alpha$. De α tranzitivitása miatt innen $(x, z) \in \alpha$. Tehát $\alpha\alpha \subseteq \alpha$, hiszen a baloldal tetszőleges (x, z) eleme a jobboldalnak is eleme.
Most azt tegyük fel, hogy $\alpha\alpha \subseteq \alpha$. A tranzitivitás kimutatásához legyen $(x, y) \in \alpha$ és $(y, z) \in \alpha$. Mivel most x és z „között" létezik y, kapjuk, hogy $(x, z) \in \alpha\alpha$. A feltevés szerint így $(x, z) \in \alpha$. Ezzel α tranzitivitását igazoltuk.

Másik feladat relációszorzásra és relációtulajdonságokra

Feladat (Mutassuk meg, hogy)

két (ugyanazon halmazon értelmezett) reflexív reláció szorzata is reflexív. Igaz-e ugyenez „reflexív” helyett „szimmetrikusra”?

Megoldás

Legyen $\alpha \subseteq A^2$ és $\beta \subseteq A^2$ reflexív. Ekkor bármely $x \in A$-ra $(x, x) \in \alpha$ és $(x, x) \in \beta$, ezért $(x, x) \in \alpha\beta$. Tehát $\alpha\beta$ is reflexív. Az viszont nem igaz általában, hogy szimmetrikusak szorzata szimmetrikus. Mert ha megpróbáljuk igazolni, akkor feltesszük, hogy $(x, z) \in \alpha\beta$. Ebből kapunk egy y elemet, amelyre $(x, y) \in \alpha$ és $(x, y) \in \beta$, és a szimmetriája miatt $(y, x) \in \alpha$ és $(z, y) \in \beta$. Ebből kellene kihozni, hogy $(z, x) \in \alpha\beta$, azaz kellene egy olyan $t \in A$ elem, amelyre $(z, t) \in \alpha$ és $(t, x) \in \beta$. Nem találunk; éppen ez segít ellenpéldát keresni: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ és tényleg nincsen t! Például ha $A = \{1, 2, 3\}$, $\alpha = \{(1, 2), (2, 1)\} \subseteq A^2$ és $\beta = \{(2, 3), (3, 2)\} \subseteq A^2$ ellenpélda.

Másik feladat relációszorzásra és relációtulajdonságokra

Feladat (Mutassuk meg, hogy)

két (ugyanazon halmazon értelmezett) reflexív reláció szorzata is reflexív. Igaz-e ugyenez „reflexív" helyett „szimmetrikusra"?

Megoldás

Legyen $\alpha \subseteq A^2$ és $\beta \subseteq A^2$ reflexív. Ekkor bármely $x \in A$-ra $(x, x) \in \alpha$ és $(x, x) \in \beta$, ezért $(x, x) \in \alpha\beta$. Tehát $\alpha\beta$ is reflexív. Az viszont nem igaz általában, hogy szimmetrikusak szorzata szimmetrikus. Mert ha megpróbáljuk igazolni, akkor feltesszük, hogy $(x, z) \in \alpha\beta$. Ebből kapunk egy y elemet, amelyre $(x, y) \in \alpha$ és $(x, y) \in \beta$, és a szimmetriája miatt $(y, x) \in \alpha$ és $(z, y) \in \beta$. Ebből kellene kihozni, hogy $(z, x) \in \alpha\beta$, azaz kellene egy olyan $t \in A$ elem, amelyre $(z, t) \in \alpha$ és $(t, x) \in \beta$. Nem találunk; éppen ez segít ellenpéldát keresni: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ és tényleg nincsen t! Például ha $A = \{1, 2, 3\}$, $\alpha = \{(1, 2), (2, 1)\} \subseteq A^2$ és $\beta = \{(2, 3), (3, 2)\} \subseteq A^2$ ellenpélda.

Feladat

Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\alpha \subseteq A^2$ reláció akkor és csak akkor szimmetrikus, ha $\alpha \subseteq \alpha^{-1}$.

Megoldás

Tegyük fel, hogy α szimmetrikus. Ekkor $\alpha^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in \alpha\}$, de a szimmetria miatt ez $= \{(x, y) : (x, y) \in \alpha\} = \alpha$. Tehát $\alpha = \alpha^{-1}$, és így annál inkább $\alpha \subseteq \alpha^{-1}$. Fordítva, most tegyük fel, hogy $\alpha \subseteq \alpha^{-1}$. Ha $(x, y) \in \alpha$, akkor a feltevés szerint $(x, y) \in \alpha^{-1}$ is teljesül. De az inverz definíciója miatt ez azt jelenti, hogy $(y, x) \in \alpha$. Tehát ha $(x, y) \in \alpha$, akkor $(y, x) \in \alpha$. Azaz α szimmetrikus.

További feladat relációszorzásra és relációtulajdonságokra

Feladat

Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\alpha \subseteq A^2$ reláció akkor és csak akkor szimmetrikus, ha $\alpha \subseteq \alpha^{-1}$.

Megoldás

Tegyük fel, hogy α szimmetrikus. Ekkor $\alpha^{-1} = \{(x,y) : (y,x) \in \alpha\}$, de a szimmetria miatt ez $= \{(x,y) : (x,y) \in \alpha\} = \alpha$. Tehát $\alpha = \alpha^{-1}$, és így annál inkább $\alpha \subseteq \alpha^{-1}$. Fordítva, most tegyük fel, hogy $\alpha \subseteq \alpha^{-1}$. Ha $(x,y) \in \alpha$, akkor a feltevés szerint $(x,y) \in \alpha^{-1}$ is teljesül. De az inverz definíciója miatt ez azt jelenti, hogy $(y,x) \in \alpha$. Tehát ha $(x,y) \in \alpha$, akkor $(y,x) \in \alpha$. Azaz α szimmetrikus.

Még egy feladat relációszorzásra és relációtulajdonságokra

Feladat

Mutassuk meg, hogy ha az $\alpha, \beta \subseteq A^2$ relációk részbenrendezések, akkor az $\alpha \cap \beta$ is az. Igaz-e ugyanez, ha részbenrendezés helyett rendezést mondunk?

Megoldás

Mivel bármely $a \in A$ esetén $(a, a) \in \alpha$ és $(a, a) \in \beta$, ezért $(a, a) \in \alpha \cap \beta$. Tehát a metszet reflexív. Legyen $(a, b), (b, a) \in \alpha \cap \beta$ tetszőleges. Ekkor speciel $(a, b), (b, a) \in \alpha$, és az α antiszimmetriája miatt $a = b$. Tehát a metszet antiszimmetrikus. Legyen $(a, b), (b, c) \in \alpha \cap \beta$ tetszőleges. Ekkor $(a, b), (b, c) \in \alpha$, és így α tranzitivitásából $(a, c) \in \alpha$. Hasonlóan, $(a, b), (b, c) \in \beta$, és így β tranzitivitásából $(a, c) \in \beta$. Így $(a, c) \in \alpha \cap \beta$. Tehát a metszet tranzitív. Ezzel beláttuk, hogy $\alpha \cap \beta$ részbenrendezés. Rendezésekre nem igaz; ellenpélda: α a $\mathbb{Z}$ szokásos rendezése ($\leq$) és $\beta = \alpha^{-1}$ (azaz $\geq$).

Még egy feladat relációszorzásra és relációtulajdonságokra

Feladat

Mutassuk meg, hogy ha az $\alpha, \beta \subseteq A^2$ relációk részbenrendezések, akkor az $\alpha \cap \beta$ is az. Igaz-e ugyanez, ha részbenrendezés helyett rendezést mondunk?

Megoldás

Mivel bármely $a \in A$ esetén $(a, a) \in \alpha$ és $(a, a) \in \beta$, ezért $(a, a) \in \alpha \cap \beta$. Tehát a metszet reflexív. Legyen $(a, b), (b, a) \in \alpha \cap \beta$ tetszőleges. Ekkor speciel $(a, b), (b, a) \in \alpha$, és az α antiszimmetriája miatt $a = b$. Tehát a metszet antiszimmetrikus. Legyen $(a, b), (b, c) \in \alpha \cap \beta$ tetszőleges. Ekkor $(a, b), (b, c) \in \alpha$, és így α tranzitivitásából $(a, c) \in \alpha$. Hasonlóan, $(a, b), (b, c) \in \beta$, és így β tranzitivitásából $(a, c) \in \beta$. Így $(a, c) \in \alpha \cap \beta$. Tehát a metszet tranzitív. Ezzel beláttuk, hogy $\alpha \cap \beta$ részbenrendezés. Rendezésekre nem igaz; ellenpélda: α a $\mathbb{Z}$ szokásos rendezése $(\leq)$ és $\beta = \alpha^{-1}$ (azaz $\geq$).

Újabb feladat relációtulajdonságokra

Feladat

Legyen $A = \{0, 1, \ldots, 9\}$ és $\alpha = \{(x, y) \in A^2 : x < y - 1\}$.
Ekvivalencia-e az

$$\alpha^{-1} \cap (\alpha^{-1}\alpha\alpha)$$

reláció?

Megoldás

Nem, mert tetszőleges $x \in A$-ra (bár az is elegendő lenne, hogy létezik ilyen $x \in A$) $(x, x) \notin \alpha$ miatt $(x, x) \notin \alpha^{-1}$, tehát (x, x) nem eleme a metszet első tényezőjének, ezért a metszetnek sem. Tehát a kérdéses reláció nem reflexív, így nem ekvivalencia.

Újabb feladat relációtulajdonságokra

Feladat

Legyen $A = \{0, 1, \ldots, 9\}$ és $\alpha = \{(x, y) \in A^2 : x < y - 1\}$.
Ekvivalencia-e az

$$\alpha^{-1} \cap (\alpha^{-1}\alpha\alpha)$$

reláció?

Megoldás

Nem, mert tetszőleges $x \in A$-ra (bár az is elegendő lenne, hogy létezik ilyen $x \in A$) $(x, x) \notin \alpha$ miatt $(x, x) \notin \alpha^{-1}$, tehát (x, x) nem eleme a metszet első tényezőjének, ezért a metszetnek sem. Tehát a kérdéses reláció nem reflexív, így nem ekvivalencia.

Összefüggés a $\circ$ és a $^{-1}$ között

Tétel

Ha $\alpha \subseteq A \times B$, $\beta \subseteq B \times C$ és $\gamma \subseteq C \times D$ megfeleltetések, akkor

- $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$, *ahol mindkét oldalon A-ból D-be menő megfeleltetés áll* ***(asszociativitás)****, és*
- $(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}$ *(mindkét oldal C-ből A-ba való megf.)*

Figyeljük meg, hogy a szorzat (amely **nem** kommutatív) invertálásakor a tényezők sorrendje megfordul. A bizonyítás nem nehezebb az eddigi feladatoknál; nem részletezzük.

A leképezések speciális megfeleltetések, ezért mint megfeleltetések szorozhatók. Megmutatható, hogy az így definiált szorzat szintén leképezés, és megegyezik az alábbi definícióban szereplővel. (De az alábbi definíciót kényelmesebb lesz leképezések esetében használnunk.)

Tétel

Ha $\alpha \subseteq A \times B$, $\beta \subseteq B \times C$ és $\gamma \subseteq C \times D$ megfeleltetések, akkor

- $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$, *ahol mindkét oldalon A-ból D-be menő megfeleltetés áll* ***(asszociativitás)***, *és*
- $(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}$ *(mindkét oldal C-ből A-ba való megf.)*

Figyeljük meg, hogy a szorzat (amely **nem** kommutatív) invertálásakor a tényezők sorrendje megfordul. A bizonyítás nem nehezebb az eddigi feladatoknál; nem részletezzük.

A leképezések speciális megfeleltetések, ezért mint megfeleltetések szorozhatók. Megmutatható, hogy az így definiált szorzat szintén leképezés, és megegyezik az alábbi definícióban szereplővel. (De az alábbi definíciót kényelmesebb lesz leképezések esetében használnunk.)

Összefüggés a $\circ$ és a $^{-1}$ között

Tétel

Ha $\alpha \subseteq A \times B$, $\beta \subseteq B \times C$ és $\gamma \subseteq C \times D$ megfeleltetések, akkor

- $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$, *ahol mindkét oldalon A-ból D-be menő megfeleltetés áll* ***(asszociativitás)***, *és*
- $(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}$ *(mindkét oldal C-ből A-ba való megf.)*

Figyeljük meg, hogy a szorzat (amely **nem** kommutatív) invertálásakor a tényezők sorrendje megfordul. A bizonyítás nem nehezebb az eddigi feladatoknál; nem részletezzük.
A leképezések speciális megfeleltetések, ezért mint megfeleltetések szorozhatók. Megmutatható, hogy az így definiált szorzat szintén leképezés, és megegyezik az alábbi definícióban szereplővel. (De az alábbi definíciót kényelmesebb lesz leképezések esetében használnunk.)

Leképezések szorzása

Definíció

Legyen $\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to C$ leképezés. Ekkor a szorzatukon a $\varphi\psi : A \to C$, $a \to (a\varphi)\psi$ leképezést értjük.

Megjegyzés

Mi jobbról írjuk a leképezéseket, és ennek köszönhetően érvényes $a \in A$ esetén a tetszetős $a(\varphi\psi) = (a\varphi)\psi$ formula (amely formailag az asszociativitásra emlékeztet). (A Kalkulus tantárgyban a függvényeket — szintén leképezések — balról írják, a szorzatukat összetett függvénynek nevezik.)
Ha a leképezést mint valamilyen végrehajtandó folyamatot, cselekedetet képzeljük el, akkor a szorzásuk az egymás utáni végrehajtást jelenti. Ezen elképzelés nem áll messze a valóságtól pl. abban az esetben, amikor φ is és ψ is egy-egy számítógépes program, amely az inputhoz az outputot rendeli — ekkor a szorzatleképezés a két program egymás utáni végrehajtását jelenti úgy, hogy az első outputja a második inputja.

Leképezések szorzása

Definíció

Legyen $\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to C$ leképezés. Ekkor a szorzatukon a $\varphi\psi : A \to C$, $a \to (a\varphi)\psi$ leképezést értjük.

Megjegyzés

Mi jobbról írjuk a leképezéseket, és ennek köszönhetően érvényes $a \in A$ esetén a tetszetős $a(\varphi\psi) = (a\varphi)\psi$ formula (amely formailag az asszociativitásra emlékeztet). (A Kalkulus tantárgyban a függvényeket — szintén leképezések — balról írják, a szorzatukat összetett függvénynek nevezik.)

Ha a leképezést mint valamilyen végrehajtandó folyamatot, cselekedetet képzeljük el, akkor a szorzásuk az egymás utáni végrehajtást jelenti. Ezen elképzelés nem áll messze a valóságtól pl. abban az esetben, amikor φ is és ψ is egy-egy számítógépes program, amely az inputhoz az outputot rendeli — ekkor a szorzatleképezés a két program egymás utáni végrehajtását jelenti úgy, hogy az első outputja a második inputja.

Leképezések szorzása

Definíció

Legyen $\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to C$ leképezés. Ekkor a szorzatukon a $\varphi\psi : A \to C$, $a \to (a\varphi)\psi$ leképezést értjük.

Megjegyzés

Mi jobbról írjuk a leképezéseket, és ennek köszönhetően érvényes $a \in A$ esetén a tetszetős $a(\varphi\psi) = (a\varphi)\psi$ formula (amely formailag az asszociativitásra emlékeztet). (A Kalkulus tantárgyban a függvényeket — szintén leképezések — balról írják, a szorzatukat összetett függvénynek nevezik.)
Ha a leképezést mint valamilyen végrehajtandó folyamatot, cselekedetet képzeljük el, akkor a szorzásuk az egymás utáni végrehajtást jelenti. Ezen elképzelés nem áll messze a valóságtól pl. abban az esetben, amikor φ is és ψ is egy-egy számítógépes program, amely az inputhoz az outputot rendeli — ekkor a szorzatleképezés a két program egymás utáni végrehajtását jelenti úgy, hogy az első outputja a második inputja.

Mivel a leképezések is megfeleltetések, a leképezések szorzása is asszociatív (abban az esetben, ha összeszorozhatók, azaz az érkezési és indulási halmazok „illeszkednek" az alábbi tételnek megfelelően.

Tétel

Legyenek $f : A \to B$, $g : B \to C$ és $h : C \to D$ leképezések. Ekkor $(fg)h = f(gh)$. (Itt mindkét oldalon $A \to D$ leképezés áll.)

Ahogy a megfeleltetéseknél (a feladatok, példák tanúsága szerint) érdekes összefüggések vannak a tulajdonságok és a szorzás között, leképezéseknél is ez a helyzet. Fontos az alábbi tétel.

Leképezésszorzás asszociativitása

Mivel a leképezések is megfeleltetések, a leképezések szorzása is asszociatív (abban az esetben, ha összeszorozhatók, azaz az érkezési és indulási halmazok „illeszkednek” az alábbi tételnek megfelelően.

Tétel

Legyenek $f : A \to B$, $g : B \to C$ és $h : C \to D$ leképezések. Ekkor $(fg)h = f(gh)$. (Itt mindkét oldalon $A \to D$ leképezés áll.)

Ahogy a megfeleltetéseknél (a feladatok, példák tanúsága szerint) érdekes összefüggések vannak a tulajdonságok és a szorzás között, leképezéseknél is ez a helyzet. Fontos az alábbi tétel.

Mivel a leképezések is megfeleltetések, a leképezések szorzása is asszociatív (abban az esetben, ha összeszorozhatók, azaz az érkezési és indulási halmazok „illeszkednek” az alábbi tételnek megfelelően.

Tétel

Legyenek $f : A \to B$, $g : B \to C$ és $h : C \to D$ leképezések. Ekkor $(fg)h = f(gh)$. (Itt mindkét oldalon $A \to D$ leképezés áll.)

Ahogy a megfeleltetéseknél (a feladatok, példák tanúsága szerint) érdekes összefüggések vannak a tulajdonságok és a szorzás között, leképezéseknél is ez a helyzet. Fontos az alábbi tétel.

Tétel

Amennyiben a szóbanforgó két leképezés összeszorozható, akkor

1. *Két injektív leképezés szorzata injektív.*
2. *Két szürjektív leképezés szorzata szürjektív.*
3. *Két bijektív leképezés szorzata bijektív.*
4. *Ha két leképezés szorzata szürjektív, akkor a második tényező szürjektív.*
5. *Ha két leképezés szorzata injektív, akkor az első tényező injektív.*

A tétel bizonyítása

Bizonyítás ((3) következik az (1) és (2) konjunkciójából).

1. Ha mindkettő injektív, akkor tetszőleges $x, y \in A$-ra ha $x(fg) = y(fg)$, akkor $(xf)g = (yf)g$, a g injektivitását felhasználva innen $xf = yf$, s most az f injektivitása miatt $x = y$. Tehát fg injektív.
2. Ha mindkettő szürjektív, akkor tetszőleges $c \in C$ esetén (a g szürjektivitása miatt) van olyan $b \in B$, hogy $bg = c$. Viszont f is szürjektív, ezért van olyan $a \in A$, amelyre $af = b$. Ezért $a(fg) = (af)g = bg = c$. Tehát c-nek van őse. Tehát fg is szürjektív.
4. Tegyük fel hogy fg injektív. Legyen $x, y \in A$ tetszőleges. Ha $xf = yf$, akkor $(xf)g = (yf)g$. Innen $x(fg) = y(fg)$. A szorzat injektivitása szerint $x = y$. Tehát f injektív.
5. Tfh. fg szürjektív. Legyen $c \in C$ tetszőleges. Van olyan $a \in A$, hogy $a(fg) = c$. De ekkor az $af \in B$ elemre $(af)g = a(fg) = c$, tehát c-nek van g melletti őse: af. Q.e.d.

Leképezés inverze

Bármely A halmaz esetén az $A \to A$, $x \mapsto x$ leképezést az A halmaz **identikus leképezésének** nevezzük és id_A-val jelöljük. Ez az a leképezés, amely „nem csinál semmit"

Definíció (Leképezés inverze)

Legyenek $f : A \to B$ és $g : B \to A$ leképezések. Akkor mondjuk, hogy g **inverze** f-nek, ha $fg = \mathrm{id}_A$ és $gf = \mathrm{id}_B$. Világos, hogy ez egy szimmetrikus viszony: g akkor és csak akkor inverze f-nek, ha f inverze g-nek.

Nyíldiagrammal ezt így ábrázolhatjuk, és az részben már meg is indokolja, hogy miért igaz az alábbi tétel.

Bármely A halmaz esetén az $A \to A$, $x \mapsto x$ leképezést az A halmaz **identikus leképezésének** nevezzük és id_A-val jelöljük. Ez az a leképezés, amely „nem csinál semmit”

Definíció (Leképezés inverze)

Legyenek $f : A \to B$ és $g : B \to A$ leképezések. Akkor mondjuk, hogy g **inverze** f-nek, ha $fg = \mathrm{id}_A$ és $gf = \mathrm{id}_B$. Világos, hogy ez egy szimmetrikus viszony: g akkor és csak akkor inverze f-nek, ha f inverze g-nek.

Nyíldiagrammal ezt így ábrázolhatjuk, és az részben már meg is indokolja, hogy miért igaz az alábbi tétel.

Bármely A halmaz esetén az $A \to A$, $x \mapsto x$ leképezést az A halmaz **identikus leképezésének** nevezzük és id_A-val jelöljük. Ez az a leképezés, amely „nem csinál semmit"

Definíció (Leképezés inverze)

Legyenek $f : A \to B$ és $g : B \to A$ leképezések. Akkor mondjuk, hogy g **inverze** f-nek, ha $fg = \mathrm{id}_A$ és $gf = \mathrm{id}_B$. Világos, hogy ez egy szimmetrikus viszony: g akkor és csak akkor inverze f-nek, ha f inverze g-nek.

Nyíldiagrammal ezt így ábrázolhatjuk, és az részben már meg is indokolja, hogy miért igaz az alábbi tétel.

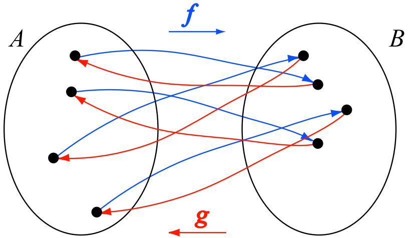
Bármely A halmaz esetén az $A \to A$, $x \mapsto x$ leképezést az A halmaz **identikus leképezésének** nevezzük és id_A-val jelöljük. Ez az a leképezés, amely „nem csinál semmit”

Definíció (Leképezés inverze)

Legyenek $f : A \to B$ és $g : B \to A$ leképezések. Akkor mondjuk, hogy g **inverze** f-nek, ha $fg = \mathrm{id}_A$ és $gf = \mathrm{id}_B$. Világos, hogy ez egy szimmetrikus viszony: g akkor és csak akkor inverze f-nek, ha f inverze g-nek.

Nyíldiagrammal ezt így ábrázolhatjuk, és az részben már meg is indokolja, hogy miért igaz az alábbi tétel.

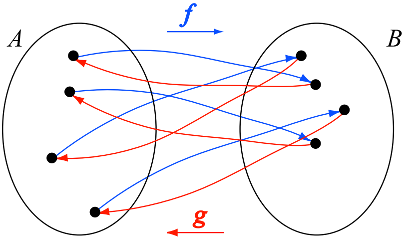
Leképezésnek mikor van inverze?



Tétel (Legyen $f : A \to B$ tetszőleges leképezés.)

1. *Akkor és csakis akkor létezik f-nek inverze, ha f bijektív.*
2. *Ha f bijektív, akkor egy és csakis egy inverze létezik, mégpedig az a $g : B \to A$ leképezés, amely tetszőleges $b \in B$ elemhez azt az egyértelműen meghatározott a elemet rendeli, amelyre $af = b$. (Azaz az inverz leképezés minden elemhez annak a kiindulási leképezés szerinti ősét rendeli. Azaz tetszőleges $a \in A$ és $b \in B$ esetén $bg = a$ akkor és csak akkor, ha $af = b$.)*

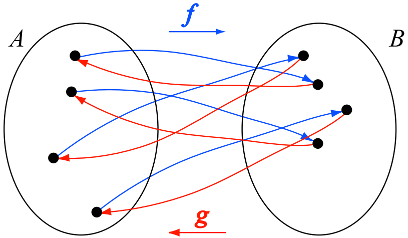
Leképezésnek mikor van inverze?



Tétel (Legyen $f : A \to B$ tetszőleges leképezés.)

1. *Akkor és csakis akkor létezik f-nek inverze, ha f bijektív.*
2. *Ha f bijektív, akkor egy és csakis egy inverze létezik, mégpedig az a $g : B \to A$ leképezés, amely tetszőleges $b \in B$ elemhez azt az egyértelműen meghatározott a elemet rendeli, amelyre $af = b$. (Azaz az inverz leképezés minden elemhez annak a kiindulási leképezés szerinti ősét rendeli. Azaz tetszőleges $a \in A$ és $b \in B$ esetén $bg = a$ akkor és csak akkor, ha $af = b$.)*

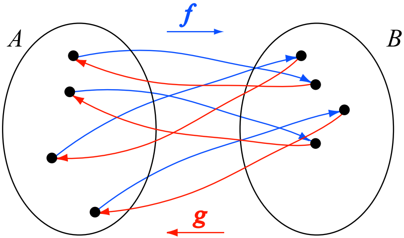
Leképezésnek mikor van inverze?



Tétel (Legyen $f : A \to B$ tetszőleges leképezés.)

1. *Akkor és csakis akkor létezik f-nek inverze, ha f bijektív.*
2. *Ha f bijektív, akkor egy és csakis egy inverze létezik, mégpedig az a $g : B \to A$ leképezés, amely tetszőleges $b \in B$ elemhez azt az egyértelműen meghatározott a elemet rendeli, amelyre $af = b$. (Azaz az inverz leképezés minden elemhez annak a kiindulási leképezés szerinti ősét rendeli. Azaz tetszőleges $a \in A$ és $b \in B$ esetén $bg = a$ akkor és csak akkor, ha $af = b$.)*

Leképezésnek mikor van inverze?



Tétel (Legyen $f : A \to B$ tetszőleges leképezés.)

1. *Akkor és csakis akkor létezik f-nek inverze, ha f bijektív.*
2. *Ha f bijektív, akkor egy és csakis egy inverze létezik, mégpedig az a $g : B \to A$ leképezés, amely tetszőleges $b \in B$ elemhez azt az egyértelműen meghatározott a elemet rendeli, amelyre $af = b$. (Azaz az inverz leképezés minden elemhez annak a kiindulási leképezés szerinti ősét rendeli. Azaz tetszőleges $a \in A$ és $b \in B$ esetén $bg = a$ akkor és csak akkor, ha $af = b$.)*

Részlet a bizonyításból

Bizonyítás (részletek).

Ha f-nek g inverze, akkor $fg = \mathrm{id}_A$, ami bijektív, tehát injektív. Ezért a szorzat első tényezője, azaz f is injektív. Másrészt $gf = \mathrm{id}_B$, ami bijektív és ezért szürjektív, tehát a szorzat második tényezője, f is szürjektív. Ezzel beláttuk, hogy ha f-nek van inverze, akkor f bijektív.

Ha g_1 is és g_2 is inverze f-nek, akkor — azon nyilvánvaló tény szerint, hogy a „semmittevő identikus leképezéssel való szorzás „nem csinál semmit'' — kapjuk, hogy $g_1 = g_1\mathrm{id}_A = g_1(fg_2) = (g_1 f)g_2 = \mathrm{id}_B g_2 = g_2$. A kapott $g_1 = g_2$ egyenlőség igazolja az inverz egyértelműségét. Q.e.d. (részben) □

Bijektív leképezés inverze

Tétel

Bijektív leképezés inverze szintén bijektív.

Bizonyítás.

Ha g inverze f-nek, akkor f inverze g-nek. Tehát g-nek is van inverze, és ezért az előző tétel szerint bijektív. Q.e.d □

Mivel egy f bijektív leképezésnek pontosan egy inverze van, annak jelölésére az f^{-1} jelölést használjuk. (A szövegkörnyezet dönti el, hogy megfeleltetés avagy leképezés inverzéről van-e szó! Természetesen a leképezések maguk is megfeleltetések, így megfeleltetés-inverzük mindig van, viszont leképezésinverzük csak a bijektíveknek van.) Az alább tételt — túlprecizírozott bizonyítás helyett — csak az azt követő ábrával szemléltetjük:

Bijektív leképezés inverze

Tétel

Bijektív leképezés inverze szintén bijektív.

Bizonyítás.

Ha g inverze f-nek, akkor f inverze g-nek. Tehát g-nek is van inverze, és ezért az előző tétel szerint bijektív. Q.e.d □

Mivel egy f bijektív leképezésnek pontosan egy inverze van, annak jelölésére az f^{-1} jelölést használjuk. (A szövegkörnyezet dönti el, hogy megfeleltetés avagy leképezés inverzéről van-e szó! Természetesen a leképezések maguk is megfeleltetések, így megfeleltetés-inverzük mindig van, viszont leképezésinverzük csak a bijektíveknek van.) Az alább tételt — túlprecizírozott bizonyítás helyett — csak az azt követő ábrával szemléltetjük:

Bijektív leképezés inverze

Tétel

Bijektív leképezés inverze szintén bijektív.

Bizonyítás.

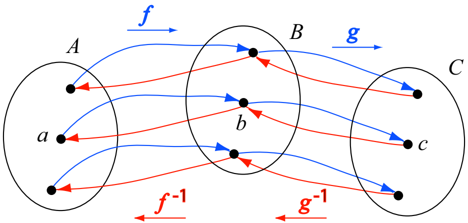
Ha g inverze f-nek, akkor f inverze g-nek. Tehát g-nek is van inverze, és ezért az előző tétel szerint bijektív. Q.e.d □

Mivel egy f bijektív leképezésnek pontosan egy inverze van, annak jelölésére az f^{-1} jelölést használjuk. (A szövegkörnyezet dönti el, hogy megfeleltetés avagy leképezés inverzéről van-e szó! Természetesen a leképezések maguk is megfeleltetések, így megfeleltetés-inverzük mindig van, viszont leképezésinverzük csak a bijektíveknek van.) Az alább tételt — túlprecizírozott bizonyítás helyett — csak az azt követő ábrával szemléltetjük:

Szorzatleképezés inverze

Tétel

Legyenek $f : A \to B$ és $g : B \to C$ bijektív leképezések. Ekkor az $fg : A \to C$ bijektív leképzés inverze $\quad (fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$.



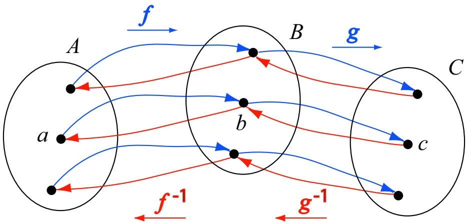
Bizonyítás.

$a(fg) = c$ miatt $c(fg)^{-1} = a$. Továbbá $c(g^{-1}f^{-1}) = (cg^{-1})f^{-1} = bf^{-1} = a$. Mivel mindketten $C \to A$ leképezések és bármely $c \in C$-t ugyanoda képeznek le, ezért $(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$. Q.e.d. □

Szorzatleképezés inverze

Tétel

Legyenek $f : A \to B$ és $g : B \to C$ bijektív leképezések. Ekkor az $fg : A \to C$ bijektív leképzés inverze $(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$.



Bizonyítás.

$a(fg) = c$ miatt $c(fg)^{-1} = a$. Továbbá $c(g^{-1}f^{-1}) = (cg^{-1})f^{-1} = bf^{-1} = a$. Mivel mindketten $C \to A$ leképezések és bármely $c \in C$-t ugyanoda képeznek le, ezért $(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$. Q.e.d. $\square$

Ekvivalenciarelációk és osztályozások

Osztályozni nemcsak a matematikában szokás. Pl. a biológusok osztályozzák az élőlényeket. Az iskola tanulóit évfolyamuk (és esetleg további szempontok) osztályokba sorolják. Stb. . .

Definíció

Legyen A tetszőleges halmaz, és legyen $\mathcal{C} \subseteq P(A)$. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{C}$ **osztályozás** az A halmazon vagy más szóval **osztályozása** az A halmaznak, ha

1. bármely $X \in \mathcal{C}$-re $X \neq \emptyset$,
2. bármely $X, Y \in \mathcal{C}$-re $X = Y$ vagy $X \cap Y = \emptyset$, és
3. $A = \bigcup_{X \in \mathcal{C}} X$

Amennyiben $\mathcal{C}$ osztályozása az A halmaznak, akkor $\mathcal{C}$ elemeit **osztályoknak** nevezzük. A definíció szerint: az osztályok (1) nem üresek, (2) páronként diszjunktak, és (3) lefedik a tekintett halmazt. Szokás
az osztályozást **partíciónak** vagy **faktorhalmaznak** is nevezni.

Ekvivalenciarelációk és osztályozások

Osztályozni nemcsak a matematikában szokás. Pl. a biológusok osztályozzák az élőlényeket. Az iskola tanulóit évfolyamuk (és esetleg további szempontok) osztályokba sorolják. Stb. . .

Definíció

Legyen A tetszőleges halmaz, és legyen $\mathcal{C} \subseteq P(A)$. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{C}$ **osztályozás** az A halmazon vagy más szóval **osztályozása** az A halmaznak, ha

1. bármely $X \in \mathcal{C}$-re $X \neq \emptyset$,
2. bármely $X, Y \in \mathcal{C}$-re $X = Y$ vagy $X \cap Y = \emptyset$, és
3. $A = \bigcup_{X \in \mathcal{C}} X$

Amennyiben $\mathcal{C}$ osztályozása az A halmaznak, akkor $\mathcal{C}$ elemeit **osztályoknak** nevezzük. A definíció szerint: az osztályok (1) nem üresek, (2) páronként diszjunktak, és (3) lefedik a tekintett halmazt. Szokás
az osztályozást **partíciónak** vagy **faktorhalmaznak** is nevezni.

Ekvivalenciarelációk és osztályozások

Osztályozni nemcsak a matematikában szokás. Pl. a biológusok osztályozzák az élőlényeket. Az iskola tanulóit évfolyamuk (és esetleg további szempontok) osztályokba sorolják. Stb...

Definíció

Legyen A tetszőleges halmaz, és legyen $\mathcal{C} \subseteq P(A)$. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{C}$ **osztályozás** az A halmazon vagy más szóval **osztályozása** az A halmaznak, ha

1. bármely $X \in \mathcal{C}$-re $X \neq \emptyset$,
2. bármely $X, Y \in \mathcal{C}$-re $X = Y$ vagy $X \cap Y = \emptyset$, és
3. $A = \bigcup_{X \in \mathcal{C}} X$

Amennyiben $\mathcal{C}$ osztályozása az A halmaznak, akkor $\mathcal{C}$ elemeit **osztályoknak** nevezzük. A definíció szerint: az osztályok (1) nem üresek, (2) páronként diszjunktak, és (3) lefedik a tekintett halmazt. Szokás az osztályozást **partíciónak** vagy **faktorhalmaznak** is nevezni.

Osztályozni nemcsak a matematikában szokás. Pl. a biológusok osztályozzák az élőlényeket. Az iskola tanulóit évfolyamuk (és esetleg további szempontok) osztályokba sorolják. Stb....

Definíció

Legyen A tetszőleges halmaz, és legyen $\mathcal{C} \subseteq P(A)$. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{C}$ **osztályozás** az A halmazon vagy más szóval **osztályozása** az A halmaznak, ha

1. bármely $X \in \mathcal{C}$-re $X \neq \emptyset$,
2. bármely $X, Y \in \mathcal{C}$-re $X = Y$ vagy $X \cap Y = \emptyset$, és
3. $A = \bigcup_{X \in \mathcal{C}} X$

Amennyiben $\mathcal{C}$ osztályozása az A halmaznak, akkor $\mathcal{C}$ elemeit **osztályoknak** nevezzük. A definíció szerint: az osztályok (1) nem üresek, (2) páronként diszjunktak, és (3) lefedik a tekintett halmazt. Szokás az osztályozást **partíciónak** vagy **faktorhalmaznak** is nevezni.

Osztályozni nemcsak a matematikában szokás. Pl. a biológusok osztályozzák az élőlényeket. Az iskola tanulóit évfolyamuk (és esetleg további szempontok) osztályokba sorolják. Stb. . .

Definíció

Legyen A tetszőleges halmaz, és legyen $\mathcal{C} \subseteq P(A)$. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{C}$ **osztályozás** az A halmazon vagy más szóval **osztályozása** az A halmaznak, ha

1. bármely $X \in \mathcal{C}$-re $X \neq \emptyset$,
2. bármely $X, Y \in \mathcal{C}$-re $X = Y$ vagy $X \cap Y = \emptyset$, és
3. $A = \bigcup_{X \in \mathcal{C}} X$

Amennyiben $\mathcal{C}$ osztályozása az A halmaznak, akkor $\mathcal{C}$ elemeit **osztályoknak** nevezzük. A definíció szerint: az osztályok (1) nem üresek, (2) páronként diszjunktak, és (3) lefedik a tekintett halmazt. Szokás az osztályozást **partíciónak** vagy **faktorhalmaznak** is nevezni.

Ekvivalenciarelációk és osztályozások

Osztályozni nemcsak a matematikában szokás. Pl. a biológusok osztályozzák az élőlényeket. Az iskola tanulóit évfolyamuk (és esetleg további szempontok) osztályokba sorolják. Stb...

Definíció

Legyen A tetszőleges halmaz, és legyen $\mathcal{C} \subseteq P(A)$. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{C}$ **osztályozás** az A halmazon vagy más szóval **osztályozása** az A halmaznak, ha

1. bármely $X \in \mathcal{C}$-re $X \neq \emptyset$,
2. bármely $X, Y \in \mathcal{C}$-re $X = Y$ vagy $X \cap Y = \emptyset$, és
3. $A = \bigcup_{X \in \mathcal{C}} X$

Amennyiben $\mathcal{C}$ osztályozása az A halmaznak, akkor $\mathcal{C}$ elemeit **osztályoknak** nevezzük. A definíció szerint: az osztályok (1) nem üresek, (2) páronként diszjunktak, és (3) lefedik a tekintett halmazt. Szokás
az osztályozást **partíciónak** vagy **faktorhalmaznak** is nevezni.

Feladat: melyek osztályozások?

Feladat

Melyek osztályozások az A adott halmazon az alábbiak közül?

(a) $\mathcal{C} = \{X \subseteq \{0, 1, \ldots, 9\} : |X| = 3\}$, $A = \{0, 1, \ldots, 9\}$;

(b) $\mathcal{C} = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5\}\}$, $A = \{1, 2, \ldots, 5\}$;

(c) $\mathcal{C} = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5\}\}$, $A = \{0, 1, \ldots, 5\}$?

Megoldás

(a) Nem (az „osztályok" nem diszjunktak).

(b) Igen.

(c) Nem, mert az osztályok nem fedik le A-t.

Feladat: melyek osztályozások?

Feladat

Melyek osztályozások az A adott halmazon az alábbiak közül?

(a) $\mathcal{C} = \{X \subseteq \{0,1,\ldots,9\} : |X| = 3\}$, $A = \{0,1,\ldots,9\}$;

(b) $\mathcal{C} = \{\{1,3\},\{2,4\},\{5\}\}$, $A = \{1,2,\ldots,5\}$;

(c) $\mathcal{C} = \{\{1,3\},\{2,4\},\{5\}\}$, $A = \{0,1,\ldots,5\}$?

Megoldás

(a) Nem (az „osztályok" nem diszjunktak).

(b) Igen.

(c) Nem, mert az osztályok nem fedik le A-t.

Feladat

Melyek osztályozások az A adott halmazon az alábbiak közül?

(a) $\mathcal{C} = \{X \subseteq \{0, 1, \ldots, 9\} : |X| = 3\}$, $A = \{0, 1, \ldots, 9\}$;

(b) $\mathcal{C} = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5\}\}$, $A = \{1, 2, \ldots, 5\}$;

(c) $\mathcal{C} = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5\}\}$, $A = \{0, 1, \ldots, 5\}$?

Megoldás

(a) Nem (az „osztályok" nem diszjunktak).

(b) Igen.

(c) Nem, mert az osztályok nem fedik le A-t.

Feladat: melyek osztályozások?

Feladat

Melyek osztályozások az A adott halmazon az alábbiak közül?

(a) $\mathcal{C} = \{X \subseteq \{0, 1, \ldots, 9\} : |X| = 3\}$, $A = \{0, 1, \ldots, 9\}$;

(b) $\mathcal{C} = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5\}\}$, $A = \{1, 2, \ldots, 5\}$;

(c) $\mathcal{C} = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5\}\}$, $A = \{0, 1, \ldots, 5\}$?

Megoldás

(a) Nem (az „osztályok” nem diszjunktak).

(b) Igen.

(c) Nem, mert az osztályok nem fedik le A-t.

Osztályozásból ekvivalencia

Jelölés (Osztályozáshoz rendelt ekvivalenciareláció)

Legyen adott egy $\mathcal{C}$ osztályozás az A halmazon. Vezessük be az alábbi ekvialenciarelációt az A halmazon:
$\rho = \rho_{\mathcal{C}} := \{(a, b) \in A^2 : \exists X \in \mathcal{C}, \text{ hogy } a, b \in X\}$

Állítás

A fenti $\rho_{\mathcal{C}}$ valóban ekvivalenciareláció az A halmazon.

Az állítás a definíciók alapján triviális. Egy iskola osztályai (mint osztályozás) esetén $\rho_{\mathcal{C}}$ nem más, mint az „osztálytársa vagy egyenlő" reláció. Nemcsak az osztályozások határoznak meg ekvivalenciákat, hanem fordítva is. Például egy középiskola jelenlegi tanulóinak A halmazán az„osztálytársa vagy egyenlő" reláció meghatározza az (szokásos értelemben vett) osztályok halmazát, ami osztályozás az A halmazon.

Osztályozásból ekvivalencia

Jelölés (Osztályozáshoz rendelt ekvivalenciareláció)

Legyen adott egy $\mathcal{C}$ osztályozás az A halmazon. Vezessük be az alábbi ekvialenciarelációt az A halmazon:
$\rho = \rho_{\mathcal{C}} := \{(a, b) \in A^2 : \exists X \in \mathcal{C}, \text{ hogy } a, b \in X\}$

Állítás

A fenti $\rho_{\mathcal{C}}$ valóban ekvivalenciareláció az A halmazon.

Az állítás a definíciók alapján triviális. Egy iskola osztályai (mint osztályozás) esetén $\rho_{\mathcal{C}}$ nem más, mint az „osztálytársa vagy egyenlő" reláció. Nemcsak az osztályozások határoznak meg ekvivalenciákat, hanem fordítva is. Például egy középiskola jelenlegi tanulóinak A halmazán az„osztálytársa vagy egyenlő" reláció meghatározza az (szokásos értelemben vett) osztályok halmazát, ami osztályozás az A halmazon.

Osztályozásból ekvivalencia

Jelölés (Osztályozáshoz rendelt ekvivalenciareláció)

Legyen adott egy $\mathcal{C}$ osztályozás az A halmazon. Vezessük be az alábbi ekvialenciarelációt az A halmazon:
$\rho = \rho_{\mathcal{C}} := \{(a, b) \in A^2 : \exists X \in \mathcal{C}, \text{ hogy } a, b \in X\}$

Állítás

A fenti $\rho_{\mathcal{C}}$ valóban ekvivalenciareláció az A halmazon.

Az állítás a definíciók alapján triviális. Egy iskola osztályai (mint osztályozás) esetén $\rho_{\mathcal{C}}$ nem más, mint az „osztálytársa vagy egyenlő” reláció. Nemcsak az osztályozások határoznak meg ekvivalenciákat, hanem fordítva is. Például egy középiskola jelenlegi tanulóinak A halmazán az„osztálytársa vagy egyenlő” reláció meghatározza az (szokásos értelemben vett) osztályok halmazát, ami osztályozás az A halmazon.

Osztályozásból ekvivalencia

Jelölés (Osztályozáshoz rendelt ekvivalenciareláció)

Legyen adott egy $\mathcal{C}$ osztályozás az A halmazon. Vezessük be az alábbi ekvialenciarelációt az A halmazon:
$\rho = \rho_{\mathcal{C}} := \{(a, b) \in A^2 : \exists X \in \mathcal{C}, \text{ hogy } a, b \in X\}$

Állítás

A fenti $\rho_{\mathcal{C}}$ valóban ekvivalenciareláció az A halmazon.

Az állítás a definíciók alapján triviális. Egy iskola osztályai (mint osztályozás) esetén $\rho_{\mathcal{C}}$ nem más, mint az „osztálytársa vagy egyenlő" reláció. Nemcsak az osztályozások határoznak meg ekvivalenciákat, hanem fordítva is. Például egy középiskola jelenlegi tanulóinak A halmazán az„osztálytársa vagy egyenlő" reláció meghatározza az (szokásos értelemben vett) osztályok halmazát, ami osztályozás az A halmazon.

Ekvivalenciából osztályozás

Definíció

Legyen A halmaz, ρ ekvivalenciareláció az A-n és $b \in A$. Ekkor a

$$b/\rho := \{c \in A : (b, c) \in \rho\}$$

halmazt a b elem ρ szerinti **blokkjának** vagy **osztályának** nevezzük. A ρ blokkjainak $A/\rho := \{b/\rho : b \in A\}$ halmazát az A halmaz ρ szerinti **faktorhalmazának** vagy ρ szerinti **osztályozásának** nevezzük. Jelölése: A/ρ.

Tétel

Ha ρ ekvivalencia A-n, akkor A/ρ tényleg faktorhalmaz (azaz osztályozás) A-n.

Definíció

Legyen A halmaz, ρ ekvivalenciareláció az A-n és $b \in A$. Ekkor a

$$b/\rho := \{c \in A : (b, c) \in \rho\}$$

halmazt a b elem ρ szerinti **blokkjának** vagy **osztályának** nevezzük. A ρ blokkjainak $A/\rho := \{b/\rho : b \in A\}$ halmazát az A halmaz ρ szerinti **faktorhalmazának** vagy ρ szerinti **osztályozásának** nevezzük. Jelölése: $\boxed{A/\rho}$.

Tétel

Ha ρ ekvivalencia A-n, akkor A/ρ tényleg faktorhalmaz (azaz osztályozás) A-n.

Ekvivalenciából osztályozás

Definíció

Legyen A halmaz, ρ ekvivalenciareláció az A-n és $b \in A$. Ekkor a

$$b/\rho := \{c \in A : (b, c) \in \rho\}$$

halmazt a b elem ρ szerinti **blokkjának** vagy **osztályának** nevezzük. A ρ blokkjainak $A/\rho := \{b/\rho : b \in A\}$ halmazát az A halmaz ρ szerinti **faktorhalmazának** vagy ρ szerinti **osztályozásának** nevezzük. Jelölése: $\boxed{A/\rho}$.

Tétel

Ha ρ ekvivalencia A-n, akkor A/ρ tényleg faktorhalmaz (azaz osztályozás) A-n.

Részlet a bizonyításból

Bizonyítás (részlet).

Ha $a, b \in A$-ra $a\rho^* \neq b\rho^*$, akkor be kell látnunk, hogy diszjunktak.
Ha nem lennének diszjunktak, akkor lenne egy $c \in a\rho^* \cap b\rho^*$ elem.
Tehát $(a, c) \in \rho$ és $(b, c) \in \rho$.
Legyen $x \in a\rho^*$ tetszőleges. Ekkor $(a, x) \in \rho$. A szimmetria miatt $(c, a) \in \rho$, így a tranzitivitásból $(c, x) \in \rho$. Ismét a tranzitivitástra hivatkozva $(b, x) \in \rho$. Tehát $x \in b\rho^*$. Mivel $x \in a\rho^*$ tetszőleges volt, $a\rho^* \subseteq b\rho^*$. Az a és b szerepét felcserélve ugyanígy kapjuk, hogy $b\rho^* \subseteq a\rho^*$. Tehát $b\rho^* = a\rho^*$, ami ellentmondás. Ezért az $a\rho^*$ és $b\rho^*$ blokkok mégiscsak diszjunktak. Q.e.d.(részben). □

Részlet a bizonyításból

Bizonyítás (részlet).

Ha $a, b \in A$-ra $a\rho^* \neq b\rho^*$, akkor be kell látnunk, hogy diszjunktak. Ha nem lennének diszjunktak, akkor lenne egy $c \in a\rho^* \cap b\rho^*$ elem. Tehát $(a, c) \in \rho$ és $(b, c) \in \rho$.

Legyen $x \in a\rho^*$ tetszőleges. Ekkor $(a, x) \in \rho$. A szimmetria miatt $(c, a) \in \rho$, így a tranzitivitásból $(c, x) \in \rho$. Ismét a tranzitivitástra hivatkozva $(b, x) \in \rho$. Tehát $x \in b\rho^*$. Mivel $x \in a\rho^*$ tetszőleges volt, $a\rho^* \subseteq b\rho^*$. Az a és b szerepét felcserélve ugyanígy kapjuk, hogy $b\rho^* \subseteq a\rho^*$. Tehát $b\rho^* = a\rho^*$, ami ellentmondás. Ezért az $a\rho^*$ és $b\rho^*$ blokkok mégiscsak diszjunktak. Q.e.d.(részben). $\square$

Részlet a bizonyításból

Bizonyítás (részlet).

Ha $a, b \in A$-ra $a\rho^* \neq b\rho^*$, akkor be kell látnunk, hogy diszjunktak. Ha nem lennének diszjunktak, akkor lenne egy $c \in a\rho^* \cap b\rho^*$ elem. Tehát $(a, c) \in \rho$ és $(b, c) \in \rho$.
Legyen $x \in a\rho^*$ tetszőleges. Ekkor $(a, x) \in \rho$. A szimmetria miatt $(c, a) \in \rho$, így a tranzitivitásból $(c, x) \in \rho$. Ismét a tranzitivitástra hivatkozva $(b, x) \in \rho$. Tehát $x \in b\rho^*$. Mivel $x \in a\rho^*$ tetszőleges volt, $a\rho^* \subseteq b\rho^*$. Az a és b szerepét felcserélve ugyanígy kapjuk, hogy $b\rho^* \subseteq a\rho^*$. Tehát $b\rho^* = a\rho^*$, ami ellentmondás. Ezért az $a\rho^*$ és $b\rho^*$ blokkok mégiscsak diszjunktak. Q.e.d.(részben). $\square$

Részlet a bizonyításból

Bizonyítás (részlet).

Ha $a, b \in A$-ra $a\rho^* \neq b\rho^*$, akkor be kell látnunk, hogy diszjunktak. Ha nem lennének diszjunktak, akkor lenne egy $c \in a\rho^* \cap b\rho^*$ elem. Tehát $(a, c) \in \rho$ és $(b, c) \in \rho$.

Legyen $x \in a\rho^*$ tetszőleges. Ekkor $(a, x) \in \rho$. A szimmetria miatt $(c, a) \in \rho$, így a tranzitivitásból $(c, x) \in \rho$. Ismét a tranzitivitástra hivatkozva $(b, x) \in \rho$. Tehát $x \in b\rho^*$. Mivel $x \in a\rho^*$ tetszőleges volt, $a\rho^* \subseteq b\rho^*$. Az a és b szerepét felcserélve ugyanígy kapjuk, hogy $b\rho^* \subseteq a\rho^*$. Tehát $b\rho^* = a\rho^*$, ami ellentmondás. Ezért az $a\rho^*$ és $b\rho^*$ blokkok mégiscsak diszjunktak. Q.e.d.(részben). $\square$

Részlet a bizonyításból

Bizonyítás (részlet).

Ha $a, b \in A$-ra $a\rho^* \neq b\rho^*$, akkor be kell látnunk, hogy diszjunktak. Ha nem lennének diszjunktak, akkor lenne egy $c \in a\rho^* \cap b\rho^*$ elem. Tehát $(a, c) \in \rho$ és $(b, c) \in \rho$.
Legyen $x \in a\rho^*$ tetszőleges. Ekkor $(a, x) \in \rho$. A szimmetria miatt $(c, a) \in \rho$, így a tranzitivitásból $(c, x) \in \rho$. Ismét a tranzitivitástra hivatkozva $(b, x) \in \rho$. Tehát $x \in b\rho^*$. Mivel $x \in a\rho^*$ tetszőleges volt, $a\rho^* \subseteq b\rho^*$. Az a és b szerepét felcserélve ugyanígy kapjuk, hogy $b\rho^* \subseteq a\rho^*$. Tehát $b\rho^* = a\rho^*$, ami ellentmondás. Ezért az $a\rho^*$ és $b\rho^*$ blokkok mégiscsak diszjunktak. Q.e.d.(részben). $\square$

Egy feladat

Feladat

Adjuk meg a $\mathbb{Z}$ halmazon értelmezett $\rho = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : 3 \mid x-y\}$ ekvivalenciához tartozó osztályozást!

Megoldás

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}/\rho := \{ \quad &\{\ldots, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \ldots\},\\ &\{\ldots, -11, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, \ldots\},\\ &\{\ldots, -10, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, \ldots\}\ \}.\end{aligned}$$

Láttuk, hogy az ekvivalenciák osztályozást (faktorhalmazt), az osztályozások (faktorhalmazok) pedig ekvivalenciákat határoznak meg. A következő tétel lényegében azt fejezi ki, hogy — a rögzített A halmazon értelmezett — ekvivalenciák és osztályozások lényegében ugyanazok: bármelyiket is adjuk meg, áttérhetünk a másikra, és ha visszatérünk, az eredetihez jutunk.

Egy feladat

Feladat

Adjuk meg a $\mathbb{Z}$ halmazon értelmezett $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 3 \mid x - y\}$ ekvivalenciához tartozó osztályozást!

Megoldás

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Z}/\rho := \{ \quad & \{\dots, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \dots\}, \\
& \{\dots, -11, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, \dots\}, \\
& \{\dots, -10, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, \dots\} \ \}.
\end{aligned}
$$

Láttuk, hogy az ekvivalenciák osztályozást (faktorhalmazt), az osztályozások (faktorhalmazok) pedig ekvivalenciákat határoznak meg. A következő tétel lényegében azt fejezi ki, hogy — a rögzített *A* halmazon értelmezett — ekvivalenciák és osztályozások lényegében ugyanazok: bármelyiket is adjuk meg, áttérhetünk a másikra, és ha visszatérünk, az eredetihez jutunk.

Egy feladat

Feladat

Adjuk meg a $\mathbb{Z}$ halmazon értelmezett $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 3 \mid x - y\}$ ekvivalenciához tartozó osztályozást!

Megoldás

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}/\rho := \{ \quad & \{\ldots, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}, \\ & \{\ldots, -11, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, \ldots\}, \\ & \{\ldots, -10, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, \ldots\} \ \}.\end{aligned}$$

Láttuk, hogy az ekvivalenciák osztályozást (faktorhalmazt), az osztályozások (faktorhalmazok) pedig ekvivalenciákat határoznak meg. A következő tétel lényegében azt fejezi ki, hogy — a rögzített A halmazon értelmezett — ekvivalenciák és osztályozások lényegében ugyanazok: bármelyiket is adjuk meg, áttérhetünk a másikra, és ha visszatérünk, az eredetihez jutunk.

A „lényegében ugyanazok” nem matematikai fogalom, ezért a tétel kissé komolyabb hangzásúra lesz fogalmazva. A korábbi jelölésekkel:

Tétel

Legyen A tetszőleges halmaz, jelölje Part(A) az A-n értelmezhető osztályozások (más szóval partíciók) halmazát, Eq(A) pedig az A-n értelmezhető ekvivalenciák halmazát. Ekkor
$Eq(A) \to Part(A), \quad \rho \mapsto A/\rho = \{b/\rho : b \in A\}$
bijektív leképezés, amelynek inverze az alábbi bijekció:
$Part(A) \to Eq(A), \quad \mathcal{C} \mapsto \rho_{\mathcal{C}}.$

A „lényegében ugyanazok" nem matematikai fogalom, ezért a tétel kissé komolyabb hangzásúra lesz fogalmazva. A korábbi jelölésekkel:

Tétel

Legyen A tetszőleges halmaz, jelölje $Part(A)$ az A-n értelmezhető osztályozások (más szóval partíciók) halmazát, $Eq(A)$ pedig az A-n értelmezhető ekvivalenciák halmazát. Ekkor
$Eq(A) \to Part(A), \quad \rho \mapsto A/\rho = \{b/\rho : b \in A\}$
bijektív leképezés, amelynek inverze az alábbi bijekció:
$Part(A) \to Eq(A), \quad \mathcal{C} \mapsto \rho_{\mathcal{C}}.$

Hány ekvivalencia van?

Feladat

Hány ekvivalenciareláció definiálható egy háromelemű halmazon?

Megoldás

Mivel az ekvivalenciák és az osztályozások lényegében azonosak, célszerű a jelen esetben könnyebben kezelhető utóbbiakat megszámolni. Egyetlen olyan van, amelyiknek három osztálya van (persze mind a három egyelemű). Egyetlen olyan van, amelyik csak egyetlen osztályból áll (ami persze az egész halmaz, amelyet jelöljön A). A továbbiak egy kételemű és egy egyelemű osztályból állnak; az egyelemű osztály elemét háromféleképpen választhatjuk ki. Tehát három további van. Összesen: **öt**. Ha $A = \{1, 2, 3\}$, akkor

$\mathcal{C}_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\mathcal{C}_2 = \{\{1, 2, 3\}\}$,

$\mathcal{C}_3 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$, $\mathcal{C}_4 = \{\{2\}, \{1, 3\}\}$, $\mathcal{C}_5 = \{\{3\}, \{1, 2\}\}$.

Hány ekvivalencia van?

Feladat

Hány ekvivalenciareláció definiálható egy háromelemű halmazon?

Megoldás

Mivel az ekvivalenciák és az osztályozások lényegében azonosak, célszerű a jelen esetben könnyebben kezelhető utóbbiakat megszámolni. Egyetlen olyan van, amelyiknek három osztálya van (persze mind a három egyelemű). Egyetlen olyan van, amelyik csak egyetlen osztályból áll (ami persze az egész halmaz, amelyet jelöljön A). A továbbiak egy kételemű és egy egyelemű osztályból állnak; az egyelemű osztály elemét háromféleképpen választhatjuk ki. Tehát három további van. Összesen: öt. Ha $A = \{1, 2, 3\}$, akkor $\mathcal{C}_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\mathcal{C}_2 = \{\{1, 2, 3\}\}$, $\mathcal{C}_3 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$, $\mathcal{C}_4 = \{\{2\}, \{1, 3\}\}$, $\mathcal{C}_5 = \{\{3\}, \{1, 2\}\}$.

Hány ekvivalencia van?

Feladat

Hány ekvivalenciareláció definiálható egy háromelemű halmazon?

Megoldás

Mivel az ekvivalenciák és az osztályozások lényegében azonosak, célszerű a jelen esetben könnyebben kezelhető utóbbiakat megszámolni. Egyetlen olyan van, amelyiknek három osztálya van (persze mind a három egyelemű). Egyetlen olyan van, amelyik csak egyetlen osztályból áll (ami persze az egész halmaz, amelyet jelöljön A). A továbbiak egy kételemű és egy egyelemű osztályból állnak; az egyelemű osztály elemét háromféleképpen választhatjuk ki. Tehát három további van. Összesen: **öt**. Ha $A = \{1, 2, 3\}$, akkor

$\mathcal{C}_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\mathcal{C}_2 = \{\{1, 2, 3\}\}$,

$\mathcal{C}_3 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$, $\mathcal{C}_4 = \{\{2\}, \{1, 3\}\}$, $\mathcal{C}_5 = \{\{3\}, \{1, 2\}\}$.

Faktorhalmaz, mint fogalomalkotó eszköz

A fogalmak — nemcsak a matematikában, hanem azon kívül is — gyakran úgy alakulnak ki, hogy veszünk egy ρ ekvivalenciarelációt egy A halmazon, és az A/ρ elemeit elnevezzük valahogy.

Például ha A a sík egyeneseinek halmaza és ρ a párhuzamossági reláció (amelyik ekvivalencia), akkor egy egyenes ρ szerinti blokkját szokás az egyenes irányának nevezni.

Nemsokára látni fogjuk, hogy pl. a számok fogalma is így alakul(t) ki.

Faktorhalmaz, mint fogalomalkotó eszköz

A fogalmak — nemcsak a matematikában, hanem azon kívül is — gyakran úgy alakulnak ki, hogy veszünk egy ρ ekvivalenciarelációt egy A halmazon, és az A/ρ elemeit elnevezzük valahogy.

Például ha A a sík egyeneseinek halmaza és ρ a párhuzamossági reláció (amelyik ekvivalencia), akkor egy egyenes ρ szerinti blokkját szokás az egyenes irányának nevezni.

Nemsokára látni fogjuk, hogy pl. a számok fogalma is így alakul(t) ki.

Faktorhalmaz, mint fogalomalkotó eszköz

A fogalmak — nemcsak a matematikában, hanem azon kívül is — gyakran úgy alakulnak ki, hogy veszünk egy ρ ekvivalenciarelációt egy A halmazon, és az A/ρ elemeit elnevezzük valahogy.
Például ha A a sík egyeneseinek halmaza és ρ a párhuzamossági reláció (amelyik ekvivalencia), akkor egy egyenes ρ szerinti blokkját szokás az egyenes irányának nevezni.
Nemsokára látni fogjuk, hogy pl. a számok fogalma is így alakul(t) ki.

Részbenrendezések

A (részben)rendezések a **hierarchia** fogalmát ragadják meg matematikailag. Ez a fogalom az informatikában is fellép, hiszen pl. a szoftverek is hierarchikus rendbe szervezett kisebb egységekből (szubrutin, modul, eljárás, stb.) épülnek fel.

Definíció

Az $(A; \leq)$ párt **részbenrendezett halmaznak** nevezzük, ha A nemüres halmaz, „$\leq$" pedig egy részbenrendezési reláció (azaz: reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív) az A halmazon.

Természetesen „$\leq$" helyett írhatnánk azt is, hogy ρ vagy α, de „$\leq$" a leggyakoribb jelölés. Vigyázat, a „$\leq$" jelölés nem jelenti azt, hogy A elemei számok!

Részbenrendezések

A (részben)rendezések a **hierarchia** fogalmát ragadják meg matematikailag. Ez a fogalom az informatikában is fellép, hiszen pl. a szoftverek is hierarchikus rendbe szervezett kisebb egységekből (szubrutin, modul, eljárás, stb.) épülnek fel.

Definíció

Az $(A;\leq)$ párt **részbenrendezett halmaznak** nevezzük, ha A nemüres halmaz, „$\leq$" pedig egy részbenrendezési reláció (azaz: reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív) az A halmazon.

Természetesen „$\leq$" helyett írhatnánk azt is, hogy ρ vagy α, de „$\leq$" a leggyakoribb jelölés. Vigyázat, a „$\leq$" jelölés nem jelenti azt, hogy A elemei számok!

Hasse-diagram

Definíció

Legyen $(A; \leq)$ egy részbenrendezett halmaz, és legyen $a, b \in A$. $a < b$ jelölje azt, hogy $a \leq b$ és $a \neq b$. $a \prec b$ (kiolvasva: b követi a-t) pedig jelölje azt, hogy $a < b$ és nincs olyan $c \in A$, amelyre $a < c$ és $c < b$.

Tétel

Ha $(A; \leq)$ véges részbenrendezett halmaz, akkor tetszőleges a, b elemére az alábbi két feltétel ekvivalens:

1. $a \leq b$;
2. *létezik $n \in \mathbb{N}_0$ és léteznek $c_0, c_1, \ldots, c_n \in A$ elemek, hogy* $a = c_0,\ c_0 \prec c_1,\ c_1 \prec c_2,\ \ldots,\ c_{n-1} \prec c_n,\ c_n = b$.

Erre szolgál az ún. **Hasse-diagramm**: a követési relációnak megfelelő irányított gráf azon megállapodás mellett, hogy minden nyíl **felfelé** megy (ezért a nyílhegyet le se rajzoljuk).

Definíció

Legyen $(A; \leq)$ egy részbenrendezett halmaz, és legyen $a, b \in A$. $a < b$ jelölje azt, hogy $a \leq b$ és $a \neq b$. $a \prec b$ (kiolvasva: b követi a-t) pedig jelölje azt, hogy $a < b$ és nincs olyan $c \in A$, amelyre $a < c$ és $c < b$.

Tétel

Ha $(A; \leq)$ véges részbenrendezett halmaz, akkor tetszőleges a, b elemére az alábbi két feltétel ekvivalens:

1. $a \leq b$;
2. *létezik $n \in \mathbb{N}_0$ és léteznek $c_0, c_1, \ldots, c_n \in A$ elemek, hogy* $a = c_0$, $c_0 \prec c_1$, $c_1 \prec c_2$, …, $c_{n-1} \prec c_n$, $c_n = b$.

Erre szolgál az ún. **Hasse-diagramm**: a követési relációnak megfelelő irányított gráf azon megállapodás mellett, hogy minden nyíl **felfelé** megy (ezért a nyílhegyet le se rajzoljuk).

Hasse-diagram

Definíció

Legyen $(A;\leq)$ egy részbenrendezett halmaz, és legyen $a, b \in A$. $a < b$ jelölje azt, hogy $a \leq b$ és $a \neq b$. $a \prec b$ (kiolvasva: b követi a-t) pedig jelölje azt, hogy $a < b$ és nincs olyan $c \in A$, amelyre $a < c$ és $c < b$.

Tétel

Ha $(A;\leq)$ véges részbenrendezett halmaz, akkor tetszőleges a, b elemére az alábbi két feltétel ekvivalens:

1. $a \leq b$;
2. *létezik $n \in \mathbb{N}_0$ és léteznek $c_0, c_1, \ldots, c_n \in A$ elemek, hogy* $a = c_0,\ c_0 \prec c_1,\ c_1 \prec c_2,\ \ldots,\ c_{n-1} \prec c_n,\ c_n = b$.

Erre szolgál az ún. **Hasse-diagramm**: a követési relációnak megfelelő irányított gráf azon megállapodás mellett, hogy minden nyíl **felfelé** megy (ezért a nyílhegyet le se rajzoljuk).

Definíció

Legyen $(A; \leq)$ egy részbenrendezett halmaz, és legyen $a, b \in A$. $a < b$ jelölje azt, hogy $a \leq b$ és $a \neq b$. $a \prec b$ (kiolvasva: b követi a-t) pedig jelölje azt, hogy $a < b$ és nincs olyan $c \in A$, amelyre $a < c$ és $c < b$.

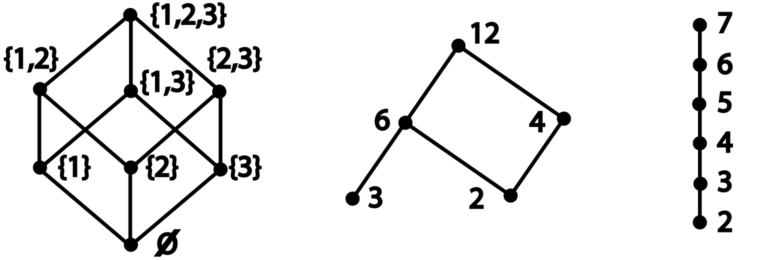
Tétel

Ha $(A; \leq)$ véges részbenrendezett halmaz, akkor tetszőleges a, b elemére az alábbi két feltétel ekvivalens:

1. *$a \leq b$;*
2. *létezik $n \in \mathbb{N}_0$ és léteznek $c_0, c_1, \ldots, c_n \in A$ elemek, hogy $a = c_0$, $c_0 \prec c_1$, $c_1 \prec c_2$, ..., $c_{n-1} \prec c_n$, $c_n = b$.*

Erre szolgál az ún. **Hasse-diagramm**: a követési relációnak megfelelő irányított gráf azon megállapodás mellett, hogy minden nyíl **felfelé** megy (ezért a nyílhegyet le se rajzoljuk).

Az előbbi tétel szerint $a \leq b$ akkor és csak akkor, ha a Hasse-diagrammon a-ból indulva élek mentén mindig felfelé haladva eljuthatunk b-be. (Speciális esetben: $a = b$, amikor semmit sem kell haladnunk.)

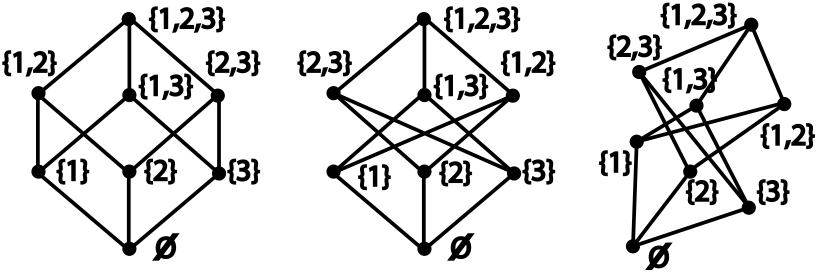


$(P(\{1,2,3\}), \subseteq)$ $\quad$ $(\{2,3,4,6,12\}, |)$ $\quad$ $(\{2,3,\ldots,7\}, \leq)$

A három részbenrendezett halmaz közül csak a jobb szélső rendezett.

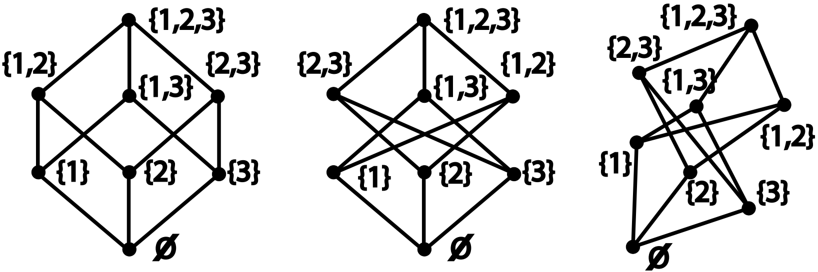
Három Hasse-diagram ugyanazon részbenrendezett halmazra

Egyazon részbenrendezett halmaz Hasse-diagramja többféleképpen is lerazolható:



Három Hasse-diagram ugyanazon részbenrendezett halmazra

Egyazon részbenrendezett halmaz Hasse-diagramja többféleképpen is lerazolható:



Részbenrendezett halmaz speciális elemei

Definíció

Legyen $(A, \leq)$ egy részbenrendezett halmaz és $b \in A$. Azt mondjuk, hogy b **maximális eleme A-nak**, ha nincs olyan $x \in A$, amelyre $b < x$. Hasonlóan, ha nincs olyan $x \in A$ hogy $x < b$, akkor b-t **minimális elemnek nevezzük**. Ha bármely $x \in A$-ra $x \leq b$, akkor b-t A **legnagyobb elemének** nevezzük. Ha pedig minden $x \in A$-ra $b \leq x$, akkor b-t A **legkisebb elemének** nevezzük. Tehát **maximális elem = nincs nála nagyobb**, **legnagyobb elem = minden másnál nagyobb**.

Definíció

Legyen $(A, \leq)$ egy részbenrendezett halmaz és $b \in A$. Azt mondjuk, hogy b **maximális eleme A-nak**, ha nincs olyan $x \in A$, amelyre $b < x$. Hasonlóan, ha nincs olyan $x \in A$ hogy $x < b$, akkor b-t **minimális elemnek nevezzük**. Ha bármely $x \in A$-ra $x \leq b$, akkor b-t A **legnagyobb elemének** nevezzük. Ha pedig minden $x \in A$-ra $b \leq x$, akkor b-t A **legkisebb elemének** nevezzük. Tehát **maximális elem = nincs nála nagyobb**, **legnagyobb elem = minden másnál nagyobb**.

Definíció

Legyen $(A, \leq)$ egy részbenrendezett halmaz és $b \in A$. Azt mondjuk, hogy b **maximális eleme A-nak**, ha nincs olyan $x \in A$, amelyre $b < x$. Hasonlóan, ha nincs olyan $x \in A$ hogy $x < b$, akkor b-t **minimális elemnek nevezzük**. Ha bármely $x \in A$-ra $x \leq b$, akkor b-t A **legnagyobb elemének** nevezzük. Ha pedig minden $x \in A$-ra $b \leq x$, akkor b-t A **legkisebb elemének** nevezzük. Tehát **maximális elem = nincs nála nagyobb**, **legnagyobb elem = minden másnál nagyobb**.

Legfeljebb csak egy legnagyobb elem van.

Állítás

Ha $(A, \leq)$-nek van legnagyobb eleme, akkor pontosan egy van. Legkisebb elemre ugyanez érvényes.

Bizonyítás.

Ha b is és c is legnagyobb elem, akkor $c \leq b$ (mert b legnagyobb elem), $b \leq c$ (mert c legnagyobb elem). Az antiszimmetria miatt $b = c$. □

Megjegyzés

Szokás a **legnagyobb elemet 1-gyel, a legkisebb elemet 0-val** jelölni - nem biztos,hogy ezek léteznek. Maximális, illetve minimális elemből több is lehet. Véges esetben legalább egy maximális elem és legalább egy minimális elem létezik. Ha egy elem legnagyobb elem, akkor szükségképpen maximális elem. Ha egy elem legkisebb elem, akkor szükségképpen minimális elem.

Legfeljebb csak egy legnagyobb elem van.

Állítás

Ha $(A, \leq)$-nek van legnagyobb eleme, akkor pontosan egy van. Legkisebb elemre ugyanez érvényes.

Bizonyítás.

Ha b is és c is legnagyobb elem, akkor $c \leq b$ (mert b legnagyobb elem), $b \leq c$ (mert c legnagyobb elem). Az antiszimmetria miatt $b = c$. $\square$

Megjegyzés

Szokás a **legnagyobb elemet 1-gyel, a legkisebb elemet 0-val** jelölni - nem biztos,hogy ezek léteznek. Maximális, illetve minimális elemből több is lehet. Véges esetben legalább egy maximális elem és legalább egy minimális elem létezik. Ha egy elem legnagyobb elem, akkor szükségképpen maximális elem. Ha egy elem legkisebb elem, akkor szükségképpen minimális elem.

Legfeljebb csak egy legnagyobb elem van.

Állítás

Ha $(A, \leq)$-nek van legnagyobb eleme, akkor pontosan egy van. Legkisebb elemre ugyanez érvényes.

Bizonyítás.

Ha b is és c is legnagyobb elem, akkor $c \leq b$ (mert b legnagyobb elem), $b \leq c$ (mert c legnagyobb elem). Az antiszimmetria miatt $b = c$. □

Megjegyzés

Szokás a **legnagyobb elemet 1-gyel, a legkisebb elemet 0-val** jelölni - nem biztos,hogy ezek léteznek. Maximális, illetve minimális elemből több is lehet. Véges esetben legalább egy maximális elem és legalább egy minimális elem létezik. Ha egy elem legnagyobb elem, akkor szükségképpen maximális elem. Ha egy elem legkisebb elem, akkor szükségképpen minimális elem.

Legfeljebb csak egy legnagyobb elem van.

Állítás

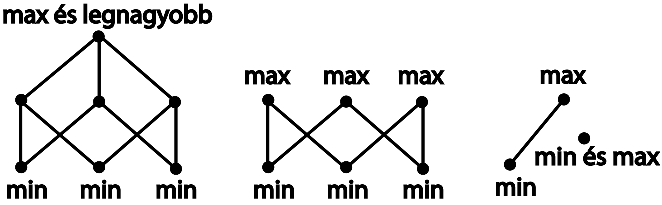
Ha $(A, \leq)$-nek van legnagyobb eleme, akkor pontosan egy van. Legkisebb elemre ugyanez érvényes.

Bizonyítás.

Ha b is és c is legnagyobb elem, akkor $c \leq b$ (mert b legnagyobb elem), $b \leq c$ (mert c legnagyobb elem). Az antiszimmetria miatt $b = c$. □

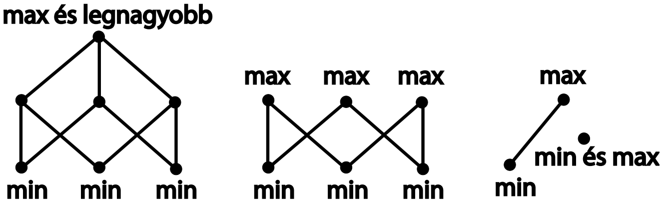
Megjegyzés

Szokás a **legnagyobb elemet 1-gyel, a legkisebb elemet 0-val** jelölni - nem biztos,hogy ezek léteznek. Maximális, illetve minimális elemből több is lehet. Véges esetben legalább egy maximális elem és legalább egy minimális elem létezik. Ha egy elem legnagyobb elem, akkor szükségképpen maximális elem. Ha egy elem legkisebb elem, akkor szükségképpen minimális elem.



Egy rendezett halmazt *jólrendezettnek* nevezünk, ha bármely nemüres részhalmazának van legkisebb eleme. Pl. $(\mathbb{N}; \leq)$. Érdekességként említjük a *Jólrendezési tételt:* bármely nemüres A halmaz *jólrendezhető*, azaz értelmezhető rajta egy olyan rendezés, hogy jólrendezett halmazt kapjunk. Ez véges A esetén evidens (tetszőleges rendezés jólrendezés lesz), de végtelen esetben távolról sem triviális.

Néhány példa



Egy rendezett halmazt *jólrendezettnek* nevezünk, ha bármely nemüres részhalmazának van legkisebb eleme. Pl. $(\mathbb{N}; \leq)$. Érdekességként említjük a *Jólrendezési tételt:* bármely nemüres A halmaz *jólrendezhető*, azaz értelmezhető rajta egy olyan rendezés, hogy jólrendezett halmazt kapjunk. Ez véges A esetén evidens (tetszőleges rendezés jólrendezés lesz), de végtelen esetben távolról sem triviális.

Direkt szorzat

Definíció (Direkt szorzat)

Legyen adott az $(A_1, \leq_1)$ és az $(A_2, \leq_2)$ részbenrendezett halmaz. **Direkt szorzatukat** úgy kapjuk, hogy Descartes-szorzatukon a **komponensenkénti részbenrendezést** definiáljuk. Azaz a direkt szorzatuk $(A_1 \times A_2, \leq)$, ahol $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$ azt jelenti, hogy $a_1 \leq_1 b_1$ és $a_2 \leq_2 b_2$. (Megmutatható, hogy ez is részbenrendezett halmaz.)

Definíció (Lexikografikus szorzat)

Ha $(A_1, \leq_1)$ és az $(A_2, \leq_2)$ **rendezett** halmaz (tehát nemcsak részbenrendezett), akkor **lexikografikus szorzatukon** az $(A_1 \times A_2, \leq)$ rendezett halmazt értjük, ahol a reláció a **lexikografikus rendezést** jelenti, azaz $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$ akkor és csak akkor, ha $a_1 <_1 b_1$, vagy $a_1 = b_1$ és $a_2 \leq_2 b_2$. (Megmutatható, hogy ily módon rendezett halmazt kapunk.)

Direkt szorzat

Definíció (Direkt szorzat)

Legyen adott az $(A_1, \leq_1)$ és az $(A_2, \leq_2)$ részbenrendezett halmaz. **Direkt szorzatukat** úgy kapjuk, hogy Descartes-szorzatukon a **komponensenkénti részbenrendezést** definiáljuk. Azaz a direkt szorzatuk $(A_1 \times A_2, \leq)$, ahol $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$ azt jelenti, hogy $a_1 \leq_1 b_1$ és $a_2 \leq_2 b_2$. (Megmutatható, hogy ez is részbenrendezett halmaz.)

Definíció (Lexikografikus szorzat)

Ha $(A_1, \leq_1)$ és az $(A_2, \leq_2)$ **rendezett** halmaz (tehát nemcsak részbenrendezett), akkor **lexikografikus szorzatukon** az $(A_1 \times A_2, \leq)$ rendezett halmazt értjük, ahol a reláció a **lexikografikus rendezést** jelenti, azaz $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$ akkor és csak akkor, ha $a_1 <_1 b_1$, vagy $a_1 = b_1$ és $a_2 \leq_2 b_2$. (Megmutatható, hogy ily módon rendezett halmazt kapunk.)

Direkt szorzat

Definíció (Direkt szorzat)

Legyen adott az $(A_1, \leq_1)$ és az $(A_2, \leq_2)$ részbenrendezett halmaz. **Direkt szorzatukat** úgy kapjuk, hogy Descartes-szorzatukon a **komponensenkénti részbenrendezést** definiáljuk. Azaz a direkt szorzatuk $(A_1 \times A_2, \leq)$, ahol $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$ azt jelenti, hogy $a_1 \leq_1 b_1$ és $a_2 \leq_2 b_2$. (Megmutatható, hogy ez is részbenrendezett halmaz.)

Definíció (Lexikografikus szorzat)

Ha $(A_1, \leq_1)$ és az $(A_2, \leq_2)$ **rendezett** halmaz (tehát nemcsak részbenrendezett), akkor **lexikografikus szorzatukon** az $(A_1 \times A_2, \leq)$ rendezett halmazt értjük, ahol a reláció a **lexikografikus rendezést** jelenti, azaz $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$ akkor és csak akkor, ha $a_1 <_1 b_1$, vagy $a_1 = b_1$ és $a_2 \leq_2 b_2$. (Megmutatható, hogy ily módon rendezett halmazt kapunk.)

Direkt szorzat lerajzolása

Értelemszerűen több tényező direkt, illetve lexikografikus szorzatát is definiálhatnánk. A lexikografikus szorzat onnan nyerte a nevét, hogy a lexikonok, szótárak, névsorok is ezen az elven vannak rendezve.

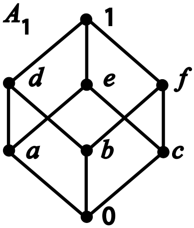
Az alábbi ábrákon megfigyelhető az az általánosan is érvényes módszer, ahogy két részbenrendezett halmaz direkt szorzatának Hasse-diagramját lerajzolhatjuk (persze csak kisméretű r.r.halmazok esetén számíthatunk áttekinthető diagramra.) Kb. arról van szó, hogy az egyik (mindegy melyik) r.r.halmaz egyik szögpontjába (elemébe) rakjuk a másik r.r.h. egyik szögpontját, majd ezen másik r.r.halmazt az egyik r.r.h. elemi mentén mindenhova eltoljuk úgy, hogy az eltolás során mindegyik szögpontját összekötjük az eltoltjával.

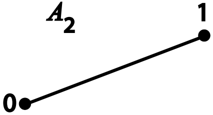
Direkt szorzat lerajzolása

Értelemszerűen több tényező direkt, illetve lexikografikus szorzatát is definiálhatnánk. A lexikografikus szorzat onnan nyerte a nevét, hogy a lexikonok, szótárak, névsorok is ezen az elven vannak rendezve.

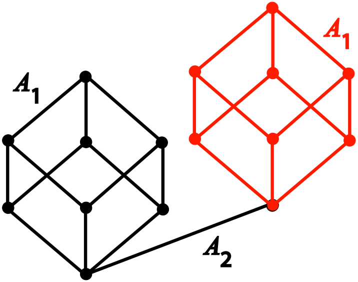
Az alábbi ábrákon megfigyelhető az az általánosan is érvényes módszer, ahogy két részbenrendezett halmaz direkt szorzatának Hasse-diagramját lerajzolhatjuk (persze csak kisméretű r.r.halmazok esetén számíthatunk áttekinthető diagramra.) Kb. arról van szó, hogy az egyik (mindegy melyik) r.r.halmaz egyik szögpontjába (elemébe) rakjuk a másik r.r.h. egyik szögpontját, majd ezen másik r.r.halmazt az egyik r.r.h. elemi mentén mindenhova eltoljuk úgy, hogy az eltolás során mindegyik szögpontját összekötjük az eltoltjával.

Direkt szorzat Hasse-diagramja

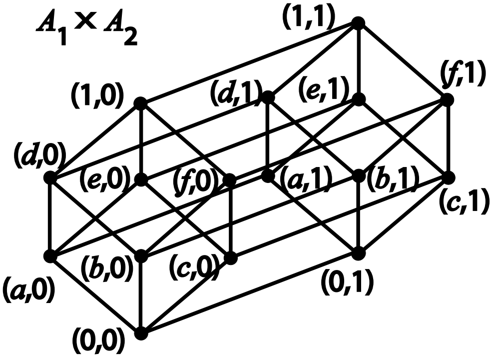




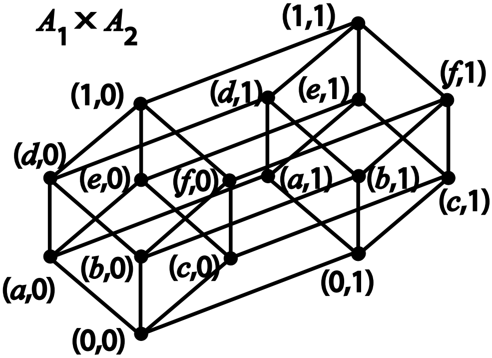
Keressük ezen két r.r.halmaz direkt szorzatának Hasse-diagramját.



Közbülső lépés: a két r.r.halmaz egy-egy pontját fedésbe hoztuk (legalsó pont), majd A_1-et A_2 mentén eltoltuk. Már csak az van hátra, hogy az ezen eltolás alkalmából az A_1 elemeinek pályáit berajzoljuk. (Ezzel ekvivalens fogalmazás: hogy A_2-t is eltoljuk A_1 minden pontjába.)

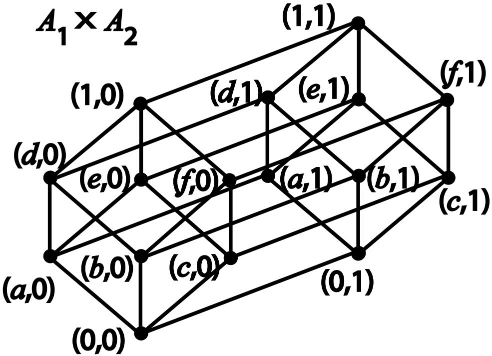


Közbülső lépés: a két r.r.halmaz egy-egy pontját fedésbe hoztuk (legalsó pont), majd A_1-et A_2 mentén eltoltuk. Már csak az van hátra, hogy az ezen eltolás alkalmából az A_1 elemeinek pályáit berajzoljuk. (Ezzel ekvivalens fogalmazás: hogy A_2-t is eltoljuk A_1 minden pontjába.)

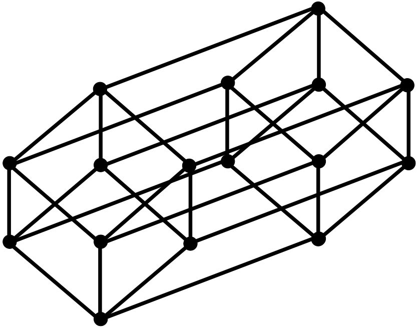


Direkt szorzat Hasse-diagramja/2

Közbülső lépés: a két r.r.halmaz egy-egy pontját fedésbe hoztuk (legalsó pont), majd A_1-et A_2 mentén eltoltuk. Már csak az van hátra, hogy az ezen eltolás alkalmából az A_1 elemeinek pályáit berajzoljuk. (Ezzel ekvivalens fogalmazás: hogy A_2-t is eltoljuk A_1 minden pontjába.)



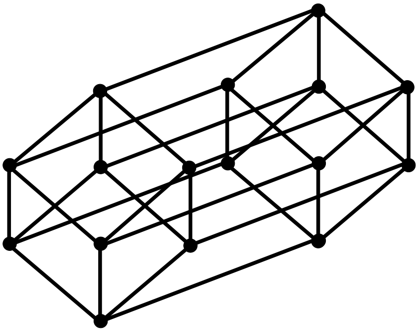
Íme a keresett direkt szorzat. Talán áttekinthetőbb, ha nem tüntetjük fel az elemek megnevezését:



Megjegyzés: ez mellesleg a négydimenziós kocka kétdimenziós vetülete — ezt így a legkönnyebb lerajzolni.

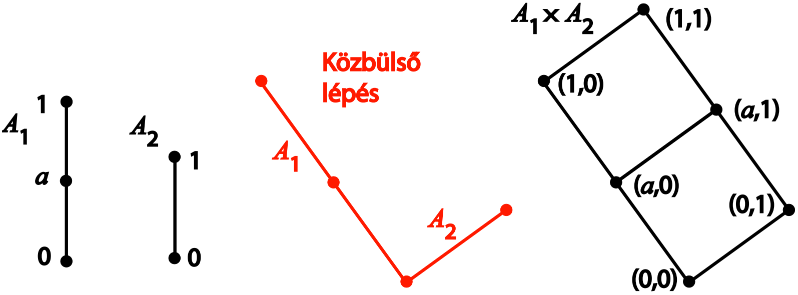
Direkt szorzat Hasse-diagramja/3

Íme a keresett direkt szorzat. Talán áttekinthetőbb, ha nem tüntetjük fel az elemek megnevezését:



Megjegyzés: ez mellesleg a négydimenziós kocka kétdimenziós vetülete — ezt így a legkönnyebb lerajzolni.

Ahhoz, hogy szép ábrát kapjunk zavaró átfedések nélkül — inkább művészet mint tudás — a kiindulási ábrát gyakran módosítjuk. Végül íme egy (sőt „a”) háromelemű és a kételemű rendezett halmaz direkt szorzata:



Tranzitív lezárt

Láttuk, hogy véges esetben a követési reláció (jele: $\prec$) meghatározza a részbenrendezési relációt. Ez motiválja az alábbit.

Definíció

Legyen $\rho \subseteq A^2$ egy reláció az A halmazon.

1. Az A halmazon értelmezett (halmazelméleti tartalmazásra nézve) legszűkebb olyan *tranzitív* γ relációt, amelyre $\rho \subseteq \gamma$ a ρ reláció **tranzitív lezártjának** vagy más szóval **tranzitív burkának** nevezzük és ρ^+-szal jelöljük.
2. Az A halmazon értelmezett (halmazelméleti tartalmazásra nézve) legszűkebb olyan *reflexív és tranzitív* γ relációt, amelyre $\rho \subseteq \gamma$ a ρ reláció **reflexív és tranzitív lezártjának** nevezzük és ρ^*-gal jelöljük.

„Legszűkebb" jelentése (pl. tranzitív lezártnál): bármely $\delta \subseteq A^2$-re ha $\rho \subseteq \delta$ és δ tranzitív, akkor $\rho^+ \subseteq \delta$.

Tranzitív lezárt

Láttuk, hogy véges esetben a követési reláció (jele: $\prec$) meghatározza a részbenrendezési relációt. Ez motiválja az alábbit.

Definíció

Legyen $\rho \subseteq A^2$ egy reláció az A halmazon.

1. Az A halmazon értelmezett (halmazelméleti tartalmazásra nézve) legszűkebb olyan *tranzitív* γ relációt, amelyre $\rho \subseteq \gamma$ a ρ reláció **tranzitív lezártjának** vagy más szóval **tranzitív burkának** nevezzük és ρ^+-szal jelöljük.
2. Az A halmazon értelmezett (halmazelméleti tartalmazásra nézve) legszűkebb olyan *reflexív és tranzitív* γ relációt, amelyre $\rho \subseteq \gamma$ a ρ reláció **reflexív és tranzitív lezártjának** nevezzük és ρ^*-gal jelöljük.

„Legszűkebb" jelentése (pl. tranzitív lezártnál): bármely $\delta \subseteq A^2$-re ha $\rho \subseteq \delta$ és δ tranzitív, akkor $\rho^+ \subseteq \delta$.

Tranzitív lezárt

Láttuk, hogy véges esetben a követési reláció (jele: $\prec$) meghatározza a részbenrendezési relációt. Ez motiválja az alábbit.

Definíció

Legyen $\rho \subseteq A^2$ egy reláció az A halmazon.

1. Az A halmazon értelmezett (halmazelméleti tartalmazásra nézve) legszűkebb olyan *tranzitív* γ relációt, amelyre $\rho \subseteq \gamma$ a ρ reláció **tranzitív lezártjának** vagy más szóval **tranzitív burkának** nevezzük és ρ^+-szal jelöljük.
2. Az A halmazon értelmezett (halmazelméleti tartalmazásra nézve) legszűkebb olyan *reflexív és tranzitív* γ relációt, amelyre $\rho \subseteq \gamma$ a ρ reláció **reflexív és tranzitív lezártjának** nevezzük és ρ^*-gal jelöljük.

„Legszűkebb" jelentése (pl. tranzitív lezártnál): bármely $\delta \subseteq A^2$-re ha $\rho \subseteq \delta$ és δ tranzitív, akkor $\rho^+ \subseteq \delta$.

Tranzitív lezárt létezése

Tétel (Nem túl hasznos tétel)

Tetszőleges $\rho \subseteq A^2$ relációnak létezik tranzitív lezártja és az egyértelműen meghatározott. Ugyanez érvényes a reflexív és tranzitív lezártra.

Bizonyítás.

Létezik ρ-nál bővebb-egyenlő tranzitív reláció az A halmazon, pl. ilyen az $A2$ („teljes reláció"). Az összes ρ-nál bővebb-egyenlő A-n értelmezett relációk metszete — jelöljük ezt γ-val — nyilván bővebb γ-nál. Továbbá γ tranzitív, hiszen a metszés megőrzi ezt a tulajdonságot. Végül tetszőleges $\delta \subseteq A^2$ tranzitív relációra $\gamma \subseteq \delta$ azért teljesül, mert a metszet bármelyik tényezőjének részhalmaza. Tehát γ éppen a tranzitív lezárt.
A reflexív és tranzitív lezártra a megfontolás hasonló. $\square$

Tranzitív lezárt létezése

Tétel (Nem túl hasznos tétel)

Tetszőleges $\rho \subseteq A^2$ relációnak létezik tranzitív lezártja és az egyértelműen meghatározott. Ugyanez érvényes a reflexív és tranzitív lezártra.

Bizonyítás.

Létezik ρ-nál bővebb-egyenlő tranzitív reláció az A halmazon, pl. ilyen az $A2$ („teljes reláció”). Az összes ρ-nál bővebb-egyenlő A-n értelmezett relációk metszete — jelöljük ezt γ-val — nyilván bővebb γ-nál. Továbbá γ tranzitív, hiszen a metszés megőrzi ezt a tulajdonságot. Végül tetszőleges $\delta \subseteq A^2$ tranzitív relációra $\gamma \subseteq \delta$ azért teljesül, mert a metszet bármelyik tényezőjének részhalmaza. Tehát γ éppen a tranzitív lezárt.
A reflexív és tranzitív lezártra a megfontolás hasonló. $\square$

Tranzitív lezárt konstrukciója

Példa

Legyen $(A, \leq)$ egy véges részbenrendezett halmaz, és legen ρ a $\prec$ (követési) reláció.

1. Ekkor ρ^+ éppen a $<$ reláció,
2. ρ^* pedig a $\leq$ reláció.

Feladat

Szimmetrikus ρ esetén ρ^* ekvivalencia.

Tranzitív lezárt konstrukciója

Példa

Legyen $(A, \leq)$ egy véges részbenrendezett halmaz, és legen ρ a $\prec$ (követési) reláció.

1. Ekkor ρ^+ éppen a $<$ reláció,
2. ρ^* pedig a $\leq$ reláció.

Feladat

Szimmetrikus ρ esetén ρ^* ekvivalencia.

Egyesítés és metszet

A szupremum és az infimum fogalma nemcsak a Kalkulus tantárgy során, hanem tetszőleges r.r.halmazban definiálható.

Definíció

Legyen $(A, \leq)$ r.r.halmaz, $B \subseteq A$, $c \in A$. Ha bármely $b \in B$-re $b \leq c$, akkor c-t a B **felső korlátjának** nevezzük. Ha c olyan felső korlátja B-nek, hogy a B bármely d felső korlátjára $c \leq d$, akkor c-t a B **legkisebb felső korlátjának**, más szóval **szupremumának**, más szóval **egyesítésének** nevezzük. Hasonlóan definiálható az infimum is: Ha bármely $b \in B$-re $c \leq b$, akkor c-t a B **alsó korlátjának** nevezzük. Ha c olyan alsó korlátja B-nek, hogy a B bármely d alsó korlátjára $d \leq c$, akkor c-t a B **legnagyobb alsó korlátjának**, más szóval **infimumának**, más szóval **metszetének** nevezzük. Szokásos jelölések: $c = \sup B = \bigvee B$, illetve $c = \inf B = \bigwedge B$.

Egyesítés és metszet

A szupremum és az infimum fogalma nemcsak a Kalkulus tantárgy során, hanem tetszőleges r.r.halmazban definiálható.

Definíció

Legyen $(A, \leq)$ r.r.halmaz, $B \subseteq A$, $c \in A$. Ha bármely $b \in B$-re $b \leq c$, akkor c-t a B **felső korlátjának** nevezzük. Ha c olyan felső korlátja B-nek, hogy a B bármely d felső korlátjára $c \leq d$, akkor c-t a B **legkisebb felső korlátjának**, más szóval **szupremumának**, más szóval **egyesítésének** nevezzük.
Hasonlóan definiálható az infimum is: Ha bármely $b \in B$-re $c \leq b$, akkor c-t a B **alsó korlátjának** nevezzük. Ha c olyan alsó korlátja B-nek, hogy a B bármely d alsó korlátjára $d \leq c$, akkor c-t a B **legnagyobb alsó korlátjának**, más szóval **infimumának**, más szóval **metszetének** nevezzük. Szokásos jelölések: $c = \sup B = \bigvee B$, illetve $c = \inf B = \bigwedge B$.

Egyesítés és metszet

A szupremum és az infimum fogalma nemcsak a Kalkulus tantárgy során, hanem tetszőleges r.r.halmazban definiálható.

Definíció

Legyen $(A, \leq)$ r.r.halmaz, $B \subseteq A$, $c \in A$. Ha bármely $b \in B$-re $b \leq c$, akkor c-t a B **felső korlátjának** nevezzük. Ha c olyan felső korlátja B-nek, hogy a B bármely d felső korlátjára $c \leq d$, akkor c-t a B **legkisebb felső korlátjának**, más szóval **szupremumának**, más szóval **egyesítésének** nevezzük. Hasonlóan definiálható az infimum is: Ha bármely $b \in B$-re $c \leq b$, akkor c-t a B **alsó korlátjának** nevezzük. Ha c olyan alsó korlátja B-nek, hogy a B bármely d alsó korlátjára $d \leq c$, akkor c-t a B **legnagyobb alsó korlátjának**, más szóval **infimumának**, más szóval **metszetének** nevezzük. Szokásos jelölések: $c = \sup B = \bigvee B$, illetve $c = \inf B = \bigwedge B$.

A szupremum és az infimum fogalma nemcsak a Kalkulus tantárgy során, hanem tetszőleges r.r.halmazban definiálható.

Definíció

Legyen $(A, \leq)$ r.r.halmaz, $B \subseteq A$, $c \in A$. Ha bármely $b \in B$-re $b \leq c$, akkor c-t a B **felső korlátjának** nevezzük. Ha c olyan felső korlátja B-nek, hogy a B bármely d felső korlátjára $c \leq d$, akkor c-t a B **legkisebb felső korlátjának**, más szóval **szupremumának**, más szóval **egyesítésének** nevezzük. Hasonlóan definiálható az infimum is: Ha bármely $b \in B$-re $c \leq b$, akkor c-t a B **alsó korlátjának** nevezzük. Ha c olyan alsó korlátja B-nek, hogy a B bármely d alsó korlátjára $d \leq c$, akkor c-t a B **legnagyobb alsó korlátjának**, más szóval **infimumának**, más szóval **metszetének** nevezzük. Szokásos jelölések: $c = \sup B = \bigvee B$, illetve $c = \inf B = \bigwedge B$.

Háló

Egyáltalán nem biztos, hogy B-nek van felső korlátja, és az még kevésbé biztos, hogy B-nek van szuprémuma. Az infimumról ugyanez mondható el. Az viszont igaz, hogy ha létezik B-nek szupremuma vagy infimuma, az egyértelműen meghatározott. (Ez könnyen következik az antiszimmetriából.)

Definíció

Egy részbenrendezett halmazt **hálónak** nevezünk, ha bármely kételemű részhalmazának létezik szupremuma és infimuma.

Háló

Egyáltalán nem biztos, hogy B-nek van felső korlátja, és az még kevésbé biztos, hogy B-nek van szuprémuma. Az infimumról ugyanez mondható el. Az viszont igaz, hogy ha létezik B-nek szupremuma vagy infimuma, az egyértelműen meghatározott. (Ez könnyen következik az antiszimmetriából.)

Definíció

Egy részbenrendezett halmazt **hálónak** nevezünk, ha bármely kételemű részhalmazának létezik szupremuma és infimuma.

Háló

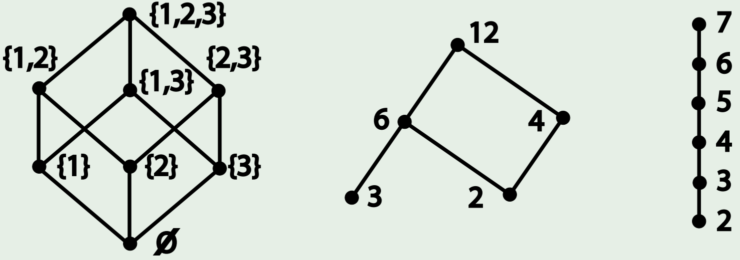
Egyáltalán nem biztos, hogy B-nek van felső korlátja, és az még kevésbé biztos, hogy B-nek van szuprémuma. Az infimumról ugyanez mondható el. Az viszont igaz, hogy ha létezik B-nek szupremuma vagy infimuma, az egyértelműen meghatározott. (Ez könnyen következik az antiszimmetriából.)

Definíció

Egy részbenrendezett halmazt **hálónak** nevezünk, ha bármely kételemű részhalmazának létezik szupremuma és infimuma.

Példák hálókra

Feladat (Hálók-e az alábbiak?)

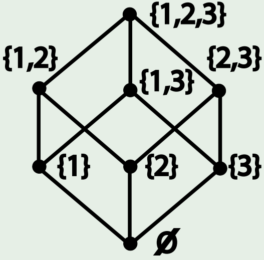


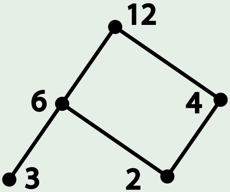
Megoldás

A középső nem háló: bár bármely $\{x, y\}$ részhalmaznak van szupremuma — x és y legkisebb közös többszöröse, de a $\{3, 2\}$ és a $\{3, 4\}$ részhalmazoknak nincs infimuma, sőt még alsó korlátja sem. A baloldali r.r.halmaz háló, ahol az infimum és szuprémum a szokásos metszet és únió. A jobboldali háló, ahol a metszet a minimum, az egyesítés a maximum.

Példák hálókra

Feladat (Hálók-e az alábbiak?)



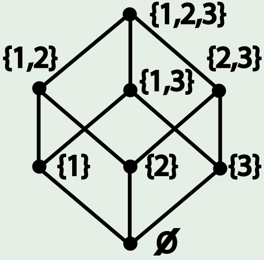


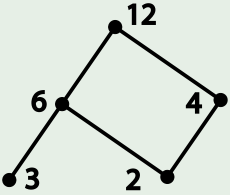
Megoldás

A középső nem háló: bár bármely $\{x, y\}$ részhalmaznak van szupremuma — x és y legkisebb közös többszöröse, de a $\{3, 2\}$ és a $\{3, 4\}$ részhalmazoknak nincs infimuma, sőt még alsó korlátja sem. A baloldali r.r.halmaz háló, ahol az infimum és szuprémum a szokásos metszet és únió. A jobboldali háló, ahol a metszet a minimum, az egyesítés a maximum.

Példák hálókra

Feladat (Hálók-e az alábbiak?)



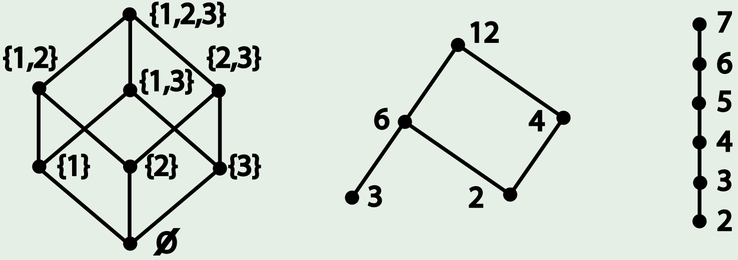


Megoldás

A középső nem háló: bár bármely $\{x, y\}$ részhalmaznak van szupremuma — x és y legkisebb közös többszöröse, de a $\{3, 2\}$ és a $\{3, 4\}$ részhalmazoknak nincs infimuma, sőt még alsó korlátja sem. A baloldali r.r.halmaz háló, ahol az infimum és szuprémum a szokásos metszet és únió. A jobboldali háló, ahol a metszet a minimum, az egyesítés a maximum.

Példák hálókra

Feladat (Hálók-e az alábbiak?)

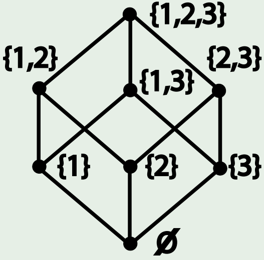


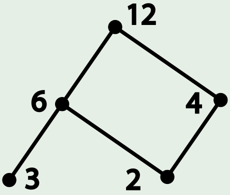
Megoldás

A középső nem háló: bár bármely $\{x, y\}$ részhalmaznak van szupremuma — x és y legkisebb közös többszöröse, de a $\{3, 2\}$ és a $\{3, 4\}$ részhalmazoknak nincs infimuma, sőt még alsó korlátja sem. A baloldali r.r.halmaz háló, ahol az infimum és szuprémum a szokásos metszet és únió. A jobboldali háló, ahol a metszet a minimum, az egyesítés a maximum.

Példák hálókra

Feladat (Hálók-e az alábbiak?)





Megoldás

A középső nem háló: bár bármely $\{x, y\}$ részhalmaznak van szupremuma — x és y legkisebb közös többszöröse, de a $\{3, 2\}$ és a $\{3, 4\}$ részhalmazoknak nincs infimuma, sőt még alsó korlátja sem. A baloldali r.r.halmaz háló, ahol az infimum és szuprémum a szokásos metszet és únió. A jobboldali háló, ahol a metszet a minimum, az egyesítés a maximum.

Példa: huszárezred elemi úton.

Példa

A huszárezred elvonul az óvoda ablaka előtt. Meg tudja-e egy óvodás kapásból mondani, hogy miből van több, lóból vagy huszárból?

Megoldás

Kézenfekvő körülményeket feltételezve (pl. ló nem ül a huszáron, stb.) **igen**, hiszen minden lovon pontosan egy huszár ül és minen huszár lovon ül, tehát az ezredben <u>ugyanannyi</u> ló van, mint huszár. (Ez a szám általában nem 1000.)

Példa: huszárezred elemi úton.

Példa

A huszárezred elvonul az óvoda ablaka előtt. Meg tudja-e egy óvodás kapásból mondani, hogy miből van több, lóból vagy huszárból?

Megoldás

Kézenfekvő körülményeket feltételezve (pl. ló nem ül a huszáron, stb.) **igen**, hiszen minden lovon pontosan egy huszár ül és minen huszár lovon ül, tehát az ezredben ugyanannyi ló van, mint huszár. (Ez a szám általában nem 1000.)

Példa: huszárezred matematikailag

Megoldás (másként fogalmazva)

Legyen L a lovak, H a huszárok halmaza, és tekintsük az $f = \{(\ell, h) \in L \times H : h \text{ rajta ül } \ell\text{-en}\}$ megfeleltetést. Ez leképezés (mert minden lovon ül huszár és pontosan egy), injektív (mert nincs olyan huszár, aki egyszerre több lovon ülne) és szürjektív (mert egyik huszár se gyalog megy). Tehát f bijektív. Egy ilyen $f : L \to H$ leképezés **létezése az oka** annak, hogy $|L| = |H|$, azaz, hogy a két halmaznak ugyanannyi eleme van.

Példa: huszárezred matematikailag

Megoldás (másként fogalmazva)

Legyen L a lovak, H a huszárok halmaza, és tekintsük az $f = \{(\ell, h) \in L \times H : h \text{ rajta ül } \ell\text{-en}\}$ megfeleltetést. Ez leképezés (mert minden lovon ül huszár és pontosan egy), injektív (mert nincs olyan huszár, aki egyszerre több lovon ülne) és szürjektív (mert egyik huszár se gyalog megy). Tehát f bijektív. Egy ilyen $f : L \to H$ leképezés **létezése az oka** annak, hogy $|L| = |H|$, azaz, hogy a két halmaznak ugyanannyi eleme van.

Példa: huszárezred matematikailag

Megoldás (másként fogalmazva)

Legyen L a lovak, H a huszárok halmaza, és tekintsük az $f = \{(\ell, h) \in L \times H : h \text{ rajta ül } \ell\text{-en}\}$ megfeleltetést. Ez leképezés (mert minden lovon ül huszár és pontosan egy), injektív (mert nincs olyan huszár, aki egyszerre több lovon ülne) és szürjektív (mert egyik huszár se gyalog megy). Tehát f bijektív. Egy ilyen $f : L \to H$ leképezés **létezése az oka** annak, hogy $|L| = |H|$, azaz, hogy a két halmaznak ugyanannyi eleme van.

Példa: huszárezred matematikailag

Megoldás (másként fogalmazva)

Legyen L a lovak, H a huszárok halmaza, és tekintsük az $f = \{(\ell, h) \in L \times H : h \text{ rajta ül } \ell\text{-en}\}$ megfeleltetést. Ez leképezés (mert minden lovon ül huszár és pontosan egy), injektív (mert nincs olyan huszár, aki egyszerre több lovon ülne) és szürjektív (mert egyik huszár se gyalog megy). Tehát f bijektív. Egy ilyen $f : L \to H$ leképezés **létezése az oka** annak, hogy $|L| = |H|$, azaz, hogy a két halmaznak ugyanannyi eleme van.

Példa: huszárezred matematikailag

Megoldás (másként fogalmazva)

Legyen L a lovak, H a huszárok halmaza, és tekintsük az $f = \{(\ell, h) \in L \times H : h \text{ rajta ül } \ell\text{-en}\}$ megfeleltetést. Ez leképezés (mert minden lovon ül huszár és pontosan egy), injektív (mert nincs olyan huszár, aki egyszerre több lovon ülne) és szürjektív (mert egyik huszár se gyalog megy). Tehát f bijektív. Egy ilyen $f : L \to H$ leképezés **létezése az oka** annak, hogy $|L| = |H|$, azaz, hogy a két halmaznak ugyanannyi eleme van.

Példa: huszárezred matematikailag

Megoldás (másként fogalmazva)

Legyen L a lovak, H a huszárok halmaza, és tekintsük az $f = \{(\ell, h) \in L \times H : h \text{ rajta ül } \ell\text{-en}\}$ megfeleltetést. Ez leképezés (mert minden lovon ül huszár és pontosan egy), injektív (mert nincs olyan huszár, aki egyszerre több lovon ülne) és szürjektív (mert egyik huszár se gyalog megy). Tehát f bijektív. Egy ilyen $f : L \to H$ leképezés **létezése az oka** annak, hogy $|L| = |H|$, azaz, hogy a két halmaznak ugyanannyi eleme van.

Gyakorlati igény hívta életre azt, hogy egyes halmazok elemeit **megszámoljuk**. A (10-nél nagyobb számokkal való) számolás vélhetően az állattenyésztő népeknél alakult ki: ott lényeges információ a nyáj elemszáma (pl. azért, hogy mielőbb kiderüljön, ha farkas vagy tolvaj tizedeli a nyájat).

A véges halmazok elemeit **megszámolhatjuk**. Pl. a balkezünk ujjainak halmaza esetén azt mondjuk, hogy ennek a halmaznak az elemszáma 5. Esetenként sokat kell számolni és/vagy gondolkodni, de minden véges halmaznak van egy és csakis egy jólmeghatározott **elemszáma**.

Gyakorlati igény hívta életre azt, hogy egyes halmazok elemeit **megszámoljuk**. A (10-nél nagyobb számokkal való) számolás vélhetően az állattenyésztő népeknél alakult ki: ott lényeges információ a nyáj elemszáma (pl. azért, hogy mielőbb kiderüljön, ha farkas vagy tolvaj tizedeli a nyájat).

A véges halmazok elemeit **megszámolhatjuk**. Pl. a balkezünk ujjainak halmaza esetén azt mondjuk, hogy ennek a halmaznak az elemszáma 5. Esetenként sokat kell számolni és/vagy gondolkodni, de minden véges halmaznak van egy és csakis egy jólmeghatározott **elemszáma**.

Megszámolás, számosság

Per pillanat nem definiáljuk, hogy mit nevezünk véges halmaznak. Nem túl precíz definíció lehet pl. az alábbi: egy halmaz véges, ha elemeit — az $\mathbb{N}_0$ elemeinek felhasználásával — meg tudjuk számolni. Ha egy halmaz nem ilyen, akkor *végtelennek* mondjuk.
A végtelen halmazok elemeit is meg szeretnénk számolni! Ekkor persze nem kaphatunk természetes számokat, ezért nem használható az „elemszám" elnevezés. Ehelyett a **számosság** elnevezést fogjuk használni.
Tehát a **számosság** az elemszám megfelelője. Tetszőleges halmaznak lesz számossága, amely véges halmaz esetén persze az elemszámmal fog megegyezni. Más szóval: a véges számosságok pontosan a nemnegatív egész számok lesznek.
Aki nem törekszik a dolgok bonyolítására, az beérné ennyivel: a számosságok: $0, 1, 2, \ldots, \infty$. Így nem lenne semmi gond — és semmi hasznunk nem lenne belőle. Más lehetőséget választunk.

Per pillanat nem definiáljuk, hogy mit nevezünk véges halmaznak. Nem túl precíz definíció lehet pl. az alábbi: egy halmaz véges, ha elemeit — az $\mathbb{N}_0$ elemeinek felhasználásával — meg tudjuk számolni. Ha egy halmaz nem ilyen, akkor *végtelennek* mondjuk.

A végtelen halmazok elemeit is meg szeretnénk számolni! Ekkor persze nem kaphatunk természetes számokat, ezért nem használható az „elemszám” elnevezés. Ehelyett a **számosság** elnevezést fogjuk használni.

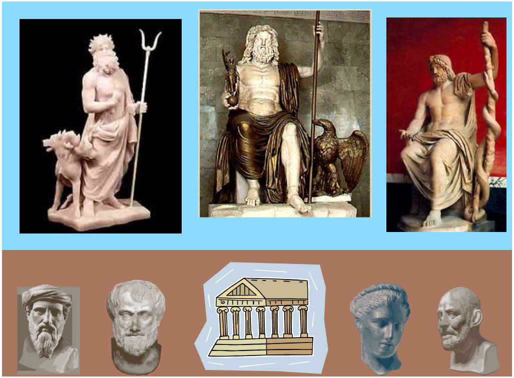
Tehát a **számosság** az elemszám megfelelője. Tetszőleges halmaznak lesz számossága, amely véges halmaz esetén persze az elemszámmal fog megegyezni. Más szóval: a véges számosságok pontosan a nemnegatív egész számok lesznek.

Aki nem törekszik a dolgok bonyolítására, az beérné ennyivel: a számosságok: 0,1,2, . . . , ∞. Így nem lenne semmi gond — és semmi hasznunk nem lenne belőle. Más lehetőséget választunk.

Per pillanat nem definiáljuk, hogy mit nevezünk véges halmaznak. Nem túl precíz definíció lehet pl. az alábbi: egy halmaz véges, ha elemeit — az $\mathbb{N}_0$ elemeinek felhasználásával — meg tudjuk számolni. Ha egy halmaz nem ilyen, akkor *végtelennek* mondjuk.
A végtelen halmazok elemeit is meg szeretnénk számolni! Ekkor persze nem kaphatunk természetes számokat, ezért nem használható az „elemszám" elnevezés. Ehelyett a **számosság** elnevezést fogjuk használni.
Tehát a **számosság** az elemszám megfelelője. Tetszőleges halmaznak lesz számossága, amely véges halmaz esetén persze az elemszámmal fog megegyezni. Más szóval: a véges számosságok pontosan a nemnegatív egész számok lesznek.
Aki nem törekszik a dolgok bonyolítására, az beérné ennyivel: a számosságok: 0,1,2, ..., ∞. Így nem lenne semmi gond — és semmi hasznunk nem lenne belőle. Más lehetőséget választunk.

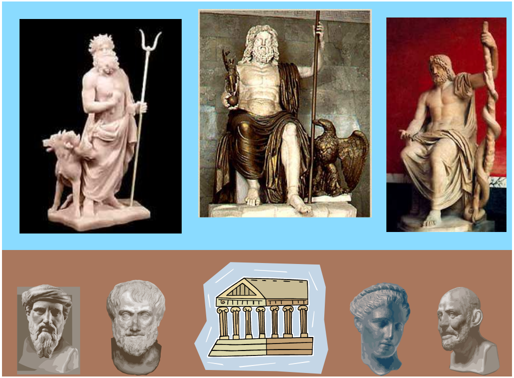
Per pillanat nem definiáljuk, hogy mit nevezünk véges halmaznak. Nem túl precíz definíció lehet pl. az alábbi: egy halmaz véges, ha elemeit — az $\mathbb{N}_0$ elemeinek felhasználásával — meg tudjuk számolni. Ha egy halmaz nem ilyen, akkor *végtelennek* mondjuk.
A végtelen halmazok elemeit is meg szeretnénk számolni! Ekkor persze nem kaphatunk természetes számokat, ezért nem használható az „elemszám" elnevezés. Ehelyett a **számosság** elnevezést fogjuk használni.
Tehát a **számosság** az elemszám megfelelője. Tetszőleges halmaznak lesz számossága, amely véges halmaz esetén persze az elemszámmal fog megegyezni. Más szóval: a véges számosságok pontosan a nemnegatív egész számok lesznek.
Aki nem törekszik a dolgok bonyolítására, az beérné ennyivel: a számosságok: $0, 1, 2, \ldots, \infty$. Így nem lenne semmi gond — és semmi hasznunk nem lenne belőle. Más lehetőséget választunk.

Mire lesznek jók a végtelen számosságok?



Az ógörög mitológia szerint a földi világban éltek az emberek, a fenti világban az istenek, és olyan tulajdonságokkal is rendelkeztek, amelyekkel az emberek nem. A görög istenek könnyedén hajtottak végre a földi világában olyan tetteket, amelyeket az emberek nem tudtak, vagy csak nagyon nehezen tudtak volna megtenni.

Mire lesznek jók a végtelen számosságok?



Az ógörög mitológia szerint a földi világban éltek az emberek, a fenti világban az istenek, és olyan tulajdonságokkal is rendelkeztek, amelyekkel az emberek nem. A görög istenek könnyedén hajtották végre a földi világában olyan tetteket, amelyeket az emberek nem tudtak, vagy csak nagyon nehezen tudtak volna megtenni.

Valami hasonlóra ...

Hamarosan látni fogjuk, hogy a véges elemszámok világa fölött ott van a számosságok világa. A számosságok olyan tulajdonságokkal (is) rendelkeznek, amelyekkel a természetes számok nem. A számosságok segítségével olyan problémák is könnyedén megoldhatók a véges számok világában, amelyek számosságok nélkül csak nagyon nehezen vagy egyáltalán nem lennének megoldhatók.

Valami hasonlóra . . .

Hamarosan látni fogjuk, hogy a véges elemszámok világa fölött ott van a számosságok világa. A számosságok olyan tulajdonságokkal (is) rendelkeznek, amelyekkel a természetes számok nem. A számosságok segítségével olyan problémák is könnyedén megoldhatók a véges számok világában, amelyek számosságok nélkül csak nagyon nehezen vagy egyáltalán nem lennének megoldhatók.

„Azonos elemszámú” fogalma

Mielőtt a végtelen számosságokat definiálnánk, gondolkodjunk el a természetes számok fogalmának kialakulásán. Mit jelent az, hogy „öt”? Hogy egy halmaz öttelemű? Előbb azt kell meggondolni (annak a fogalomnak kellett kialakulnia), hogy mit jelent az, hogy két halmaznak „ugyanannyi eleme van”? Más szóval, mit jelent az, hogy két halmaz „**elemszáma egyenlő**” ?

Definíció

Legyen A és B halmaz. **Akkor mondjuk, hogy az A és B elemszáma egyenlő, ha létezik $A \to B$ bijektív leképezés**.

Ezzel kész az első tennivaló. Egy korábbi példára visszautalva, a lovak és huszárok halmazának elemszáma egyenlő, mert a „rajta ül” leképezés bijekció a két halmaz között.

„Azonos elemszámú” fogalma

Mielőtt a végtelen számosságokat definiálnánk, gondolkodjunk el a természetes számok fogalmának kialakulásán. Mit jelent az, hogy „öt”? Hogy egy halmaz öttelemű? Előbb azt kell meggondolni (annak a fogalomnak kellett kialakulnia), hogy mit jelent az, hogy két halmaznak „ugyanannyi eleme van”? Más szóval, mit jelent az, hogy két halmaz „**elemszáma egyenlő**” ?

Definíció

Legyen A és B halmaz. **Akkor mondjuk, hogy az A és B elemszáma egyenlő, ha létezik $A \to B$ bijektív leképezés.**

Ezzel kész az első tennivaló. Egy korábbi példára visszautalva, a lovak és huszárok halmazának elemszáma egyenlő, mert a „rajta ül” leképezés bijekció a két halmaz között.

„Azonos elemszámú” fogalma

Mielőtt a végtelen számosságokat definiálnánk, gondolkodjunk el a természetes számok fogalmának kialakulásán. Mit jelent az, hogy „öt”? Hogy egy halmaz öttelemű? Előbb azt kell meggondolni (annak a fogalomnak kellett kialakulnia), hogy mit jelent az, hogy két halmaznak „ugyanannyi eleme van”? Más szóval, mit jelent az, hogy két halmaz „**elemszáma egyenlő**” ?

Definíció

Legyen A és B halmaz. **Akkor mondjuk, hogy az A és B elemszáma egyenlő, ha létezik $A \to B$ bijektív leképezés.**

Ezzel kész az első tennivaló. Egy korábbi példára visszautalva, a lovak és huszárok halmazának elemszáma egyenlő, mert a „rajta ül” leképezés bijekció a két halmaz között.

„Azonos elemszámú" fogalma

Mielőtt a végtelen számosságokat definiálnánk, gondolkodjunk el a természetes számok fogalmának kialakulásán. Mit jelent az, hogy „öt"? Hogy egy halmaz öttelemű? Előbb azt kell meggondolni (annak a fogalomnak kellett kialakulnia), hogy mit jelent az, hogy két halmaznak „ugyanannyi eleme van"? Más szóval, mit jelent az, hogy két halmaz „**elemszáma egyenlő**" ?

Definíció

Legyen A és B halmaz. **Akkor mondjuk, hogy az A és B elemszáma egyenlő, ha létezik $A \to B$ bijektív leképezés**.

Ezzel kész az első tennivaló. Egy korábbi példára visszautalva, a lovak és huszárok halmazának elemszáma egyenlő, mert a „rajta ül" leképezés bijekció a két halmaz között.

„Azonos elemszámú” fogalma

Mielőtt a végtelen számosságokat definiálnánk, gondolkodjunk el a természetes számok fogalmának kialakulásán. Mit jelent az, hogy „öt”? Hogy egy halmaz öttelemű? Előbb azt kell meggondolni (annak a fogalomnak kellett kialakulnia), hogy mit jelent az, hogy két halmaznak „ugyanannyi eleme van”? Más szóval, mit jelent az, hogy két halmaz „**elemszáma egyenlő**” ?

Definíció

Legyen A és B halmaz. **Akkor mondjuk, hogy az A és B elemszáma egyenlő, ha létezik $A \to B$ bijektív leképezés**.

Ezzel kész az első tennivaló. Egy korábbi példára visszautalva, a lovak és huszárok halmazának elemszáma egyenlő, mert a „rajta ül” leképezés bijekció a két halmaz között.

Az „öt” fogalma

A következő lépés: kiválasztunk bizonyos halmazokat. Ezek egyike pl. a jobb kezünk ujjainak halmaza. Majd a kiválasztott halmazzal egyenlő elemszámú halmazokat elnevezzük valahogy (esetünkben „öteleműeknek”). Tehát (legalábbis az őskorban, illetve a mai előadáson) nem mondjuk meg, mi az, hogy „öt”, hanem csak annyit mondunk meg, mi az, hogy „ötelemű” halmaz.
Ezt követően az „öt” nem más, mint az ötelemű halmazok közös tulajdonsága. (Azaz az „öt” fogalmát absztrakcióval definiáltuk — az ilyenfajta absztrakció teljesen megszokott az emberi gondolkodásban. Sok más fogalom is hasonlóan alakul ki.)
Ha jobb keze ujjainak halmaza és az elejtett mammutok halmaza között az ősember bijekciót tudott létesíteni, akkor azt mondta, hogy „öt”, és elégedett volt; nem elmélkedett olyan hiábavaló kérdésen, hogy mit jelent az „öt”. Hasonlóan járunk el a számosságok fogalmának kialakításakor is:

Az „öt'' fogalma

A következő lépés: kiválasztunk bizonyos halmazokat. Ezek egyike pl. a jobb kezünk ujjainak halmaza. Majd a kiválasztott halmazzal egyenlő elemszámú halmazokat elnevezzük valahogy (esetünkben „öteleműeknek''). Tehát (legalábbis az őskorban, illetve a mai előadáson) nem mondjuk meg, mi az, hogy „öt'', hanem csak annyit mondunk meg, mi az, hogy „ötelemű'' halmaz.

Ezt követően az „öt'' nem más, mint az ötelemű halmazok közös tulajdonsága. (Azaz az „öt'' fogalmát absztrakcióval definiáltuk — az ilyenfajta absztrakció teljesen megszokott az emberi gondolkodásban. Sok más fogalom is hasonlóan alakul ki.)

Ha jobb keze ujjainak halmaza és az elejtett mammutok halmaza között az ősember bijekciót tudott létesíteni, akkor azt mondta, hogy „öt'', és elégedett volt; nem elmélkedett olyan hiábavaló kérdésen, hogy mit jelent az „öt''. Hasonlóan járunk el a számosságok fogalmának kialakításakor is:

A következő lépés: kiválasztunk bizonyos halmazokat. Ezek egyike pl. a jobb kezünk ujjainak halmaza. Majd a kiválasztott halmazzal egyenlő elemszámú halmazokat elnevezzük valahogy (esetünkben „öteleműeknek”). Tehát (legalábbis az őskorban, illetve a mai előadáson) nem mondjuk meg, mi az, hogy „öt”, hanem csak annyit mondunk meg, mi az, hogy „ötelemű” halmaz.
Ezt követően az „öt” nem más, mint az ötelemű halmazok közös tulajdonsága. (Azaz az „öt” fogalmát absztrakcióval definiáltuk — az ilyenfajta absztrakció teljesen megszokott az emberi gondolkodásban. Sok más fogalom is hasonlóan alakul ki.)
Ha jobb keze ujjainak halmaza és az elejtett mammutok halmaza között az ősember bijekciót tudott létesíteni, akkor azt mondta, hogy „öt”, és elégedett volt; nem elmélkedett olyan hiábavaló kérdésen, hogy mit jelent az „öt”. Hasonlóan járunk el a számosságok fogalmának kialakításakor is:

Az „öt'' fogalma

A következő lépés: kiválasztunk bizonyos halmazokat. Ezek egyike pl. a jobb kezünk ujjainak halmaza. Majd a kiválasztott halmazzal egyenlő elemszámú halmazokat elnevezzük valahogy (esetünkben „öteleműeknek''). Tehát (legalábbis az őskorban, illetve a mai előadáson) nem mondjuk meg, mi az, hogy „öt'', hanem csak annyit mondunk meg, mi az, hogy „ötelemű'' halmaz.
Ezt követően az „öt'' nem más, mint az ötelemű halmazok közös tulajdonsága. (Azaz az „öt'' fogalmát absztrakcióval definiáltuk — az ilyenfajta absztrakció teljesen megszokott az emberi gondolkodásban. Sok más fogalom is hasonlóan alakul ki.)
Ha jobb keze ujjainak halmaza és az elejtett mammutok halmaza között az ősember bijekciót tudott létesíteni, akkor azt mondta, hogy „öt'', és elégedett volt; nem elmélkedett olyan hiábavaló kérdésen, hogy mit jelent az „öt''. Hasonlóan járunk el a számosságok fogalmának kialakításakor is:

Definíció („azonos számosságú”)

Legyen A és B halmaz. **Akkor mondjuk, hogy az A és B számossága egyenlő, ha létezik $A \to B$ bijektív leképezés.**

Most elnevezünk egy számosságot (annak mintájára, ahogy a jobbkezünk ujjainak halmazával kapcsolatban egy számot elneveztünk „ötnek”).

Definíció ($\aleph_0$)

A pozitív egész számok halmazának számosságát **megszámlálhatóan végtelennek** nevezzük és $\aleph_0$-lal jelöljük. (Kiejtve „alef null”; $\aleph$ a héber ábécé első betűje.)

Definíció („azonos számosságú")

Legyen A és B halmaz. **Akkor mondjuk, hogy az A és B számossága egyenlő, ha létezik $A \to B$ bijektív leképezés.**

Most elnevezünk egy számosságot (annak mintájára, ahogy a jobbkezünk ujjainak halmazával kapcsolatban egy számot elneveztünk „ötnek").

Definíció ($\aleph_0$)

A pozitív egész számok halmazának számosságát **megszámlálhatóan végtelennek** nevezzük és $\aleph_0$-lal jelöljük. (Kiejtve „alef null"; $\aleph$ a héber ábécé első betűje.)

„Azonos számosságú" fogalma

Definíció („azonos számosságú")

Legyen A és B halmaz. **Akkor mondjuk, hogy az A és B számossága egyenlő, ha létezik $A \to B$ bijektív leképezés.**

Most elnevezünk egy számosságot (annak mintájára, ahogy a jobbkezünk ujjainak halmazával kapcsolatban egy számot elneveztünk „ötnek").

Definíció ($\aleph_0$)

A pozitív egész számok halmazának számosságát **megszámlálhatóan végtelennek** nevezzük és $\aleph_0$-lal jelöljük. (Kiejtve „alef null"; $\aleph$ a héber ábécé első betűje.)

Tényleg definiáltuk $\aleph_0$-at?

Jelölés

Egy X halmaz számosságát (amely véges halmaz esetén az elemszám) $|X|$ fogja jelölni. Tehát pl. $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Megjegyzés

Az $\aleph_0$ számosságot hasonlóan (és ugyanolyan jól) definiáltuk, mint pl, az „öt” számot. Lehet egy kézen öt ujj, lehet egy nap öt étkezés, de mi az, hogy öt? Pontosan ugyanannyira mondtuk meg, hogy mi az $\aleph_0$, mint amennyire megmondható, vagy amennyire az óvodában megmondták, hogy mi az hogy „öt”. Tehát tudjuk (sok éve) hogy mi az hogy „ötelemű halmaz”, és mostantól azt is tudjuk, hogy mi az hogy „$\aleph_0$-elemű” halmaz. Mindkét esetben egy tulajdonságot definiálunk, és érjük be azzal, hogy el tudjuk dönteni, hogy mely objektumok (jelen esetben halmazok) rendelkeznek ezen tulajdonsággal. Ez az ún. *absztrakcióval* való „definiálás” jól megfelel az emberi gondolkodásnak.

Tényleg definiáltuk $\aleph_0$-at?

Jelölés

Egy X halmaz számosságát (amely véges halmaz esetén az elemszám) $|X|$ fogja jelölni. Tehát pl. $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Megjegyzés

Az $\aleph_0$ számosságot hasonlóan (és ugyanolyan jól) definiáltuk, mint pl, az „öt'' számot. Lehet egy kézen öt ujj, lehet egy nap öt étkezés, de mi az, hogy öt? Pontosan ugyanannyira mondtuk meg, hogy mi az $\aleph_0$, mint amennyire megmondható, vagy amennyire az óvodában megmondták, hogy mi az hogy „öt''. Tehát tudjuk (sok éve) hogy mi az hogy „ötelemű halmaz'', és mostantól azt is tudjuk, hogy mi az hogy „$\aleph_0$-elemű'' halmaz. Mindkét esetben egy tulajdonságot definiálunk, és érjük be azzal, hogy el tudjuk dönteni, hogy mely objektumok (jelen esetben halmazok) rendelkeznek ezen tulajdonsággal. Ez az ún. *absztrakcióval* való „definiálás'' jól megfelel az emberi gondolkodásnak.

Tényleg definiáltuk $\aleph_0$-at?

Jelölés

Egy X halmaz számosságát (amely véges halmaz esetén az elemszám) $|X|$ fogja jelölni. Tehát pl. $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Megjegyzés

Az $\aleph_0$ számosságot hasonlóan (és ugyanolyan jól) definiáltuk, mint pl, az „öt'' számot. Lehet egy kézen öt ujj, lehet egy nap öt étkezés, de mi az, hogy öt? Pontosan ugyanannyira mondtuk meg, hogy mi az $\aleph_0$, mint amennyire megmondható, vagy amennyire az óvodában megmondták, hogy mi az hogy „öt''. Tehát tudjuk (sok éve) hogy mi az hogy „ötelemű halmaz'', és mostantól azt is tudjuk, hogy mi az hogy „$\aleph_0$-elemű'' halmaz. Mindkét esetben egy tulajdonságot definiálunk, és érjük be azzal, hogy el tudjuk dönteni, hogy mely objektumok (jelen esetben halmazok) rendelkeznek ezen tulajdonsággal. Ez az ún. *absztrakcióval* való „definiálás'' jól megfelel az emberi gondolkodásnak.

Tényleg definiáltuk $\aleph_0$-at?

Jelölés

Egy X halmaz számosságát (amely véges halmaz esetén az elemszám) $|X|$ fogja jelölni. Tehát pl. $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Megjegyzés

Az $\aleph_0$ számosságot hasonlóan (és ugyanolyan jól) definiáltuk, mint pl, az „öt'' számot. Lehet egy kézen öt ujj, lehet egy nap öt étkezés, de mi az, hogy öt? Pontosan ugyanannyira mondtuk meg, hogy mi az $\aleph_0$, mint amennyire megmondható, vagy amennyire az óvodában megmondták, hogy mi az hogy „öt''. Tehát tudjuk (sok éve) hogy mi az hogy „ötelemű halmaz'', és mostantól azt is tudjuk, hogy mi az hogy „$\aleph_0$-elemű'' halmaz. Mindkét esetben egy tulajdonságot definiálunk, és érjük be azzal, hogy el tudjuk dönteni, hogy mely objektumok (jelen esetben halmazok) rendelkeznek ezen tulajdonsággal. Ez az ún. *absztrakcióval* való „definiálás'' jól megfelel az emberi gondolkodásnak.

Tényleg definiáltuk $\aleph_0$-at?

Jelölés

Egy X halmaz számosságát (amely véges halmaz esetén az elemszám) $|X|$ fogja jelölni. Tehát pl. $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Megjegyzés

Az $\aleph_0$ számosságot hasonlóan (és ugyanolyan jól) definiáltuk, mint pl, az „öt" számot. Lehet egy kézen öt ujj, lehet egy nap öt étkezés, de mi az, hogy öt? Pontosan ugyanannyira mondtuk meg, hogy mi az $\aleph_0$, mint amennyire megmondható, vagy amennyire az óvodában megmondták, hogy mi az hogy „öt". Tehát tudjuk (sok éve) hogy mi az hogy „ötelemű halmaz", és mostantól azt is tudjuk, hogy mi az hogy „$\aleph_0$-elemű" halmaz. Mindkét esetben egy tulajdonságot definiálunk, és érjük be azzal, hogy el tudjuk dönteni, hogy mely objektumok (jelen esetben halmazok) rendelkeznek ezen tulajdonsággal. Ez az ún. *absztrakcióval* való „definiálás" jól megfelel az emberi gondolkodásnak.

Reflexivitás, szimmetria, tranzitivitás

Felmerül a kérdés: korrekt volt-e a számosság definíciója? Az összes halmazból álló összesség **nem halmaz** mert túl sok eleme van (és az ilyesmi ellentmondásokhoz vezetne), de ezen úgy segítünk, hogy az ilyen túl nagy összességeket elnevezzük **osztályoknak**. A reláció fogalma nemcsak halmazon, hanem — minden változtatás nélkül — osztályon is értelmes.

Tétel

Az összes halmazok $\mathcal{H}$-val jelölt osztályán az „egyenlő számosságúak” reláció, azaz az $\{(A, B) \in \mathcal{H}^2 : |A| = |B|\}$ reláció ***ekvivalenciareláció****.*

Bizonyítás.

Mivel tetszőleges A halamazra az identikus $A \to A$ leképezés injektív, a reláció reflexív. Mivel bijektív leképezés inverze is bijektív, ezért szimmetrikus is. Végül mivel két bijektív leképezés szorzata szintén bijektív, ezért az az „egyenlő számosságúak” reláció tranzitív. Tehát ekvivalenciareláció. $\square$

Felmerül a kérdés: korrekt volt-e a számosság definíciója? Az összes halmazból álló összesség **nem halmaz** mert túl sok eleme van (és az ilyesmi ellentmondásokhoz vezetne), de ezen úgy segítünk, hogy az ilyen túl nagy összességeket elnevezzük **osztályoknak**. A reláció fogalma nemcsak halmazon, hanem — minden változtatás nélkül — osztályon is értelmes.

Tétel

Az összes halmazok $\mathcal{H}$-val jelölt osztályán az „egyenlő számosságúak" reláció, azaz az $\{(A,B) \in \mathcal{H}^2 : |A| = |B|\}$ reláció ***ekvivalenciareláció****.*

Bizonyítás.

Mivel tetszőleges A halamazra az identikus $A \to A$ leképezés injektív, a reláció reflexív. Mivel bijektív leképezés inverze is bijektív, ezért szimmetrikus is. Végül mivel két bijektív leképezés szorzata szintén bijektív, ezért az az „egyenlő számosságúak" reláció tranzitív. Tehát ekvivalenciareláció.

Hatványhalmaz számossága

Egy másik, egyáltalán nem triviális kérdés az, hogy vajon $\aleph_0$ az egyetlen végtelen számosság, vagy van másik is. Erre a kérdésre az alábbi tétel ad választ. Emlékezzünk vissza arra, hogy $P(A)$ az A halmaz hatványhalmazát (azaz összes részhalmazának halmazát) jelöli.

Tétel

Tetszőleges (véges vagy végtelen) halmaz számossága ***nem egyenlő*** *a hatványhalmazának számosságával. Azaz bármely A halmazra $|A| \neq |P(A)|$.*

A tételt **indirekt módon** bizonyítjuk. Az indirekt bizonyítás (a teljes indukció mellett) a matematikai bizonyítások fontos típusa. Lényege: a bizonyítandó állítást tagadjuk. (Ez az indirekt feltevés.) Ezután az indirekt feltevésből ellentmondást vezetünk le. A kapott ellentmondásból következtetünk a bizonyítandó állításra.

Hatványhalmaz számossága

Egy másik, egyáltalán nem triviális kérdés az, hogy vajon $\aleph_0$ az egyetlen végtelen számosság, vagy van másik is. Erre a kérdésre az alábbi tétel ad választ. Emlékezzünk vissza arra, hogy $P(A)$ az A halmaz hatványhalmazát (azaz összes részhalmazának halmazát) jelöli.

Tétel

Tetszőleges (véges vagy végtelen) halmaz számossága ***nem egyenlő*** *a hatványhalmazának számosságával. Azaz bármely A halmazra $|A| \neq |P(A)|$.*

A tételt **indirekt módon** bizonyítjuk. Az indirekt bizonyítás (a teljes indukció mellett) a matematikai bizonyítások fontos típusa. Lényege: a bizonyítandó állítást tagadjuk. (Ez az indirekt feltevés.) Ezután az indirekt feltevésből ellentmondást vezetünk le. A kapott ellentmondásból következtetünk a bizonyítandó állításra.

Hatványhalmaz számossága

Egy másik, egyáltalán nem triviális kérdés az, hogy vajon $\aleph_0$ az egyetlen végtelen számosság, vagy van másik is. Erre a kérdésre az alábbi tétel ad választ. Emlékezzünk vissza arra, hogy $P(A)$ az A halmaz hatványhalmazát (azaz összes részhalmazának halmazát) jelöli.

Tétel

Tetszőleges (véges vagy végtelen) halmaz számossága ***nem egyenlő*** *a hatványhalmazának számosságával. Azaz bármely A halmazra $|A| \neq |P(A)|$.*

A tételt **indirekt módon** bizonyítjuk. Az indirekt bizonyítás (a teljes indukció mellett) a matematikai bizonyítások fontos típusa. Lényege: a bizonyítandó állítást tagadjuk. (Ez az indirekt feltevés.) Ezután az indirekt feltevésből ellentmondást vezetünk le. A kapott ellentmondásból következtetünk a bizonyítandó állításra.

Hatványhalmaz számossága

Egy másik, egyáltalán nem triviális kérdés az, hogy vajon $\aleph_0$ az egyetlen végtelen számosság, vagy van másik is. Erre a kérdésre az alábbi tétel ad választ. Emlékezzünk vissza arra, hogy $P(A)$ az A halmaz hatványhalmazát (azaz összes részhalmazának halmazát) jelöli.

Tétel

Tetszőleges (véges vagy végtelen) halmaz számossága ***nem egyenlő*** *a hatványhalmazának számosságával. Azaz bármely A halmazra $|A| \neq |P(A)|$.*

A tételt **indirekt módon** bizonyítjuk. Az indirekt bizonyítás (a teljes indukció mellett) a matematikai bizonyítások fontos típusa. Lényege: a bizonyítandó állítást tagadjuk. (Ez az indirekt feltevés.) Ezután az indirekt feltevésből ellentmondást vezetünk le. A kapott ellentmondásból következtetünk a bizonyítandó állításra.

$|A| \neq |P(A)|$ bizonyítása

Bizonyítás.

Indirekt módon tegyük fel, hogy van olyan halmaz, amelynek számossága megegyezik a hatványhalmazának számosságával. Legyen A egy ilyen halmaz. Ekkor tehát $|A| = |P(A)|$. Ezért létezik egy $\varphi : A \to P(A)$ bijekció. Több ilyen φ is lehet, de egyet lerögzítünk. Legyen $B := \{x \in A : x \notin x\varphi\}$.
Mivel $B \in P(A)$ és φ szürjektív, van olyan $c \in A$, hogy $c\varphi = B$.
Kérdés: vajon $c \in B$?
Ha $c \in B$, akkor — a B definíciója miatt $c \notin c\varphi = B$; ez nem lehet.
Tehát $c \notin B$, de akkor — a B definíciója miatt $c \in c\varphi = B$; ez sem lehet.
Tehát a „vajon $c \in B$" kérdésre se igaz, se hamis válasz nem adható, ami ellentmondás. Q.e.d $\square$

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918) bizonyítása. Ő a halmazelmélet megalapítója.

$|A| \neq |P(A)|$ bizonyítása

Bizonyítás.

Indirekt módon tegyük fel, hogy van olyan halmaz, amelynek számossága megegyezik a hatványhalmazának számosságával. Legyen A egy ilyen halmaz. Ekkor tehát $|A| = |P(A)|$. Ezért létezik egy $\varphi : A \to P(A)$ bijekció. Több ilyen φ is lehet, de egyet lerögzítünk. Legyen $B := \{x \in A : x \notin x\varphi\}$.
Mivel $B \in P(A)$ és φ szürjektív, van olyan $c \in A$, hogy $c\varphi = B$.
Kérdés: vajon $c \in B$?
Ha $c \in B$, akkor — a B definíciója miatt $c \notin c\varphi = B$; ez nem lehet.
Tehát $c \notin B$, de akkor — a B definíciója miatt $c \in c\varphi = B$; ez sem lehet.
Tehát a „vajon $c \in B$" kérdésre se igaz, se hamis válasz nem adható, ami ellentmondás. Q.e.d $\square$

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918) bizonyítása.
Ő a halmazelmélet megalapítója.

$|A| \neq |P(A)|$ bizonyítása

Bizonyítás.

Indirekt módon tegyük fel, hogy van olyan halmaz, amelynek számossága megegyezik a hatványhalmazának számosságával. Legyen A egy ilyen halmaz. Ekkor tehát $|A| = |P(A)|$. Ezért létezik egy $\varphi : A \to P(A)$ bijekció. Több ilyen φ is lehet, de egyet lerögzítünk. Legyen $B := \{x \in A : x \notin x\varphi\}$.
Mivel $B \in P(A)$ és φ szürjektív, van olyan $c \in A$, hogy $c\varphi = B$.
Kérdés: vajon $c \in B$?
Ha $c \in B$, akkor — a B definíciója miatt $c \notin c\varphi = B$; ez nem lehet.
Tehát $c \notin B$, de akkor — a B definíciója miatt $c \in c\varphi = B$; ez sem lehet.
Tehát a „vajon $c \in B$" kérdésre se igaz, se hamis válasz nem adható, ami ellentmondás. Q.e.d $\square$

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918) bizonyítása. Ő a halmazelmélet megalapítója.

$|A| \neq |P(A)|$ bizonyítása

Bizonyítás.

Indirekt módon tegyük fel, hogy van olyan halmaz, amelynek számossága megegyezik a hatványhalmazának számosságával. Legyen A egy ilyen halmaz. Ekkor tehát $|A| = |P(A)|$. Ezért létezik egy $\varphi : A \to P(A)$ bijekció. Több ilyen φ is lehet, de egyet lerögzítünk. Legyen $B := \{x \in A : x \notin x\varphi\}$.
Mivel $B \in P(A)$ és φ szürjektív, van olyan $c \in A$, hogy $c\varphi = B$.
Kérdés: vajon $c \in B$?
Ha $c \in B$, akkor — a B definíciója miatt $c \notin c\varphi = B$; ez nem lehet.
Tehát $c \notin B$, de akkor — a B definíciója miatt $c \in c\varphi = B$; ez sem lehet.
Tehát a „vajon $c \in B$" kérdésre se igaz, se hamis válasz nem adható, ami ellentmondás. Q.e.d □

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918) bizonyítása. Ő a halmazelmélet megalapítója.

$|A| \neq |P(A)|$ bizonyítása

Bizonyítás.

Indirekt módon tegyük fel, hogy van olyan halmaz, amelynek számossága megegyezik a hatványhalmazának számosságával. Legyen A egy ilyen halmaz. Ekkor tehát $|A| = |P(A)|$. Ezért létezik egy $\varphi : A \to P(A)$ bijekció. Több ilyen φ is lehet, de egyet lerögzítünk. Legyen $B := \{x \in A : x \notin x\varphi\}$.
Mivel $B \in P(A)$ és φ szürjektív, van olyan $c \in A$, hogy $c\varphi = B$.
Kérdés: vajon $c \in B$?
Ha $c \in B$, akkor — a B definíciója miatt $c \notin c\varphi = B$; ez nem lehet.
Tehát $c \notin B$, de akkor — a B definíciója miatt $c \in c\varphi = B$; ez sem lehet.
Tehát a „vajon $c \in B$" kérdésre se igaz, se hamis válasz nem adható, ami ellentmondás. Q.e.d $\square$

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918) bizonyítása. Ő a halmazelmélet megalapítója.

$|A| \neq |P(A)|$ bizonyítása

Bizonyítás.

Indirekt módon tegyük fel, hogy van olyan halmaz, amelynek számossága megegyezik a hatványhalmazának számosságával. Legyen A egy ilyen halmaz. Ekkor tehát $|A| = |P(A)|$. Ezért létezik egy $\varphi : A \to P(A)$ bijekció. Több ilyen φ is lehet, de egyet lerögzítünk. Legyen $B := \{x \in A : x \notin x\varphi\}$.
Mivel $B \in P(A)$ és φ szürjektív, van olyan $c \in A$, hogy $c\varphi = B$.
Kérdés: vajon $c \in B$?
Ha $c \in B$, akkor — a B definíciója miatt $c \notin c\varphi = B$; ez nem lehet.
Tehát $c \notin B$, de akkor — a B definíciója miatt $c \in c\varphi = B$; ez sem lehet.
Tehát a „vajon $c \in B$" kérdésre se igaz, se hamis válasz nem adható, ami ellentmondás. Q.e.d $\square$

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918) bizonyítása.
Ő a halmazelmélet megalapítója.

$|A| \neq |P(A)|$ bizonyítása

Bizonyítás.

Indirekt módon tegyük fel, hogy van olyan halmaz, amelynek számossága megegyezik a hatványhalmazának számosságával. Legyen A egy ilyen halmaz. Ekkor tehát $|A| = |P(A)|$. Ezért létezik egy $\varphi : A \to P(A)$ bijekció. Több ilyen φ is lehet, de egyet lerögzítünk. Legyen $B := \{x \in A : x \notin x\varphi\}$.
Mivel $B \in P(A)$ és φ szürjektív, van olyan $c \in A$, hogy $c\varphi = B$.
Kérdés: vajon $c \in B$?
Ha $c \in B$, akkor — a B definíciója miatt $c \notin c\varphi = B$; ez nem lehet.
Tehát $c \notin B$, de akkor — a B definíciója miatt $c \in c\varphi = B$; ez sem lehet.
Tehát a „vajon $c \in B$" kérdésre se igaz, se hamis válasz nem adható, ami ellentmondás. Q.e.d $\square$

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918) bizonyítása.
Ő a halmazelmélet megalapítója.

Mire való a Cantor-féle átlós módszer?

Most már tudjuk, hogy nem $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ az egyetlen végtelen számosság, hiszen $P(\mathbb{N})$ eltérő számosságú, és nyilván $P(\mathbb{N})$ is végtelen halmaz (mert már az egyelemű részhalmazai is végtelen sokan vannak.)

Az alábbi tételt a híres-nevezetes **Cantor-féle átlós módszer** bizonyítja. (Nem tudom, hogy az alábbi állítás mekkora meglepetést okoz azt követően, hogy $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ...)

Tétel

$\aleph_0 = |\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.

Mire való a Cantor-féle átlós módszer?

Most már tudjuk, hogy nem $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ az egyetlen végtelen számosság, hiszen $P(\mathbb{N})$ eltérő számosságú, és nyilván $P(\mathbb{N})$ is végtelen halmaz (mert már az egyelemű részhalmazai is végtelen sokan vannak.)

Az alábbi tételt a híres-nevezetes **Cantor-féle átlós módszer** bizonyítja. (Nem tudom, hogy az alábbi állítás mekkora meglepetést okoz azt követően, hogy $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ...)

Tétel

$\aleph_0 = |\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.

Mire való a Cantor-féle átlós módszer?

Most már tudjuk, hogy nem $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ az egyetlen végtelen számosság, hiszen $P(\mathbb{N})$ eltérő számosságú, és nyilván $P(\mathbb{N})$ is végtelen halmaz (mert már az egyelemű részhalmazai is végtelen sokan vannak.)

Az alábbi tételt a híres-nevezetes **Cantor-féle átlós módszer** bizonyítja. (Nem tudom, hogy az alábbi állítás mekkora meglepetést okoz azt követően, hogy $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ...)

Tétel

$\aleph_0 = |\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.

Most már tudjuk, hogy nem $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ az egyetlen végtelen számosság, hiszen $P(\mathbb{N})$ eltérő számosságú, és nyilván $P(\mathbb{N})$ is végtelen halmaz (mert már az egyelemű részhalmazai is végtelen sokan vannak.)
Az alábbi tételt a híres-nevezetes **Cantor-féle átlós módszer** bizonyítja. (Nem tudom, hogy az alábbi állítás mekkora meglepetést okoz azt követően, hogy $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ...)

Tétel

$\aleph_0 = |\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.

Bizonyítás.

Indirekt tegyük fel, hogy $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Ekkor létezik egy $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bijekció. Definiáljunk egy b valós számot, amelynek a tízes számrendszerbeli alakja $0, b_1 b_2 b_3 \dots$. (Tehát 0 egészrészű végtelen tizedestört, amelynek a tizedesvessző utáni számjegyei, azaz a tizedesjegyei $b_1, b_2, \dots$). A b_n-ek ($n \in \mathbb{N}$) definíciója az alábbi: ha az $n\varphi$ valós számban az n-edik tizedesjegy 4, akkor legyen $b_n = 5$, ellenkező esetben pedig legyen $b_n = 4$.

Mármost $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bijektív, ezért szürjektív, s így b-nek is van őse. Azaz valamely $n \in \mathbb{N}$-re $b = n\varphi$. De ez azonnal ellentmondásra vezet: ha $n\varphi$ n-edik tizedesjegye 4, akkor b n-edik tizedesjegye 5 és ezért $b \neq n\varphi$, ha pedig $n\varphi$ n-edik tizedesjegye nem 4, akkor b n-edik tizedesjegye 4 és megintcsak $b \neq n\varphi$. Q.e.d. $\square$

A Cantor-féle átlós módszer

Bizonyítás.

Indirekt tegyük fel, hogy $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Ekkor létezik egy $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bijekció. Definiáljunk egy b valós számot, amelynek a tízes számrendszerbeli alakja $0, b_1 b_2 b_3 \ldots$. (Tehát 0 egészrészű végtelen tizedestört, amelynek a tizedesvessző utáni számjegyei, azaz a tizedesjegyei b_1, b_2, $\ldots$). A b_n-ek ($n \in \mathbb{N}$) definíciója az alábbi:
ha az $n\varphi$ valós számban az n-edik tizedesjegy 4, akkor legyen $b_n = 5$, ellenkező esetben pedig legyen $b_n = 4$.
Mármost $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bijektív, ezért szürjektív, s így b-nek is van őse. Azaz valamely $n \in \mathbb{N}$-re $b = n\varphi$. De ez azonnal ellentmondásra vezet: ha $n\varphi$ n-edik tizedesjegye 4, akkor b n-edik tizedesjegye 5 és ezért $b \neq n\varphi$, ha pedig $n\varphi$ n-edik tizedesjegye nem 4, akkor b n-edik tizedesjegye 4 és megintcsak $b \neq n\varphi$. Q.e.d. $\square$

A Cantor-féle átlós módszer

Bizonyítás.

Indirekt tegyük fel, hogy $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Ekkor létezik egy $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bijekció. Definiáljunk egy b valós számot, amelynek a tízes számrendszerbeli alakja $0, b_1 b_2 b_3 \ldots$. (Tehát 0 egészrészű végtelen tizedestört, amelynek a tizedesvessző utáni számjegyei, azaz a tizedesjegyei b_1, b_2, $\ldots$). A b_n-ek ($n \in \mathbb{N}$) definíciója az alábbi: ha az $n\varphi$ valós számban az n-edik tizedesjegy 4, akkor legyen $b_n = 5$, ellenkező esetben pedig legyen $b_n = 4$.

Mármost $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bijektív, ezért szürjektív, s így b-nek is van őse. Azaz valamely $n \in \mathbb{N}$-re $b = n\varphi$. De ez azonnal ellentmondásra vezet: ha $n\varphi$ n-edik tizedesjegye 4, akkor b n-edik tizedesjegye 5 és ezért $b \neq n\varphi$, ha pedig $n\varphi$ n-edik tizedesjegye nem 4, akkor b n-edik tizedesjegye 4 és megintcsak $b \neq n\varphi$. Q.e.d. $\square$

A Cantor-féle átlós módszer

Bizonyítás.

Indirekt tegyük fel, hogy $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Ekkor létezik egy $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bijekció. Definiáljunk egy b valós számot, amelynek a tízes számrendszerbeli alakja $0, b_1 b_2 b_3 \ldots$. (Tehát 0 egészrészű végtelen tizedestört, amelynek a tizedesvessző utáni számjegyei, azaz a tizedesjegyei b_1, b_2, ...). A b_n-ek ($n \in \mathbb{N}$) definíciója az alábbi: ha az $n\varphi$ valós számban az n-edik tizedesjegy 4, akkor legyen $b_n = 5$, ellenkező esetben pedig legyen $b_n = 4$.

Mármost $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bijektív, ezért szürjektív, s így b-nek is van őse. Azaz valamely $n \in \mathbb{N}$-re $b = n\varphi$. De ez azonnal ellentmondásra vezet: ha $n\varphi$ n-edik tizedesjegye 4, akkor b n-edik tizedesjegye 5 és ezért $b \neq n\varphi$, ha pedig $n\varphi$ n-edik tizedesjegye nem 4, akkor b n-edik tizedesjegye 4 és megintcsak $b \neq n\varphi$. Q.e.d. $\square$

A Cantor-féle átlós módszer

Bizonyítás.

Indirekt tegyük fel, hogy $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Ekkor létezik egy $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bijekció. Definiáljunk egy b valós számot, amelynek a tízes számrendszerbeli alakja $0, b_1 b_2 b_3 \dots$. (Tehát 0 egészrészű végtelen tizedestört, amelynek a tizedesvessző utáni számjegyei, azaz a tizedesjegyei b_1, b_2, $\dots$). A b_n-ek ($n \in \mathbb{N}$) definíciója az alábbi: ha az $n\varphi$ valós számban az n-edik tizedesjegy 4, akkor legyen $b_n = 5$, ellenkező esetben pedig legyen $b_n = 4$.

Mármost $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bijektív, ezért szürjektív, s így b-nek is van őse. Azaz valamely $n \in \mathbb{N}$-re $b = n\varphi$. De ez azonnal ellentmondásra vezet: ha $n\varphi$ n-edik tizedesjegye 4, akkor b n-edik tizedesjegye 5 és ezért $b \neq n\varphi$, ha pedig $n\varphi$ n-edik tizedesjegye nem 4, akkor b n-edik tizedesjegye 4 és megintcsak $b \neq n\varphi$. Q.e.d. □

Bizonyítás.

Indirekt tegyük fel, hogy $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Ekkor létezik egy $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bijekció. Definiáljunk egy b valós számot, amelynek a tízes számrendszerbeli alakja $0, b_1 b_2 b_3 \ldots$. (Tehát 0 egészrészű végtelen tizedestört, amelynek a tizedesvessző utáni számjegyei, azaz a tizedesjegyei b_1, b_2, $\ldots$). A b_n-ek ($n \in \mathbb{N}$) definíciója az alábbi: ha az $n\varphi$ valós számban az n-edik tizedesjegy 4, akkor legyen $b_n = 5$, ellenkező esetben pedig legyen $b_n = 4$.
Mármost $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bijektív, ezért szürjektív, s így b-nek is van őse. Azaz valamely $n \in \mathbb{N}$-re $b = n\varphi$. De ez azonnal ellentmondásra vezet: ha $n\varphi$ n-edik tizedesjegye 4, akkor b n-edik tizedesjegye 5 és ezért $b \neq n\varphi$, ha pedig $n\varphi$ n-edik tizedesjegye nem 4, akkor b n-edik tizedesjegye 4 és megintcsak $b \neq n\varphi$. Q.e.d. $\square$

A Cantor-féle átlós módszer

Bizonyítás.

Indirekt tegyük fel, hogy $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Ekkor létezik egy $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bijekció. Definiáljunk egy b valós számot, amelynek a tízes számrendszerbeli alakja $0, b_1 b_2 b_3 \ldots$. (Tehát 0 egészrészű végtelen tizedestört, amelynek a tizedesvessző utáni számjegyei, azaz a tizedesjegyei $b_1, b_2, \ldots$). A b_n-ek ($n \in \mathbb{N}$) definíciója az alábbi: ha az $n\varphi$ valós számban az n-edik tizedesjegy 4, akkor legyen $b_n = 5$, ellenkező esetben pedig legyen $b_n = 4$.
Mármost $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bijektív, ezért szürjektív, s így b-nek is van őse. Azaz valamely $n \in \mathbb{N}$-re $b = n\varphi$. De ez azonnal ellentmondásra vezet: ha $n\varphi$ n-edik tizedesjegye 4, akkor b n-edik tizedesjegye 5 és ezért $b \neq n\varphi$, ha pedig $n\varphi$ n-edik tizedesjegye nem 4, akkor b n-edik tizedesjegye 4 és megintcsak $b \neq n\varphi$. Q.e.d. $\square$

A Cantor-féle átlós módszer

Bizonyítás.

Indirekt tegyük fel, hogy $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Ekkor létezik egy $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bijekció. Definiáljunk egy b valós számot, amelynek a tízes számrendszerbeli alakja $0, b_1 b_2 b_3 \ldots$. (Tehát 0 egészrészű végtelen tizedestört, amelynek a tizedesvessző utáni számjegyei, azaz a tizedesjegyei $b_1, b_2, \ldots$). A b_n-ek ($n \in \mathbb{N}$) definíciója az alábbi: ha az $n\varphi$ valós számban az n-edik tizedesjegy 4, akkor legyen $b_n = 5$, ellenkező esetben pedig legyen $b_n = 4$.
Mármost $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bijektív, ezért szürjektív, s így b-nek is van őse. Azaz valamely $n \in \mathbb{N}$-re $b = n\varphi$. De ez azonnal ellentmondásra vezet: ha $n\varphi$ n-edik tizedesjegye 4, akkor b n-edik tizedesjegye 5 és ezért $b \neq n\varphi$, ha pedig $n\varphi$ n-edik tizedesjegye nem 4, akkor b n-edik tizedesjegye 4 és megintcsak $b \neq n\varphi$. Q.e.d. $\square$

A Cantor-féle átlós módszer

Bizonyítás.

Indirekt tegyük fel, hogy $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Ekkor létezik egy $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bijekció. Definiáljunk egy b valós számot, amelynek a tízes számrendszerbeli alakja $0, b_1 b_2 b_3 \ldots$. (Tehát 0 egészrészű végtelen tizedestört, amelynek a tizedesvessző utáni számjegyei, azaz a tizedesjegyei $b_1, b_2, \ldots$). A b_n-ek ($n \in \mathbb{N}$) definíciója az alábbi: ha az $n\varphi$ valós számban az n-edik tizedesjegy 4, akkor legyen $b_n = 5$, ellenkező esetben pedig legyen $b_n = 4$.
Mármost $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bijektív, ezért szürjektív, s így b-nek is van őse. Azaz valamely $n \in \mathbb{N}$-re $b = n\varphi$. De ez azonnal ellentmondásra vezet: ha $n\varphi$ n-edik tizedesjegye 4, akkor b n-edik tizedesjegye 5 és ezért $b \neq n\varphi$, ha pedig $n\varphi$ n-edik tizedesjegye nem 4, akkor b n-edik tizedesjegye 4 és megintcsak $b \neq n\varphi$. Q.e.d. $\square$

Definíció

Legyen A és B halmaz. Azt mondjuk, hogy az A halmaz **számossága kisebb-egyenlő**, mint a B halmaz számossága, jelben $|A| \leq |B|$, ha létezik $A \to B$ **injektív leképezés**. Azt mondjuk, hogy az A halmaz **számossága kisebb**, mint a B halmaz számossága, jelben $|A| < |B|$, ha $|A| \neq |B|$ (azaz nem létezik $A \to B$ bijekció) és $|A| \leq |B|$ (de létezik $A \to B$ injekció).

Pl. $|\{1,2\}| < |\{1,2,3\}|$, hiszen a $\{1,2\} \to \{1,2,3\}$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 2$ leképezés injektív, bijekció pedig nyilván nincs. És általában is, az $\mathbb{N}_0$-on a „$<$” továbbra is azt jelenti, mint eddig.
Tetszőleges A halmazra $|A| < |P(A)|$, hiszen már láttuk, hogy $|A| \neq |P(A)|$, az $A \to P(A)$, $a \mapsto \{a\}$ leképezés pedig injektív.
$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ is világos, hiszen már láttuk, hogy $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$, s továbbá az $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto n$ leképezés nyilván injektív.

Definíció

Legyen A és B halmaz. Azt mondjuk, hogy az A halmaz **számossága kisebb-egyenlő**, mint a B halmaz számossága, jelben $|A| \leq |B|$, ha létezik $A \to B$ **injektív leképezés**. Azt mondjuk, hogy az A halmaz **számossága kisebb**, mint a B halmaz számossága, jelben $|A| < |B|$, ha $|A| \neq |B|$ (azaz nem létezik $A \to B$ bijekció) és $|A| \leq |B|$ (de létezik $A \to B$ injekció).

Pl. $|\{1,2\}| < |\{1,2,3\}|$, hiszen a $\{1,2\} \to \{1,2,3\}$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 2$ leképezés injektív, bijekció pedig nyilván nincs. És általában is, az $\mathbb{N}_0$-on a „$<$" továbbra is azt jelenti, mint eddig.

Tetszőleges A halmazra $|A| < |P(A)|$, hiszen már láttuk, hogy $|A| \neq |P(A)|$, az $A \to P(A)$, $a \mapsto \{a\}$ leképezés pedig injektív.

$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ is világos, hiszen már láttuk, hogy $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$, s továbbá az $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto n$ leképezés nyilván injektív.

Definíció

Legyen A és B halmaz. Azt mondjuk, hogy az A halmaz **számossága kisebb-egyenlő**, mint a B halmaz számossága, jelben $|A| \leq |B|$, ha létezik $A \to B$ **injektív leképezés**. Azt mondjuk, hogy az A halmaz **számossága kisebb**, mint a B halmaz számossága, jelben $|A| < |B|$, ha $|A| \neq |B|$ (azaz nem létezik $A \to B$ bijekció) és $|A| \leq |B|$ (de létezik $A \to B$ injekció).

Pl. $|\{1,2\}| < |\{1,2,3\}|$, hiszen a $\{1,2\} \to \{1,2,3\}$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 2$ leképezés injektív, bijekció pedig nyilván nincs. És általában is, az $\mathbb{N}_0$-on a „$<$" továbbra is azt jelenti, mint eddig.

Tetszőleges A halmazra $|A| < |P(A)|$, hiszen már láttuk, hogy $|A| \neq |P(A)|$, az $A \to P(A)$, $a \mapsto \{a\}$ leképezés pedig injektív.

$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ is világos, hiszen már láttuk, hogy $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$, s továbbá az $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto n$ leképezés nyilván injektív.

Számosságok összehasonlítása

Definíció

Legyen A és B halmaz. Azt mondjuk, hogy az A halmaz **számossága kisebb-egyenlő**, mint a B halmaz számossága, jelben $|A| \leq |B|$, ha létezik $A \to B$ **injektív leképezés**. Azt mondjuk, hogy az A halmaz **számossága kisebb**, mint a B halmaz számossága, jelben $|A| < |B|$, ha $|A| \neq |B|$ (azaz nem létezik $A \to B$ bijekció) és $|A| \leq |B|$ (de létezik $A \to B$ injekció).

Pl. $|\{1, 2\}| < |\{1, 2, 3\}|$, hiszen a $\{1, 2\} \to \{1, 2, 3\}$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 2$ leképezés injektív, bijekció pedig nyilván nincs. És általában is, az $\mathbb{N}_0$-on a „$<$'' továbbra is azt jelenti, mint eddig.
Tetszőleges A halmazra $|A| < |P(A)|$, hiszen már láttuk, hogy $|A| \neq |P(A)|$, az $A \to P(A)$, $a \mapsto \{a\}$ leképezés pedig injektív.
$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ is világos, hiszen már láttuk, hogy $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$, s továbbá az $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto n$ leképezés nyilván injektív.

Számosságok összehasonlítása

Definíció

Legyen A és B halmaz. Azt mondjuk, hogy az A halmaz **számossága kisebb-egyenlő**, mint a B halmaz számossága, jelben $|A| \leq |B|$, ha létezik $A \to B$ **injektív leképezés**. Azt mondjuk, hogy az A halmaz **számossága kisebb**, mint a B halmaz számossága, jelben $|A| < |B|$, ha $|A| \neq |B|$ (azaz nem létezik $A \to B$ bijekció) és $|A| \leq |B|$ (de létezik $A \to B$ injekció).

Pl. $|\{1,2\}| < |\{1,2,3\}|$, hiszen a $\{1,2\} \to \{1,2,3\}$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 2$ leképezés injektív, bijekció pedig nyilván nincs. És általában is, az $\mathbb{N}_0$-on a „$<$” továbbra is azt jelenti, mint eddig.
Tetszőleges A halmazra $|A| < |P(A)|$, hiszen már láttuk, hogy $|A| \neq |P(A)|$, az $A \to P(A)$, $a \mapsto \{a\}$ leképezés pedig injektív.
$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ is világos, hiszen már láttuk, hogy $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$, s továbbá az $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto n$ leképezés nyilván injektív.

Az alábbi tétel távolról sem triviális.

Tétel (Antiszimmetria és dichotomia)

Bármely két halmaz számossága összehasonlítható, azaz bármely A és B halmazra $|A| \leq |B|$ vagy $|B| \leq |A|$. Továbbá ha $|A| \leq |B|$ és $|B| \leq |A|$ (azaz mindkét halmaz injektív módon leképezhető a másikba), akkor $|A| = |B|$ (azaz létezik a két halmaz között bijekció).

Antiszimmetria és dichotomia

Az alábbi tétel távolról sem triviális.

Tétel (Antiszimmetria és dichotomia)

Bármely két halmaz számossága összehasonlítható, azaz bármely A és B halmazra $|A| \leq |B|$ vagy $|B| \leq |A|$. Továbbá ha $|A| \leq |B|$ és $|B| \leq |A|$ (azaz mindkét halmaz injektív módon leképezhető a másikba), akkor $|A| = |B|$ (azaz létezik a két halmaz között bijekció).

A számítógépes programokkal kapcsolatban is gyakran meg kell valamit számolni. Pl. hogy hány lépésig fog futni egy program, hiszen ha túl sok lépésig, pláne ha végtelen sok lépésig, akkor az adott algoritmust kár is programozni. Goodsteintől ered a következő példa (ld. http://en.wikipedia.org/wiki/Goodstein%27s_theorem). A példa megértéséhez csupán egy pozitív egész szám „örökletesen n alapú alakja" fogalmára van szükség. Ez azt jelenti, hogy felírjuk a számot n alapú számrendszerben, majd az n kitevőit szintén, az ott fellépő kitevőket szintén, stb. Például $n = 2$ esetén az $x = 35$ így fest ebben az alakban: $2^{2^2+1} + 2 + 1$. Ha pedig $n = 3$, akkor a $x = 35$ örökletesen 3-mas alapú alakja: $3^3 + 2 \cdot 3 + 2$.

A számítógépes programokkal kapcsolatban is gyakran meg kell valamit számolni. Pl. hogy hány lépésig fog futni egy program, hiszen ha túl sok lépésig, pláne ha végtelen sok lépésig, akkor az adott algoritmust kár is programozni. Goodsteintől ered a következő példa (ld. http://en.wikipedia.org/wiki/Goodstein%27s_theorem). A példa megértéséhez csupán egy pozitív egész szám „örökletesen n alapú alakja" fogalmára van szükség. Ez azt jelenti, hogy felírjuk a számot n alapú számrendszerben, majd az n kitevőit szintén, az ott fellépő kitevőket szintén, stb. Például $n = 2$ esetén az $x = 35$ így fest ebben az alakban: $2^{2^2+1} + 2 + 1$. Ha pedig $n = 3$, akkor a $x = 35$ örökletesen 3-mas alapú alakja: $3^3 + 2 \cdot 3 + 2$.

Egy meglepő példa (de nem kell tudni)

Egy tervezett P program inputként pozitív egész számokat olvas be. Minden ilyen beolvasott x számmal a következőt csinálja. Az első lépésben x-et felírja „örökletesen kettes alapú alakban”. Legyen például az $x = 35$ a beolvasott szám, ezt $2^{2^2+1} + 2 + 1$ alakba írja. A következő lépésben program a kettes alapot (minden leírt esetben) hármas alapra cseréli ki , a kapott számból levon 1-et, és örökletesen hármas alapú alakban írja fel az eredményt. Ekkor a $(3^{3^3+1} + 3 + 1) - 1 = 3^{3^3+1} + 3$ számhoz jut, amely mellesleg a tízes számrendszerben 22876792454964.

A következő lépésben a program a 3-as alapot 4-re cseréli, levon 1-et, és örökletesen 4-es alapú alakba írja fel a kapott számot: $4^{4^4+1} + 4 - 1 = 4^{4^4+1} + 3$, amely egy 154-jegyű szám a tízes számrendszerben. (Nincs ennyi atommag a tizenötmilliárd fényévre belátható világegyetemben.)

Egy meglepő példa (de nem kell tudni)

Egy tervezett P program inputként pozitív egész számokat olvas be. Minden ilyen beolvasott x számmal a következőt csinálja. Az első lépésben x-et felírja „örökletesen kettes alapú alakban”. Legyen például az $x = 35$ a beolvasott szám, ezt $2^{2^2+1} + 2 + 1$ alakba írja. A következő lépésben program a kettes alapot (minden leírt esetben) hármas alapra cseréli ki , a kapott számból levon 1-et, és örökletesen hármas alapú alakban írja fel az eredményt. Ekkor a $(3^{3^3+1} + 3 + 1) - 1 = 3^{3^3+1} + 3$ számhoz jut, amely mellesleg a tízes számrendszerben 22876792454964.

A következő lépésben a program a 3-as alapot 4-re cseréli, levon 1-et, és örökletesen 4-es alapú alakba írja fel a kapott számot: $4^{4^4+1} + 4 - 1 = 4^{4^4+1} + 3$, amely egy 154-jegyű szám a tízes számrendszerben. (Nincs ennyi atommag a tizenötmilliárd fényévre belátható világegyetemben.)

Egy meglepő példa (de nem kell tudni)

Egy tervezett P program inputként pozitív egész számokat olvas be. Minden ilyen beolvasott x számmal a következőt csinálja. Az első lépésben x-et felírja „örökletesen kettes alapú alakban”. Legyen például az $x = 35$ a beolvasott szám, ezt $2^{2^2+1} + 2 + 1$ alakba írja. A következő lépésben program a kettes alapot (minden leírt esetben) hármas alapra cseréli ki , a kapott számból levon 1-et, és örökletesen hármas alapú alakban írja fel az eredményt. Ekkor a $(3^{3^3+1} + 3 + 1) - 1 = 3^{3^3+1} + 3$ számhoz jut, amely mellesleg a tízes számrendszerben 22876792454964.
A következő lépésben a program a 3-as alapot 4-re cseréli, levon 1-et, és örökletesen 4-es alapú alakba írja fel a kapott számot: $4^{4^4+1} + 4 - 1 = 4^{4^4+1} + 3$, amely egy 154-jegyű szám a tízes számrendszerben. (Nincs ennyi atommag a tizenötmilliárd fényévre belátható világegyetemben.)

Egy meglepő példa (folytatás)

A következő lépésben a program a 4-es alapot 5-re cseréli, levon 1-et, és örökletesen 5-ös alapú alakba írja fel a kapott számot: $(5^{5^5+1}+3)-1=5^{5^5+1}+2$, ami egy 2184-jegyű szám a tízes számrendszerben. És így tovább: minden lépésben a program a korábbi alakban eggyel növeli az alapot, levon egyet, majd felírja a számot örökletesen az éppen most növelt alapú alakban. A folyamat akkor ér véget, ha a sok-sok növelés (és 1-es levonása) után valamikor nullát kapunk. A tekintett példa kapcsán a következő lépésben 36306-jegyű, azt követőleg pedig 695975-jegyű számot kapunk (a tízes számrendszerben). A szédületesen gyorsan növekvő számsorozat után számíthatunk-e arra, hogy elérjük a nullát és a program leáll? Számíthatunk-e a program leállására, ha nagyobb inputot, ha tetszőlegesen nagy inputot adunk meg?

A következő lépésben a program a 4-es alapot 5-re cseréli, levon 1-et, és örökletesen 5-ös alapú alakba írja fel a kapott számot: $(5^{5^5+1}+3)-1=5^{5^5+1}+2$, ami egy 2184-jegyű szám a tízes számrendszerben. És így tovább: minden lépésben a program a korábbi alakban eggyel növeli az alapot, levon egyet, majd felírja a számot örökletesen az éppen most növelt alapú alakban. A folyamat akkor ér véget, ha a sok-sok növelés (és 1-es levonása) után valamikor nullát kapunk. A tekintett példa kapcsán a következő lépésben 36306-jegyű, azt követőleg pedig 695975-jegyű számot kapunk (a tízes számrendszerben). A szédületesen gyorsan növekvő számsorozat után számíthatunk-e arra, hogy elérjük a nullát és a program leáll? Számíthatunk-e a program leállására, ha nagyobb inputot, ha tetszőlegesen nagy inputot adunk meg?

Egy meglepő példa (folytatás)

A következő lépésben a program a 4-es alapot 5-re cseréli, levon 1-et, és örökletesen 5-ös alapú alakba írja fel a kapott számot: $(5^{5^5+1}+3)-1=5^{5^5+1}+2$, ami egy 2184-jegyű szám a tízes számrendszerben. És így tovább: minden lépésben a program a korábbi alakban eggyel növeli az alapot, levon egyet, majd felírja a számot örökletesen az éppen most növelt alapú alakban. A folyamat akkor ér véget, ha a sok-sok növelés (és 1-es levonása) után valamikor nullát kapunk. A tekintett példa kapcsán a következő lépésben 36306-jegyű, azt követőleg pedig 695975-jegyű számot kapunk (a tízes számrendszerben). A szédületesen gyorsan növekvő számsorozat után számíthatunk-e arra, hogy elérjük a nullát és a program leáll? Számíthatunk-e a program leállására, ha nagyobb inputot, ha tetszőlegesen nagy inputot adunk meg?

Egy meglepő példa (folytatás)

A következő lépésben a program a 4-es alapot 5-re cseréli, levon 1-et, és örökletesen 5-ös alapú alakba írja fel a kapott számot: $(5^{5^5+1} + 3) - 1 = 5^{5^5+1} + 2$, ami egy 2184-jegyű szám a tízes számrendszerben. És így tovább: minden lépésben a program a korábbi alakban eggyel növeli az alapot, levon egyet, majd felírja a számot örökletesen az éppen most növelt alapú alakban. A folyamat akkor ér véget, ha a sok-sok növelés (és 1-es levonása) után valamikor nullát kapunk. A tekintett példa kapcsán a következő lépésben 36306-jegyű, azt követőleg pedig 695975-jegyű számot kapunk (a tízes számrendszerben). A szédületesen gyorsan növekvő számsorozat után számíthatunk-e arra, hogy elérjük a nullát és a program leáll? Számíthatunk-e a program leállására, ha nagyobb inputot, ha tetszőlegesen nagy inputot adunk meg?

A meglepő példa csattanója

Bizonyított (de messze nem triviális) tény, hogy természetes számok szokásos axiómarendszerében, tehát a véges világban maradva a fenti kérdést nem tudjuk eldönteni! (Kirby–Paris-tétel.)
Viszont a végtelen számosságok csodára képesek — mi nem jutunk el addig, de ha az előadás két-három hónappal tovább tartani, akkor végtelen számosságokra támaszkodva mi is igen könnyen igazolhatnánk, hogy **a program bármilyen nagy input esetén véges lépésben megáll.**
Mi a számosságokkal csak egy kisebb csodát fogunk tenni: kimutatjuk a transzcendens számok létezését.

A meglepő példa csattanója

Bizonyított (de messze nem triviális) tény, hogy természetes számok szokásos axiómarendszerében, tehát a véges világban maradva a fenti kérdést nem tudjuk eldönteni! (Kirby–Paris-tétel.) Viszont a végtelen számosságok csodára képesek — mi nem jutunk el addig, de ha az előadás két-három hónappal tovább tartani, akkor végtelen számosságokra támaszkodva mi is igen könnyen igazolhatnánk, hogy **a program bármilyen nagy input esetén véges lépésben megáll.**

Mi a számosságokkal csak egy kisebb csodát fogunk tenni: kimutatjuk a transzcendens számok létezését.

A meglepő példa csattanója

Bizonyított (de messze nem triviális) tény, hogy természetes számok szokásos axiómarendszerében, tehát a véges világban maradva a fenti kérdést nem tudjuk eldönteni! (Kirby–Paris-tétel.) Viszont a végtelen számosságok csodára képesek — mi nem jutunk el addig, de ha az előadás két-három hónappal tovább tartani, akkor végtelen számosságokra támaszkodva mi is igen könnyen igazolhatnánk, hogy **a program bármilyen nagy input esetén véges lépésben megáll.**
Mi a számosságokkal csak egy kisebb csodát fogunk tenni: kimutatjuk a transzcendens számok létezését.

Meglepetés

Feladat

Hány páros pozitív egész szám van? A $B := \{2k : k \in \mathbb{N}\}$ jelöléssel, $|B| =$? Azaz mi a B halmaz számossága?

Megoldás

Mivel az $f : \mathbb{N} \to B, \quad x \mapsto 2x$ leképezés bijektív, $|B| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$

Ebben az a meglepő, hogy egy valódi részhalmaznak (azaz B-nek) ugyanannyi eleme van, mint az egésznek; az elemek „felét” elvettük, és még mindig ugyanannyi maradt. Az alábbi tétel is ezzel a jelenséggel kapcsolatos.

Tétel

$\aleph_0$ *a legkisebb végtelen számosság.*

Meglepetés

Feladat

Hány páros pozitív egész szám van? A $B := \{2k : k \in \mathbb{N}\}$ jelöléssel, $|B| =?$ Azaz mi a B halmaz számossága?

Megoldás

Mivel az $f : \mathbb{N} \to B, \quad x \mapsto 2x$ leképezés bijektív, $|B| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$

Ebben az a meglepő, hogy egy valódi részhalmaznak (azaz B-nek) ugyanannyi eleme van, mint az egésznek; az elemek „felét" elvettük, és még mindig ugyanannyi maradt. Az alábbi tétel is ezzel a jelenséggel kapcsolatos.

Tétel

$\aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság.

Feladat

Hány páros pozitív egész szám van? A $B := \{2k : k \in \mathbb{N}\}$ jelöléssel, $|B| =?$ Azaz mi a B halmaz számossága?

Megoldás

Mivel az $f : \mathbb{N} \to B, \quad x \mapsto 2x$ leképezés bijektív, $|B| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$

Ebben az a meglepő, hogy egy valódi részhalmaznak (azaz B-nek) ugyanannyi eleme van, mint az egésznek; az elemek „felét" elvettük, és még mindig ugyanannyi maradt. Az alábbi tétel is ezzel a jelenséggel kapcsolatos.

Tétel

$\aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság.

Meglepetés

Feladat

Hány páros pozitív egész szám van? A $B := \{2k : k \in \mathbb{N}\}$ jelöléssel, $|B| =?$ Azaz mi a B halmaz számossága?

Megoldás

Mivel az $f : \mathbb{N} \to B$, $\quad x \mapsto 2x$ leképezés bijektív, $|B| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$

Ebben az a meglepő, hogy egy valódi részhalmaznak (azaz B-nek) ugyanannyi eleme van, mint az egésznek; az elemek „felét" elvettük, és még mindig ugyanannyi maradt. Az alábbi tétel is ezzel a jelenséggel kapcsolatos.

Tétel

$\aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság.

$\aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság.

Bizonyítás.

Legyen β egy végtelen számosság. Ekkor van olyan végtelen B halmaz, hogy $\beta = |B|$. Mivel B végtelen, ezért nem üres, tehát választhatunk belőle egy b_1 elemet.

Mivel $B \setminus \{b_1\}$ még mindig végtelen (hiszen csak egy elemet vettünk el), abból is tudunk egy elemet választani; jelölje azt $b_2 \in B \setminus \{b_1\}$. Nyilván b_2 különbözik b_1-től.

$B \setminus \{b_1, b_2\}$ még mindig véletlen; válasszunk belőle egy $b_3 \in B \setminus \{b_1, b_2\}$ elemet; ez különbözni fog az eddigiektől, tehát b_1, b_2, b_3 három különböző elem És így tovább.Ha már kiválasztottunk a páronként különböző $b_1, \ldots, b_n \in B$ elemeket, akkor a még mindig végtelen $B \setminus \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ halmazból válasszunk egy b_{n+1}-et; most már $n+1$ különböző elemünk lesz.

Mivel az $f : \mathbb{N} \to B$, $n \mapsto b_n$ leképezés (a kiválasztott elemek különbözősége miatt) injektív, ezért $\aleph_0 = |\mathbb{N}| \leq |B| = \beta$.

Q.e.d. $\square$

$\aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság.

Bizonyítás.

Legyen β egy végtelen számosság. Ekkor van olyan végtelen B halmaz, hogy $\beta = |B|$. Mivel B végtelen, ezért nem üres, tehát választhatunk belőle egy b_1 elemet.

Mivel $B \setminus \{b_1\}$ még mindig végtelen (hiszen csak egy elemet vettünk el), abból is tudunk egy elemet választani; jelölje azt $b_2 \in B \setminus \{b_1\}$. Nyilván b_2 különbözik b_1-től.

$B \setminus \{b_1, b_2\}$ még mindig véletlen; válasszunk belőle egy $b_3 \in B \setminus \{b_1, b_2\}$ elemet; ez különbözni fog az eddigiektől, tehát b_1, b_2, b_3 három különböző elem És így tovább.Ha már kiválasztottunk a páronként különböző $b_1, \dots, b_n \in B$ elemeket, akkor a még mindig végtelen $B \setminus \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ halmazból válasszunk egy b_{n+1}-et; most már $n+1$ különböző elemünk lesz.

Mivel az $f : \mathbb{N} \to B$, $n \mapsto b_n$ leképezés (a kiválasztott elemek különbözősége miatt) injektív, ezért $\aleph_0 = |\mathbb{N}| \leq |B| = \beta$.

Q.e.d. $\square$

$\aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság.

Bizonyítás.

Legyen β egy végtelen számosság. Ekkor van olyan végtelen B halmaz, hogy $\beta = |B|$. Mivel B végtelen, ezért nem üres, tehát választhatunk belőle egy b_1 elemet.

Mivel $B \setminus \{b_1\}$ még mindig végtelen (hiszen csak egy elemet vettünk el), abból is tudunk egy elemet választani; jelölje azt $b_2 \in B \setminus \{b_1\}$. Nyilván b_2 különbözik b_1-től.

$B \setminus \{b_1, b_2\}$ még mindig véletlen; válasszunk belőle egy $b_3 \in B \setminus \{b_1, b_2\}$ elemet; ez különbözni fog az eddigiektől, tehát b_1, b_2, b_3 három különböző elem És így tovább.Ha már kiválasztottunk a páronként különböző $b_1, \ldots, b_n \in B$ elemeket, akkor a még mindig végtelen $B \setminus \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ halmazból válasszunk egy b_{n+1}-et; most már $n+1$ különböző elemünk lesz. Mivel az $f : \mathbb{N} \to B$, $n \mapsto b_n$ leképezés (a kiválasztott elemek különbözősége miatt) injektív, ezért $\aleph_0 = |\mathbb{N}| \leq |B| = \beta$. Q.e.d. $\square$

$\aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság.

Bizonyítás.

Legyen β egy végtelen számosság. Ekkor van olyan végtelen B halmaz, hogy $\beta = |B|$. Mivel B végtelen, ezért nem üres, tehát választhatunk belőle egy b_1 elemet.
Mivel $B \setminus \{b_1\}$ még mindig végtelen (hiszen csak egy elemet vettünk el), abból is tudunk egy elemet választani; jelölje azt $b_2 \in B \setminus \{b_1\}$. Nyilván b_2 különbözik b_1-től.
$B \setminus \{b_1, b_2\}$ még mindig véletlen; válasszunk belőle egy $b_3 \in B \setminus \{b_1, b_2\}$ elemet; ez különbözni fog az eddigiektől, tehát b_1, b_2, b_3 három különböző elem És így tovább. Ha már kiválasztottunk a páronként különböző $b_1, \ldots, b_n \in B$ elemeket, akkor a még mindig végtelen $B \setminus \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ halmazból válasszunk egy b_{n+1}-et; most már $n + 1$ különböző elemünk lesz.
Mivel az $f : \mathbb{N} \to B$, $n \mapsto b_n$ leképezés (a kiválasztott elemek különbözősége miatt) injektív, ezért $\aleph_0 = |\mathbb{N}| \leq |B| = \beta$.
Q.e.d. $\square$

$\aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság.

Bizonyítás.

Legyen β egy végtelen számosság. Ekkor van olyan végtelen B halmaz, hogy $\beta = |B|$. Mivel B végtelen, ezért nem üres, tehát választhatunk belőle egy b_1 elemet.
Mivel $B \setminus \{b_1\}$ még mindig végtelen (hiszen csak egy elemet vettünk el), abból is tudunk egy elemet választani; jelölje azt $b_2 \in B \setminus \{b_1\}$. Nyilván b_2 különbözik b_1-től.
$B \setminus \{b_1, b_2\}$ még mindig véletlen; válasszunk belőle egy $b_3 \in B \setminus \{b_1, b_2\}$ elemet; ez különbözni fog az eddigiektől, tehát b_1, b_2, b_3 három különböző elem És így tovább.Ha már kiválasztottunk a páronként különböző $b_1, \ldots, b_n \in B$ elemeket, akkor a még mindig végtelen $B \setminus \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ halmazból válasszunk egy b_{n+1}-et; most már $n + 1$ különböző elemünk lesz.
Mivel az $f : \mathbb{N} \to B$, $n \mapsto b_n$ leképezés (a kiválasztott elemek különbözősége miatt) injektív, ezért $\aleph_0 = |\mathbb{N}| \leq |B| = \beta$.
Q.e.d. $\square$

$\aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság.

Bizonyítás.

Legyen β egy végtelen számosság. Ekkor van olyan végtelen B halmaz, hogy $\beta = |B|$. Mivel B végtelen, ezért nem üres, tehát választhatunk belőle egy b_1 elemet.
Mivel $B \setminus \{b_1\}$ még mindig végtelen (hiszen csak egy elemet vettünk el), abból is tudunk egy elemet választani; jelölje azt $b_2 \in B \setminus \{b_1\}$. Nyilván b_2 különbözik b_1-től.
$B \setminus \{b_1, b_2\}$ még mindig véletlen; válasszunk belőle egy $b_3 \in B \setminus \{b_1, b_2\}$ elemet; ez különbözni fog az eddigiektől, tehát b_1, b_2, b_3 három különböző elem És így tovább.Ha már kiválasztottunk a páronként különböző $b_1, \ldots, b_n \in B$ elemeket, akkor a még mindig végtelen $B \setminus \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ halmazból válasszunk egy b_{n+1}-et; most már $n+1$ különböző elemünk lesz.
Mivel az $f : \mathbb{N} \to B$, $n \mapsto b_n$ leképezés (a kiválasztott elemek különbözősége miatt) injektív, ezért $\aleph_0 = |\mathbb{N}| \leq |B| = \beta$.
Q.e.d. $\square$

Tétel

*Legyen A egy halmaz. $|A| = \aleph_0$ akkor és csak akkor, ha A **végtelen** és **sorozatba szedhető**, azaz megadható egy, az $\mathbb{N}$ elemeivel indexelt $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ sorozat, amely A minden egyes elemét tartalmazza (esetleg többször is).*

A bizonyítás vázlata.

Tfh. A végtelen és sorozatba szedhető, valahogy így:

$$a, b, c, \mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}, d, e, \mathbf{c}, \mathbf{b}, u, \mathbf{a}, v, \mathbf{a}, \mathbf{u}, \ldots$$

A többször előforduló elemekből csak az első előfordulást megtartva és a többit (esetünkben a kék színűeket) kihagyva:

$$a, b, c, d, e, u, v, \ldots$$

az A elemeit ismétlés nélküli sorozatba rendeztük. Ez a sorozat végtelen, hiszen A is az. Legyen $f : \mathbb{N} \to A$ az a leképezés, amely tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-hez a fenti sorozat n-edik tagját rendeli; ez bijekció, tehát $|A| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Q.e.d. □

$\aleph_0$ és a sorozatok

Tétel

Legyen A egy halmaz. $|A| = \aleph_0$ *akkor és csak akkor, ha A* ***végtelen*** *és* ***sorozatba szedhető***, *azaz megadható egy, az* $\mathbb{N}$ *elemeivel indexelt* $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ *sorozat, amely A minden egyes elemét tartalmazza (esetleg többször is).*

A bizonyítás vázlata.

Tfh. A végtelen és sorozatba szedhető, valahogy így:

$$a, b, c, \mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}, d, e, \mathbf{c}, \mathbf{b}, u, \mathbf{a}, v, \mathbf{a}, \mathbf{u}, \ldots$$

A többször előforduló elemekből csak az első előfordulást megtartva és a többit (esetünkben a kék színűeket) kihagyva:

$$a, b, c, d, e, u, v, \ldots$$

az A elemeit ismétlés nélküli sorozatba rendeztük. Ez a sorozat végtelen, hiszen A is az. Legyen $f : \mathbb{N} \to A$ az a leképezés, amely tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-hez a fenti sorozat n-edik tagját rendeli; ez bijekció, tehát $|A| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Q.e.d. $\square$

$\aleph_0$ és a sorozatok

Tétel

Legyen A egy halmaz. $|A| = \aleph_0$ *akkor és csak akkor, ha A* ***végtelen*** *és* ***sorozatba szedhető****, azaz megadható egy, az* $\mathbb{N}$ *elemeivel indexelt* $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ *sorozat, amely A minden egyes elemét tartalmazza (esetleg többször is).*

A bizonyítás vázlata.

Tfh. A végtelen és sorozatba szedhető, valahogy így:

$$a, b, c, \mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}, d, e, \mathbf{c}, \mathbf{b}, u, \mathbf{a}, v, \mathbf{a}, \mathbf{u}, \dots$$

A többször előforduló elemekből csak az első előfordulást megtartva és a többit (esetünkben a kék színűeket) kihagyva:

$$a, b, c, d, e, u, v, \dots$$

az A elemeit ismétlés nélküli sorozatba rendeztük. Ez a sorozat végtelen, hiszen A is az. Legyen $f : \mathbb{N} \to A$ az a leképezés, amely tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-hez a fenti sorozat n-edik tagját rendeli; ez bijekció, tehát $|A| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Q.e.d. $\square$

Feladat

$|\mathbb{Z}| =?$

Megoldás

$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots$; ezzel sorozatba szedtük, és mivel végtelen halmaz, az előző tétel szerint $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$.

Feladat

$|\mathbb{Z}| =?$

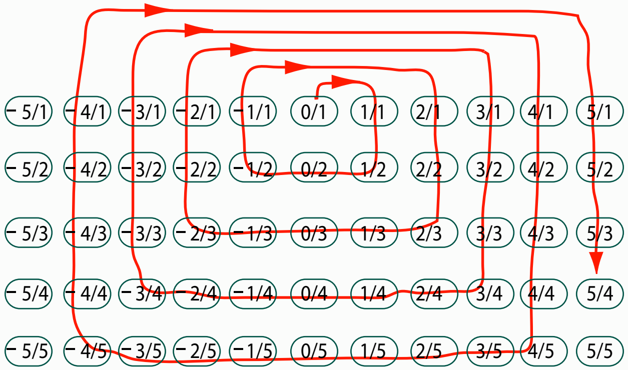
Megoldás

$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ 4,\ -4,\ \dots$; ezzel sorozatba szedtük, és mivel végtelen halmaz, az előző tétel szerint $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$.

Feladat

$|\mathbb{Q}| = ?$

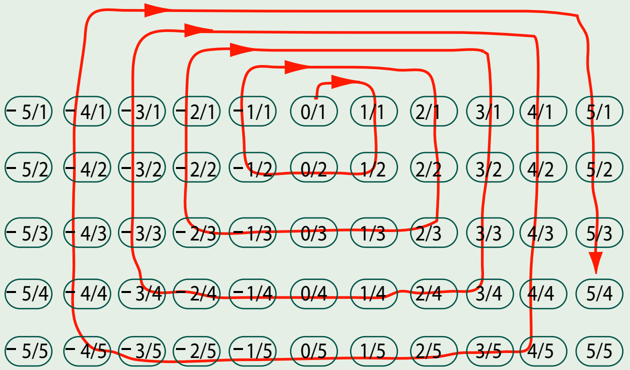
Megoldás ($\aleph_0$, mert ∞ és a nyilak mentén sorozatba szedhető)



Feladat

$|\mathbb{Q}| = ?$

Megoldás ($\aleph_0$, mert ∞ és a nyilak mentén sorozatba szedhető)



∃ irracionális szám

Megjegyzés

Számosságokkal könnyen bizonyíható, hogy létezik irracionális szám.

Bizonyítás.

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. De nem egyenlő a két halmaz, hiszen $|\mathbb{Q}| = \aleph_0 \neq \mathbb{R}$. Ezért $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, tehát $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nem üres, és éppen ezen halmaz elemeit nevezzük irracionális számoknak. □

Számosságokkal kapcsolatban a legtöbb (itt előforduló) feladat megoldható a következő tétellel, amelynek egyes részeit már korábban is láttuk.

$\exists$ irracionális szám

Megjegyzés

Számosságokkal könnyen bizonyíható, hogy létezik irracionális szám.

Bizonyítás.

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. De nem egyenlő a két halmaz, hiszen $|\mathbb{Q}| = \aleph_0 \neq \mathbb{R}$. Ezért $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, tehát $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nem üres, és éppen ezen halmaz elemeit nevezzük irracionális számoknak. $\square$

Számosságokkal kapcsolatban a legtöbb (itt előforduló) feladat megoldható a következő tétellel, amelynek egyes részeit már korábban is láttuk.

Megjegyzés

Számosságokkal könnyen bizonyíható, hogy létezik irracionális szám.

Bizonyítás.

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. De nem egyenlő a két halmaz, hiszen $|\mathbb{Q}| = \aleph_0 \neq \mathbb{R}$. Ezért $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, tehát $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nem üres, és éppen ezen halmaz elemeit nevezzük irracionális számoknak. $\square$

Számosságokkal kapcsolatban a legtöbb (itt előforduló) feladat megoldható a következő tétellel, amelynek egyes részeit már korábban is láttuk.

Megjegyzés

Számosságokkal könnyen bizonyíható, hogy létezik irracionális szám.

Bizonyítás.

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. De nem egyenlő a két halmaz, hiszen $|\mathbb{Q}| = \aleph_0 \neq \mathbb{R}$. Ezért $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, tehát $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nem üres, és éppen ezen halmaz elemeit nevezzük irracionális számoknak. $\square$

Számosságokkal kapcsolatban a legtöbb (itt előforduló) feladat megoldható a következő tétellel, amelynek egyes részeit már korábban is láttuk.

Számosságaritmetika Alaptétele

Tétel

1. *Legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok legfeljebb megszámlálhatóan végtelen halmaz uniója is legfeljebb megszámlálhatóan végtelen.*
2. ***Véges sok*** *megszámlálhatóan végtelen halmaz Descartes-szorzata is megszámlálhatóan végtelen.*
3. *Bármely A és B halmazra $|A| \le |B|$ vagy $|B| \le |A|$ (dichotomia), és ha mindkettő teljesül, akkor $|A| = |B|$ (antiszimmetria).*
4. *(Ez a számosságaritmetika alaptétele.) Ha A és B halmazok és legalább az egyik végtelen, akkor* $|A \cup B| = |A \times B| = \max(|A|, |B|)$.

Míg (3) és (4) bizonyítása messze meghaladja a jelen kurzus kereteit, (1)-et és (2)-t ahhoz hasonlóan bizonyíthatnánk, ahogy azt igazoltuk, hogy $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$).

Tétel

1. *Legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok legfeljebb megszámlálhatóan végtelen halmaz uniója is legfeljebb megszámlálhatóan végtelen.*
2. ***Véges sok*** *megszámlálhatóan végtelen halmaz Descartes-szorzata is megszámlálhatóan végtelen.*
3. *Bármely A és B halmazra $|A| \leq |B|$ vagy $|B| \leq |A|$ (dichotomia), és ha mindkettő teljesül, akkor $|A| = |B|$ (antiszimmetria).*
4. *(Ez a számosságaritmetika alaptétele.) Ha A és B halmazok és legalább az egyik végtelen, akkor $|A \cup B| = |A \times B| = \max(|A|, |B|)$.*

Míg (3) és (4) bizonyítása messze meghaladja a jelen kurzus kereteit, (1)-et és (2)-t ahhoz hasonlóan bizonyíthatnánk, ahogy azt igazoltuk, hogy $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$).

Tétel

1. *Legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok legfeljebb megszámlálhatóan végtelen halmaz uniója is legfeljebb megszámlálhatóan végtelen.*
2. ***Véges sok*** *megszámlálhatóan végtelen halmaz Descartes-szorzata is megszámlálhatóan végtelen.*
3. *Bármely A és B halmazra $|A| \leq |B|$ vagy $|B| \leq |A|$ (dichotomia), és ha mindkettő teljesül, akkor $|A| = |B|$ (antiszimmetria).*
4. *(Ez a számosságaritmetika alaptétele.) Ha A és B halmazok és legalább az egyik végtelen, akkor $|A \cup B| = |A \times B| = \max(|A|, |B|)$.*

Míg (3) és (4) bizonyítása messze meghaladja a jelen kurzus kereteit, (1)-et és (2)-t ahhoz hasonlóan bizonyíthatnánk, ahogy azt igazoltuk, hogy $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$).

Számosságaritmetika Alaptétele

Tétel

1. *Legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok legfeljebb megszámlálhatóan végtelen halmaz uniója is legfeljebb megszámlálhatóan végtelen.*
2. ***Véges sok*** *megszámlálhatóan végtelen halmaz Descartes-szorzata is megszámlálhatóan végtelen.*
3. *Bármely A és B halmazra $|A| \leq |B|$ vagy $|B| \leq |A|$ (dichotomia), és ha mindkettő teljesül, akkor $|A| = |B|$ (antiszimmetria).*
4. *(Ez a számosságaritmetika alaptétele.) Ha A és B halmazok és legalább az egyik végtelen, akkor* $|A \cup B| = |A \times B| = \max(|A|, |B|)$.

Míg (3) és (4) bizonyítása messze meghaladja a jelen kurzus kereteit, (1)-et és (2)-t ahhoz hasonlóan bizonyíthatnánk, ahogy azt igazoltuk, hogy $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$).

Számosságaritmetika Alaptétele

Tétel

1. *Legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok legfeljebb megszámlálhatóan végtelen halmaz uniója is legfeljebb megszámlálhatóan végtelen.*
2. ***Véges sok*** *megszámlálhatóan végtelen halmaz Descartes-szorzata is megszámlálhatóan végtelen.*
3. *Bármely A és B halmazra $|A| \leq |B|$ vagy $|B| \leq |A|$ (dichotomia), és ha mindkettő teljesül, akkor $|A| = |B|$ (antiszimmetria).*
4. *(Ez a számosságaritmetika alaptétele.) Ha A és B halmazok és legalább az egyik végtelen, akkor $|A \cup B| = |A \times B| = \max(|A|, |B|)$.*

Míg (3) és (4) bizonyítása messze meghaladja a jelen kurzus kereteit, (1)-et és (2)-t ahhoz hasonlóan bizonyíthatnánk, ahogy azt igazoltuk, hogy $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$).

Ha $|I| \le \aleph_0$ és $\forall i \in I$-re $|A_i| \le \aleph_0$, akkor $\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| \le \aleph_0$.

Bizonyítás.

Mivel $\aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság, ezért I és az A_i-k mindegyike véges vagy megszámlálhatóan végtelen. Tegyük fel, hogy az $A := \bigcup_{i \in I} A_i$ unió végtelen, hiszen ellenkező esetben nincs mit igazolni. Korábbi tételünk szerint elég azt belátni, hogy A (ismétlést megengedő) sorozatba szedhető. Feltehető, hogy $I = \{i_1, i_2, i_3, \dots\}$, továbbá

$$\begin{aligned} A_{i_1} &= \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots\}, \\ A_{i_2} &= \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots\}, \\ A_{i_3} &= \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots\}, \\ &\dots \end{aligned}$$

azaz hogy a fellépő halmazok végtelen sorozatba vannak szedve (természetesen ismétlést megengedve). Mármost a nyilak mentén $\square$

$|\bigcup_{i\in I} A_i| \le \aleph_0$, folytatás

$$\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & \cdots \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & \cdots \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & \cdots \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & \cdots \\
a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & \cdots \\
\vdots & & & & & &
\end{matrix}$$

haladva A-t sorozatba tudjuk szedni. Ezzel (1)-et beláttuk. Q.e.d

Hány bitsorozat van?

Feladat

Hány véges hosszúságú bitsorozat van?

Megoldás

Adott $i \in \mathbb{N}_0$-ra az i-hosszúságú bitsorozatok B_i-vel jelölt halmaza véges. (Mellesleg éppen $|B_i| = 2^i$, de ez a konkrét szám most nem fontos.) Az összes bitsorozat halmaza $B := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} B_i$. Minthogy $|\mathbb{N}_0| = \aleph_0$, az alaptétel (1) pontja szerint $|B| \le \aleph_0$. De B nyilván végtelen, továbbá $\aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság, ezért $|B| = \aleph_0$.

Egy $t \in \mathbb{R}$ számot **algebrai számnak** nevezünk, ha van olyan egész együtthatós polinom (azaz $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x^1 + a_0$ ahol $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ és $a_n \neq 0$), amelynek t gyöke. Ha $t \in \mathbb{R}$ nem algebrai, akkor *transzcendens*; ilyen pl. az e és a π (de nehéz belátni, hogy transzcendensek). Számosságokkal könnyen kapjuk, hogy:

Hány bitsorozat van?

Feladat

Hány véges hosszúságú bitsorozat van?

Megoldás

Adott $i \in \mathbb{N}_0$-ra az i-hosszúságú bitsorozatok B_i-vel jelölt halmaza véges. (Mellesleg éppen $|B_i| = 2^i$, de ez a konkrét szám most nem fontos.) Az összes bitsorozat halmaza $B := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} B_i$. Minthogy $|\mathbb{N}_0| = \aleph_0$, az alaptétel (1) pontja szerint $|B| \le \aleph_0$. De B nyilván végtelen, továbbá $\aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság, ezért $|B| = \aleph_0$.

Egy $t \in \mathbb{R}$ számot **algebrai számnak** nevezünk, ha van olyan egész együtthatós polinom (azaz $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x^1 + a_0$ ahol $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ és $a_n \ne 0$), amelynek t gyöke. Ha $t \in \mathbb{R}$ nem algebrai, akkor *transzcendens*; ilyen pl. az e és a π (de nehéz belátni, hogy transzcendensek). Számosságokkal könnyen kapjuk, hogy:

Hány bitsorozat van?

Feladat

Hány véges hosszúságú bitsorozat van?

Megoldás

Adott $i \in \mathbb{N}_0$-ra az i-hosszúságú bitsorozatok B_i-vel jelölt halmaza véges. (Mellesleg éppen $|B_i| = 2^i$, de ez a konkrét szám most nem fontos.) Az összes bitsorozat halmaza $B := \bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} B_i$. Minthogy $|\mathbb{N}_0| = \aleph_0$, az alaptétel (1) pontja szerint $|B| \le \aleph_0$. De B nyilván végtelen, továbbá $\aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság, ezért $|B| = \aleph_0$.

Egy $t \in \mathbb{R}$ számot **algebrai számnak** nevezünk, ha van olyan egész együtthatós polinom (azaz $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_1 x^1 + a_0$ ahol $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ és $a_n \neq 0$), amelynek t gyöke. Ha $t \in \mathbb{R}$ nem algebrai, akkor *transzcendens*; ilyen pl. az e és a π (de nehéz belátni, hogy transzcendensek). Számosságokkal könnyen kapjuk, hogy:

Hány bitsorozat van?

Feladat

Hány véges hosszúságú bitsorozat van?

Megoldás

Adott $i \in \mathbb{N}_0$-ra az i-hosszúságú bitsorozatok B_i-vel jelölt halmaza véges. (Mellesleg éppen $|B_i| = 2^i$, de ez a konkrét szám most nem fontos.) Az összes bitsorozat halmaza $B := \bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} B_i$. Minthogy $|\mathbb{N}_0| = \aleph_0$, az alaptétel (1) pontja szerint $|B| \le \aleph_0$. De B nyilván végtelen, továbbá $\aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság, ezért $|B| = \aleph_0$.

Egy $t \in \mathbb{R}$ számot **algebrai számnak** nevezünk, ha van olyan egész együtthatós polinom (azaz $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_1 x^1 + a_0$ ahol $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ és $a_n \ne 0$), amelynek t gyöke. Ha $t \in \mathbb{R}$ nem algebrai, akkor *transzcendens*; ilyen pl. az e és a π (de nehéz belátni, hogy transzcendensek). Számosságokkal könnyen kapjuk, hogy:

Hány bitsorozat van?

Feladat

Hány véges hosszúságú bitsorozat van?

Megoldás

Adott $i \in \mathbb{N}_0$-ra az i-hosszúságú bitsorozatok B_i-vel jelölt halmaza véges. (Mellesleg éppen $|B_i| = 2^i$, de ez a konkrét szám most nem fontos.) Az összes bitsorozat halmaza $B := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} B_i$. Minthogy $|\mathbb{N}_0| = \aleph_0$, az alaptétel (1) pontja szerint $|B| \leq \aleph_0$. De B nyilván végtelen, továbbá $\aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság, ezért $|B| = \aleph_0$.

Egy $t \in \mathbb{R}$ számot **algebrai számnak** nevezünk, ha van olyan egész együtthatós polinom (azaz $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x^1 + a_0$ ahol $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ és $a_n \neq 0$), amelynek t gyöke. Ha $t \in \mathbb{R}$ nem algebrai, akkor *transzcendens*; ilyen pl. az e és a π (de nehéz belátni, hogy transzcendensek). Számosságokkal könnyen kapjuk, hogy:

Hány bitsorozat van?

Feladat

Hány véges hosszúságú bitsorozat van?

Megoldás

Adott $i \in \mathbb{N}_0$-ra az i-hosszúságú bitsorozatok B_i-vel jelölt halmaza véges. (Mellesleg éppen $|B_i| = 2^i$, de ez a konkrét szám most nem fontos.) Az összes bitsorozat halmaza $B := \bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} B_i$. Minthogy $|\mathbb{N}_0| = \aleph_0$, az alaptétel (1) pontja szerint $|B| \leq \aleph_0$. De B nyilván végtelen, továbbá $\aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság, ezért $|B| = \aleph_0$.

Egy $t \in \mathbb{R}$ számot **algebrai számnak** nevezünk, ha van olyan egész együtthatós polinom (azaz $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_1 x^1 + a_0$ ahol $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ és $a_n \neq 0$), amelynek t gyöke. Ha $t \in \mathbb{R}$ nem algebrai, akkor *transzcendens*; ilyen pl. az e és a π (de nehéz belátni, hogy transzcendensek). Számosságokkal könnyen kapjuk, hogy:

Hány bitsorozat van?

Feladat

Hány véges hosszúságú bitsorozat van?

Megoldás

Adott $i \in \mathbb{N}_0$-ra az i-hosszúságú bitsorozatok B_i-vel jelölt halmaza véges. (Mellesleg éppen $|B_i| = 2^i$, de ez a konkrét szám most nem fontos.) Az összes bitsorozat halmaza $B := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} B_i$. Minthogy $|\mathbb{N}_0| = \aleph_0$, az alaptétel (1) pontja szerint $|B| \le \aleph_0$. De B nyilván végtelen, továbbá $\aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság, ezért $|B| = \aleph_0$.

Egy $t \in \mathbb{R}$ számot **algebrai számnak** nevezünk, ha van olyan egész együtthatós polinom (azaz $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x^1 + a_0$ ahol $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ és $a_n \neq 0$), amelynek t gyöke. Ha $t \in \mathbb{R}$ nem algebrai, akkor *transzcendens*; ilyen pl. az e és a π (de nehéz belátni, hogy transzcendensek). Számosságokkal könnyen kapjuk, hogy:

Létezik transzcendens szám

Tétel

Létezik transzcendens szám.

Bizonyítás.

Egy n-edfokú polinomot az $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0) \in \mathbb{Z}^n$ "együtthatóvektor" határoz meg, de $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$ és a Számosságaritmetika Alaptétele miatt $|\mathbb{Z}^n| = \aleph_0$. Tehát $\aleph_0$ sok egészegyütthatós polinom van. Mindegyik ilyen f esetén f gyökeinek G_f halmaza véges, ezért (szintén a Számosságaritmetika Alaptétele miatt) ezen halmazok uniója is $\aleph_0$ számosságú. Mivel ez az unió éppen az algebrai számok halmaza és $|\mathbb{R}| \neq \aleph_0$, az algebrai számok halmaza $\neq \mathbb{R}$. Tehát van nem algebrai, azaz transzcendens szám. □

Ezzel beváltottuk azon ígéretünket, hogy a számosságok jók valamire a véges világban

Létezik transzcendens szám

Tétel

Létezik transzcendens szám.

Bizonyítás.

Egy n-edfokú polinomot az $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0) \in \mathbb{Z}^n$ "együtthatóvektor" határoz meg, de $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$ és a Számosságaritmetika Alaptétele miatt $|\mathbb{Z}^n| = \aleph_0$. Tehát $\aleph_0$ sok egészegyütthatós polinom van. Mindegyik ilyen f esetén f gyökeinek G_f halmaza véges, ezért (szintén a Számosságaritmetika Alaptétele miatt) ezen halmazok uniója is $\aleph_0$ számosságú. Mivel ez az unió éppen az algebrai számok halmaza és $|\mathbb{R}| \neq \aleph_0$, az algebrai számok halmaza $\neq \mathbb{R}$. Tehát van nem algebrai, azaz transzcendens szám. $\square$

Ezzel beváltottuk azon ígéretünket, hogy a számosságok jók valamire a véges világban

Feladat számosságokra

Feladat

Melyek megszámlálhatóan végtelenek az alábbi halmazok közül?

1. $U := \{X : X \subseteq \mathbb{N}$ és X az összes prímszámot tartalmazza$\}$;
2. $V := \{X : X \subseteq \mathbb{Q}$ és X véges$\}$;
3. $W := \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szürjektív leképezés$\}$;
4. $M := \{f \mid f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ injektív leképezés$\}$?

Megoldás

2. Ha $X \in V$ esetén nagyság szerint felsoroljuk X elemeit, egy $\vec{s}_X$ sorozatot, azaz $\mathbb{Q}^{|X|}$ egy elemét kapjuk, ami a Számosságaritmetika Alaptétele miatt $\aleph_0$ számosságú. Ugyenezen tétel miatt $|\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{Q}^n| = \aleph_0$. Mivel az $f : V \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{Q}^n$, $X \mapsto \vec{s}_X$ is injektív, $|V| \leq \aleph_0$. De $\aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság, tehát $|V| \geq \aleph_0$. A dichotomia miatt $|V| = \aleph_0$.

Feladat számosságokra

Feladat

Melyek megszámlálhatóan végtelenek az alábbi halmazok közül?

1. $U := \{X : X \subseteq \mathbb{N}$ és X az összes prímszámot tartalmazza$\}$;
2. $V := \{X : X \subseteq \mathbb{Q}$ és X véges$\}$;
3. $W := \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szürjektív leképezés$\}$;
4. $M := \{f \mid f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ injektív leképezés$\}$?

Megoldás

2. Ha $X \in V$ esetén nagyság szerint felsoroljuk X elemeit, egy $\vec{s}_X$ sorozatot, azaz $\mathbb{Q}^{|X|}$ egy elemét kapjuk, ami a Számosságaritmetika Alaptétele miatt $\aleph_0$ számosságú. Ugyenezen tétel miatt $|\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{Q}^n| = \aleph_0$. Mivel az $f : V \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{Q}^n$, $X \mapsto \vec{s}_X$ is injektív, $|V| \le \aleph_0$. De $\aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság, tehát $|V| \ge \aleph_0$. A dichotomia miatt $|V| = \aleph_0$.

Feladat számosságokra

Feladat

Melyek megszámlálhatóan végtelenek az alábbi halmazok közül?

1. $U := \{X : X \subseteq \mathbb{N}$ és X az összes prímszámot tartalmazza$\}$;
2. $V := \{X : X \subseteq \mathbb{Q}$ és X véges$\}$;
3. $W := \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szürjektív leképezés$\}$;
4. $M := \{f \mid f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ injektív leképezés$\}$?

Megoldás

2. Ha $X \in V$ esetén nagyság szerint felsoroljuk X elemeit, egy $\vec{s}_X$ sorozatot, azaz $\mathbb{Q}^{|X|}$ egy elemét kapjuk, ami a Számosságaritmetika Alaptétele miatt $\aleph_0$ számosságú. Ugyenezen tétel miatt $|\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{Q}^n| = \aleph_0$. Mivel az $f : V \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{Q}^n$, $X \mapsto \vec{s}_X$ is injektív, $|V| \leq \aleph_0$. De $\aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság, tehát $|V| \geq \aleph_0$. A dichotomia miatt $|V| = \aleph_0$.

Feladat számosságokra

Feladat

Melyek megszámlálhatóan végtelenek az alábbi halmazok közül?

1. $U := \{X : X \subseteq \mathbb{N}$ és X az összes prímszámot tartalmazza$\}$;
2. $V := \{X : X \subseteq \mathbb{Q}$ és X véges$\}$;
3. $W := \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szürjektív leképezés$\}$;
4. $M := \{f \mid f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ injektív leképezés$\}$?

Megoldás

2. Ha $X \in V$ esetén nagyság szerint felsoroljuk X elemeit, egy $\vec{s}_X$ sorozatot, azaz $\mathbb{Q}^{|X|}$ egy elemét kapjuk, ami a Számosságaritmetika Alaptétele miatt $\aleph_0$ számosságú. Ugyenezen tétel miatt $|\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{Q}^n| = \aleph_0$. Mivel az $f\colon V \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{Q}^n$, $X \mapsto \vec{s}_X$ is injektív, $|V| \le \aleph_0$. De $\aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság, tehát $|V| \ge \aleph_0$. A dichotomia miatt $|V| = \aleph_0$.

Megoldás

3. Jelölje A a páros, B pedig a páratlan pozitív egészek halmazát. Sorozatba szedhetők $\Longrightarrow |A| = |B| = \aleph_0$. Ezért létezik egy $\varphi : A \to \mathbb{N}$ bijekció. Ha $X \subseteq B$, akkor a

$$\varphi_X : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad x \mapsto \begin{cases} x\varphi, & \text{ha } x \in A \\ 1\varphi, & \text{ha } x \in X \\ 2\varphi, & \text{ha } x \in B \setminus X \end{cases}$$

egy W-beli leképezés. Mivel az $f : P(B) \to W, \quad X \mapsto \psi_X$ leképezés injektív, $\aleph_0 = |B| < |P(B)| \le |W|$, tehát W nem megszámlálhatóan végtelen.

$W := \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szürjektív leképezés$\}$ vajon $\aleph_0$ sz.-ú?

Megoldás

3. Jelölje A a páros, B pedig a páratlan pozitív egészek halmazát. Sorozatba szedhetők $\Longrightarrow |A| = |B| = \aleph_0$. Ezért létezik egy $\varphi : A \to \mathbb{N}$ bijekció. Ha $X \subseteq B$, akkor a

$$\varphi_X : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad x \mapsto \begin{cases} x\varphi, & \text{ha } x \in A \\ 1\varphi, & \text{ha } x \in X \\ 2\varphi, & \text{ha } x \in B \setminus X \end{cases}$$

egy W-beli leképezés. Mivel az $f : P(B) \to W, \quad X \mapsto \psi_X$ leképezés injektív, $\aleph_0 = |B| < |P(B)| \le |W|$, tehát W nem megszámlálhatóan végtelen.

Megoldás

3. Jelölje A a páros, B pedig a páratlan pozitív egészek halmazát. Sorozatba szedhetők $\Longrightarrow |A| = |B| = \aleph_0$. Ezért létezik egy $\varphi : A \to \mathbb{N}$ bijekció. Ha $X \subseteq B$, akkor a

$$\varphi_X : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad x \mapsto \begin{cases} x\varphi, & \text{ha } x \in A \\ 1\varphi, & \text{ha } x \in X \\ 2\varphi, & \text{ha } x \in B \setminus X \end{cases}$$

egy W-beli leképezés. Mivel az $f : P(B) \to W, \quad X \mapsto \psi_X$ leképezés injektív, $\aleph_0 = |B| < |P(B)| \leq |W|$, tehát W nem megszámlálhatóan végtelen.

Megoldás

3. Jelölje A a páros, B pedig a páratlan pozitív egészek halmazát. Sorozatba szedhetők $\Longrightarrow |A| = |B| = \aleph_0$. Ezért létezik egy $\varphi : A \to \mathbb{N}$ bijekció. Ha $X \subseteq B$, akkor a

$$\varphi_X : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad x \mapsto \begin{cases} x\varphi, & \text{ha } x \in A \\ 1\varphi, & \text{ha } x \in X \\ 2\varphi, & \text{ha } x \in B \setminus X \end{cases}$$

egy W-beli leképezés. Mivel az $f : P(B) \to W, \quad X \mapsto \psi_X$ leképezés injektív, $\aleph_0 = |B| < |P(B)| \le |W|$, tehát W nem megszámlálhatóan végtelen.

Régi bánatunk, hogy a negatív számokból nem tudunk négyzetgyököt vonni. Hasonló „bánatok” vezettek a számfogalom fejlődéséhez: $\mathbb{N}$: nem lehetett osztani $\to$ bevezették a pozitív racionális számokat. Nem lehetett kivonni: $\to \mathbb{Q}$. Nem lehetett mérni (pl. az egységnégyzet átlóját): $\mathbb{R}$. Ez mindig a **permanencia elv** szerint történt, pl. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, és két racionális számra a műveleteket ugyanúgy kell végrehajtani $\mathbb{Q}$-ban, mint $\mathbb{R}$-ben. Hogy nem lehet egy műveletet elvégezni, az pl. egyenletek megoldásakor okozhat nehézséget: lehetséges, hogy a megoldás (mint érték) a szűkebb számkörben van, de a megoldási folyamat kivezet onnan. Pl. attól, hogy menet közben törtek lépnek fel, a végeredmény lehet természetes szám.

Komplex számok: motiváció

Régi bánatunk, hogy a negatív számokból nem tudunk négyzetgyököt vonni. Hasonló „bánatok” vezettek a számfogalom fejlődéséhez: $\mathbb{N}$: nem lehetett osztani $\to$ bevezették a pozitív racionális számokat. Nem lehetett kivonni: $\to \mathbb{Q}$. Nem lehetett mérni (pl. az egységnégyzet átlóját): $\mathbb{R}$. Ez mindig a **permanencia elv** szerint történt, pl. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, és két racionális számra a műveleteket ugyanúgy kell végrehajtani $\mathbb{Q}$-ban, mint $\mathbb{R}$-ben. Hogy nem lehet egy műveletet elvégezni, az pl. egyenletek megoldásakor okozhat nehézséget: lehetséges, hogy a megoldás (mint érték) a szűkebb számkörben van, de a megoldási folyamat kivezet onnan. Pl. attól, hogy menet közben törtek lépnek fel, a végeredmény lehet természetes szám.

Komplex számok: definíció

$\mathbb{R}$ elemeit egy egyenes (a számegyenes) pontjaival szemléltetjük. A most bevezetendő komplex számokat (ezek halmazát $\mathbb{C}$ jelöli) pedig a sík (az ún. **komplex számsík** vagy más néven **Gauss-féle számsík** pontjaival).

Definíció

A komplex számok halmaza $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Állapodjunk meg abban, hogy $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ helyett azt írjuk, hogy $z = a + bi$. Tehát az $a + bi$ lényegében egy rendezett párt jelöl, amelynek első komponense a z komplex szám ún. **valós része**. Az i együtthatója a második komponens, amelyet a komplex szám **képzetes részének** nevezünk. Itt i egyelőre csak egy szimbólum, a képzetes egység.

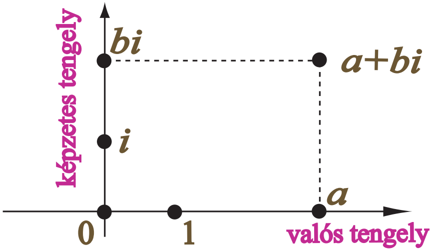
Komplex számok: definíció

$\mathbb{R}$ elemeit egy egyenes (a számegyenes) pontjaival szemléltetjük. A most bevezetendő komplex számokat (ezek halmazát $\mathbb{C}$ jelöli) pedig a sík (az ún. **komplex számsík** vagy más néven **Gauss-féle számsík** pontjaival).

Definíció

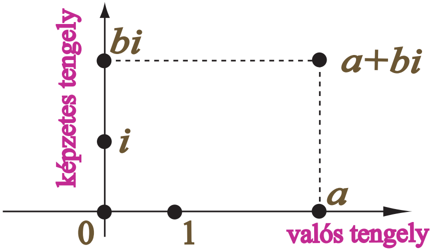
A komplex számok halmaza $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Állapodjunk meg abban, hogy $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ helyett azt írjuk, hogy $z = a + bi$. Tehát az $a + bi$ lényegében egy rendezett párt jelöl, amelynek első komponense a z komplex szám ún. **valós része**. Az i együtthatója a második komponens, amelyet a komplex szám **képzetes részének** nevezünk. Itt i egyelőre csak egy szimbólum, a képzetes egység.

Az $a + bi$ jelölés a komplex szám **kanonikus alakja**. Mivel ez az (a, b)-t jelöli, a koordinátasíkon (amelyet mostantól a komplex számsíknak nevezünk) ez a komplex szám az (a, b) koordinátákkal megadott pontnak felel meg.



Két komplex szám pontosan akkor egyenlő, ha valós és képzetes részeik is megegyeznek, azaz $a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \iff a_1 = a_2$ és $b_1 = b_2$.

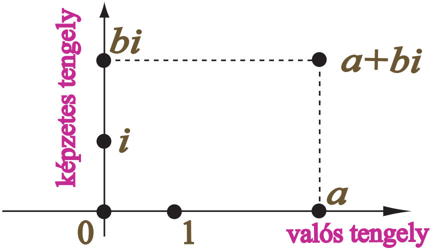
Az $a + bi$ jelölés a komplex szám **kanonikus alakja**. Mivel ez az (a, b)-t jelöli, a koordinátasíkon (amelyet mostantól a komplex számsíknak nevezünk) ez a komplex szám az (a, b) koordinátákkal megadott pontnak felel meg.



Két komplex szám pontosan akkor egyenlő, ha valós és képzetes részeik is megegyeznek, azaz $a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \iff a_1 = a_2$ és $b_1 = b_2$.

Valós rész, képzetes rész

Az eddigi valós számok éppen azok a komplex számok, amelyek képzetes része 0; ezek a **valós tengelyen** levő pontok.

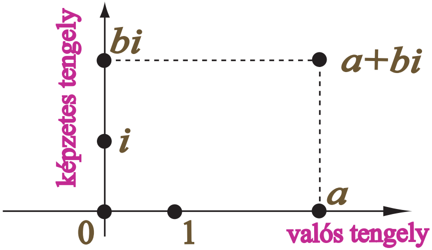


Ha egy komplex szám valós része 0, azaz ha a képzetes tengelyen van, akkor **tiszta képzetes számnak** nevezzük. Az i neve: **képzetes egység**, vagy **imaginárius egység**.

Ahhoz hogy a komplex számokkal *számolni tudjunk*, nem elég a $\mathbb{C}$ halmazt megadnunk, számolási szabályok is kellenek!

Valós rész, képzetes rész

Az eddigi valós számok éppen azok a komplex számok, amelyek képzetes része 0; ezek a **valós tengelyen** levő pontok.

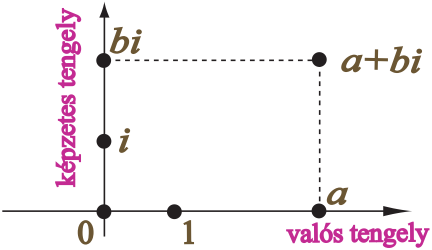


Ha egy komplex szám valós része 0, azaz ha a képzetes tengelyen van, akkor **tiszta képzetes számnak** nevezzük. Az i neve: **képzetes egység**, vagy **imaginárius egység**.

Ahhoz hogy a komplex számokkal *számolni tudjunk*, nem elég a $\mathbb{C}$ halmazt megadnunk, számolási szabályok is kellenek!

Valós rész, képzetes rész

Az eddigi valós számok éppen azok a komplex számok, amelyek képzetes része 0; ezek a **valós tengelyen** levő pontok.



Ha egy komplex szám valós része 0, azaz ha a képzetes tengelyen van, akkor **tiszta képzetes számnak** nevezzük. Az i neve: **képzetes egység**, vagy **imaginárius egység**.

Ahhoz hogy a komplex számokkal *számolni tudjunk*, nem elég a $\mathbb{C}$ halmazt megadnunk, számolási szabályok is kellenek!

Számolás kanonikus alakú komplex számokkal

Definíció

Nagyon egyszerű: a kifejezésekkel való szokásos számolási szabályokhoz (asszociativitás, kommutativitás és disztributivitás) még hozzávesszük azt, hogy $\boxed{i^2 = -1}$. Tehát

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 \underbrace{i^2}_{-1}$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

A $z = a + bi$ komplex szám **ellentettjén**, más néven **konjugáltján** a $-z = -a + (-b)i = -a - bi$ komplex számot értjük (ez az origóra való tükrözöttje z-nek).

Számolás kanonikus alakú komplex számokkal

Definíció

Nagyon egyszerű: a kifejezésekkel való szokásos számolási szabályokhoz (asszociativitás, kommutativitás és disztributivitás) még hozzávesszük azt, hogy $\boxed{i^2 = -1}$. Tehát

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 \underbrace{i^2}_{-1}$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i.$$

A $z = a + bi$ komplex szám **ellentettjén**, más néven **konjugáltján** a $-z = -a + (-b)i = -a - bi$ komplex számot értjük (ez az origóra való tükrözöttje z-nek).

Definíció

Nagyon egyszerű: a kifejezésekkel való szokásos számolási szabályokhoz (asszociativitás, kommutativitás és disztributivitás) még hozzávesszük azt, hogy $\boxed{i^2 = -1}$. Tehát

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 \underbrace{i^2}_{-1}$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

A $z = a + bi$ komplex szám **ellentettjén**, más néven **konjugáltján** a $-z = -a + (-b)i = -a - bi$ komplex számot értjük (ez az origóra való tükrözöttje z-nek).

Definíció

Nagyon egyszerű: a kifejezésekkel való szokásos számolási szabályokhoz (asszociativitás, kommutativitás és disztributivitás) még hozzávesszük azt, hogy $\boxed{i^2 = -1}$. Tehát

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 \underbrace{i^2}_{-1}$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

A $z = a + bi$ komplex szám **ellentettjén**, más néven **konjugáltján** a $-z = -a + (-b)i = -a - bi$ komplex számot értjük (ez az origóra való tükrözöttje z-nek).

Definíció

Nagyon egyszerű: a kifejezésekkel való szokásos számolási szabályokhoz (asszociativitás, kommutativitás és disztributivitás) még hozzávesszük azt, hogy $\boxed{i^2 = -1}$. Tehát

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 \underbrace{i^2}_{-1}$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

A $z = a + bi$ komplex szám **ellentettjén**, más néven **konjugáltján** a $-z = -a + (-b)i = -a - bi$ komplex számot értjük (ez az origóra való tükrözöttje z-nek).

Definíció

Nagyon egyszerű: a kifejezésekkel való szokásos számolási szabályokhoz (asszociativitás, kommutativitás és disztributivitás) még hozzávesszük azt, hogy $\boxed{i^2 = -1}$. Tehát

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 \underbrace{i^2}_{-1}$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

A $z = a + bi$ komplex szám **ellentettjén**, más néven **konjugáltján** a $-z = -a + (-b)i = -a - bi$ komplex számot értjük (ez az origóra való tükrözöttje z-nek).

Számolás kanonikus alakú komplex számokkal

Definíció

Nagyon egyszerű: a kifejezésekkel való szokásos számolási szabályokhoz (asszociativitás, kommutativitás és disztributivitás) még hozzávesszük azt, hogy $\boxed{i^2 = -1}$. Tehát

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 \underbrace{i^2}_{-1}$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

A $z = a + bi$ komplex szám **ellentettjén**, más néven **konjugáltján** a $-z = -a + (-b)i = -a - bi$ komplex számot értjük (ez az origóra való tükrözöttje z-nek).

Definíció

Nagyon egyszerű: a kifejezésekkel való szokásos számolási szabályokhoz (asszociativitás, kommutativitás és disztributivitás) még hozzávesszük azt, hogy $\boxed{i^2 = -1}$. Tehát

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 \underbrace{i^2}_{-1}$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

A $z = a + bi$ komplex szám **ellentettjén**, más néven **konjugáltján** a $-z = -a + (-b)i = -a - bi$ komplex számot értjük (ez az origóra való tükrözöttje z-nek).

Definíció

Nagyon egyszerű: a kifejezésekkel való szokásos számolási szabályokhoz (asszociativitás, kommutativitás és disztributivitás) még hozzávesszük azt, hogy $\boxed{i^2 = -1}$. Tehát

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 \underbrace{i^2}_{-1}$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

A $z = a + bi$ komplex szám **ellentettjén**, más néven **konjugáltján** a $-z = -a + (-b)i = -a - bi$ komplex számot értjük (ez az origóra való tükrözöttje z-nek).

A komplex számok testet alkotnak

Tétel

*A komplex számok a most definiált műveletekkel **testet** alkotnak, azaz érvényesek az alábbiak (testaxiómák):*

*Az összeadás is és a szorzás is **kommutatív** (azaz bármely $z, w \in \mathbb{C}$-re $z + w = w + z$ és $zw = wz$).*

*Az összeadás is és a szorzás is **asszociatatív**, azaz bármely $z, u, w \in \mathbb{C}$-re $(z + u) + w = z + (u + w)$ és $z(uw) = (zu)w$.*

*A szorzás **disztributív** az összedásra nézve, azaz bármely $z, u, v \in \mathbb{C}$-re $z(u + v) = zu + zv$ és $(u + v)z = uz + vz$.*

$0, 1 \in \mathbb{C}$, $0 \neq 1$, és $\forall\ z \in \mathbb{C}$-re $0 + z = z$, $1z = z$, $z + (-z) = 0$.

*Bármely $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$-nak létezik **reciproka**, azaz olyan $w \in \mathbb{C}$, amelyre $zw = 1$.*

A bizonyításból csak a reciprok kiszámítására koncentrálunk; feladatokban ez gyakran fellép és osztani is így kell.

A komplex számok testet alkotnak

Tétel

*A komplex számok a most definiált műveletekkel **testet** alkotnak, azaz érvényesek az alábbiak (testaxiómák):*
*Az összeadás is és a szorzás is **kommutatív** (azaz bármely $z, w \in \mathbb{C}$-re $z + w = w + z$ és $zw = wz$).*
*Az összeadás is és a szorzás is **asszociatatív**, azaz bármely $z, u, w \in \mathbb{C}$-re $(z + u) + w = z + (u + w)$ és $z(uw) = (zu)w$.*
*A szorzás **disztributív** az összedásra nézve, azaz bármely $z, u, v \in \mathbb{C}$-re $z(u + v) = zu + zv$ és $(u + v)z = uz + vz$.*
$0, 1 \in \mathbb{C}$, $0 \neq 1$, és $\forall\ z \in \mathbb{C}$-re $0 + z = z$, $1z = z$, $z + (-z) = 0$.
*Bármely $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$-nak létezik **reciproka**, azaz olyan $w \in \mathbb{C}$, amelyre $zw = 1$.*

A bizonyításból csak a reciprok kiszámítására koncentrálunk; feladatokban ez gyakran fellép és osztani is így kell.

A komplex számok testet alkotnak

Tétel

*A komplex számok a most definiált műveletekkel **testet** alkotnak, azaz érvényesek az alábbiak (testaxiómák):*
*Az összeadás is és a szorzás is **kommutatív** (azaz bármely $z, w \in \mathbb{C}$-re $z + w = w + z$ és $zw = wz$).*
*Az összeadás is és a szorzás is **asszociatatív**, azaz bármely $z, u, w \in \mathbb{C}$-re $(z + u) + w = z + (u + w)$ és $z(uw) = (zu)w$.*
*A szorzás **disztributív** az összedásra nézve, azaz bármely $z, u, v \in \mathbb{C}$-re $z(u + v) = zu + zv$ és $(u + v)z = uz + vz$.*
$0, 1 \in \mathbb{C}$, $0 \neq 1$, és $\forall\ z \in \mathbb{C}$-re $0 + z = z$, $1z = z$, $z + (-z) = 0$.
*Bármely $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$-nak létezik **reciproka**, azaz olyan $w \in \mathbb{C}$, amelyre $zw = 1$.*

A bizonyításból csak a reciprok kiszámítására koncentrálunk; feladatokban ez gyakran fellép és osztani is így kell.

A komplex számok testet alkotnak

Tétel

A komplex számok a most definiált műveletekkel ***testet*** *alkotnak, azaz érvényesek az alábbiak (testaxiómák):*
Az összeadás is és a szorzás is ***kommutatív*** *(azaz bármely $z, w \in \mathbb{C}$-re $z + w = w + z$ és $zw = wz$).*
Az összeadás is és a szorzás is ***asszociatatív****, azaz bármely $z, u, w \in \mathbb{C}$-re $(z + u) + w = z + (u + w)$ és $z(uw) = (zu)w$.*
A szorzás ***disztributív*** *az összedásra nézve, azaz bármely $z, u, v \in \mathbb{C}$-re $z(u + v) = zu + zv$ és $(u + v)z = uz + vz$.*
$0, 1 \in \mathbb{C}$, $0 \neq 1$, *és* $\forall\ z \in \mathbb{C}$*-re* $0 + z = z$, $1z = z$, $z + (-z) = 0$.
Bármely $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$-nak létezik ***reciproka****, azaz olyan $w \in \mathbb{C}$, amelyre $zw = 1$.*

A bizonyításból csak a reciprok kiszámítására koncentrálunk; feladatokban ez gyakran fellép és osztani is így kell.

A komplex számok testet alkotnak

Tétel

*A komplex számok a most definiált műveletekkel **testet** alkotnak, azaz érvényesek az alábbiak (testaxiómák):*
*Az összeadás is és a szorzás is **kommutatív** (azaz bármely $z, w \in \mathbb{C}$-re $z + w = w + z$ és $zw = wz$).*
*Az összeadás is és a szorzás is **asszociatatív**, azaz bármely $z, u, w \in \mathbb{C}$-re $(z + u) + w = z + (u + w)$ és $z(uw) = (zu)w$.*
*A szorzás **disztributív** az összedásra nézve, azaz bármely $z, u, v \in \mathbb{C}$-re $z(u + v) = zu + zv$ és $(u + v)z = uz + vz$.*
$0, 1 \in \mathbb{C}$, $0 \neq 1$, *és* $\forall\ z \in \mathbb{C}$-re $0 + z = z$, $1z = z$, $z + (-z) = 0$.
*Bármely $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$-nak létezik **reciproka**, azaz olyan $w \in \mathbb{C}$, amelyre $zw = 1$.*

A bizonyításból csak a reciprok kiszámítására koncentrálunk; feladatokban ez gyakran fellép és osztani is így kell.

A komplex számok testet alkotnak

Tétel

A komplex számok a most definiált műveletekkel ***testet*** *alkotnak, azaz érvényesek az alábbiak (testaxiómák):*
Az összeadás is és a szorzás is ***kommutatív*** *(azaz bármely $z, w \in \mathbb{C}$-re $z + w = w + z$ és $zw = wz$).*
Az összeadás is és a szorzás is ***asszociatatív****, azaz bármely $z, u, w \in \mathbb{C}$-re $(z + u) + w = z + (u + w)$ és $z(uw) = (zu)w$.*
A szorzás ***disztributív*** *az összedásra nézve, azaz bármely $z, u, v \in \mathbb{C}$-re $z(u + v) = zu + zv$ és $(u + v)z = uz + vz$.*
$0, 1 \in \mathbb{C}$, $0 \neq 1$, és $\forall\ z \in \mathbb{C}$-re $0 + z = z$, $1z = z$, $z + (-z) = 0$.
Bármely $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$-nak létezik ***reciproka****, azaz olyan $w \in \mathbb{C}$, amelyre $zw = 1$.*

A bizonyításból csak a reciprok kiszámítására koncentrálunk; feladatokban ez gyakran fellép és osztani is így kell.

A reciprok kiszámítása

Bizonyítás (csak azt igazoljuk, hogy nem-nullának ∃ reciproka).

Legyen $z = a + bi \neq 0$. Ekkor $(a, b) \neq (0, 0)$, tehát az a, b valós számokra $a^2 + b^2 \neq 0$ (hiszen > 0). Arra gondolva, hogy i is négyzetgyök (ti. a -1 négyzetgyöke), a nevező szokásos gyöktelenítésével

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2-b^2i^2}$$
$$= \frac{a-bi}{a^2+b^2} = = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} \cdot i =: w,$$

és egyszerű visszaszorzás mutatja, hogy $zw = 1$. Q.e.d. □

Bizonyítás (csak azt igazoljuk, hogy nem-nullának $\exists$ reciproka).

Legyen $z = a + bi \neq 0$. Ekkor $(a, b) \neq (0, 0)$, tehát az a, b valós számokra $a^2 + b^2 \neq 0$ (hiszen > 0). Arra gondolva, hogy i is négyzetgyök (ti. a -1 négyzetgyöke), a nevező szokásos gyöktelenítésével

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2-b^2i^2}$$

$$= \frac{a-bi}{a^2+b^2} = = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} \cdot i =: w,$$

és egyszerű visszaszorzás mutatja, hogy $zw = 1$. Q.e.d. $\square$

A reciprok kiszámítása

Bizonyítás (csak azt igazoljuk, hogy nem-nullának ∃ reciproka).

Legyen $z = a + bi \neq 0$. Ekkor $(a, b) \neq (0, 0)$, tehát az a, b valós számokra $a^2 + b^2 \neq 0$ (hiszen > 0). Arra gondolva, hogy i is négyzetgyök (ti. a -1 négyzetgyöke), a nevező szokásos gyöktelenítésével

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2-b^2i^2}$$

$$= \frac{a-bi}{a^2+b^2} = = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} \cdot i =: w,$$

és egyszerű visszaszorzás mutatja, hogy $zw = 1$. Q.e.d. $\square$

A reciprok kiszámítása

Bizonyítás (csak azt igazoljuk, hogy nem-nullának $\exists$ reciproka).

Legyen $z = a + bi \neq 0$. Ekkor $(a, b) \neq (0, 0)$, tehát az a, b valós számokra $a^2 + b^2 \neq 0$ (hiszen > 0). Arra gondolva, hogy i is négyzetgyök (ti. a -1 négyzetgyöke), a nevező szokásos gyöktelenítésével

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2-b^2i^2}$$

$$= \frac{a-bi}{a^2+b^2} = = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} \cdot i =: w,$$

és egyszerű visszaszorzás mutatja, hogy $zw = 1$. Q.e.d. $\square$

Bizonyítás (csak azt igazoljuk, hogy nem-nullának $\exists$ reciproka).

Legyen $z = a + bi \neq 0$. Ekkor $(a, b) \neq (0, 0)$, tehát az a, b valós számokra $a^2 + b^2 \neq 0$ (hiszen > 0). Arra gondolva, hogy i is négyzetgyök (ti. a -1 négyzetgyöke), a nevező szokásos gyöktelenítésével

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2-b^2i^2}$$

$$= \frac{a-bi}{a^2+b^2} = = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} \cdot i =: w,$$

és egyszerű visszaszorzás mutatja, hogy $zw = 1$. Q.e.d. $\square$

A reciprok kiszámítása

Bizonyítás (csak azt igazoljuk, hogy nem-nullának ∃ reciproka).

Legyen $z = a + bi \neq 0$. Ekkor $(a, b) \neq (0, 0)$, tehát az a, b valós számokra $a^2 + b^2 \neq 0$ (hiszen > 0). Arra gondolva, hogy i is négyzetgyök (ti. a -1 négyzetgyöke), a nevező szokásos gyöktelenítésével

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2-b^2i^2}$$
$$= \frac{a-bi}{a^2+b^2} = = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} \cdot i =: w,$$

és egyszerű visszaszorzás mutatja, hogy $zw = 1$. Q.e.d. □

A reciprok kiszámítása

Bizonyítás (csak azt igazoljuk, hogy nem-nullának $\exists$ reciproka).

Legyen $z = a + bi \neq 0$. Ekkor $(a, b) \neq (0, 0)$, tehát az a, b valós számokra $a^2 + b^2 \neq 0$ (hiszen > 0). Arra gondolva, hogy i is négyzetgyök (ti. a -1 négyzetgyöke), a nevező szokásos gyöktelenítésével

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2-b^2i^2}$$
$$= \frac{a-bi}{a^2+b^2} = = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} \cdot i =: w,$$

és egyszerű visszaszorzás mutatja, hogy $zw = 1$. Q.e.d. $\square$

A konjugálás és az abszolút érték tulajdonságai

Egy A $z = a + bi$ komplex szám *abszolút értékén* az origótól mért szokásos távolságot értjük, azaz

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Tétel

Legyen $u, v, z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Ekkor

$$\overline{u+v} = \bar{u} + \bar{v}, \quad \overline{uv} = \bar{u}\,\bar{v},$$
$$|uv| = |u| \cdot |v|, \quad |1/z| = 1/|z|,$$
$$||u| - |v|| \leq |u+v| \leq |u| + |v| \quad (\textit{háromszög-egyenlőtlenség}).$$

A konjugálás és az abszolút érték tulajdonságai

Egy A $z = a + bi$ komplex szám *abszolút értékén* az origótól mért szokásos távolságot értjük, azaz

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Tétel

Legyen $u, v, z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. *Ekkor*

$$\overline{u+v} = \bar{u} + \bar{v}, \quad \overline{uv} = \bar{u}\,\bar{v},$$
$$|uv| = |u| \cdot |v|, \quad |1/z| = 1/|z|,$$
$$||u| - |v|| \leq |u+v| \leq |u| + |v| \quad \textit{(háromszög-egyenlőtlenség)}.$$

A konjugálás és az abszolút érték tulajdonságai

Egy A $z = a + bi$ komplex szám *abszolút értékén* az origótól mért szokásos távolságot értjük, azaz

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Tétel

Legyen $u, v, z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. *Ekkor*

$$\overline{u+v} = \bar{u} + \bar{v}, \quad \overline{uv} = \bar{u}\,\bar{v},$$
$$|uv| = |u| \cdot |v|, \quad |1/z| = 1/|z|,$$
$$||u| - |v|| \leq |u+v| \leq |u| + |v| \quad (\textit{háromszög-egyenlőtlenség}).$$

Egy feladat (osztás kanonikus alakban)

Feladat

$\dfrac{(2-i)^2}{(1+i)^3}$ =? (Adjuk meg kanonikus alakban.)

Megoldás

$$\frac{(2-i)^2}{(1+i)^3} = \frac{4-4i-1}{1+3i+3i^2+i^3} = \frac{3-4i}{1+3i-3-i} =$$

$$\frac{3-4i}{-2+2i} = \frac{(3-4i)(-2-2i)}{(-2+2i)(-2-2i)} =$$

$$\frac{-6-6i+8i-8}{2^2+2^2} = \frac{-14+2i}{8} = -\frac{7}{4} + \frac{i}{4}.$$

Egy feladat (osztás kanonikus alakban)

Feladat

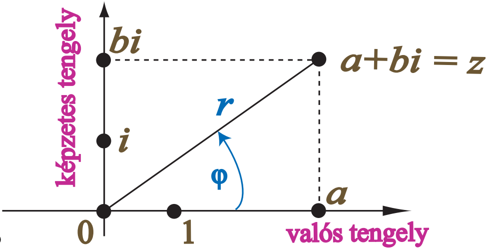
$\dfrac{(2-i)^2}{(1+i)^3} =$? (Adjuk meg kanonikus alakban.)

Megoldás

$$\frac{(2-i)^2}{(1+i)^3} = \frac{4-4i-1}{1+3i+3i^2+i^3} = \frac{3-4i}{1+3i-3-i} =$$

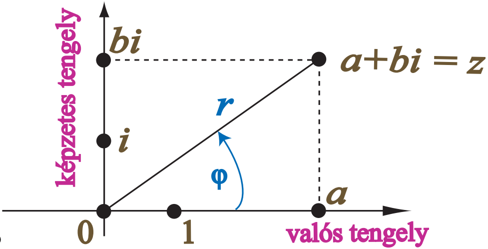
$$\frac{3-4i}{-2+2i} = \frac{(3-4i)(-2-2i)}{(-2+2i)(-2-2i)} =$$

$$\frac{-6-6i+8i-8}{2^2+2^2} = \frac{-14+2i}{8} = -\frac{7}{4} + \frac{i}{4}.$$



2

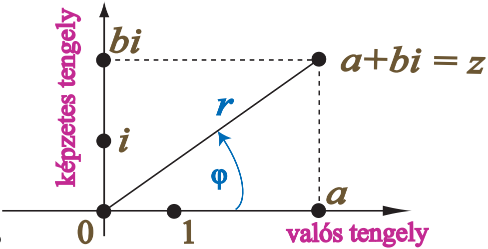
A $z \neq 0$ komplex szám **argumentuma** az a forgásszög, amelyet a valós tengely pozitív részével a helyvektora bezár. Az ábrán φ. (Ezt 2π egész számú többszöröseinek erejéig meghatározott.) Jelölje r a z abszolút értékét (azaz z hosszát). Mivel $a = r\cos\varphi$ és $b = r\sin\varphi$, ezért $\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$; ez a komplex szám **trigonometrikus alakja**. A 0-nak nincs trigonometrikus alakja!



2

A $z \neq 0$ komplex szám **argumentuma** az a forgásszög, amelyet a valós tengely pozitív részével a helyvektora bezár. Az ábrán φ. (Ezt 2π egész számú többszöröseinek erejéig meghatározott.) Jelölje r a z abszolút értékét (azaz z hosszát). Mivel $a = r\cos\varphi$ és $b = r\sin\varphi$, ezért $\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$; ez a komplex szám **trigonometrikus alakja**. A 0-nak nincs trigonometrikus alakja!

Trigonometrikus alak



2

A $z \neq 0$ komplex szám **argumentuma** az a forgásszög, amelyet a valós tengely pozitív részével a helyvektora bezár. Az ábrán φ. (Ezt 2π egész számú többszöröseinek erejéig meghatározott.) Jelölje r a z abszolút értékét (azaz z hosszát). Mivel $a = r\cos\varphi$ és $b = r\sin\varphi$, ezért $\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$; ez a komplex szám **trigonometrikus alakja**. A 0-nak nincs trigonometrikus alakja!

Additív műveletekhez $(+,\ -)$ a kanonikus alak ideális. Multiplikatív műveletekhez $(\cdot,\ /)$ viszont a trigonometrikus alak a jobb.

Tétel

Szorzáskor az abszolút értékek összeszorzódnak, az argumentumok pedig összeadódnak. Tehát (és továbbá), ha $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ és $u = s(\cos\psi + i\sin\psi)$ nemnulla komplex számok, akkor

$$zu = rs\big(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\big),$$

$$\frac{z}{u} = \frac{r}{s}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)); \quad \textit{így}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)),$$

$$\bar{z} = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)).$$

Műveletek trigonometrikus alakban

Additív műveletekhez $(+, -)$ a kanonikus alak ideális. Multiplikatív műveletekhez $(\cdot, /)$ viszont a trigonometrikus alak a jobb.

Tétel

Szorzáskor az abszolút értékek összeszorzódnak, az argumentumok pedig összeadódnak. Tehát (és továbbá), ha $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ *és* $u = s(\cos\psi + i\sin\psi)$ *nemnulla komplex számok, akkor*

$$zu = rs\big(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\big),$$

$$\frac{z}{u} = \frac{r}{s}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)); \quad \textit{így}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)),$$

$$\bar{z} = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)).$$

Trigonometrikus alak (bizonyítás)

Bizonyítás.

Csak az elsőt bizonyítjuk, a többi onnan már következik. Az addíciós tételeket kell használnunk:

$$r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)\cdot s(\cos\psi + i\,\sin\psi)$$
$$= rs((\cos\varphi\,\cos\psi - \sin\varphi\,\sin\psi) + i(\cos\varphi\,\sin\psi + \sin\varphi\,\cos\psi))$$
$$= rs\big(\cos(\varphi+\psi) + i\,\sin(\varphi+\psi)\big).$$

$\square$

Következmény

(Moivre-képlet) Ha n nemnegatív egész szám és $z = r\big(\cos\varphi + i\,\sin\varphi\big)$ egy trigonometrikus alakban megadott nemnulla komplex szám (tehát r és φ valós!), akkor

$$z^n = r^n\big(\cos n\varphi + i\,\sin n\varphi\big).$$

Trigonometrikus alak (bizonyítás)

Bizonyítás.

Csak az elsőt bizonyítjuk, a többi onnan már következik. Az addíciós tételeket kell használnunk:

$$r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)\cdot s(\cos\psi + i\,\sin\psi)$$
$$= rs((\cos\varphi\,\cos\psi - \sin\varphi\,\sin\psi) + i(\cos\varphi\,\sin\psi + \sin\varphi\,\cos\psi))$$
$$= rs\big(\cos(\varphi+\psi) + i\,\sin(\varphi+\psi)\big).$$

$\square$

Következmény

(Moivre-képlet) Ha n nemnegatív egész szám és $z = r\big(\cos\varphi + i\,\sin\varphi\big)$ egy trigonometrikus alakban megadott nemnulla komplex szám (tehát r és φ valós!), akkor

$$z^n = r^n\big(\cos n\varphi + i\,\sin n\varphi\big).$$

Trigonometrikus alak (bizonyítás)

Bizonyítás.

Csak az elsőt bizonyítjuk, a többi onnan már következik. Az addíciós tételeket kell használnunk:

$$\begin{gathered} r(\cos\varphi + i\ \sin\varphi)\cdot s(\cos\psi + i\ \sin\psi) \\ = rs((\cos\varphi\ \cos\psi - \sin\varphi\ \sin\psi) + i(\cos\varphi\ \sin\psi + \sin\varphi\ \cos\psi)) \\ = rs\big(\cos(\varphi+\psi) + i\ \sin(\varphi+\psi)\big). \end{gathered}$$

□

Következmény

(Moivre-képlet) Ha n nemnegatív egész szám és $z = r\big(\cos\varphi + i\ \sin\varphi\big)$ egy trigonometrikus alakban megadott nemnulla komplex szám (tehát r és φ valós!), akkor

$$z^n = r^n\big(\cos n\varphi + i\ \sin n\varphi\big).$$

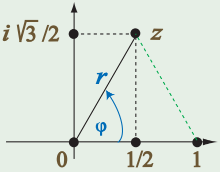
Feladat a Moivre-képletre

Feladat

$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{600} = ?$

Megoldás

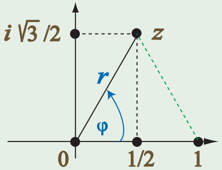
Legyen $z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Írjuk át trigonometrikus alakba! Anélkül reménytelen!



Könnyen adódik, hogy $r = |z| = 1$. A nevezetes szögek szögfüggvényeire (vagy a szabályos háromszögre) gondolva: $\varphi = \pi/3$. Ezért $z = 1 \cdot (\cos\pi/3 + i\,\sin\pi/3)$, így a Moivre-képlet szerint $z^{600} = 1^{600} \cdot (\cos 200\pi + i\,\sin 200/\pi) = \cos 0 + i\,\sin 0 = 1$.

Megoldás

Legyen $z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Írjuk át trigonometrikus alakba! Anélkül reménytelen!

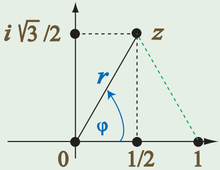


Könnyen adódik, hogy $r = |z| = 1$. A nevezetes szögek szögfüggvényeire (vagy a szabályos háromszögre) gondolva: $\varphi = \pi/3$. Ezért $z = 1 \cdot (\cos \pi/3 + i \sin \pi/3)$, így a Moivre-képlet szerint $z^{600} = 1^{600} \cdot (\cos 200\pi + i \sin 200/\pi) = \cos 0 + i \sin 0 = 1$.

A feladat megoldása

Megoldás

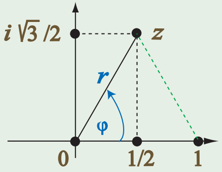
Legyen $z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Írjuk át trigonometrikus alakba! Anélkül reménytelen!



Könnyen adódik, hogy $r = |z| = 1$. A nevezetes szögek szögfüggvényeire (vagy a szabályos háromszögre) gondolva: $\varphi = \pi/3$. Ezért $z = 1 \cdot (\cos\pi/3 + i\,\sin\pi/3)$, így a Moivre-képlet szerint $z^{600} = 1^{600} \cdot (\cos 200\pi + i\,\sin 200/\pi) = \cos 0 + i\,\sin 0 = 1$.

Megoldás

Legyen $z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Írjuk át trigonometrikus alakba! Anélkül reménytelen!



Könnyen adódik, hogy $r = |z| = 1$. A nevezetes szögek szögfüggvényeire (vagy a szabályos háromszögre) gondolva: $\varphi = \pi/3$. Ezért $z = 1 \cdot (\cos\pi/3 + i\ \sin\pi/3)$, így a Moivre-képlet szerint $z^{600} = 1^{600} \cdot (\cos 200\pi + i\ \sin 200/\pi) = \cos 0 + i\ \sin 0 = 1$.

Gyökvonás komplex számból

Adott $z \in \mathbf{C}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén az $u^n = z$ egyenlet (ahol $u \in \mathbb{C}$ az ismeretlen) megoldásait a z komplex szám n-edik *gyökeinek* nevezzük. Ebből több is lehet, és mindegyiket $\sqrt[n]{u}$ jelöli (nincs megállapodás arra nézve, hogy melyiket).
$\sqrt[n]{0} = 0$, tehát a 0-nak csak egyetlen n-edik gyöke van. Mindjárt látni fogjuk, hogy nemcsak a -1-nek és a nemnegatív valós számokak van négyzetgyöke!

Tétel

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $0 \neq z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in \mathbb{C}$ (trigonometrikus alakban). Ekkor z-nek pontosan n darab különböző n-edik gyöke van $\mathbb{C}$-ben, mégpedig az alábbiak:

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Gyökvonás komplex számból

Adott $z \in \mathbf{C}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén az $u^n = z$ egyenlet (ahol $u \in \mathbb{C}$ az ismeretlen) megoldásait a z komplex szám n-edik *gyökeinek* nevezzük. Ebből több is lehet, és mindegyiket $\sqrt[n]{u}$ jelöli (nincs megállapodás arra nézve, hogy melyiket).

$\sqrt[n]{0} = 0$, tehát a 0-nak csak egyetlen n-edik gyöke van. Mindjárt látni fogjuk, hogy nemcsak a -1-nek és a nemnegatív valós számokak van négyzetgyöke!

Tétel

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $0 \neq z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in \mathbb{C}$ (trigonometrikus alakban). Ekkor z-nek pontosan n darab különböző n-edik gyöke van $\mathbb{C}$-ben, mégpedig az alábbiak:

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Gyökvonás komplex számból

Adott $z \in \mathbf{C}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén az $u^n = z$ egyenlet (ahol $u \in \mathbb{C}$ az ismeretlen) megoldásait a z komplex szám n-edik *gyökeinek* nevezzük. Ebből több is lehet, és mindegyiket $\sqrt[n]{u}$ jelöli (nincs megállapodás arra nézve, hogy melyiket).
$\sqrt[n]{0} = 0$, tehát a 0-nak csak egyetlen n-edik gyöke van. Mindjárt látni fogjuk, hogy nemcsak a -1-nek és a nemnegatív valós számokak van négyzetgyöke!

Tétel

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $0 \neq z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in \mathbb{C}$ (trigonometrikus alakban). Ekkor z-nek pontosan n darab különböző n-edik gyöke van $\mathbb{C}$-ben, mégpedig az alábbiak:

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Gyökvonás komplex számból

Adott $z \in \mathbf{C}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén az $u^n = z$ egyenlet (ahol $u \in \mathbb{C}$ az ismeretlen) megoldásait a z komplex szám n-edik *gyökeinek* nevezzük. Ebből több is lehet, és mindegyiket $\sqrt[n]{u}$ jelöli (nincs megállapodás arra nézve, hogy melyiket).
$\sqrt[n]{0} = 0$, tehát a 0-nak csak egyetlen n-edik gyöke van. Mindjárt látni fogjuk, hogy nemcsak a -1-nek és a nemnegatív valós számokak van négyzetgyöke!

Tétel

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $0 \neq z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in \mathbb{C}$ (trigonometrikus alakban). Ekkor z-nek pontosan n darab különböző n-edik gyöke van $\mathbb{C}$-ben, mégpedig az alábbiak:

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\,\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Bizonyítás.

Keressük $u=\sqrt[n]{z}$-t is trigonometrikus alakban: $u=s(\cos\psi+i\,\sin\psi)$. A Moivre-képlet szerint

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=z=u^n=s^n(\cos n\psi+i\,\sin n\psi).$$

Az abszolút értékeket összehasonlítva: $s=\sqrt[n]{r}$ (ami most egy pozitív valós számot jelöl!). Az argumentumok egybevetéséből: $n\psi=\varphi+2k\pi$, azaz $\psi=\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}=\dfrac{\varphi}{n}+\dfrac{2k\pi}{n}$, $n\in\mathbb{Z}$. Ez azonban pontosan n különböző forgásszöget (argumentumot) ad: $k=0,1,\ldots,n-1$. Q.e.d $\square$

Bizonyítás.

Keressük $u=\sqrt[n]{z}$-t is trigonometrikus alakban: $u=s(\cos\psi+i\,\sin\psi)$. A Moivre-képlet szerint

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=z=u^n=s^n(\cos n\psi+i\,\sin n\psi).$$

Az abszolút értékeket összehasonlítva: $s=\sqrt[n]{r}$ (ami most egy pozitív valós számot jelöl!). Az argumentumok egybevetéséből: $n\psi=\varphi+2k\pi$, azaz $\psi=\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}=\dfrac{\varphi}{n}+\dfrac{2k\pi}{n}$, $n\in\mathbb{Z}$. Ez azonban pontosan n különböző forgásszöget (argumentumot) ad: $k=0,1,\ldots,n-1$. Q.e.d

Bizonyítás.

Keressük $u=\sqrt[n]{z}$-t is trigonometrikus alakban: $u=s(\cos\psi+i\ \sin\psi)$. A Moivre-képlet szerint

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=z=u^n=s^n(\cos n\psi+i\ \sin n\psi).$$

Az abszolút értékeket összehasonlítva: $s=\sqrt[n]{r}$ (ami most egy pozitív valós számot jelöl!). Az argumentumok egybevetéséből: $n\psi=\varphi+2k\pi$, azaz $\psi=\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}=\dfrac{\varphi}{n}+\dfrac{2k\pi}{n}$, $n\in\mathbb{Z}$. Ez azonban pontosan n különböző forgásszöget (argumentumot) ad: $k=0,1,\ldots,n-1$. Q.e.d □

Bizonyítás.

Keressük $u=\sqrt[n]{z}$-t is trigonometrikus alakban: $u=s(\cos\psi+i\,\sin\psi)$. A Moivre-képlet szerint

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=z=u^n=s^n(\cos n\psi+i\,\sin n\psi).$$

Az abszolút értékeket összehasonlítva: $s=\sqrt[n]{r}$ (ami most egy pozitív valós számot jelöl!). Az argumentumok egybevetéséből: $n\psi=\varphi+2k\pi$, azaz $\psi=\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}=\dfrac{\varphi}{n}+\dfrac{2k\pi}{n}$, $n\in\mathbb{Z}$. Ez azonban pontosan n különböző forgásszöget (argumentumot) ad: $k=0,1,\ldots,n-1$. Q.e.d $\square$

Bizonyítás.

Keressük $u=\sqrt[n]{z}$-t is trigonometrikus alakban: $u=s(\cos\psi+i\,\sin\psi)$. A Moivre-képlet szerint

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=z=u^n=s^n(\cos n\psi+i\,\sin n\psi).$$

Az abszolút értékeket összehasonlítva: $s=\sqrt[n]{r}$ (ami most egy pozitív valós számot jelöl!). Az argumentumok egybevetéséből: $n\psi=\varphi+2k\pi$, azaz $\psi=\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}=\dfrac{\varphi}{n}+\dfrac{2k\pi}{n}$, $n\in\mathbb{Z}$. Ez azonban pontosan n különböző forgásszöget (argumentumot) ad: $k=0,1,\ldots,n-1$. Q.e.d $\square$

Bizonyítás.

Keressük $u=\sqrt[n]{z}$-t is trigonometrikus alakban: $u=s(\cos\psi+i\,\sin\psi)$. A Moivre-képlet szerint

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=z=u^n=s^n(\cos n\psi+i\,\sin n\psi).$$

Az abszolút értékeket összehasonlítva: $s=\sqrt[n]{r}$ (ami most egy pozitív valós számot jelöl!). Az argumentumok egybevetéséből: $n\psi=\varphi+2k\pi$, azaz $\psi=\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}=\dfrac{\varphi}{n}+\dfrac{2k\pi}{n}$, $n\in\mathbb{Z}$. Ez azonban pontosan n különböző forgásszöget (argumentumot) ad: $k=0,1,\ldots,n-1$. Q.e.d □

Bizonyítás.

Keressük $u=\sqrt[n]{z}$-t is trigonometrikus alakban: $u=s(\cos\psi+i\sin\psi)$. A Moivre-képlet szerint

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=z=u^n=s^n(\cos n\psi+i\sin n\psi).$$

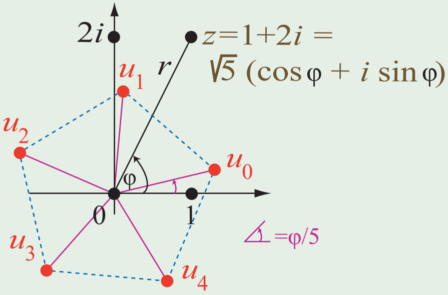
Az abszolút értékeket összehasonlítva: $s=\sqrt[n]{r}$ (ami most egy pozitív valós számot jelöl!). Az argumentumok egybevetéséből: $n\psi=\varphi+2k\pi$, azaz $\psi=\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}=\dfrac{\varphi}{n}+\dfrac{2k\pi}{n}$, $n\in\mathbb{Z}$. Ez azonban pontosan n különböző forgásszöget (argumentumot) ad: $k=0,1,\ldots,n-1$. Q.e.d ☐

Megjegyzés

Megjegyzés: z n-edik gyökei egy szabályos n-szöget alkotnak, amelynek középpontja a 0 (origó).

Példa

A $z = 1 + 2i$ komplex ötödik gyökei: $u_0, \ldots, u_4$:



Tétel

Az n-edik egységgyökök éppen az

$$\varepsilon_k = \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

komplex számok. Ezek páronként különböznek (azaz pontosan n darab van belőlük).
ε_k *pozitív egész kitevős hatványaiként akkor és csak akkor kapjuk meg az összes n-edik egységgyököt, ha k és n relatív prím.* Az ilyen ε_k-kat ***primitív*** n-edik egységgyököknek nevezzük.

n-edik komplex egységgyökök, primitív egységgyökök

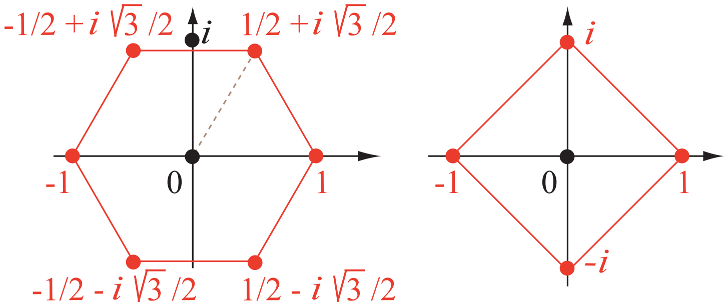
Tétel

Az n-edik egységgyökök éppen az

$$\varepsilon_k = \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

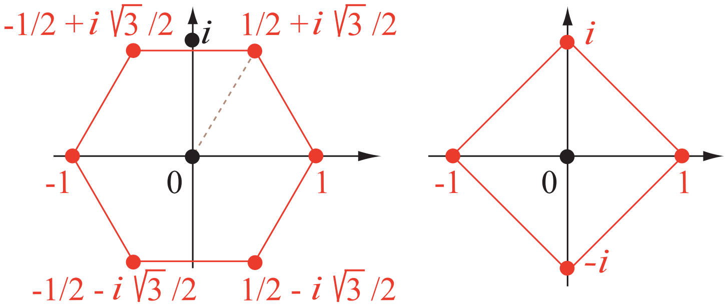
komplex számok. Ezek páronként különböznek (azaz pontosan n darab van belőlük).
ε_k pozitív egész kitevős hatványaiként akkor és csak akkor kapjuk meg az összes n-edik egységgyököt, ha k és n relatív prím. Az ilyen ε_k-kat ***primitív*** *n-edik egységgyököknek nevezzük.*

A hatodik és a negyedik egységgyökök (a nevezetes szögek szögfüggvényeit ismerni kell hozzá!)



Az egységgyökök fontosságára világít rá az alábbi tétel.

A hatodik és a negyedik egységgyökök (a nevezetes szögek szögfüggvényeit ismerni kell hozzá!)



Az egységgyökök fontosságára világít rá az alábbi tétel.

Miért fontosak az egységgyökök?

Tétel

Legyen $z \neq 0$ komplex szám. Ekkor z n-edik gyökeit úgy kapjuk, hogy egy tetszőlegesen rögzített n-edik gyökét rendre megszorozzuk az összes n-edig egységgyökkel.

Azaz, ha $u^n = z \neq 0$, akkor z n-edik gyökei éppen az $\varepsilon_0 u, \varepsilon_1 u, \ldots, \varepsilon_{n-1} u$ (páronként különböző) komplex számok.

Másként fogalmazva: ha ismerjük az $\sqrt[n]{z}$ egyik értékét, akkor azt ($2\pi/n$ egész számú többszöröseivel elforgatva) a többi értékét is megkapjuk.

Feladat

$\sqrt[6]{-27} = ?$ (a komplex számok testében)

Miért fontosak az egységgyökök?

Tétel

Legyen $z \neq 0$ komplex szám. Ekkor z n-edik gyökeit úgy kapjuk, hogy egy tetszőlegesen rögzített n-edik gyökét rendre megszorozzuk az összes n-edig egységgyökkel.
Azaz, ha $u^n = z \neq 0$, akkor z n-edik gyökei éppen az $\varepsilon_0 u$, $\varepsilon_1 u$, ..., $\varepsilon_{n-1} u$ (páronként különböző) komplex számok.
Másként fogalmazva: ha ismerjük az $\sqrt[n]{z}$ egyik értékét, akkor azt ($2\pi/n$ egész számú többszöröseivel elforgatva) a többi értékét is megkapjuk.

Feladat

$\sqrt[6]{-27} = ?$ (a komplex számok testében)

Miért fontosak az egységgyökök?

Tétel

Legyen $z \neq 0$ komplex szám. Ekkor z n-edik gyökeit úgy kapjuk, hogy egy tetszőlegesen rögzített n-edik gyökét rendre megszorozzuk az összes n-edig egységgyökkel.
Azaz, ha $u^n = z \neq 0$, akkor z n-edik gyökei éppen az $\varepsilon_0 u$, $\varepsilon_1 u$, ..., $\varepsilon_{n-1} u$ (páronként különböző) komplex számok.
Másként fogalmazva: ha ismerjük az $\sqrt[n]{z}$ egyik értékét, akkor azt ($2\pi/n$ egész számú többszöröseivel elforgatva) a többi értékét is megkapjuk.

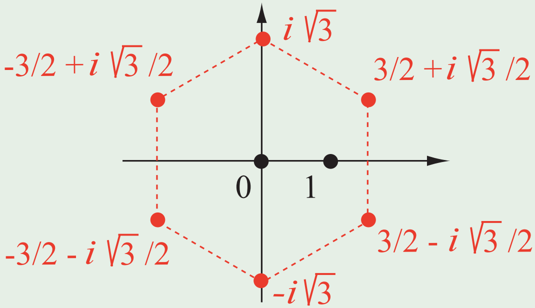
Feladat

$\sqrt[6]{-27} =$? (a komplex számok testében)

Megoldás ($u := \sqrt[6]{-27} = ?$)

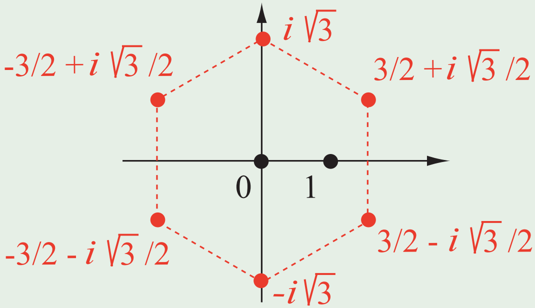
$|z| = |-27| = 27$, ezért $|u| = \sqrt{3}$. Mivel z argumentuma π, ezért az egyik 6-odik gyöknek (azaz u_0-nak) az argumentuma $\pi/6$. Így $u_0 = \sqrt{3}\,(\cos\pi/6 + i\,\sin\pi/6) = \sqrt{3}(\sqrt{3}/2 + i/2) = 3/2 + i\sqrt{3}/2$.

A folyatatás többféle lehet: u_0-at beszorozzuk a hatodik egységgyökökkel, alkalmazzuk az $\sqrt[n]{}$-re vonatkozó tételt vagy az ábra szimmetriáit: Tehát $\sqrt[6]{-27}$ értékei az alábbiak:



Megoldás ($u := \sqrt[6]{-27} = ?$)

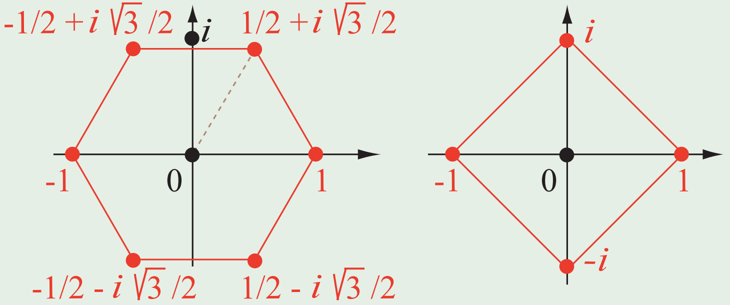
$|z| = |-27| = 27$, ezért $|u| = \sqrt{3}$. Mivel z argumentuma π, ezért az egyik 6-odik gyöknek (azaz u_0-nak) az argumentuma $\pi/6$. Így $u_0 = \sqrt{3}\,(\cos\pi/6 + i\,\sin\pi/6) = \sqrt{3}(\sqrt{3}/2 + i/2) = 3/2 + i\sqrt{3}/2$. A folyatatás többféle lehet: u_0-at beszorozzuk a hatodik egységgyökökkel, alkalmazzuk az $\sqrt[n]{}$-re vonatkozó tételt vagy az ábra szimmetriáit: Tehát $\sqrt[6]{-27}$ értékei az alábbiak:



Feladat

Adjuk meg a hatodik primitív egységgyököket kanonikus alakban!

Megoldás

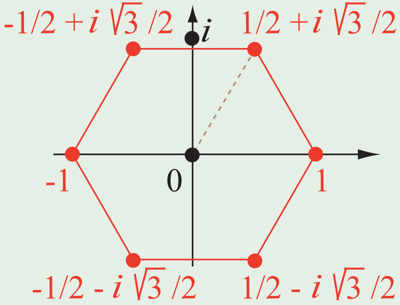


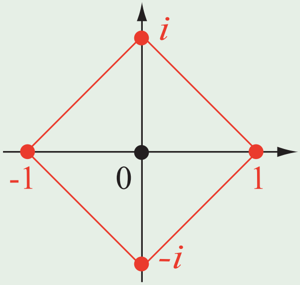
$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ és $\varepsilon_5 = \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Feladat

Adjuk meg a hatodik primitív egységgyököket kanonikus alakban!

Megoldás





$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ és $\varepsilon_5 = \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Feladat

Mutassuk meg, hogy ha egy háromszög oldalaira (kifelé) szabályos háromszögeket íruk, akkor ezen szabályos háromszögek középpontjai egy újabb szabályos háromszöget alkotnak!

Megoldás

A lényeg: legyenen $\varepsilon = \varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{6} + i\,\sin\frac{2\pi}{6} = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ (hatodik egységgyökök). Ekkor egy komplex számot az origó körül 60 fokkal pozitív irányban elforgatni annyit tesz, mint ε-nal szorozni! Hasonlóan, a 90 fokos forgatás i-vel vagy $-i$-vel való szorzás, a forgatás irányától függően.

Egy geometriai alkalmazás

Feladat

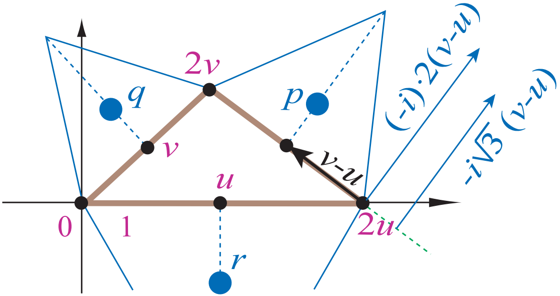
Mutassuk meg, hogy ha egy háromszög oldalaira (kifelé) szabályos háromszögeket íruk, akkor ezen szabályos háromszögek középpontjai egy újabb szabályos háromszöget alkotnak!

Megoldás

A lényeg: legyenen $\varepsilon = \varepsilon_1 = \cos\dfrac{2\pi}{6} + i\,\sin\dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{1}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (hatodik egységgyökök). Ekkor egy komplex számot az origó körül 60 fokkal pozitív irányban elforgatni annyit tesz, mint ε-nal szorozni! Hasonlóan, a 90 fokos forgatás i-vel vagy $-i$-vel való szorzás, a forgatás irányától függően.

Egy geometriai alkalmazás/ folytatás

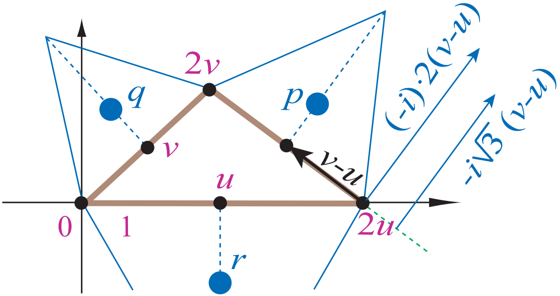
$\triangle$ csúcsai: 0, $2u$ és $2v$. Forgatások és $\sqrt{3}/2$-vel való nyújtás után kapjuk, hogy $p = 2u + (v-u) + \frac{1}{3} \cdot (-i\sqrt{3}(v-u))$.



Hasonlóan (sőt, könnyebben) tudjuk q-t és r-et kifejezni u és v kifejezéseként. Ezt követően csak azt kell belátni, hogy $\varepsilon(p-r) = q - r$, azaz hogy $\varepsilon(p-r) - q + r = 0$. A kapott kifejezéseket ide beírva (némi számolás után) minden kiesik. Q.e.d

Egy geometriai alkalmazás/ folytatás

$\triangle$ csúcsai: 0, $2u$ és $2v$. Forgatások és $\sqrt{3}/2$-vel való nyújtás után kapjuk, hogy $p = 2u + (v-u) + \frac{1}{3}\cdot(-i\sqrt{3}(v-u))$.



Hasonlóan (sőt, könnyebben) tudjuk q-t és r-et kifejezni u és v kifejezéseként. Ezt követően csak azt kell belátni, hogy $\varepsilon(p-r) = q-r$, azaz hogy $\varepsilon(p-r) - q + r = 0$. A kapott kifejezéseket ide beírva (némi számolás után) minden kiesik. Q.e.d

Négyzetgyök; (a) $\sqrt{-7-24i} = ?$, (b) $\sqrt[4]{-7-24i} = ?$

Megoldás

A trigonometrikus alakot csak közelítőleg tudnánk felírni (most nem nevezetes szög az argumentum); négyzet-, és általában 2-hatvány-gyök kiszámítására van más módszer. Előbb négyzetgyököt vonunk; annak eredményéből újabb négyzetgyököt vonva egy negyedik gyököt kapunk. Keressük $x + yi := \sqrt{-7-24i}$ -t (ahol $x, y \in \mathbb{R}$) kanonikus alakban!

Ekkor $-7-24i = (x+yi)^2 = (x^2-y^2) + 2xyi$. Mivel x, y valós, a jobboldalon a valós rész $x^2 - y^2$, a képzetes rész pedig $2xy$. Ezért (a valós és képzetes részek összehasonlításából) az alábbi egyenletrendszer adódik az x, y valós ismeretlenekre:

$$x^2 - y^2 = -7$$
$$2xy = -24.$$

Négyzetgyök; (a) $\sqrt{-7-24i}=?$, (b) $\sqrt[4]{-7-24i}=?$

Megoldás

A trigonometrikus alakot csak közelítőleg tudnánk felírni (most nem nevezetes szög az argumentum); négyzet-, és általában 2-hatvány-gyök kiszámítására van más módszer. Előbb négyzetgyököt vonunk; annak eredményéből újabb négyzetgyököt vonva egy negyedik gyököt kapunk. Keressük $x+yi := \sqrt{-7-24i}$ -t (ahol $x, y \in \mathbb{R}$) kanonikus alakban!

Ekkor $-7-24i = (x+yi)^2 = (x^2-y^2)+2xyi$. Mivel x, y valós, a jobboldalon a valós rész x^2-y^2, a képzetes rész pedig $2xy$. Ezért (a valós és képzetes részek összehasonlításából) az alábbi egyenletrendszer adódik az x, y **valós** ismeretlenekre:

$$x^2-y^2=-7$$

$$2xy=-24.$$

Megoldás

A trigonometrikus alakot csak közelítőleg tudnánk felírni (most nem nevezetes szög az argumentum); négyzet-, és általában 2-hatvány-gyök kiszámítására van más módszer. Előbb négyzetgyököt vonunk; annak eredményéből újabb négyzetgyököt vonva egy negyedik gyököt kapunk. Keressük $x+yi := \sqrt{-7-24i}$ -t (ahol $x, y \in \mathbb{R}$) kanonikus alakban!

Ekkor $-7-24i = (x+yi)^2 = (x^2-y^2)+2xyi$. Mivel x, y valós, a jobboldalon a valós rész x^2-y^2, a képzetes rész pedig $2xy$. Ezért (a valós és képzetes részek összehasonlításából) az alábbi egyenletrendszer adódik az x, y **valós** ismeretlenekre:

$$x^2-y^2=-7$$
$$2xy=-24.$$

Megoldás

Az $\{x^2 - y^2 = -7, \quad 2xy = -24\}$ egyenletrendszert a szokott módon meg tudjuk oldani. A második egyenletből $x \neq 0$, ezért $y = -12/x$, ezt az elsőbe helyettesítve $x^2 - (-12/x)^2 = -7$. Beszorozva . . . . Eredmény: négyzetgyök $= \pm(-3 + 4i)$, negyedik gyök: $\pm(1 + 2i)$, $\pm(-2 + i)$.

Megjegyzés

Negyedik gyököt (nemnulla komplex számból) úgy vonunk, hogy kétszer egymás után négyzetgyököt vonunk. Az első négyzetgyökvonásnak két értéke van, de elegendő csak az egyikből újabb négyzetgyököt vonnunk és annak is csak az egyik értékét meghatároznunk, hiszen amit kapunk, azt a negyedik egységgyökökkel beszorozva adódik mind a négy negyedik gyök. (A negyedik egységgyökök: 1, i, -1, $-i$; és ezekkel igen könnyű szorozni.)

Megoldás

Az $\{x^2 - y^2 = -7, \quad 2xy = -24\}$ egyenletrendszert a szokott módon meg tudjuk oldani. A második egyenletből $x \neq 0$, ezért $y = -12/x$, ezt az elsőbe helyettesítve $x^2 - (-12/x)^2 = -7$. Beszorozva .... Eredmény: négyzetgyök $= \pm(-3 + 4i)$, negyedik gyök: $\pm(1 + 2i)$, $\pm(-2 + i)$.

Megjegyzés

Negyedik gyököt (nemnulla komplex számból) úgy vonunk, hogy kétszer egymás után négyzetgyököt vonunk. Az első négyzetgyökvonásnak két értéke van, de elegendő csak az egyikből újabb négyzetgyököt vonnunk és annak is csak az egyik értékét meghatároznunk, hiszen amit kapunk, azt a negyedik egységgyökökkel beszorozva adódik mind a négy negyedik gyök. (A negyedik egységgyökök: 1, i, -1, $-i$; és ezekkel igen könnyű szorozni.)

Négyzetgyökvonás (folytatás

Megoldás

Az $\{x^2 - y^2 = -7, \quad 2xy = -24\}$ egyenletrendszert a szokott módon meg tudjuk oldani. A második egyenletből $x \neq 0$, ezért $y = -12/x$, ezt az elsőbe helyettesítve $x^2 - (-12/x)^2 = -7$. Beszorozva .... Eredmény: négyzetgyök $= \pm(-3 + 4i)$, negyedik gyök: $\pm(1 + 2i)$, $\pm(-2 + i)$.

Megjegyzés

Negyedik gyököt (nemnulla komplex számból) úgy vonunk, hogy kétszer egymás után négyzetgyököt vonunk. Az első négyzetgyökvonásnak két értéke van, de elegendő csak az egyikből újabb négyzetgyököt vonnunk és annak is csak az egyik értékét meghatároznunk, hiszen amit kapunk, azt a negyedik egységgyökökkel beszorozva adódik mind a négy negyedik gyök. (A negyedik egységgyökök: 1, i, -1, $-i$; és ezekkel igen könnyű szorozni.)

Gyűrű fogalma

Gyűrűn kb. ugyanazt értjük, mint testen, de nem követeljük meg, hogy a nemnulla elemeknek legyen reciproka.

Definíció

Egy $(R; +, \cdot)$ struktúrát (azaz az egyenlőségjelből, mint kétváltozós predikátumjelből, továbbá a $+$ és $\cdot$ kétváltozós függvényjelből álló elsőrendű nyelv interpretálását) **gyűrűnek** nevezzük, ha

- az összeadás kommutatív és asszociatív,
- van egy $0 \in R$ elem és minden $a \in R$-re egy $-a$ elem úgy, hogy $0 + a = a$ és $a + (-a) = 0$;
- a szorzás asszociatív;
- a szorzás disztributív az összedásra nézve, azaz bármely $z, u, w \in R$-re $z(u + v) = zu + zv$ és $(u + v)z = uz + vz$.

Gyűrű fogalma

Gyűrűn kb. ugyanazt értjük, mint testen, de nem követeljük meg, hogy a nemnulla elemeknek legyen reciproka.

Definíció

Egy $(R; +, \cdot)$ struktúrát (azaz az egyenlőségjelből, mint kétváltozós predikátumjelből, továbbá a $+$ és $\cdot$ kétváltozós függvényjelből álló elsőrendű nyelv interpretálását) **gyűrűnek** nevezzük, ha

- az összeadás kommutatív és asszociatív,
- van egy $0 \in R$ elem és minden $a \in R$-re egy $-a$ elem úgy, hogy $0 + a = a$ és $a + (-a) = 0$;
- a szorzás asszociatív;
- a szorzás disztributív az összedásra nézve, azaz bármely $z, u, w \in R$-re $z(u + v) = zu + zv$ és $(u + v)z = uz + vz$.

Gyűrű fogalma

Gyűrűn kb. ugyanazt értjük, mint testen, de nem követeljük meg, hogy a nemnulla elemeknek legyen reciproka.

Definíció

Egy $(R;+,\cdot)$ struktúrát (azaz az egyenlőségjelből, mint kétváltozós predikátumjelből, továbbá a $+$ és $\cdot$ kétváltozós függvényjelből álló elsőrendű nyelv interpretálását) **gyűrűnek** nevezzük, ha

- az összeadás kommutatív és asszociatív,
- van egy $0 \in R$ elem és minden $a \in R$-re egy $-a$ elem úgy, hogy $0 + a = a$ és $a + (-a) = 0$;
- a szorzás asszociatív;
- a szorzás disztributív az összedásra nézve, azaz bármely $z, u, w \in R$-re $z(u + v) = zu + zv$ és $(u + v)z = uz + vz$.

Gyűrű fogalma

Gyűrűn kb. ugyanazt értjük, mint testen, de nem követeljük meg, hogy a nemnulla elemeknek legyen reciproka.

Definíció

Egy $(R; +, \cdot)$ struktúrát (azaz az egyenlőségjelből, mint kétváltozós predikátumjelből, továbbá a $+$ és $\cdot$ kétváltozós függvényjelből álló elsőrendű nyelv interpretálását) **gyűrűnek** nevezzük, ha

- az összeadás kommutatív és asszociatív,
- van egy $0 \in R$ elem és minden $a \in R$-re egy $-a$ elem úgy, hogy $0 + a = a$ és $a + (-a) = 0$;
- a szorzás asszociatív;
- a szorzás disztributív az összedásra nézve, azaz bármely $z, u, w \in R$-re $z(u + v) = zu + zv$ és $(u + v)z = uz + vz$.

Gyűrű fogalma

Gyűrűn kb. ugyanazt értjük, mint testen, de nem követeljük meg, hogy a nemnulla elemeknek legyen reciproka.

Definíció

Egy $(R; +, \cdot)$ struktúrát (azaz az egyenlőségjelből, mint kétváltozós predikátumjelből, továbbá a $+$ és $\cdot$ kétváltozós függvényjelből álló elsőrendű nyelv interpretálását) **gyűrűnek** nevezzük, ha

- az összeadás kommutatív és asszociatív,
- van egy $0 \in R$ elem és minden $a \in R$-re egy $-a$ elem úgy, hogy $0 + a = a$ és $a + (-a) = 0$;
- a szorzás asszociatív;
- a szorzás disztributív az összedásra nézve, azaz bármely $z, u, w \in R$-re $z(u + v) = zu + zv$ és $(u + v)z = uz + vz$.

Gyűrű fogalma

Gyűrűn kb. ugyanazt értjük, mint testen, de nem követeljük meg, hogy a nemnulla elemeknek legyen reciproka.

Definíció

Egy $(R; +, \cdot)$ struktúrát (azaz az egyenlőségjelből, mint kétváltozós predikátumjelből, továbbá a $+$ és $\cdot$ kétváltozós függvényjelből álló elsőrendű nyelv interpretálását) **gyűrűnek** nevezzük, ha

- az összeadás kommutatív és asszociatív,
- van egy $0 \in R$ elem és minden $a \in R$-re egy $-a$ elem úgy, hogy $0 + a = a$ és $a + (-a) = 0$;
- a szorzás asszociatív;
- a szorzás disztributív az összedásra nézve, azaz bármely $z, u, w \in R$-re $z(u + v) = zu + zv$ **és** $(u + v)z = uz + vz$.

Példák gyűrűkre

Példa (Példák gyűrűkre)

Minden test gyűrű, tehát pl. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ is gyűrű. Gyűrű továbbá $\mathbb{Z}$ (az egész számok gyűrűje). qpp Tetszőleges A halmazra az A hatványhalmaza is gyűrű, ha összegen a szimmetrikus differenciát, szorzaton a metszetet, nullán az üreshalmazt értjük. Hamarosan további példák is lesznek.

Példa (Példák gyűrűkre)

Minden test gyűrű, tehát pl. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ is gyűrű. Gyűrű továbbá $\mathbb{Z}$ (az egész számok gyűrűje). qpp Tetszőleges A halmazra az A hatványhalmaza is gyűrű, ha összegen a szimmetrikus differenciát, szorzaton a metszetet, nullán az üreshalmazt értjük. Hamarosan további példák is lesznek.

Néhány gyűrűtulajdonság

Definition (Egy R gyűrű néhány lehetséges tulajdonsága)

- Ha a *szorzás* kommutatív, akkor **kommutatív gyűrűről** beszélünk.
- Ha van olyan, rendszerint 1-gyel jelölt elem R-ben, hogy bármely $a \in R$-re $1a = a1 = a$, akkor **egységelemes gyűrűről** beszélünk.
- Ha bármely $a, b \in R$ esetén $ab = 0$-ból $0 \in \{a, b\}$ következik, akkor **zérusosztómentes gyűrűről** beszélünk.
- Egy gyűrűt **integritástartománynak** nevezünk, ha kommutatív, egységelemes és zérusosztómentes.

Példáink közül a testek integritástartományok. $\mathbb{Z}$ is integritástartomány. De $|A| \geq 2$ esetén $P(A)$ nem integritástartomány: egységelemes (A az egységeleme), kommutatív, de nem zérusosztómentes (hiszen két nemüres diszjunkt részhalmaz metszete az üreshalmaz).

Néhány gyűrűtulajdonság

Definition (Egy R gyűrű néhány lehetséges tulajdonsága)

- Ha a *szorzás* kommutatív, akkor **kommutatív gyűrűről** beszélünk.
- Ha van olyan, rendszerint 1-gyel jelölt elem R-ben, hogy bármely $a \in R$-re $1a = a1 = a$, akkor **egységelemes gyűrűről** beszélünk.
- Ha bármely $a, b \in R$ esetén $ab = 0$-ból $0 \in \{a, b\}$ következik, akkor **zérusosztómentes gyűrűről** beszélünk.
- Egy gyűrűt **integritástartománynak** nevezünk, ha kommutatív, egységelemes és zérusosztómentes.

Példáink közül a testek integritástartományok. $\mathbb{Z}$ is integritástartomány. De $|A| \geq 2$ esetén $P(A)$ nem integritástartomány: egységelemes (A az egységeleme), kommutatív, de nem zérusosztómentes (hiszen két nemüres diszjunkt részhalmaz metszete az üreshalmaz).

Néhány gyűrűtulajdonság

Definition (Egy R gyűrű néhány lehetséges tulajdonsága)

- Ha a *szorzás* kommutatív, akkor **kommutatív gyűrűről** beszélünk.
- Ha van olyan, rendszerint 1-gyel jelölt elem R-ben, hogy bármely $a \in R$-re $1a = a1 = a$, akkor **egységelemes gyűrűről** beszélünk.
- Ha bármely $a, b \in R$ esetén $ab = 0$-ból $0 \in \{a, b\}$ következik, akkor **zérusosztómentes gyűrűről** beszélünk.
- Egy gyűrűt **integritástartománynak** nevezünk, ha kommutatív, egységelemes és zérusosztómentes.

Példáink közül a testek integritástartományok. $\mathbb{Z}$ is integritástartomány. De $|A| \geq 2$ esetén $P(A)$ nem integritástartomány: egységelemes (A az egységeleme), kommutatív, de nem zérusosztómentes (hiszen két nemüres diszjunkt részhalmaz metszete az üreshalmaz).

Néhány gyűrűtulajdonság

Definition (Egy R gyűrű néhány lehetséges tulajdonsága)

- Ha a *szorzás* kommutatív, akkor **kommutatív gyűrűről** beszélünk.
- Ha van olyan, rendszerint 1-gyel jelölt elem R-ben, hogy bármely $a \in R$-re $1a = a1 = a$, akkor **egységelemes gyűrűről** beszélünk.
- Ha bármely $a, b \in R$ esetén $ab = 0$-ból $0 \in \{a, b\}$ következik, akkor **zérusosztómentes gyűrűről** beszélünk.
- Egy gyűrűt **integritástartománynak** nevezünk, ha kommutatív, egységelemes és zérusosztómentes.

Példáink közül a testek integritástartományok. $\mathbb{Z}$ is integritástartomány. De $|A| \geq 2$ esetén $P(A)$ nem integritástartomány: egységelemes (A az egységeleme), kommutatív, de nem zérusosztómentes (hiszen két nemüres diszjunkt részhalmaz metszete az üreshalmaz).

Néhány gyűrűtulajdonság

Definition (Egy R gyűrű néhány lehetséges tulajdonsága)

- Ha a *szorzás* kommutatív, akkor **kommutatív gyűrűről** beszélünk.
- Ha van olyan, rendszerint 1-gyel jelölt elem R-ben, hogy bármely $a \in R$-re $1a = a1 = a$, akkor **egységelemes gyűrűről** beszélünk.
- Ha bármely $a, b \in R$ esetén $ab = 0$-ból $0 \in \{a, b\}$ következik, akkor **zérusosztómentes gyűrűről** beszélünk.
- Egy gyűrűt **integritástartománynak** nevezünk, ha kommutatív, egységelemes és zérusosztómentes.

Példáink közül a testek integritástartományok. $\mathbb{Z}$ is integritástartomány. De $|A| \geq 2$ esetén $P(A)$ nem integritástartomány: egységelemes (A az egységeleme), kommutatív, de nem zérusosztómentes (hiszen két nemüres diszjunkt részhalmaz metszete az üreshalmaz).

Néhány gyűrűtulajdonság

Definition (Egy R gyűrű néhány lehetséges tulajdonsága)

- Ha a *szorzás* kommutatív, akkor **kommutatív gyűrűről** beszélünk.
- Ha van olyan, rendszerint 1-gyel jelölt elem R-ben, hogy bármely $a \in R$-re $1a = a1 = a$, akkor **egységelemes gyűrűről** beszélünk.
- Ha bármely $a, b \in R$ esetén $ab = 0$-ból $0 \in \{a, b\}$ következik, akkor **zérusosztómentes gyűrűről** beszélünk.
- Egy gyűrűt **integritástartománynak** nevezünk, ha kommutatív, egységelemes és zérusosztómentes.

Példáink közül a testek integritástartományok. $\mathbb{Z}$ is integritástartomány. De $|A| \geq 2$ esetén $P(A)$ nem integritástartomány: egységelemes (A az egységeleme), kommutatív, de nem zérusosztómentes (hiszen két nemüres diszjunkt részhalmaz metszete az üreshalmaz).

Néhány gyűrűtulajdonság

Definition (Egy R gyűrű néhány lehetséges tulajdonsága)

- Ha a *szorzás* kommutatív, akkor **kommutatív gyűrűről** beszélünk.
- Ha van olyan, rendszerint 1-gyel jelölt elem R-ben, hogy bármely $a \in R$-re $1a = a1 = a$, akkor **egységelemes gyűrűről** beszélünk.
- Ha bármely $a, b \in R$ esetén $ab = 0$-ból $0 \in \{a, b\}$ következik, akkor **zérusosztómentes gyűrűről** beszélünk.
- Egy gyűrűt **integritástartománynak** nevezünk, ha kommutatív, egységelemes és zérusosztómentes.

Példáink közül a testek integritástartományok. $\mathbb{Z}$ is integritástartomány. De $|A| \geq 2$ esetén $P(A)$ nem integritástartomány: egységelemes (A az egységeleme), kommutatív, de nem zérusosztómentes (hiszen két nemüres diszjunkt részhalmaz metszete az üreshalmaz).

Néhány gyűrűtulajdonság

Definition (Egy R gyűrű néhány lehetséges tulajdonsága)

- Ha a *szorzás* kommutatív, akkor **kommutatív gyűrűről** beszélünk.
- Ha van olyan, rendszerint 1-gyel jelölt elem R-ben, hogy bármely $a \in R$-re $1a = a1 = a$, akkor **egységelemes gyűrűről** beszélünk.
- Ha bármely $a, b \in R$ esetén $ab = 0$-ból $0 \in \{a, b\}$ következik, akkor **zérusosztómentes gyűrűről** beszélünk.
- Egy gyűrűt **integritástartománynak** nevezünk, ha kommutatív, egységelemes és zérusosztómentes.

Példáink közül a testek integritástartományok. $\mathbb{Z}$ is integritástartomány. De $|A| \geq 2$ esetén $P(A)$ nem integritástartomány: egységelemes (A az egységeleme), kommutatív, de nem zérusosztómentes (hiszen két nemüres diszjunkt részhalmaz metszete az üreshalmaz).

Definition (Egy R gyűrű néhány lehetséges tulajdonsága)

- Ha a *szorzás* kommutatív, akkor **kommutatív gyűrűről** beszélünk.
- Ha van olyan, rendszerint 1-gyel jelölt elem R-ben, hogy bármely $a \in R$-re $1a = a1 = a$, akkor **egységelemes gyűrűről** beszélünk.
- Ha bármely $a, b \in R$ esetén $ab = 0$-ból $0 \in \{a, b\}$ következik, akkor **zérusosztómentes gyűrűről** beszélünk.
- Egy gyűrűt **integritástartománynak** nevezünk, ha kommutatív, egységelemes és zérusosztómentes.

Példáink közül a testek integritástartományok. $\mathbb{Z}$ is integritástartomány. De $|A| \geq 2$ esetén $P(A)$ nem integritástartomány: egységelemes (A az egységeleme), kommutatív, de nem zérusosztómentes (hiszen két nemüres diszjunkt részhalmaz metszete az üreshalmaz).

Definition (Egy R gyűrű néhány lehetséges tulajdonsága)

- Ha a *szorzás* kommutatív, akkor **kommutatív gyűrűről** beszélünk.
- Ha van olyan, rendszerint 1-gyel jelölt elem R-ben, hogy bármely $a \in R$-re $1a = a1 = a$, akkor **egységelemes gyűrűről** beszélünk.
- Ha bármely $a, b \in R$ esetén $ab = 0$-ból $0 \in \{a, b\}$ következik, akkor **zérusosztómentes gyűrűről** beszélünk.
- Egy gyűrűt **integritástartománynak** nevezünk, ha kommutatív, egységelemes és zérusosztómentes.

Példáink közül a testek integritástartományok. $\mathbb{Z}$ is integritástartomány. De $|A| \geq 2$ esetén $P(A)$ nem integritástartomány: egységelemes (A az egységeleme), kommutatív, de nem zérusosztómentes (hiszen két nemüres diszjunkt részhalmaz metszete az üreshalmaz).

Néhány gyűrűtulajdonság

Definition (Egy R gyűrű néhány lehetséges tulajdonsága)

- Ha a *szorzás* kommutatív, akkor **kommutatív gyűrűről** beszélünk.
- Ha van olyan, rendszerint 1-gyel jelölt elem R-ben, hogy bármely $a \in R$-re $1a = a1 = a$, akkor **egységelemes gyűrűről** beszélünk.
- Ha bármely $a, b \in R$ esetén $ab = 0$-ból $0 \in \{a, b\}$ következik, akkor **zérusosztómentes gyűrűről** beszélünk.
- Egy gyűrűt **integritástartománynak** nevezünk, ha kommutatív, egységelemes és zérusosztómentes.

Példáink közül a testek integritástartományok. $\mathbb{Z}$ is integritástartomány. De $|A| \geq 2$ esetén $P(A)$ nem integritástartomány: egységelemes (A az egységeleme), kommutatív, de nem zérusosztómentes (hiszen két nemüres diszjunkt részhalmaz metszete az üreshalmaz).

Az integritástartományok jelentik azt a természetes közeget, ahol oszathatósági kérdésekről érdemes beszélni.

Definíció (Oszthatóság)

Legyen $a, b \in R$, ahol R integritástartomány. Akkor mondjuk, hogy a osztja b-t R-ben, ha van olyan $c \in R$, hogy $ac = b$. Ezt a tényt $a \mid b$ jelöli.

Megjegyzés

Az $a \mid b$-nek (és az oszthatóságnak) csak akkor van értelme, ha már megmondtuk, hogy melyik integritástartományban vagyunk! Pl. a 3 nem osztja az 5-öt a $\mathbb{Z}$-ben, de osztja a $\mathbb{Q}$-ban.

Az integritástartományok jelentik azt a természetes közeget, ahol oszathatósági kérdésekről érdemes beszélni.

Definíció (Oszthatóság)

Legyen $a, b \in R$, ahol R integritástartomány. Akkor mondjuk, hogy a osztja b-t R-ben, ha van olyan $c \in R$, hogy $ac = b$. Ezt a tényt $a \mid b$ jelöli.

Megjegyzés

Az $a \mid b$-nek (és az oszthatóságnak) csak akkor van értelme, ha már megmondtuk, hogy melyik integritástartományban vagyunk! Pl. a 3 nem osztja az 5-öt a $\mathbb{Z}$-ben, de osztja a $\mathbb{Q}$-ban.

Polinom fogalma

Definíció

Ha D egy integritástartomány, akkor D fölötti *polinomon* egy

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \qquad (*)$$

alakú összeget értünk, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_n \in D$ (ezeket a polinom együtthatóinak nevezik), x egy határozatlant jelöl, és vagy $a_n \neq 0$, vagy az üres összegről van szó (amikor $n = 0 = a_0$; ez a *nullapolinom*) Ha $a_n \neq 0$ (azaz, a 0-val jelölt nullapolinom kivételével minden esetben), akkor n-t a polinom *fokszámának* nevezzük; a nullapolinomnak nem tulajdonítunk fokszámot. Két polinomot akkor tekintünk egyenlőnek, ha fokszámuk azonos és az egyes x-hatványok együtthatói is megegyeznek.

Egyes források a nullapolinomnak is tulajdonítanak fokszámot, a $-\infty$ -t (minusz végtelent).

Polinom fogalma

Definíció

Ha D egy integritástartomány, akkor D fölötti *polinomon* egy

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \qquad (*)$$

alakú összeget értünk, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_n \in D$ (ezeket a polinom együtthatóinak nevezik), x egy határozatlant jelöl, és vagy $a_n \neq 0$, vagy az üres összegről van szó (amikor $n = 0 = a_0$; ez a *nullapolinom*) Ha $a_n \neq 0$ (azaz, a 0-val jelölt nullapolinom kivételével minden esetben), akkor n-t a polinom *fokszámának* nevezzük; a nullapolinomnak nem tulajdonítunk fokszámot. Két polinomot akkor tekintünk egyenlőnek, ha fokszámuk azonos és az egyes x-hatványok együtthatói is megegyeznek.

Egyes források a nullapolinomnak is tulajdonítanak fokszámot, a $-\infty$ -t (minusz végtelent).

Főpolinom

Ha még precízebben akarnánk fogalmazni, akkor azt mondanánk, hogy egy nemnulla polinom nem más, mint egy $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0) \in D^{n+1} \setminus \{0, 0, \dots, 0\}$, továbbá a 0.

Megjegyzés

Megállapodás szerint az 1 együtthatót nem írjuk ki, és a 0-együtthatós tagokat elhagyjuk a felírásban. Az a_n neve: *főegyüttható*; ha ez 1, akkor *főpolinomról* beszélünk. Például az $f = f(x) = x^3 + 2x + 1$ és a $g = 2x^2 - 3x + 4$ polinomok az egész számok gyűrűje felett (és egyúttal pl. $\mathbb{Q}$ vagy $\mathbb{C}$ felett is). f egy harmadfokú főpolinom. g másodfokú (de nem főpolinom).

Az analízisben (kalkulusban) a polinom függvény (azaz leképezés), amelyet ábrázolnak, differenciálnak, integrálnak, stb. A mi számunkra azonban a polinom **NEM** függvény, nem leképezés, hanem **formális jelsorozat**. Mi x-et nem változónak, hanem határozatlannak nevezzük. (x helyett mást is használhatnánk.)

Főpolinom

Ha még precízebben akarnánk fogalmazni, akkor azt mondanánk, hogy egy nemnulla polinom nem más, mint egy $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0) \in D^{n+1} \setminus \{0, 0, \ldots, 0\}$, továbbá a 0.

Megjegyzés

Megállapodás szerint az 1 együtthatót nem írjuk ki, és a 0-együtthatós tagokat elhagyjuk a felírásban. Az a_n neve: *főegyüttható*; ha ez 1, akkor *főpolinomról* beszélünk. Például az $f = f(x) = x^3 + 2x + 1$ és a $g = 2x^2 - 3x + 4$ polinomok az egész számok gyűrűje felett (és egyúttal pl. $\mathbb{Q}$ vagy $\mathbb{C}$ felett is). f egy harmadfokú főpolinom. g másodfokú (de nem főpolinom).

Az analízisben (kalkulusban) a polinom függvény (azaz leképezés), amelyet ábrázolnak, differenciálnak, integrálnak, stb. A mi számunkra azonban a polinom **NEM** függvény, nem leképezés, hanem **formális jelsorozat**. Mi x-et nem változónak, hanem határozatlannak nevezzük. (x helyett mást is használhatnánk.)

Definíció

Értelemszerűen definiálható két polinom összege és szorzata; a formális definíció helyett ezt egy példán illusztráljuk: legyen $f = x^3 + 2x - 3$, $g = 2x^2 + 3x - 4$. Ekkor
$f + g = x^3 + 2x^2 + 5x - 7$ és

$$fg = 2x^5 + 3x^4 + (-4 + 2\cdot 2)x^3 + (2\cdot 3 - 3\cdot 2)x^2 + (-3\cdot 3 - 2\cdot 4)x + 12,$$

azaz $fg = 2x^5 + 3x^4 - 17x + 12$. (Tehát mint több tagok több taggal szorozzuk a két polinomot, majd amiket össze lehet vonni, azokat összevonjuk.)

Polinomok összege és szorzata

Definíció

Értelemszerűen definiálható két polinom összege és szorzata; a formális definíció helyett ezt egy példán illusztráljuk: legyen $f = x^3 + 2x - 3$, $g = 2x^2 + 3x - 4$. Ekkor

$f + g = x^3 + 2x^2 + 5x - 7$ és

$$fg = 2x^5 + 3x^4 + (-4 + 2\cdot 2)x^3 + (2\cdot 3 - 3\cdot 2)x^2 + (-3\cdot 3 - 2\cdot 4)x + 12,$$

azaz $fg = 2x^5 + 3x^4 - 17x + 12$. (Tehát mint több tagok több taggal szorozzuk a két polinomot, majd amiket össze lehet vonni, azokat összevonjuk.)

Polinomok összege és szorzata

Definíció

Értelemszerűen definiálható két polinom összege és szorzata; a formális definíció helyett ezt egy példán illusztráljuk: legyen $f = x^3 + 2x - 3$, $g = 2x^2 + 3x - 4$. Ekkor $f + g = x^3 + 2x^2 + 5x - 7$ és

$$fg = 2x^5 + 3x^4 + (-4 + 2\cdot 2)x^3 + (2\cdot 3 - 3\cdot 2)x^2 + (-3\cdot 3 - 2\cdot 4)x + 12,$$

azaz $fg = 2x^5 + 3x^4 - 17x + 12$. (Tehát mint több tagok több taggal szorozzuk a két polinomot, majd amiket össze lehet vonni, azokat összevonjuk.)

Definíció

Értelemszerűen definiálható két polinom összege és szorzata; a formális definíció helyett ezt egy példán illusztráljuk: legyen $f = x^3 + 2x - 3$, $g = 2x^2 + 3x - 4$. Ekkor $f + g = x^3 + 2x^2 + 5x - 7$ és

$$fg = 2x^5 + 3x^4 + (-4+2\cdot 2)x^3 + (2\cdot 3 - 3\cdot 2)x^2 + (-3\cdot 3 - 2\cdot 4)x + 12,$$

azaz $fg = 2x^5 + 3x^4 - 17x + 12$. (Tehát mint több tagok több taggal szorozzuk a két polinomot, majd amiket össze lehet vonni, azokat összevonjuk.)

Definíció

Értelemszerűen definiálható két polinom összege és szorzata; a formális definíció helyett ezt egy példán illusztráljuk: legyen $f = x^3 + 2x - 3$, $g = 2x^2 + 3x - 4$. Ekkor $f + g = x^3 + 2x^2 + 5x - 7$ és

$$fg = 2x^5 + 3x^4 + (-4 + 2\cdot 2)x^3 + (2\cdot 3 - 3\cdot 2)x^2 + (-3\cdot 3 - 2\cdot 4)x + 12,$$

azaz $fg = 2x^5 + 3x^4 - 17x + 12$. (Tehát mint több tagok több taggal szorozzuk a két polinomot, majd amiket össze lehet vonni, azokat összevonjuk.)

Polinomok összege és szorzata

Definíció

Értelemszerűen definiálható két polinom összege és szorzata; a formális definíció helyett ezt egy példán illusztráljuk: legyen $f = x^3 + 2x - 3$, $g = 2x^2 + 3x - 4$. Ekkor $f + g = x^3 + 2x^2 + 5x - 7$ és

$$fg = 2x^5 + 3x^4 + (-4 + 2\cdot 2)x^3 + (2\cdot 3 - 3\cdot 2)x^2 + (-3\cdot 3 - 2\cdot 4)x + 12,$$

azaz $fg = 2x^5 + 3x^4 - 17x + 12$. (Tehát mint több tagok több taggal szorozzuk a két polinomot, majd amiket össze lehet vonni, azokat összevonjuk.)

Polinomok összege és szorzata

Definíció

Értelemszerűen definiálható két polinom összege és szorzata; a formális definíció helyett ezt egy példán illusztráljuk: legyen $f = x^3 + 2x - 3$, $g = 2x^2 + 3x - 4$. Ekkor $f + g = x^3 + 2x^2 + 5x - 7$ és

$$fg = 2x^5 + 3x^4 + (-4 + 2\cdot 2)x^3 + (2\cdot 3 - 3\cdot 2)x^2 + (-3\cdot 3 - 2\cdot 4)x + 12,$$

azaz $fg = 2x^5 + 3x^4 - 17x + 12$. (Tehát mint több tagok több taggal szorozzuk a két polinomot, majd amiket össze lehet vonni, azokat összevonjuk.)

Polinomok összege és szorzata

Definíció

Értelemszerűen definiálható két polinom összege és szorzata; a formális definíció helyett ezt egy példán illusztráljuk: legyen $f = x^3 + 2x - 3$, $g = 2x^2 + 3x - 4$. Ekkor $f + g = x^3 + 2x^2 + 5x - 7$ és

$$fg = 2x^5 + 3x^4 + (-4 + 2\cdot 2)x^3 + (2\cdot 3 - 3\cdot 2)x^2 + (-3\cdot 3 - 2\cdot 4)x + 12,$$

azaz $fg = 2x^5 + 3x^4 - 17x + 12$. (Tehát mint több tagok több taggal szorozzuk a két polinomot, majd amiket össze lehet vonni, azokat összevonjuk.)

Polinomok összege és szorzata

Definíció

Értelemszerűen definiálható két polinom összege és szorzata; a formális definíció helyett ezt egy példán illusztráljuk: legyen $f = x^3 + 2x - 3$, $g = 2x^2 + 3x - 4$. Ekkor $f + g = x^3 + 2x^2 + 5x - 7$ és

$$fg = 2x^5 + 3x^4 + (-4 + 2 \cdot 2)x^3 + (2 \cdot 3 - 3 \cdot 2)x^2 + (-3 \cdot 3 - 2 \cdot 4)x + 12,$$

azaz $fg = 2x^5 + 3x^4 - 17x + 12$. (Tehát mint több tagok több taggal szorozzuk a két polinomot, majd amiket össze lehet vonni, azokat összevonjuk.)

Definíció

Értelemszerűen definiálható két polinom összege és szorzata; a formális definíció helyett ezt egy példán illusztráljuk: legyen $f = x^3 + 2x - 3$, $g = 2x^2 + 3x - 4$. Ekkor $f + g = x^3 + 2x^2 + 5x - 7$ és

$$fg = 2x^5 + 3x^4 + (-4 + 2 \cdot 2)x^3 + (2 \cdot 3 - 3 \cdot 2)x^2 + (-3 \cdot 3 - 2 \cdot 4)x + 12,$$

azaz $fg = 2x^5 + 3x^4 - 17x + 12$. (Tehát mint több tagok több taggal szorozzuk a két polinomot, majd amiket össze lehet vonni, azokat összevonjuk.)

A $D[x]$ polinomgyűrű is integritástartomány

Definíció

Jelölje $D[x]$ a D integritástartomány feletti polinomok halmazát, amelyen a fent definiált $+$ és $\cdot$ műveleteket tekintjük (azaz a $(D[x]; +, \cdot)$ struktúrát tekintjük). $D[x]$ a D feletti (egyhatározatlanú) *polinomgyűrűnek* nevezzük.

Theorem

Ha D integritástartomány, akkor $D[x]$ is az.

Megjegyzés

Értelemszerűn definiálhatnánk az n-határozatlanú D feletti polinomok $D[x_1, \ldots, x_n]$ gyűrűjét — a határozatlanokat persze máshogy is jelölhetjük. Pl. $xy^3 - 3x^2 + y - 1 \in D[x, y]$. A fenti tétel ekkor is érvényben marad: *Ha D integritástartomány, akkor $D[x_1, \ldots, x_n]$ is az.*

A $D[x]$ polinomgyűrű is integritástartomány

Definíció

Jelölje $D[x]$ a D integritástartomány feletti polinomok halmazát, amelyen a fent definiált $+$ és $\cdot$ műveleteket tekintjük (azaz a $(D[x]; +, \cdot)$ struktúrát tekintjük). $D[x]$ a D feletti (egyhatározatlanú) *polinomgyűrűnek* nevezzük.

Theorem

Ha D integritástartomány, akkor $D[x]$ is az.

Megjegyzés

Értelemszerűn definiálhatnánk az n-határozatlanú D feletti polinomok $D[x_1, \dots, x_n]$ gyűrűjét — a határozatlanokat persze máshogy is jelölhetjük. Pl. $xy^3 - 3x^2 + y - 1 \in D[x, y]$. A fenti tétel ekkor is érvényben marad: *Ha D integritástartomány, akkor $D[x_1, \dots, x_n]$ is az.*

Maradékos osztás

$\mathbb{N}$-ben jól ismert a maradékos osztás, pl. 20-ban a 7 megvan 2-szer és marad a 6; ezt így szokás felírni: $20 = 7 \cdot 2 + 6$. Itt 20 az osztandó, 7 az osztó, 2 a hányados és 6 a maradék. Ezt általánosítja az alábbi tétel.

Tétel

Ha T test, akkor bármely $f, g \in T[x]$ esetén ha $g \neq 0$, akkor létezik olyan $q, r \in T[x]$, hogy

$$f = gq + r \qquad \text{és } r \text{ foka } < g \text{ foka.}$$

A tételbeli f, g, q, r neve rendre osztandó, osztó, hányados és maradék. A q hányados és az r maradék megkeresését **maradékos osztának** nevezzük.

Maradékos osztás

$\mathbb{N}$-ben jól ismert a maradékos osztás, pl. 20-ban a 7 megvan 2-szer és marad a 6; ezt így szokás felírni: $20 = 7 \cdot 2 + 6$. Itt 20 az osztandó, 7 az osztó, 2 a hányados és 6 a maradék. Ezt általánosítja az alábbi tétel.

Tétel

Ha T test, akkor bármely $f, g \in T[x]$ esetén ha $g \neq 0$, akkor létezik olyan $q, r \in T[x]$, hogy

$$f = gq + r \qquad \textit{és } r \textit{ foka } < g \textit{ foka.}$$

A tételbeli f, g, q, r neve rendre osztandó, osztó, hányados és maradék. A q hányados és az r maradék megkeresését **maradékos osztának** nevezzük.

$\mathbb{N}$-ben jól ismert a maradékos osztás, pl. 20-ban a 7 megvan 2-szer és marad a 6; ezt így szokás felírni: $20 = 7 \cdot 2 + 6$. Itt 20 az osztandó, 7 az osztó, 2 a hányados és 6 a maradék. Ezt általánosítja az alábbi tétel.

Tétel

Ha T test, akkor bármely $f, g \in T[x]$ esetén ha $g \neq 0$, akkor létezik olyan $q, r \in T[x]$, hogy

$$f = gq + r \qquad \textit{és } r \textit{ foka } < g \textit{ foka}.$$

A tételbeli f, g, q, r neve rendre osztandó, osztó, hányados és maradék. A q hányados és az r maradék megkeresését **maradékos osztásnak** nevezzük.

A teljes indukciós bizonyítás helyett ismerkedjünk meg a polinomosztás algoritmusával. (Az már szinte csak technikai kérdés, hogyan lenne az algoritmusból bizonyítás.)
Először két egész számot osztunk el maradékosan (úgy, ahogy egy kezdő, aki a hányados friss számjegyével visszaszoroz és le is írja a szorzatot, majd utána vonja ki). Legyen a feladatunk $2467 : 11$.

Maradékos osztás/2

A teljes indukciós bizonyítás helyett ismerkedjünk meg a polinomosztás algoritmusával. (Az már szinte csak technikai kérdés, hogyan lenne az algoritmusból bizonyítás.)
Először két egész számot osztunk el maradékosan (úgy, ahogy egy kezdő, aki a hányados friss számjegyével visszaszoroz és le is írja a szorzatot, majd utána vonja ki). Legyen a feladatunk $2467 : 11$.

2467 : 11

$$2 \quad 4 \quad 6 \quad 7 : 1 \quad 1 =$$

2467 : 11

$$2 \quad 4 \quad 6 \quad 7 : 1 \quad 1 = 2$$

$$\begin{array}{llllllll} 2 & 4 & 6 & 7 : 1 & 1 & = 2 \\ 2 & 2 & & & & \end{array}$$

2467 : 11

$$
\begin{array}{rrrr}
 2 & 4 & 6 & 7 : 11 = 2 \\
- 2 & 2 & & \\
\hline
 & 2 & &
\end{array}
$$

2467 : 11

$$
\begin{array}{rrrrl}
2 & 4 & 6 & 7 & : 11 = 22 \\
-2 & 2 & & & \\
\hline
 & 2 & 6 & & \\
 & -2 & 2 & & \\
\cline{2-4}
 & & 4 & 7 &
\end{array}
$$

2467 : 11; ezzel kész; 224 a hányados, 3 a maradék

$$
\begin{array}{rrrrl}
2 & 4 & 6 & 7 & : 11 = 224 \\
-2 & 2 & & & \\
\hline
& 2 & 6 & & \\
& -2 & 2 & & \\
\hline
& & 4 & 7 & \\
& & -4 & 4 & \\
\hline
& & & 3 &
\end{array}
$$

Most írjuk le az előző számolást úgy is, hogy figyelembe vesszük, hogy mit jelent a tizes számrendszer.

$(2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 7) : (1 \cdot 10 + 1)$

$$(2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 7) : (1 \cdot 10 + 1) =$$

$$(2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 7) : (1 \cdot 10 + 1) = 2 \cdot 10^2$$

$$(2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 7) : (1 \cdot 10 + 1) = 2 \cdot 10^2$$
$$2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2$$

$(2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 7) : (1 \cdot 10 + 1)$

$$
\begin{array}{l}
(2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 7) : (1 \cdot 10 + 1) = 2 \cdot 10^2 \\
\underline{-(2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2)} \\
\qquad\qquad\quad 2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 7
\end{array}
$$

$(2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 7) : (1 \cdot 10 + 1)$

$$
\begin{array}{l}
(2\cdot 10^3 + 4\cdot 10^2 + 6\cdot 10 + 7) : (1\cdot 10 + 1) = 2\cdot 10^2 + 2\cdot 10 \\
\underline{-\,(2\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2)} \\
\qquad\qquad 2\cdot 10^2 + 6\cdot 10 + 7 \\
\qquad\qquad \underline{-(2\cdot 10^2 + 2\cdot 10)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 4\cdot 10 + 7
\end{array}
$$

Ezzel kész; $\cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4$ a hányados, 3 a maradék

$$
\begin{array}{l}
(2\cdot 10^3 + 4\cdot 10^2 + 6\cdot 10 + 7) : (1\cdot 10 + 1) = 2\cdot 10^2 + 2\cdot 10 + 4 \\
\underline{-(2\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2)} \\
\qquad 2\cdot 10^2 + 6\cdot 10 + 7 \\
\qquad \underline{-(2\cdot 10^2 + 2\cdot 10)} \\
\qquad\qquad 4\cdot 10 + 7 \\
\qquad\qquad \underline{-(4\cdot 10 + 4)} \\
\qquad\qquad\qquad 3
\end{array}
$$

Most pedig 10 helyett írjunk x-et!

Most pedig a 10 helyett írjunk x-et:

$(2 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 7) : (x + 1)$

$$(2 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 7) : (1 \cdot x + 1) = 2 \cdot x^2$$

$(2 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 7) : (x + 1)$

$$(2 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 7) : (1 \cdot x + 1) = 2 \cdot x^2$$
$$(2 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2)$$

$$
\begin{array}{l}
\quad (2 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 7) : (1 \cdot x + 1) = 2 \cdot x^2 \\
\underline{-\,(2 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2)} \\
\qquad\qquad 2 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 7
\end{array}
$$

$(2 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 7) : (x + 1)$

$$
\begin{array}{l}
(2 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 7) : (1 \cdot x + 1) = 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x \\
\underline{-(2 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2)} \\
\qquad 2 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 7 \\
\qquad \underline{-(2 \cdot x^2 + 2 \cdot x)} \\
\qquad\qquad 4 \cdot x + 7
\end{array}
$$

Ezzel kész; $\cdot x^2 + 2 \cdot x^1 + 4$ a hányados, 3 a maradék

$$
\begin{array}{l}
(2\cdot x^3 + 4\cdot x^2 + 6\cdot x + 7) : (1\cdot x + 1) = 2\cdot x^2 + 2\cdot x + 4 \\
\underline{-(2\cdot x^3 + 2\cdot x^2)} \\
\qquad 2\cdot x^2 + 6\cdot x + 7 \\
\qquad \underline{-(2\cdot x^2 + 2\cdot x)} \\
\qquad\qquad 4\cdot x + 7 \\
\qquad\qquad \underline{-(4\cdot x + 4)} \\
\qquad\qquad\qquad 3
\end{array}
$$

Polinomosztás

Bár nem minden egész szám esetén megy ennyire párhuzamosan a számok és polinomok osztása, a most tekintett példa tükrözi az általánosságat: így kell polinomot polinommal osztani.

Megjegyzés

Amikor polinomot osztunk polinommal, a 0 együtthatós x-hatványokat is ki kell írni! (Legalábbis nagyon erősen javasolt, mert anélkül a kézi számolás szinte lehetetlen.)

Legnagyobb közös osztó

Definíció

Legyen T test és legyen $f(x), g(x) \in T[x]$. Akkor mondjuk, hogy egy $h(x) \in T[x]$ polinom **legnagyobb közös osztója** $f(x)$-nek és $g(x)$-nek, jelben $h(x) = \mathrm{ln.k.o.}\,(f(x), g(x))$, ha

1. $h(x) \mid f(x)$ és $h(x) \mid g(x)$ (azaz $h(x)$ közös osztó), és
2. bármely $t(x) \in T[x]$-re ha $t(x) \mid f(x)$ és $t(x) \mid g(x)$ (azaz $t(x)$ is közös osztó), akkor $t(x) \mid h(x)$.
3. $h(x) = 0$ vagy főpolinom. (Egyes szerzők ezt nem teszik fel.)

Szavakban: **a legnagyobb közös osztó egy olyan közös osztó, amelyet minden más közös osztó oszt.** Emellett — ha nem 0 — főpolinom.

Megjegyzés

A „főpolinom"-ra vonatkozó kikötést törölve kapjuk az $\mathbb{N}$-re, továbbá tetszőleges integritástartományra vonatkozó definíciót.

Legnagyobb közös osztó

Definíció

Legyen T test és legyen $f(x), g(x) \in T[x]$. Akkor mondjuk, hogy egy $h(x) \in T[x]$ polinom **legnagyobb közös osztója** $f(x)$-nek és $g(x)$-nek, jelben $h(x) = \mathrm{ln.k.o.}\,(f(x), g(x))$, ha

1. $h(x) \mid f(x)$ és $h(x) \mid g(x)$ (azaz $h(x)$ közös osztó), és
2. bármely $t(x) \in T[x]$-re ha $t(x) \mid f(x)$ és $t(x) \mid g(x)$ (azaz $t(x)$ is közös osztó), akkor $t(x) \mid h(x)$.
3. $h(x) = 0$ vagy főpolinom. (Egyes szerzők ezt nem teszik fel.)

Szavakban: **a legnagyobb közös osztó egy olyan közös osztó, amelyet minden más közös osztó oszt.** Emellett — ha nem 0 — főpolinom.

Megjegyzés

A „főpolinom”-ra vonatkozó kikötést törölve kapjuk az $\mathbb{N}$-re, továbbá tetszőleges integritástartományra vonatkozó definíciót.

Legnagyobb közös osztó

Definíció

Legyen T test és legyen $f(x), g(x) \in T[x]$. Akkor mondjuk, hogy egy $h(x) \in T[x]$ polinom **legnagyobb közös osztója** $f(x)$-nek és $g(x)$-nek, jelben $h(x) = \mathrm{ln.k.o.}\,(f(x), g(x))$, ha

1. $h(x) \mid f(x)$ és $h(x) \mid g(x)$ (azaz $h(x)$ közös osztó), és
2. bármely $t(x) \in T[x]$-re ha $t(x) \mid f(x)$ és $t(x) \mid g(x)$ (azaz $t(x)$ is közös osztó), akkor $t(x) \mid h(x)$.
3. $h(x) = 0$ vagy főpolinom. (Egyes szerzők ezt nem teszik fel.)

Szavakban: **a legnagyobb közös osztó egy olyan közös osztó, amelyet minden más közös osztó oszt.** Emellett — ha nem 0 — főpolinom.

Megjegyzés

A „főpolinom”-ra vonatkozó kikötést törölve kapjuk az $\mathbb{N}$-re, továbbá tetszőleges integritástartományra vonatkozó definíciót.

Legnagyobb közös osztó

Definíció

Legyen T test és legyen $f(x), g(x) \in T[x]$. Akkor mondjuk, hogy egy $h(x) \in T[x]$ polinom **legnagyobb közös osztója** $f(x)$-nek és $g(x)$-nek, jelben $h(x) = \mathrm{ln.k.o.}\,(f(x), g(x))$, ha

1. $h(x) \mid f(x)$ és $h(x) \mid g(x)$ (azaz $h(x)$ közös osztó), és
2. bármely $t(x) \in T[x]$-re ha $t(x) \mid f(x)$ és $t(x) \mid g(x)$ (azaz $t(x)$ is közös osztó), akkor $t(x) \mid h(x)$.
3. $h(x) = 0$ vagy főpolinom. (Egyes szerzők ezt nem teszik fel.)

Szavakban: **a legnagyobb közös osztó egy olyan közös osztó, amelyet minden más közös osztó oszt.** Emellett — ha nem 0 — főpolinom.

Megjegyzés

A „főpolinom”-ra vonatkozó kikötést törölve kapjuk az $\mathbb{N}$-re, továbbá tetszőleges integritástartományra vonatkozó definíciót.

Definíció

Legyen T test és legyen $f(x), g(x) \in T[x]$. Akkor mondjuk, hogy egy $h(x) \in T[x]$ polinom **legnagyobb közös osztója** $f(x)$-nek és $g(x)$-nek, jelben $h(x) = \mathrm{ln.k.o.}\,(f(x), g(x))$, ha

1. $h(x) \mid f(x)$ és $h(x) \mid g(x)$ (azaz $h(x)$ közös osztó), és
2. bármely $t(x) \in T[x]$-re ha $t(x) \mid f(x)$ és $t(x) \mid g(x)$ (azaz $t(x)$ is közös osztó), akkor $t(x) \mid h(x)$.
3. $h(x) = 0$ vagy főpolinom. (Egyes szerzők ezt nem teszik fel.)

Szavakban: **a legnagyobb közös osztó egy olyan közös osztó, amelyet minden más közös osztó oszt.** Emellett — ha nem 0 — főpolinom.

Megjegyzés

A „főpolinom”-ra vonatkozó kikötést törölve kapjuk az $\mathbb{N}$-re, továbbá tetszőleges integritástartományra vonatkozó definíciót.

Definíció

Legyen T test és legyen $f(x), g(x) \in T[x]$. Akkor mondjuk, hogy egy $h(x) \in T[x]$ polinom **legnagyobb közös osztója** $f(x)$-nek és $g(x)$-nek, jelben $h(x) = \mathrm{ln.k.o.}\,(f(x), g(x))$, ha

1. $h(x) \mid f(x)$ és $h(x) \mid g(x)$ (azaz $h(x)$ közös osztó), és
2. bármely $t(x) \in T[x]$-re ha $t(x) \mid f(x)$ és $t(x) \mid g(x)$ (azaz $t(x)$ is közös osztó), akkor $t(x) \mid h(x)$.
3. $h(x) = 0$ vagy főpolinom. (Egyes szerzők ezt nem teszik fel.)

Szavakban: **a legnagyobb közös osztó egy olyan közös osztó, amelyet minden más közös osztó oszt.** Emellett — ha nem 0 — főpolinom.

Megjegyzés

A „főpolinom”-ra vonatkozó kikötést törölve kapjuk az $\mathbb{N}$-re, továbbá tetszőleges integritástartományra vonatkozó definíciót.

Legkisebb közös többszörös

Ha az előző definícióban az oszthatóság jelének (azaz a $\mid$ jelnek) két oldalát mindenhol felcseréljük (vagy, más szóval, „osztója ” helyett mindenhol azt mondjuk, hogy „többszöröse”), akkor a *legkisebb közös többszörös* fogalmát kapjuk. Azaz

Definíció

Legyen T test és legyen $f(x), g(x) \in T[x]$. Ekkor $f(x)$ és $g(x)$ *legkisebb közös többszöröse* egy olyan közös többszörös, amelynek minden más közös többszörös többszöröse és amely, ha nem nulla, főpolinom.

Megjegyzés

A „főpolinom”-ra vonatkozó kikötést törölve kapjuk az $\mathbb{N}$-re, továbbá tetszőleges integritástartományra vonatkozó definíciót.

Az $\mathrm{ln.k.o.}$, illetve a legkisebb közös többszörös fogalma erősen hasonlít az infimum (azaz metszet), illetve a szupremum (azaz egyesítés) fogalmára.

Az euklideszi algoritmust előkészítő Állítás

Ha T test, akkor $T[x]$-ben két polinom legnagyobb közös osztójának meghatározását az ún.**euklideszi algoritmus** adja. Az algoritmus az alábbi (majdnem triviális) állításon múlik.

Állítás

Legyen $f, g, q, r \in T[x]$ *úgy, hogy*

$$f = gq + r \qquad (\sharp).$$

Ekkor $\mathrm{ln.k.o.}(f, g) = \mathrm{ln.k.o.}(g, r)$.

Bár az Állítás nem beszél fokszámról, a haszna akkor mutatkozik meg, ha r foka kisebb, mint g foka — ez maradékos osztással elérhető. Ebben az esetben, az Állítást ismételten alkalmazva jutunk el az *euklideszi algoritmushoz*, hiszen a fokszám nem csökkenhet végtelen sokszor és $\mathrm{ln.k.o.}(g, 0)$ a g-től csak konsans szorzóban térhet el.

Az euklideszi algoritmust előkészítő Állítás

Ha T test, akkor $T[x]$-ben két polinom legnagyobb közös osztójának meghatározását az ún.**euklideszi algoritmus** adja. Az algoritmus az alábbi (majdnem triviális) állításon múlik.

Állítás

Legyen $f, g, q, r \in T[x]$ *úgy, hogy*

$$f = gq + r \qquad (\sharp).$$

Ekkor $\mathrm{ln.k.o.}(f, g) = \mathrm{ln.k.o.}(g, r)$.

Bár az Állítás nem beszél fokszámról, a haszna akkor mutatkozik meg, ha r foka kisebb, mint g foka — ez maradékos osztással elérhető. Ebben az esetben, az Állítást ismételten alkalmazva jutunk el az *euklideszi algoritmushoz*, hiszen a fokszám nem csökkenhet végtelen sokszor és $\mathrm{ln.k.o.}(g, 0)$ a g-től csak konsans szorzóban térhet el.

Euklideszi algoritmus

Állítás (Az euklideszi algoritmus így működik és az $\mathrm{ln.k.o.}$-t adja)

f és g (ezek lehetnek egy T test feletti polinomgyűrűben vagy lehetnek $\mathbb{Z}$-ben) legnagyobb közös osztóját úgy kapjuk, hogy annyiszor helyettesítjük az (osztandó, osztó) párt az (osztó, maradék) párral, amíg ez lehetséges. Ha már nem lehetséges (mert 0-val nem tudunk osztani), akkor megállunk. Ez az algoritmus véges számú lépés után mindig megáll, és az utolsó nem-nulla maradék a legnagyobb közös osztó (egy olyan szorzótényező erejéig, amelyik az 1-et osztja $T[x]$-ben, illetve $\mathbb{Z}$-ben, illetve $\mathbb{N}$-ben).

A mondott szorzótényező $T[x]$ esetén egy nem-nulla konstans (polinom), $\mathbb{Z}$ esetén ± 1, $\mathbb{N}$ esetén 1.

Példa ($\mathrm{ln.k.o.}(44, 18) = ?$)

Mivel $44 = 2 \cdot 18 + 8$, majd $18 = 2 \cdot 8 + 2$, majd $8 = 4 \cdot 2 + 0$, ezért az utolsó nemnulla maradék a 2, és ez az $\mathrm{ln.k.o.}$.

Euklideszi algoritmus

Állítás (Az euklideszi algoritmus így működik és az $\mathrm{ln.k.o.}$-t adja)

f és g (ezek lehetnek egy T test feletti polinomgyűrűben vagy lehetnek $\mathbb{Z}$-ben) legnagyobb közös osztóját úgy kapjuk, hogy annyiszor helyettesítjük az (osztandó, osztó) párt az (osztó, maradék) párral, amíg ez lehetséges. Ha már nem lehetséges (mert 0-val nem tudunk osztani), akkor megállunk. Ez az algoritmus véges számú lépés után mindig megáll, és az utolsó nem-nulla maradék a legnagyobb közös osztó (egy olyan szorzótényező erejéig, amelyik az 1-et osztja $T[x]$-ben, illetve $\mathbb{Z}$-ben, illetve $\mathbb{N}$-ben).

A mondott szorzótényező $T[x]$ esetén egy nem-nulla konstans (polinom), $\mathbb{Z}$ esetén ± 1, $\mathbb{N}$ esetén 1.

Példa ($\mathrm{ln.k.o.}(44, 18) = ?$)

Mivel $44 = 2 \cdot 18 + 8$, majd $18 = 2 \cdot 8 + 2$, majd $8 = 4 \cdot 2 + 0$, ezért az utolsó nemnulla maradék a 2, és ez az $\mathrm{ln.k.o.}$.

Euklideszi algoritmus

Állítás (Az euklideszi algoritmus így működik és az $\mathrm{ln.k.o.}$-t adja)

f és g (ezek lehetnek egy T test feletti polinomgyűrűben vagy lehetnek $\mathbb{Z}$-ben) legnagyobb közös osztóját úgy kapjuk, hogy annyiszor helyettesítjük az (osztandó, osztó) párt az (osztó, maradék) párral, amíg ez lehetséges. Ha már nem lehetséges (mert 0-val nem tudunk osztani), akkor megállunk. Ez az algoritmus véges számú lépés után mindig megáll, és az utolsó nem-nulla maradék a legnagyobb közös osztó (egy olyan szorzótényező erejéig, amelyik az 1-et osztja $T[x]$-ben, illetve $\mathbb{Z}$-ben, illetve $\mathbb{N}$-ben).

A mondott szorzótényező $T[x]$ esetén egy nem-nulla konstans (polinom), $\mathbb{Z}$ esetén ± 1, $\mathbb{N}$ esetén 1.

Példa ($\mathrm{ln.k.o.}(44, 18) = ?$)

Mivel $44 = 2 \cdot 18 + 8$, majd $18 = 2 \cdot 8 + 2$, majd $8 = 4 \cdot 2 + 0$, ezért az utolsó nemnulla maradék a 2, és ez az $\mathrm{ln.k.o.}$.

Euklideszi algoritmus

Állítás (Az euklideszi algoritmus így működik és az $\mathrm{ln.k.o.}$-t adja)

f és g (ezek lehetnek egy T test feletti polinomgyűrűben vagy lehetnek $\mathbb{Z}$-ben) legnagyobb közös osztóját úgy kapjuk, hogy annyiszor helyettesítjük az (osztandó, osztó) párt az (osztó, maradék) párral, amíg ez lehetséges. Ha már nem lehetséges (mert 0-val nem tudunk osztani), akkor megállunk. Ez az algoritmus véges számú lépés után mindig megáll, és az utolsó nem-nulla maradék a legnagyobb közös osztó (egy olyan szorzótényező erejéig, amelyik az 1-et osztja $T[x]$-ben, illetve $\mathbb{Z}$-ben, illetve $\mathbb{N}$-ben).

A mondott szorzótényező $T[x]$ esetén egy nem-nulla konstans (polinom), $\mathbb{Z}$ esetén ± 1, $\mathbb{N}$ esetén 1.

Példa ($\mathrm{ln.k.o.}(44, 18) = ?$)

Mivel $44 = 2 \cdot 18 + 8$, majd $18 = 2 \cdot 8 + 2$, majd $8 = 4 \cdot 2 + 0$, ezért az utolsó nemnulla maradék a 2, és ez az $\mathrm{ln.k.o.}$.

Euklideszi algoritmus

Állítás (Az euklideszi algoritmus így működik és az $\mathrm{ln.k.o.}$-t adja)

f és g (ezek lehetnek egy T test feletti polinomgyűrűben vagy lehetnek $\mathbb{Z}$-ben) legnagyobb közös osztóját úgy kapjuk, hogy annyiszor helyettesítjük az (osztandó, osztó) párt az (osztó, maradék) párral, amíg ez lehetséges. Ha már nem lehetséges (mert 0-val nem tudunk osztani), akkor megállunk. Ez az algoritmus véges számú lépés után mindig megáll, és az utolsó nem-nulla maradék a legnagyobb közös osztó (egy olyan szorzótényező erejéig, amelyik az 1-et osztja $T[x]$-ben, illetve $\mathbb{Z}$-ben, illetve $\mathbb{N}$-ben).

A mondott szorzótényező $T[x]$ esetén egy nem-nulla konstans (polinom), $\mathbb{Z}$ esetén ± 1, $\mathbb{N}$ esetén 1.

Példa ($\mathrm{ln.k.o.}(44, 18) =?$)

Mivel $44 = 2 \cdot 18 + 8$, majd $18 = 2 \cdot 8 + 2$, majd $8 = 4 \cdot 2 + 0$, ezért az utolsó nemnulla maradék a 2, és ez az $\mathrm{ln.k.o.}$.

Euklideszi algoritmus

Állítás (Az euklideszi algoritmus így működik és az $\mathrm{ln.k.o.}$-t adja)

f és g (ezek lehetnek egy T test feletti polinomgyűrűben vagy lehetnek $\mathbb{Z}$-ben) legnagyobb közös osztóját úgy kapjuk, hogy annyiszor helyettesítjük az (osztandó, osztó) párt az (osztó, maradék) párral, amíg ez lehetséges. Ha már nem lehetséges (mert 0-val nem tudunk osztani), akkor megállunk. Ez az algoritmus véges számú lépés után mindig megáll, és az utolsó nem-nulla maradék a legnagyobb közös osztó (egy olyan szorzótényező erejéig, amelyik az 1-et osztja $T[x]$-ben, illetve $\mathbb{Z}$-ben, illetve $\mathbb{N}$-ben).

A mondott szorzótényező $T[x]$ esetén egy nem-nulla konstans (polinom), $\mathbb{Z}$ esetén ± 1, $\mathbb{N}$ esetén 1.

Példa ($\mathrm{ln.k.o.}(44, 18) =?$)

Mivel $44 = 2 \cdot 18 + 8$, majd $18 = 2 \cdot 8 + 2$, majd $8 = 4 \cdot 2 + 0$, ezért az utolsó nemnulla maradék a 2, és ez az $\mathrm{ln.k.o.}$.

Miért nem inkább prímtényezőkre bontással?

Megjegyzés

Miért nem inkább úgy határoztuk meg $\mathrm{ln.k.o.}(44, 18)$ -t, hogy mindkét számot prímhatványtényezők szorzatára bontottuk, azaz (az összes, legalább az egyikben fellépő prímet szerepeltetve)

$$44 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 11^0 \text{ és } 2^1 \cdot 3^2 \cdot 11^0,$$

majd vesszük mindegyik prímhez a két kitevő minimumát, és így kapjuk, hogy

$$\mathrm{ln.k.o.}(44, 18) = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 11^0?$$

Válasz: *nagy* számokra ez nem megy; pl. négyszázjegyű számok prímtényezőkre bontása —jelen tudásunk szerint— a Naprendszer élettartama alatt az összes számítógépet felhasználva is lehetetlen. (Ez a tény nyilvános kulcsú titkosírások alapjául szolgál!) Ezzel szemben (számítógéppel) két ilyen nagyságrendű szám legnagyobb közös osztója jóval egy percen belül kiszámítható!

Miért nem inkább prímtényezőkre bontással?

Megjegyzés

Miért nem inkább úgy határoztuk meg $\mathrm{ln.k.o.}(44, 18)$ -t, hogy mindkét számot prímhatványtényezők szorzatára bontottuk, azaz (az összes, legalább az egyikben fellépő prímet szerepeltetve)

$$44 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 11^0 \text{ és } 2^1 \cdot 3^2 \cdot 11^0,$$

majd vesszük mindegyik prímhez a két kitevő minimumát, és így kapjuk, hogy

$$\mathrm{ln.k.o.}(44, 18) = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 11^0?$$

Válasz: *nagy* számokra ez nem megy; pl. négyszázjegyű számok prímtényezőkre bontása —jelen tudásunk szerint— a Naprendszer élettartama alatt az összes számítógépet felhasználva is lehetetlen. (Ez a tény nyilvános kulcsú titkosírások alapjául szolgál!) Ezzel szemben (számítógéppel) két ilyen nagyságrendű szám legnagyobb közös osztója jóval egy percen belül kiszámítható!

Ha $c \in T$ és $f \in T[x]$ esetén $f(c) = 0$, akkor c-t az f polinom (T-beli egyik) **gyökének** nevezezzük.

Tétel (Algebra alaptétele)

Minden legalább elsőfokú komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok testében.

Tétel (Bézout-tétel)

Legyen T test, $f(x) \in T[x]$ és $c \in T$. Ez esetben c akkor és csak akkor gyöke $f(x)$-nek, ha $f(x)$ osztható az $x - c$ polinommal.

Ha c gyöke $f(x)$-nek, akkor tételbeli $x - c$ polinomot **gyöktényezőnek** szokás nevezni. Bézout tétele azonnal adódik az alábbi állításból, hiszen az oszthatóság azt jelenti, hogy a maradék nulla.

Ha $c \in T$ és $f \in T[x]$ esetén $f(c) = 0$, akkor c-t az f polinom (T-beli egyik) **gyökének** nevezezzük.

Tétel (Algebra alaptétele)

Minden legalább elsőfokú komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok testében.

Tétel (Bézout-tétel)

Legyen T test, $f(x) \in T[x]$ és $c \in T$. Ez esetben c akkor és csak akkor gyöke $f(x)$-nek, ha $f(x)$ osztható az $x - c$ polinommal.

Ha c gyöke $f(x)$-nek, akkor tételbeli $x - c$ polinomot **gyöktényezőnek** szokás nevezni. Bézout tétele azonnal adódik az alábbi állításból, hiszen az oszthatóság azt jelenti, hogy a maradék nulla.

Algebra alaptétele. Bézout-tétel

Ha $c \in T$ és $f \in T[x]$ esetén $f(c) = 0$, akkor c-t az f polinom (T-beli egyik) **gyökének** nevezezzük.

Tétel (Algebra alaptétele)

Minden legalább elsőfokú komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok testében.

Tétel (Bézout-tétel)

Legyen T test, $f(x) \in T[x]$ és $c \in T$. Ez esetben c akkor és csak akkor gyöke $f(x)$-nek, ha $f(x)$ osztható az $x - c$ polinommal.

Ha c gyöke $f(x)$-nek, akkor tételbeli $x - c$ polinomot **gyöktényezőnek** szokás nevezni. Bézout tétele azonnal adódik az alábbi állításból, hiszen az oszthatóság azt jelenti, hogy a maradék nulla.

Ha $c \in T$ és $f \in T[x]$ esetén $f(c) = 0$, akkor c-t az f polinom (T-beli egyik) **gyökének** nevezezzük.

Tétel (Algebra alaptétele)

Minden legalább elsőfokú komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok testében.

Tétel (Bézout-tétel)

Legyen T test, $f(x) \in T[x]$ és $c \in T$. Ez esetben c akkor és csak akkor gyöke $f(x)$-nek, ha $f(x)$ osztható az $x - c$ polinommal.

Ha c gyöke $f(x)$-nek, akkor tételbeli $x - c$ polinomot **gyöktényezőnek** szokás nevezni. Bézout tétele azonnal adódik az alábbi állításból, hiszen az oszthatóság azt jelenti, hogy a maradék nulla.

Állítás

Legyen T test, $f(x) \in T[x]$ és $c \in T$. Jelölje r azt a maradékot, amelyet úgy kapunk, hogy $T[x]$-ben az $f(x)$ polinomot maradékosan osztjuk az $x - c$ polinommal. Ekkor $f(c) = r$.

Bizonyítás.

Végezzünk maradékos osztást: $f(x) = (x - c)q(x) + r(x)$. Itt r konstans, hiszen kisebb fokú, mint az elsőfokú $x - c$. Mármost $f(c) = (c - c)q(c) + r = r$. Q.e.d. $\square$

Definíció

Azt mondjuk, hogy $c \in T$ **k-szoros gyöke** $f(x) \in T[x]$-nek, ha $(x - c)^k \mid f(x)$ de $(x - c)^{k+1}$ nem osztja $f(x)$-et. Ezt a k számot (főleg ha pozitív), a c gyök **multiplicitásának**, más szóval **többszörösségének** nevezzük.

Bézout-tétel bizonyítása, többszörös gyök

Állítás

Legyen T test, $f(x) \in T[x]$ és $c \in T$. Jelölje r azt a maradékot, amelyet úgy kapunk, hogy $T[x]$-ben az $f(x)$ polinomot maradékosan osztjuk az $x - c$ polinommal. Ekkor $f(c) = r$.

Bizonyítás.

Végezzünk maradékos osztást: $f(x) = (x - c)q(x) + r(x)$. Itt r konstans, hiszen kisebb fokú, mint az elsőfokú $x - c$. Mármost $f(c) = (c - c)q(c) + r = r$. Q.e.d. $\square$

Definíció

Azt mondjuk, hogy $c \in T$ **k-szoros gyöke** $f(x) \in T[x]$-nek, ha $(x - c)^k \mid f(x)$ de $(x - c)^{k+1}$ nem osztja $f(x)$-et. Ezt a k számot (főleg ha pozitív), a c gyök **multiplicitásának**, más szóval **többszörösségének** nevezzük.

Állítás

Legyen T test, $f(x) \in T[x]$ és $c \in T$. Jelölje r azt a maradékot, amelyet úgy kapunk, hogy $T[x]$-ben az $f(x)$ polinomot maradékosan osztjuk az $x - c$ polinommal. Ekkor $f(c) = r$.

Bizonyítás.

Végezzünk maradékos osztást: $f(x) = (x - c)q(x) + r(x)$. Itt r konstans, hiszen kisebb fokú, mint az elsőfokú $x - c$. Mármost $f(c) = (c - c)q(c) + r = r$. Q.e.d. $\square$

Definíció

Azt mondjuk, hogy $c \in T$ **k-szoros gyöke** $f(x) \in T[x]$-nek, ha $(x - c)^k \mid f(x)$ de $(x - c)^{k+1}$ nem osztja $f(x)$-et. Ezt a k számot (főleg ha pozitív), a c gyök **multiplicitásának**, más szóval **többszörösségének** nevezzük.

Az algebra alaptételének egyik következménye

Például az $x^2 - 2x + 1 \in \mathbb{R}[x]$ polinomnak az 1 kétszeres gyöke, a 2 pedig nullaszoros gyöke (azaz nem gyöke). A gyök multiplicitása a polinom által meghatározott polinomfüggvény esetén igen fontos fogalom a kalkulusban, ettől függ pl., hogy mennyire „simul'' a függvény grafikonja a c helyen az x tengelyhez.

Tétel (Az algebra alaptételéből levezethető)

*Legyen $n \in \mathbb{N}$. Bármely n-edfokú komplex együtthatós polinomnak a komplex számtestben — **multiplicitással számolva** — pontosan n komplex gyöke van. Továbbá a polinom a főegyüthatójának és n darab elsőfokú főpolinomnak a szorzata, és ezen elsőfokú tényezők (az ún. **gyöktényezők**) egyértelműen meg vannak határozva.*

$\mathbb{C}[x]$-ben egy n-edfokú f polinom gyöktényezős alakja mindig ilyen:

$$f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2)\dots(x - c_n).$$

Az algebra alaptételének egyik következménye

Például az $x^2 - 2x + 1 \in \mathbb{R}[x]$ polinomnak az 1 kétszeres gyöke, a 2 pedig nullaszoros gyöke (azaz nem gyöke). A gyök multiplicitása a polinom által meghatározott polinomfüggvény esetén igen fontos fogalom a kalkulusban, ettől függ pl., hogy mennyire „simul" a függvény grafikonja a c helyen az x tengelyhez.

Tétel (Az algebra alaptételéből levezethető)

Legyen $n \in \mathbb{N}$. Bármely n-edfokú komplex együtthatós polinomnak a komplex számtestben — ***multiplicitással számolva*** *— pontosan n komplex gyöke van. Továbbá a polinom a főegyüthatójának és n darab elsőfokú főpolinomnak a szorzata, és ezen elsőfokú tényezők (az ún.* ***gyöktényezők****) egyértelműen meg vannak határozva.*

$\mathbb{C}[x]$-ben egy n-edfokú f polinom gyöktényezős alakja mindig ilyen:

$$f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2)\dots(x - c_n).$$

Az algebra alaptételének egyik következménye

Például az $x^2 - 2x + 1 \in \mathbb{R}[x]$ polinomnak az 1 kétszeres gyöke, a 2 pedig nullaszoros gyöke (azaz nem gyöke). A gyök multiplicitása a polinom által meghatározott polinomfüggvény esetén igen fontos fogalom a kalkulusban, ettől függ pl., hogy mennyire „simul" a függvény grafikonja a c helyen az x tengelyhez.

Tétel (Az algebra alaptételéből levezethető)

*Legyen $n \in \mathbb{N}$. Bármely n-edfokú komplex együtthatós polinomnak a komplex számtestben — **multiplicitással számolva** — pontosan n komplex gyöke van. Továbbá a polinom a főegyüthatójának és n darab elsőfokú főpolinomnak a szorzata, és ezen elsőfokú tényezők (az ún. **gyöktényezők**) egyértelműen meg vannak határozva.*

$\mathbb{C}[x]$-ben egy n-edfokú f polinom gyöktényezős alakja mindig ilyen:

$$f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2)\dots(x - c_n).$$

$\mathbb{Q}[x] \subseteq \mathbb{C}[x]$

Feladat (Megj.: az ilyen feladatokra nincs mindig jó módszer!)

Írjuk fel az $f(x) = 2x^4 - 2$ polinom gyöktényezős alakjánt $\mathbb{C}[x]$-ben!

Megoldás

Látszik, hogy az 1 gyöke, így a Bézout-tétel szerint osztható $(x-1)$-gyel; 2-t kiemelve majd az osztást elvégezve $f(x) = 2(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)$. Most már csak a második tényezőt kell szorzattá bontani. Annak láthatóan gyöke a -1, így (ismét a Bézout-tétel miatt) osztható $(x+1)$-gyel; azt osztást elvégezve $f(x) = 2(x-1)(x+1)(x^2+1)$. Már csak az x^2+1 szorzattá alakítása van hátra, de annak gyöke i és $-i$ is, sőt most a Bézout-tétel nélkül is meg, hiszen két tag négyzetének különbségeként szorzattá alakítható: $x^2 + 1 = x^2 - i^2 = (x+i)(x-i)$. Tehát a a feladat megoldása:

$$f(x) = 2(x-1)(x+1)(x+i)(x-i).$$

$\mathbb{Q}[x] \subseteq \mathbb{C}[x]$

Feladat (Megj.: az ilyen feladatokra nincs mindig jó módszer!)

Írjuk fel az $f(x) = 2x^4 - 2$ polinom gyöktényezős alakját $\mathbb{C}[x]$-ben!

Megoldás

Látszik, hogy az 1 gyöke, így a Bézout-tétel szerint osztható $(x-1)$-gyel; 2-t kiemelve majd az osztást elvégezve $f(x) = 2(x-1)(x^3+x^2+x+1)$. Most már csak a második tényezőt kell szorzattá bontani. Annak láthatóan gyöke a -1, így (ismét a Bézout-tétel miatt) osztható $(x+1)$-gyel; azt osztást elvégezve $f(x) = 2(x-1)(x+1)(x^2+1)$. Már csak az x^2+1 szorzattá alakítása van hátra, de annak gyöke i és $-i$ is, sőt most a Bézout-tétel nélkül is meg, hiszen két tag négyzetének különbségeként szorzattá alakítható: $x^2+1 = x^2 - i^2 = (x+i)(x-i)$. Tehát a a feladat megoldása:

$$f(x) = 2(x-1)(x+1)(x+i)(x-i).$$

$\mathbb{Q}[x] \subseteq \mathbb{C}[x]$

Feladat (Megj.: az ilyen feladatokra nincs mindig jó módszer!)

Írjuk fel az $f(x) = 2x^4 - 2$ polinom gyöktényezős alakjánt $\mathbb{C}[x]$-ben!

Megoldás

Látszik, hogy az 1 gyöke, így a Bézout-tétel szerint osztható $(x-1)$-gyel; 2-t kiemelve majd az osztást elvégezve $f(x) = 2(x-1)(x^3+x^2+x+1)$. Most már csak a második tényezőt kell szorzattá bontani. Annak láthatóan gyöke a -1, így (ismét a Bézout-tétel miatt) osztható $(x+1)$-gyel; azt osztást elvégezve $f(x) = 2(x-1)(x+1)(x^2+1)$. Már csak az x^2+1 szorzattá alakítása van hátra, de annak gyöke i és $-i$ is, sőt most a Bézout-tétel nélkül is meg, hiszen két tag négyzetének különbségeként szorzattá alakítható: $x^2+1 = x^2 - i^2 = (x+i)(x-i)$. Tehát a a feladat megoldása:

$$f(x) = 2(x-1)(x+1)(x+i)(x-i).$$

$\mathbb{Q}[x] \subseteq \mathbb{C}[x]$

Feladat (Megj.: az ilyen feladatokra nincs mindig jó módszer!)

Írjuk fel az $f(x) = 2x^4 - 2$ polinom gyöktényezős alakjánt $\mathbb{C}[x]$-ben!

Megoldás

Látszik, hogy az 1 gyöke, így a Bézout-tétel szerint osztható $(x-1)$-gyel; 2-t kiemelve majd az osztást elvégezve $f(x) = 2(x-1)(x^3+x^2+x+1)$. Most már csak a második tényezőt kell szorzattá bontani. Annak láthatóan gyöke a -1, így (ismét a Bézout-tétel miatt) osztható $(x+1)$-gyel; azt osztást elvégezve $f(x) = 2(x-1)(x+1)(x^2+1)$. Már csak az x^2+1 szorzattá alakítása van hátra, de annak gyöke i és $-i$ is, sőt most a Bézout-tétel nélkül is meg, hiszen két tag négyzetének különbségeként szorzattá alakítható: $x^2+1 = x^2 - i^2 = (x+i)(x-i)$. Tehát a a feladat megoldása:

$$f(x) = 2(x-1)(x+1)(x+i)(x-i).$$

Megjegyzés

Az előző megoldás azon alapult, hogy meg tudtuk találni a gyököket; általában ez nem megy: ha a fokszám ≥ 5, akkor nincs megoldóképlet (Ruffini–Abel-tétel); 3-ad és 4-edfokú polinomokra ugyan van, de túl bonyolult.

Megjegyzés

Érdemes rámutatni arra, hogy pl. az egész együtthatós vagy valós együtthatós legalább elsőfokú polinomok egyúttal $\mathbb{C}[x]$ elemei, tehát az Algebra Alaptétele szerint nekik is van *komplex* gyökük és $\mathbb{C}[x]$-ben ezek is gyöktényezőik és a főegyütthatójuk szorzataként állnak elő.

Máshol már láttunk olyat, hogy valamik valamilyen módon egyértelműen szorzattá bonthatók: $\mathbb{N}$ elemei prímszámok szorzatára. Van-e ennek valamilyen kapcsolata a $\mathbb{C}[x]$-beli gyöktényezőkre bontáshoz? IGEN!

Van-e kapcsolat $\mathbb{C}[x]$ és $\mathbb{N}$ között?

Megjegyzés

Az előző megoldás azon alapult, hogy meg tudtuk találni a gyököket; általában ez nem megy: ha a fokszám ≥ 5, akkor nincs megoldóképlet (Ruffini–Abel-tétel); 3-ad és 4-edfokú polinomokra ugyan van, de túl bonyolult.

Megjegyzés

Érdemes rámutatni arra, hogy pl. az egész együtthatós vagy valós együtthatós legalább elsőfokú polinomok egyúttal $\mathbb{C}[x]$ elemei, tehát az Algebra Alaptétele szerint nekik is van *komplex* gyökük és $\mathbb{C}[x]$-ben ezek is gyöktényezőik és a főegyütthatójuk szorzataként állnak elő.

Máshol már láttunk olyat, hogy valamik valamilyen módon egyértelműen szorzattá bonthatók: $\mathbb{N}$ elemei prímszámok szorzatára. Van-e ennek valamilyen kapcsolata a $\mathbb{C}[x]$-beli gyöktényezőkre bontáshoz? IGEN!

A számelmélet alaptétele

Definition

- *Prímszám*: olyan $p \in \mathbb{N}$, hogy $1 < p$ és bármely $a, b \in \mathbb{N}$-re ha $p \mid ab$, akkor $p \mid a$ vagy $p \mid b$. (Ez a *prímtulajdonság*.)
- *Irreducibilis szám* vagy *törzsszám*: olyan $p \in \mathbb{N}$, hogy $1 < p$ és bármely a, b-re ha $p = ab$, akkor $p \in \{a, b\}$. (Azaz: csak triviális módon bontható szorzattá, azaz, csak 1-gyel és önmagával osztható.) $p \mid a$ vagy $p \mid b$.

Tétel (A számelmélet alaptétele $\mathbb{N}$-re)

1. *$\mathbb{N}$-ben az irreducibilis számok és a prímszámok ugyanazok.*
2. *Bármely 1-nél nagyobb egész szám felírható prímszámok szorzataként, és — a tényezők sorrendjétől eltekintve — ez a felírás egyértelmű.*

A számelmélet alaptétele

Definition

- *Prímszám*: olyan $p \in \mathbb{N}$, hogy $1 < p$ és bármely $a, b \in \mathbb{N}$-re ha $p \mid ab$, akkor $p \mid a$ vagy $p \mid b$. (Ez a *prímtulajdonság*.)
- *Irreducibilis szám* vagy *törzsszám*: olyan $p \in \mathbb{N}$, hogy $1 < p$ és bármely a, b-re ha $p = ab$, akkor $p \in \{a, b\}$. (Azaz: csak triviális módon bontható szorzattá, azaz, csak 1-gyel és önmagával osztható.) $p \mid a$ vagy $p \mid b$.

Tétel (A számelmélet alaptétele $\mathbb{N}$-re)

1. *$\mathbb{N}$-ben az irreducibilis számok és a prímszámok ugyanazok.*
2. *Bármely 1-nél nagyobb egész szám felírható prímszámok szorzataként, és — a tényezők sorrendjétől eltekintve — ez a felírás egyértelmű.*

Nem is olyan triviális, hogy prím=irreducibilis

Definition

- *Prímszám*: olyan $p \in \mathbb{N}$, hogy $1 < p$ és bármely $a, b \in \mathbb{N}$-re ha $p \mid ab$, akkor $p \mid a$ vagy $p \mid b$. (Ez a *prímtulajdonság*.)
- *Irreducibilis szám* vagy *törzsszám*: olyan $p \in \mathbb{N}$, hogy $1 < p$ és bármely a, b-re ha $p = ab$, akkor $p \in \{a, b\}$. (Azaz: csak triviális módon bontható szorzattá, azaz, csak 1-gyel és önmagával osztható.) $p \mid a$ vagy $p \mid b$.

Megjegyzés (Van, ahol prím $\neq$ irreducibilis)

Legyen R a páros egész számok gyűrűje és legyen $p = 6$. Ekkor p irreducibilis, hiszen nem áll elő két páros szám szorzataként. Ámde legyen $a = 4 \in R$ és $b = 18 \in R$. Ekkor R-ben $p = 6$ osztja az ab szorzatot, hiszen $ab = 72 = 6 \cdot 12$. De $p = 6$ nyilván nem osztja az $a = 4$-et, de a $b = 18$-at sem osztja, hiszen nincs olyan *páros* c szám, amelyre $b = 18 = 6c$ teljesülne. Tehát $p = 6$ irredubilis de nem prím!

Nem is olyan triviális, hogy prím=irreducibilis

Definition

- *Prímszám*: olyan $p \in \mathbb{N}$, hogy $1 < p$ és bármely $a, b \in \mathbb{N}$-re ha $p \mid ab$, akkor $p \mid a$ vagy $p \mid b$. (Ez a *prímtulajdonság*.)
- *Irreducibilis szám* vagy *törzsszám*: olyan $p \in \mathbb{N}$, hogy $1 < p$ és bármely a, b-re ha $p = ab$, akkor $p \in \{a, b\}$. (Azaz: csak triviális módon bontható szorzattá, azaz, csak 1-gyel és önmagával osztható.) $p \mid a$ vagy $p \mid b$.

Megjegyzés (Van, ahol prím $\neq$ irreducibilis)

Legyen R a páros egész számok gyűrűje és legyen $p = 6$. Ekkor p irreducibilis, hiszen nem áll elő két páros szám szorzataként. Ámde legyen $a = 4 \in R$ és $b = 18 \in R$. Ekkor R-ben $p = 6$ osztja az ab szorzatot, hiszen $ab = 72 = 6 \cdot 12$. De $p = 6$ nyilván nem osztja az $a = 4$-et, de a $b = 18$-at sem osztja, hiszen nincs olyan *páros* c szám, amelyre $b = 18 = 6c$ teljesülne. Tehát $p = 6$ irredubilis de nem prím!

A számelmélet alaptétele $\mathbb{Z}$-re átfogalmazva

Definition

- *Irreducibilis egész szám*: olyan $q \in \mathbb{Z}$, hogy $q \neq \pm 1$ és bármely a, b-re ha $p = ab$, akkor a és b közül az egyik osztja az 1-et. (Azaz, $p \in \{a, -a, b, -b\}$, tehát csak triviális módon bontható szorzattá.) $p \mid a$ vagy $p \mid b$.

Tétel (A számelmélet alaptétele $\mathbb{Z}$-re)

1. *$\mathbb{Z}$-ben az irreducibilis számok prímtulajdonsággal rendelkeznek. (Azaz, ha egy irreducibilis szám oszt egy véges sok tényezős szorzatot, akkor annak legalább az egyik tényezőjét osztja.)*
2. *Az 1 osztóit és a 0-t leszámítva bármely egész szám felírható irreducibilis számok szorzataként, és ez a felírás az 1 osztóitól mint szorzóktól (azaz előjeltől) és a tényezők sorrendjétől eltekintve — ez a felírás egyértelmű.*

A számelmélet alaptétele $\mathbb{Z}$-re átfogalmazva

Definition

- *Irreducibilis egész szám*: olyan $q \in \mathbb{Z}$, hogy $q \neq \pm 1$ és bármely a, b-re ha $p = ab$, akkor a és b közül az egyik osztja az 1-et. (Azaz, $p \in \{a, -a, b, -b\}$, tehát csak triviális módon bontható szorzattá.) $p \mid a$ vagy $p \mid b$.

Tétel (A számelmélet alaptétele $\mathbb{Z}$-re)

1. *$\mathbb{Z}$-ben az irreducibilis számok prímtulajdonsággal rendelkeznek. (Azaz, ha egy irreducibilis szám oszt egy véges sok tényezős szorzatot, akkor annak legalább az egyik tényezőjét osztja.)*
2. *Az 1 osztóit és a 0-t leszámítva bármely egész szám felírható irreducibilis számok szorzataként, és ez a felírás az 1 osztóitól mint szorzóktól (azaz előjeltől) és a tényezők sorrendjétől eltekintve — ez a felírás egyértelmű.*

Például $12 = (-3) \cdot 2 \cdot (-2) = (-2) \cdot (-2) \cdot 3$; a két felbontás tényezői párba állíthatók úgy, hogy az egymásnak megfeleltetett tényezők előjeltől eltekintve megegyeznek. Vegyük észre, hogy két egész szám pontosan akkor egyezik meg előjeltől eltekintve, ha van az 1-nek olyan osztója (tehát 1 vagy -1), hogy ezen osztóval az egyiket megszorozva a másikat kapjuk. Ezért amit polinomokról mondani fogunk, az a $\mathbb{Z}$-re vonatkozó tétel természetes általánosítása.

Definition

Egy D integritástartományban egy $0 \neq b \in D$ elemet irreducibilisnek nevezünk, ha nem osztja az 1-et és bármely $b = b_1 b_2$ szorzatfelbontás esetén az egyik tényező osztja az 1-et. A D integritástartományt *Gauss-gyűrűnek* nevezzük, ha bármely $0 \neq u \in D$ eleme amelyik nem osztja az 1-et előáll irreducibilis elemek szorzataként, és ez az előállítás az 1 osztóitól mint szorzóktól (azaz előjeltől) és a tényezők sorrendjétől eltekintve — ez a felírás egyértelmű.

Példa

$\mathbb{Z}$ Gauss-gyűrű. Minden test (pl. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) is Gauss-gyűrű (hiszen ott nincs is olyan u elem, amit elő kellene állítani szorzatként.

Hol érvényes a számelmélet alaptétele

Más szóval (kissé pontatlanul): a Gauss-gyűrűk pontosan azok a gyűrűk, amelyekben érvényes a számelmélet alaptétele. Az alábbi tétel távolról sem triviális.

Tétel

Ha D Gauss-gyűrű, akkor a $D[x]$ egyhatározatlanú, sőt a $D[x_1, \ldots, x_n]$ többhatározatlanú polinomgyűrű is Gauss-gyűrű.

Következmény

$\mathbb{C}[x]$-ben minden legalább elsőfokú polinom —sorrendtől és konstans szorzóktól eltekintve— csak egyféleképpen bontható elsőfokú polinomok szorzatára, és ez a felbontás a gyöktényezős felbontás.

Irreducibilis valós polinomok

Az előző tétel egyik haszna: akárhogy egyszerűsítünk egy $\dfrac{f(x_1,\ldots,x_n)}{g(x_1,\ldots,x_n)}$ törtet (ahol f, g mondjuk $\mathbb{Z}$ feletti polinom), lényegében mindig ugyanazt kapjuk. Az előző következmény sem triviális; az ugyan könnyen kijön, hogy bármely mondott felbontásban a tényezők gyöktényezők, de hogy egy tényező hányszor szerepel, az már nehezebb ügy.

Tétel

Az $\mathbb{R}[x]$ polinomgyűrűben egy $f(x)$ polinom pontosan akkor irreducibilis, ha elsőfokú vagy valós gyökkel nem rendelkező másodfokú.

Megjegyzés

$\mathbb{Q}[x]$-ben hasonló leírást nem ismerünk. Ott pl. bármely n-re az $x^n - 2$ polinom is irreducibilis.

Lagrange-féle interpolációs polinom

A polinomok fontosságára mutat rá az alábbi

Tétel (Lagrange-féle interpolációs tétel)

Legyen T test, $c_0, c_1, \ldots, c_n \in T$, $d_0, d_1, \ldots, d_n \in T$, és tegyük fel, hogy a c_i-k páronként különböznek (azaz $|\{c_0, c_1, \ldots, c_n\}| = n+1$). Ekkor létezik egy és csakis egy $L \in T[x]$ ***legfeljebb n-edfokú*** *polinom, amelyre $L(c_0) = d_0$, $L(c_1) = d_1$, …, $L(c_n) = d_n$. Ez az $L(x)$ polinom nem más, mint az alábbi:*

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-c_0)\ldots(x-c_{i-1})(x-c_{i+1})\ldots(x-c_n)}{(c_i-c_0)\ldots(c_i-c_{i-1})(c_i-c_{i+1})\ldots(c_i-c_n)} \cdot d_i .$$

Megjegyzés

$L(x)$-et a $c_0, \ldots, c_n$ alappontokhoz tartozó **Lagrange-féle interpolációs polinomnak** nevezzük. Ha $T = \mathbb{R}$, akkor az $L(x)$ által meghatározott polinomfüggvény grafikonja

A polinomok fontosságára mutat rá az alábbi

Tétel (Lagrange-féle interpolációs tétel)

Legyen T test, $c_0, c_1, \ldots, c_n \in T$, $d_0, d_1, \ldots, d_n \in T$, és tegyük fel, hogy a c_i-k páronként különböznek (azaz $|\{c_0, c_1, \ldots, c_n\}| = n+1$). Ekkor létezik egy és csakis egy $L \in T[x]$ ***legfeljebb n-edfokú*** *polinom, amelyre $L(c_0) = d_0$, $L(c_1) = d_1$, …, $L(c_n) = d_n$. Ez az $L(x)$ polinom nem más, mint az alábbi:*

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-c_0)\ldots(x-c_{i-1})(x-c_{i+1})\ldots(x-c_n)}{(c_i-c_0)\ldots(c_i-c_{i-1})(c_i-c_{i+1})\ldots(c_i-c_n)} \cdot d_i.$$

Megjegyzés

$L(x)$-et a $c_0, \ldots, c_n$ alappontokhoz tartozó **Lagrange-féle interpolációs polinomnak** nevezzük. Ha $T = \mathbb{R}$, akkor az $L(x)$ által meghatározott polinomfüggvény grafikonja a $(c_0, d_0), (c_1, d_1), \ldots, (c_n, d_n)$ pontokon megy át.

Lagrange-féle interpolációs polinom

A polinomok fontosságára mutat rá az alábbi

Tétel (Lagrange-féle interpolációs tétel)

Legyen T test, $c_0, c_1, \dots, c_n \in T$, $d_0, d_1, \dots, d_n \in T$, és tegyük fel, hogy a c_i-k páronként különböznek (azaz $|\{c_0, c_1, \dots, c_n\}| = n+1$). Ekkor létezik egy és csakis egy $L \in T[x]$ ***legfeljebb n-edfokú*** *polinom, amelyre $L(c_0) = d_0$, $L(c_1) = d_1$, …, $L(c_n) = d_n$. Ez az $L(x)$ polinom nem más, mint az alábbi:*

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-c_0)\dots(x-c_{i-1})(x-c_{i+1})\dots(x-c_n)}{(c_i-c_0)\dots(c_i-c_{i-1})(c_i-c_{i+1})\dots(c_i-c_n)} \cdot d_i.$$

Megjegyzés

$L(x)$-et a $c_0, \dots, c_n$ alappontokhoz tartozó **Lagrange-féle interpolációs polinomnak** nevezzük. Ha $T = \mathbb{R}$, akkor az $L(x)$ által meghatározott polinomfüggvény grafikonja a (c_0, d_0), (c_1, d_1), …, (c_n, d_n) pontokon megy át.

A polinomok fontosságára mutat rá az alábbi

Tétel (Lagrange-féle interpolációs tétel)

*Legyen T test, $c_0, c_1, \dots, c_n \in T$, $d_0, d_1, \dots, d_n \in T$, és tegyük fel, hogy a c_i-k páronként különböznek (azaz $|\{c_0, c_1, \dots, c_n\}| = n+1$). Ekkor létezik egy és csakis egy $L \in T[x]$ **legfeljebb n-edfokú** polinom, amelyre $L(c_0) = d_0$, $L(c_1) = d_1$, …, $L(c_n) = d_n$. Ez az $L(x)$ polinom nem más, mint az alábbi:*

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-c_0)\dots(x-c_{i-1})(x-c_{i+1})\dots(x-c_n)}{(c_i-c_0)\dots(c_i-c_{i-1})(c_i-c_{i+1})\dots(c_i-c_n)} \cdot d_i.$$

Megjegyzés

$L(x)$-et a $c_0, \dots, c_n$ alappontokhoz tartozó **Lagrange-féle interpolációs polinomnak** nevezzük. Ha $T = \mathbb{R}$, akkor az $L(x)$ által meghatározott polinomfüggvény grafikonja

Lagrange-féle interpolációs polinom

A polinomok fontosságára mutat rá az alábbi

Tétel (Lagrange-féle interpolációs tétel)

Legyen T test, $c_0, c_1, \ldots, c_n \in T$, $d_0, d_1, \ldots, d_n \in T$, és tegyük fel, hogy a c_i-k páronként különböznek (azaz $|\{c_0, c_1, \ldots, c_n\}| = n+1$). Ekkor létezik egy és csakis egy $L \in T[x]$ ***legfeljebb n-edfokú*** *polinom, amelyre $L(c_0) = d_0$, $L(c_1) = d_1$, …, $L(c_n) = d_n$. Ez az $L(x)$ polinom nem más, mint az alábbi:*

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-c_0)\ldots(x-c_{i-1})(x-c_{i+1})\ldots(x-c_n)}{(c_i-c_0)\ldots(c_i-c_{i-1})(c_i-c_{i+1})\ldots(c_i-c_n)} \cdot d_i.$$

Megjegyzés

$L(x)$-et a $c_0, \ldots, c_n$ alappontokhoz tartozó **Lagrange-féle interpolációs polinomnak** nevezzük. Ha $T = \mathbb{R}$, akkor az $L(x)$ által meghatározott polinomfüggvény grafikonja

a $(c_0, d_0), (c_1, d_1), \ldots, (c_n, d_n)$ pontokon megy át.

Bizonyítás.

Nyilván legfeljebb n-edfokú, hiszen az összeg tagjai is ilyenek. Azt kell belátni, hogy bármely j-re $L(c_j) = d_j$, ahol

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x - c_0) \ldots (x - c_{i-1})(x - c_{i+1}) \ldots (x - c_n)}{(c_i - c_0) \ldots (c_i - c_{i-1})(c_i - c_{i+1}) \ldots (c_i - c_n)} \cdot d_i .$$

Ez szinte evidens, hiszen az összeg minden tagja kiesik a j-edik kivételével. □

Bizonyítás.

Nyilván legfeljebb n-edfokú, hiszen az összeg tagjai is ilyenek. Azt kell belátni, hogy bármely j-re $L(c_j) = d_j$, ahol

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-c_0)\dots(x-c_{i-1})(x-c_{i+1})\dots(x-c_n)}{(c_i-c_0)\dots(c_i-c_{i-1})(c_i-c_{i+1})\dots(c_i-c_n)} \cdot d_i.$$

Ez szinte evidens, hiszen az összeg minden tagja kiesik a j-edik kivételével. □

Közös gyökök

Tétel

Két ($\mathbb{C}$-feletti) polinom közös gyökei pontosan a legnagyobb közös osztójuk gyökei.

Feladat

Oldjuk meg az $x^7 - 4x^5 + 7x^3 - 4x^2 - x^6 + 2x^4 - 5x + 2 = 0$ és $x^5 - 3x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 7x - 2 = 0$ egyenletekből (két egyenletből) álló egyenletrendszert!

Megoldás

Nyilván a két polinom közös gyökeit keressük. Csakhogy egyik polinom gyökeit sem ismerjük (és nincs is erre pontos módszer!). De (kézzel is fél óra alatt) kiszámítható a legnagyobb közös osztó: $x^2 - x - 2$. Az $x^2 - x - 2 = 0$ másodfokú egyenletet pedig már könnyen megtudjuk oldani. Így kapjuk, hogy a megoldások: $x_1 = 2$, $x_1 = -1$.

Közös gyökök

Tétel

Két ($\mathbb{C}$-feletti) polinom közös gyökei pontosan a legnagyobb közös osztójuk gyökei.

Feladat

Oldjuk meg az $x^7 - 4x^5 + 7x^3 - 4x^2 - x^6 + 2x^4 - 5x + 2 = 0$ és $x^5 - 3x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 7x - 2 = 0$ egyenletekből (két egyenletből) álló egyenletrendszert!

Megoldás

Nyilván a két polinom közös gyökeit keressük. Csakhogy egyik polinom gyökeit sem ismerjük (és nincs is erre pontos módszer!). De (kézzel is fél óra alatt) kiszámítható a legnagyobb közös osztó: $x^2 - x - 2$. Az $x^2 - x - 2 = 0$ másodfokú egyenletet pedig már könnyen megtudjuk oldani. Így kapjuk, hogy a megoldások: $x_1 = 2$, $x_1 = -1$.

Amikor közelítőleg akarjuk egy polinom gyökeit meghatározni (mondjuk 7 tizedesjegy pontossággal), akkor a többszörös gyökök sok nehézséget okoznak. Pl. az ún. húrmódszerrel a páros multiplicitású gyökök meg sem találhatók. Ezen segít az alábbi tétel, ahol $f'(x)$ az $f(x)$ polinom deriváltja (a Kalkulus tantárgy szerint).

Tétel

Legyen $f \in T[x]$ egy T test feletti legalább elsőfokú polinom a T test fölött. Ekkor a

$$g = \frac{f}{ln.k.o.(f, f')}$$

polinom gyökei pontosan ugyanazok, mint f gyökei, de g-nek minden gyöke egyszeres.

Szabadulás a többszörös gyököktől / példa

Feladat

Szabaduljunk meg az
$f(x) = x^9 + 5x^8 + 5x^7 - 11x^6 - 21x^5 + 3x^4 + 23x^3 + 7x^2 - 8x - 4$
polinom többszörös gyökeitől.

Megoldás

$f'(x) = 9x^8 + 40x^7 + 35x^6 - 66x^5 - 105x^4 + 12x^3 + 69x^2 + 14x - 8$,
$\mathrm{ln.k.o.}(f, f') = x^6 + 3x^5 - 6x^3 - 3x^2 + 3x + 2$, így

$$\frac{f(x)}{\mathrm{ln.k.o.}(f, f')} = x^3 + 2x^2 - x - 27 =: g(x).$$

A kapott $g(x)$ polinomnak pontosan ugyanazok a gyökei, mint $f(x)$-nek, de $g(x)$ mindegyik gyöke egyszeres.

Horner-módszer (motiváció)

Ha $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, akkor a kézenfekvő módszer $f(c)$ kiszámítására: $n-1$ szorzás (a c hatványaihoz), további n szorzás (ezen hatványoknak az együtthatóval való beszorzása) és n összeadás. Ez összesen $2n-1$ szorzás és n összeadás (az utóbbi nem olyan lényeges, az összeadás sokkal gyorsabb, mint a szorzás). Ennél sokkal gyorsabb a **Horner-módszer**, amely az alábbi képleten alapul:

$$f(c) =$$
$$(\ldots((((a_n c + a_{n-1})c + a_{n-2})\,c + a_{n-3})\,c + a_{n-4})\,c + \ldots)\,c + a_0.$$

Ez lényegesen kevesebb művelet: n szorzás és n összeadás. A szokásos elrendezés az alábbi:

Horner-módszer: helyettesítési érték

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^2 - x + 3; \quad f(2) = ?$$

	1	-3	0	2	-1	3
2						

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^2 - x + 3; \quad f(2) = ?$$

	1	-3	0	2	-1	3
2	1					

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^2 - x + 3; \quad f(2) = ?$$

	1	-3	0	2	-1	3
2	1	-1				

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^2 - x + 3; \quad f(2) = ?$$

	1	-3	0	2	-1	3
2	1	-1	-2			

Horner-módszer: helyettesítési érték

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^2 - x + 3; \quad f(2) = ?$$

	1	-3	0	2	-1	3
2	1	-1	-2	-2		

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^2 - x + 3; \quad f(2) = ?$$

	1	-3	0	2	-1	3
2	1	-1	-2	-2	-5	

Horner-módszer: helyettesítési érték

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^2 - x + 3; \quad f(2) = ?$$

	1	-3	0	2	-1	3
2	1	-1	-2	-2	-5	$-7 = f(2)$

Horner-módszer: osztás gyöktényezővel

Tehát a helyettesítési értéket (amely egyúttal a gyöktényezővel való osztás maradéka) Horner-módszerrel érdemes kiszámolni. De mi a helyzet a hányadossal? Már láttuk, hogy $f(c) =$

$$(\ldots((((a_n c + a_{n-1})c + a_{n-2})\, c + a_{n-3})\, c + a_{n-4})\, c + \ldots)\, c + a_0,$$

	a_n	$a_{n\text{-}1}$	$a_{n\text{-}2}$	...	a_1	a_0
c	a_n	$a_n c + a_{n\text{-}1}$	$(a_n c + a_{n\text{-}1})c + a_{n\text{-}2}$		$(\ldots)c + a_1$	$((\ldots)c + a_1)c + a_0 = f(c)$

Tehát a helyettesítési értéket (amely egyúttal a gyöktényezővel való osztás maradéka) Horner-módszerrel érdemes kiszámolni. De mi a helyzet a hányadossal? Már láttuk, hogy $f(c) =$

$$(\ldots((((a_n c + a_{n-1})c + a_{n-2})\,c + a_{n-3})\,c + a_{n-4})\,c + \ldots)\,c + a_0,$$

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
c	a_n	$a_n c+a_{n-1}$	$(a_n c+a_{n-1})c+a_{n-2}$		$(\ldots)c+a_1$	$((\ldots)c+a_1)c+a_0=f(c)$

Az egyes x-hatványok együtthatóira koncentrálva kapjuk, hogy

$$(x-c)(a_nx^{n-1}+(a_nc+a_{n-1})x^{n-2}+((a_nc+a_{n-1})c+a_{n-2})x^{n-3}+(((a_nc+a_{n-1})c+a_{n-2})c+a_{n-3})x^{n-4}+\cdots+(\ldots)c+a_0)+f(c)=$$
$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0=f(x).$$

Ez azt jelenti, hogy a Horner-módszer a hányadost is megadja: az utolsó kiszámolt elem a maradék, az előtte levők pedig (az eredeti sorrendben) a **hányados együtthatói!** Azaz:

Horner-módszer: osztás gyökténynezővel

Az egyes x-hatványok együtthatóira koncentrálva kapjuk, hogy

$$(x-c)(a_n x^{n-1} + (a_n c + a_{n-1})x^{n-2} + ((a_n c + a_{n-1})c + a_{n-2})x^{n-3} + (((a_n c + a_{n-1})c + a_{n-2})c + a_{n-3})x^{n-4} + \cdots + (\ldots)c + a_0) + f(c) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = f(x).$$

Ez azt jelenti, hogy a Horner-módszer a hányadost is megadja: az utolsó kiszámolt elem a maradék, az előtte levők pedig (az eredeti sorrendben) a **hányados együtthatói!** Azaz:

Horner-módszer: osztás gyöktényezővel

Az egyes x-hatványok együtthatóira koncentrálva kapjuk, hogy

$$(x-c)(a_nx^{n-1}+(a_nc+a_{n-1})x^{n-2}+((a_nc+a_{n-1})c+a_{n-2})x^{n-3}+$$
$$(((a_nc+a_{n-1})c+a_{n-2})c+a_{n-3})x^{n-4}+\cdots+(\ldots)c+a_0)+f(c)=$$
$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0=f(x).$$

Ez azt jelenti, hogy a Horner-módszer a hányadost is megadja: az utolsó kiszámolt elem a maradék, az előtte levők pedig (az eredeti sorrendben) a **hányados együtthatói!** Azaz:

Horner-módszer: osztás gyöktényezővel

Tétel

A Horner-módszer alkalmazásával (ebben a sorrendben) megkapjuk az $x - c$ polinommal való osztás hányadosának együtthatóit, továbbá a maradékot (ami éppen a helyettesítési érték).

Megjegyzés (Két tipikus hiba)

Vigyázat, amikor $(x - c)$-vel osztunk, a táblázat bal szélére $+c$-t kell írni. Továbbá: ha x valamelyik hatványa „hiányzik” a polinomból, akkor az 0 együtthatót jelent, ami a Horner-elrendezésből NEM hiányozhat.

Horner-módszer: osztás gyöktényezővel

Tétel

A Horner-módszer alkalmazásával (ebben a sorrendben) megkapjuk az $x - c$ polinommal való osztás hányadosának együtthatóit, továbbá a maradékot (ami éppen a helyettesítési érték).

Megjegyzés (Két tipikus hiba)

Vigyázat, amikor $(x - c)$-vel osztunk, a táblázat bal szélére $+c$-t kell írni. Továbbá: ha x valamelyik hatványa „hiányzik" a polinomból, akkor az 0 együtthatót jelent, ami a Horner-elrendezésből NEM hiányozhat.

Példa

Osszuk el az $f(x) = x^5 - 2x^4 - 5x^2 + 3x + 20$ polinomot maradékosan az $x - 2$ polinommal

Megoldás

	1	-2	0	-5	3	20
2	1	0	0	-5	-7	6

Azaz a hányados $x^4 - 5x - 7$, a maradék 6, és a maradékos osztásnak megfelelő egyenlőség: $f(x) = (x-2)(x^4 - 5x - 7) + 6$.

Horner-módszer: osztás gyöktényezővel

Példa

Osszuk el az $f(x) = x^5 - 2x^4 - 5x^2 + 3x + 20$ polinomot maradékosan az $x - 2$ polinommal

Megoldás

	1	-2	0	-5	3	20
2	1	0	0	-5	-7	6

Azaz a hányados $x^4 - 5x - 7$, a maradék 6, és a maradékos osztásnak megfelelő egyenlőség: $f(x) = (x-2)(x^4 - 5x - 7) + 6$.

Horner-módszer: átrendezés $(x-c)$ hatványai szerint

Adódhat olyan feladat (pl. a Kalkulus tantárgyban), hogy az $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ polinomot nem az x, hanem az $x - c$ hatványai szerint óhajtjuk felírni, azaz

$$f(x) = b_n(x-c)^n + b_{n-1}(x-c)^{n-1} + \ldots + b_1(x-c) + b_0 \quad (*)$$

alakban. Látszik, hogy b_0-at azonnal megkapjuk mint az $(x-c)$-vel végrehajtott osztás maradékát a Horner módszerrel. De a szintén a Horner módszerrel szolgáltatott $b_n(x-c)^{n-1} + b_{n-1}(x-c)^{n-2} + \ldots + b_1$ hányados sem megy veszendőbe, hiszen ez ugyanolyan szerkezetű (csak eggyel alacsonyabb fokú), mint az előbbi formula, tehát (ugyanúgy) ezt $(x-c)$-vel oszta maradékként b_1 adódik. És így tovább: a most nyert hányadost $(x-c)$-vel oszta maradékként b_2-t kapjuk, stb.

Tétel

A (következő oldalon látható szokásos elrendezésben) kapott maradékok (azaz helyettesítési értékek) $\nearrow$ sorrendben adják a $(*)$-beli együtthatókat.

Adódhat olyan feladat (pl. a Kalkulus tantárgyban), hogy az $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ polinomot nem az x, hanem az $x - c$ hatványai szerint óhajtjuk felírni, azaz

$$f(x) = b_n(x-c)^n + b_{n-1}(x-c)^{n-1} + \ldots + b_1(x-c) + b_0 \quad (*)$$

alakban. Látszik, hogy b_0-at azonnal megkapjuk mint az $(x-c)$-vel végrehajtott osztás maradékát a Horner módszerrel. De a szintén a Horner módszerrel szolgáltatott $b_n(x-c)^{n-1} + b_{n-1}(x-c)^{n-2} + \ldots + b_1$ hányados sem megy veszendőbe, hiszen ez ugyanolyan szerkezetű (csak eggyel alacsonyabb fokú), mint az előbbi formula, tehát (ugyanúgy) ezt $(x-c)$-vel oszta maradékként b_1 adódik. És így tovább: a most nyert hányadost $(x-c)$-vel oszta maradékként b_2-t kapjuk, stb.

Tétel

A (következő oldalon látható szokásos elrendezésben) kapott maradékok (azaz helyettesítési értékek) $\nearrow$ sorrendben adják a $(*)$-beli együtthatókat.

Adódhat olyan feladat (pl. a Kalkulus tantárgyban), hogy az $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ polinomot nem az x, hanem az $x-c$ hatványai szerint óhajtjuk felírni, azaz

$$f(x) = b_n(x-c)^n + b_{n-1}(x-c)^{n-1} + \ldots + b_1(x-c) + b_0 \quad (*)$$

alakban. Látszik, hogy b_0-at azonnal megkapjuk mint az $(x-c)$-vel végrehajtott osztás maradékát a Horner módszerrel. De a szintén a Horner módszerrel szolgáltatott $b_n(x-c)^{n-1} + b_{n-1}(x-c)^{n-2} + \ldots + b_1$ hányados sem megy veszendőbe, hiszen ez ugyanolyan szerkezetű (csak eggyel alacsonyabb fokú), mint az előbbi formula, tehát (ugyanúgy) ezt $(x-c)$-vel oszta maradékként b_1 adódik. És így tovább: a most nyert hányadost $(x-c)$-vel oszta maradékként b_2-t kapjuk, stb.

Tétel

A (következő oldalon látható szokásos elrendezésben) kapott maradékok (azaz helyettesítési értékek) $\nearrow$ sorrendben adják a $(*)$-beli együtthatókat.

Adódhat olyan feladat (pl. a Kalkulus tantárgyban), hogy az $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ polinomot nem az x, hanem az $x-c$ hatványai szerint óhajtjuk felírni, azaz

$$f(x)=b_n(x-c)^n+b_{n-1}(x-c)^{n-1}+\ldots+b_1(x-c)+b_0 \quad (*)$$

alakban. Látszik, hogy b_0-at azonnal megkapjuk mint az $(x-c)$-vel végrehajtott osztás maradékát a Horner módszerrel. De a szintén a Horner módszerrel szolgáltatott $b_n(x-c)^{n-1}+b_{n-1}(x-c)^{n-2}+\ldots+b_1$ hányados sem megy veszendőbe, hiszen ez ugyanolyan szerkezetű (csak eggyel alacsonyabb fokú), mint az előbbi formula, tehát (ugyanúgy) ezt $(x-c)$-vel oszta maradékként b_1 adódik. És így tovább: a most nyert hányadost $(x-c)$-vel oszta maradékként b_2-t kapjuk, stb.

Tétel

A (következő oldalon látható szokásos elrendezésben) kapott maradékok (azaz helyettesítési értékek) $\nearrow$ sorrendben adják a $(*)$-beli együtthatókat.

Horner-módszer: átrendezés $(x - c)$ hatványai szerint

Példa (Adott $f(x)$ átrendezése $x - 2$ hatványai szerint)

Legyen $f(x) = x^5 - 2x^4 - 5x^2 + 3x + 20$; ekkor

	1	-2	0	-5	3	20
2	1	0	0	-5	-7	6
2	1	2	4	3	-1	
2	1	4	12	27		
2	1	6	24			
2	1	8				
2	1					

Tehát
$f(x) = (x-2)^5 + 8(x-2)^4 + 24(x-2)^3 + 27(x-2)^2 - (x-2) + 6.$

Ez még messze nem a jegyzet vége; készül a több rész is folyamatosan! *De addig is . . .*

A félév tananyagának további része —a lineáris algebra— a régi jegyzetben található. (Technikailag a mátrixokat és determinánsokat túl nehéz lett volna ide átemelni; az még várat magára . . .) Az említett régi jegyzet a tantárgy honlapján (a honlapom magyar nyelvű változatáról jutunk oda), azon belül a Tananyag.pdf menüpontra kattintva érhető el (ugyanúgy, mint a jelen fájl is). A „Régi Diszkrét matematika I (MBN111): előadás-fóliák.pdf" fájlról van szó; a fájl tényleges neve: mbx111e-01-13_2012-ig.pdf . Az oldalszámok erre a fájlra vonatkoznak. A témakörökhöz tartozó feladatok (akár említem azokat itt ezen rövid összefoglalóban, akár csak a mondott pdf fájlban fordulnak elő) gyakran előfordulnak a vizsgán is.

Útmutató a tananyag lineáris algebra részéhez/1

Determinánsok (481. oldaltól): a determináns fogalma, szumma és produktumjel, determinás tulajdonságai, kiszámítása. Kifejtési tétel, Laplace-féle kifejtés. Feladatok (546. oldal).
Műveletek mátrixokkal (549. oldaltól), feladatok (556., 565., 567 oldal), egyenletrendszer $A\vec{x} = \vec{b}$ alakja (563. oldal), mátrixműveletek tulajdonságai (568. old.), blokkos szorzás (683-696. old.)
További tudnivalók determinánsokról: szorzástétel (576. old.), trianguláris mátrix determinánsa (588.old.), Vandermonde-determináns (590. old.)
Determináns kiszámítása tervszerű kinullázással: 598– old., feladatok: 599. old.

Mátrix inverze: az inverz mátrix létezése és képlete (618.old, példa: 622., 625. old.), az ellenőrzés lehetősége (623. old.), szorzatmátrix inverze (625. old.), Elemi sorátalakító mátrixok (629. old.) Mátrix inverzének gyakorlati kiszámítása (633. old., példák: 641. old.)
Lineáris egyenletrendszerek: Cramer-szabály 651. old., Gauss-elimináció (656., 667. old.), lépcsős alak, kötött és szabad ismeretlenek (661.old.); feladatok (669., 673., 676. old.)

Útmutató a tananyag lineáris algebra részéhez/3

Vektorok a síkon és a térben: kötött és szabad vektorok, műveletek, műveletek tulajdonságai (697–712.old.), skaláris szorzat és tulajdonságai (715–718. old.), vektorok haszna a geometriában (720–727. old.), vektoriális szorzat és tulajdonságai (727–731. old.); vegyesszorzat (732– old.); ezen szorzatok geometriai jelentése és kiszámítása (—747.old.). Vektorokkal megoldható tipikus vizsgafeladatok: távolság, szög és térfogat kiszámítása (747.–757. old.).
Absztrakt vektortér: (757– old.) (absztrakt) vektortér definíciója és példák (767–772, 786– 790. old.), vektorterek izomorfizmusa, Steinitz-elv, lineáris leképezés és lineáris transzformáció (774–785. old.) Feladatok (791-796., 801–817 old.). Vektorterek elemi tulajdonságai. 797–799. old.

Alterek: Altér kifeszített altér, metszet, összeg; tipikus feladatok (818–838 old.)
Dimenzió: Vektorrendszer, lineáris függetlenség és függés, generátorrendszer, bázis, Kicserélési tétel, bázis, dimenzió, koordinátasor (844–902. old.). tipikus feladatok (846., 876., 1009., 1031. old.).
Sajátérték, sajátvektor 903– old., tipikus feladat (918., 922. old.),
Vektorterek és lineáris egyenletrendszerek: megoldásaltér (925. old., homogén esetben), lineáris sokaságok (936– old.) és kapcsolatuk a lineáris egyenletrendszerekkel (953. old.), tipikus feladat (947.old.); inhomogén lineáris egyenletrendszer általános megoldása (956. old.)
Kapcsolat két bázis között: Áttérés (vagy áttérés) mátrixa, koordinátasor transformálása (997-1008.old.), feladatok (1013-1019. old.).