

# Az inga egyensúlyi helyzeteinek stabilizálása és destabilizálása

Doktori (Ph.D.) értekezés tézisei

CSIZMADIA LÁSZLÓ

TÉMAVEZETŐ:

DR. HATVANI LÁSZLÓ  
PROFESSOR EMERITUS

MATEMATIKA ÉS SZÁMÍTÁSTUDOMÁNYOK DOKTORI ISKOLA  
SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉS INFORMATIKAI KAR  
BOLYAI INTÉZET

SZEGED  
2017

# 1. Bevezetés

Disszertációm az inga felső egyensúlyi helyzetének stabilizálhatóságáról, illetve alsó egyensúlyi helyzetének destabilizálhatóságáról szól, megadva az alkalmasan választott paramétertartományokban a stabil és instabil zónákat az azokat elválasztó periodikus megoldásokból álló görbék leírása segítségével. A disszertáció fő eredménye, hogy eleminek mondható vizsgálati eszköz használatával sikerült egy korábban megjelent eredményt élesíteni és általánosítani, illetve elkészíteni az úgynevezett stabilitási térképet a Floquet-elvre épülő, bonyolult számítások használata nélkül. Ez azt is jelenti, hogy a módszer alkalmas mélyebb matematikai ismeretekre támaszkodó elmélet használatának áthidalására, segítve annak fokozatos megismerését, elsajátítását.

Rövid előszó és bevezetés után a hintázás problémáját vizsgáljuk. Bevezetjük a jelenséget leíró periodikus lépcsősfüggvény együtthatós, másodrendű, lineáris differenciálegyenlet origóhoz közeledő, és origótól távolodó megoldása fogalmát. Szükséges és elegendő föltételeket adunk ezek létezésére, és segítségükkel megfogalmazzuk a mozgásegyenlet periodikus megoldásainak létét garantáló tételt.

Ezt követően az inga felső egyensúlyi helyzete körüli mozgásokra koncentrálnunk. Egy korábban megjelent publikáció ([28]) módszerét kiterjesztve az abban található, az inga felső egyensúlyi helyzetének stabilizálhatóságáról szóló eredményt élesítjük és egyben alkalmazzuk az általános esetre.

Végül ugyancsak a felső egyensúlyi helyzet stabilizálhatóságával foglalkozunk olyan módon, hogy a  $2T$ -periodikus, lépcsősfüggvény együtthatós egyenlet  $2T$ -, illetve  $4T$ -periodikus megoldásait állítjuk elő. A fázissíkon ezen periodikus megoldásoknak megfelelő görbék segítségével a korábbi, becsléssel kapott, stabilitási zónákra vonatkozó eredményeinket pontosítjuk, s így az egzakt stabilitási térképet tudjuk elkészíteni.

Az értekezés a szerző következő publikációin alapul:

- L. Csizmadia, L. Hatvani, An extension of the Levi-Weckesser method to the stabilization of the inverted pendulum under gravity, *Meccanica*, **49**(2014), 1091–1100.
- L. Csizmadia, L. Hatvani, On a linear model of swinging with a periodic step function coefficient, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **81**(2015), 483–502.
- L. Csizmadia, L. Hatvani, On the existence of periodic motions of the excited inverted pendulum by elementary methods (benyújtva).

A tézisfüzetben található jelölések és számozások (a formulák azonosítójától eltekintve) megegyeznek a disszertációban használtakkal.

## Előzmények

A matematikai inga egy merev, elhanyagolható tömegű,  $l = \text{const.}$  hosszúságú rúdból és a hozzá rögzített  $m$  tömegű tömegpontból áll [1, 8]. Az egyik állapothatározó az inga rúdjának függőleges iránnyal bezárt szöge ( $\psi$ ), mely pozitív irányú, ha az óramutató járásával ellentétes, a másik ennek idő szerinti deriváltja. Ha az ingára a gravitáción kívül más erő nincs hatással, akkor mozgását a

$$\ddot{\psi} + \frac{g}{l} \sin \psi = 0 \quad (-\infty < \psi < \infty) \quad (1)$$

differenciálegyenlet írja le.

Amint az (1) egyenletből látható, a rendszernek két egyensúlyi helyzete van:  $\psi \equiv 0 \pmod{2\pi}$ , illetve  $\psi \equiv \pi \pmod{2\pi}$ , amit rendre alsó, illetve felső egyensúlyi helyzetnek hívunk. Az A. M. Ljapunov által bevezetett stabilitási fogalmakkal [32] élve azt mondhatjuk, hogy az alsó egyensúlyi helyzet stabil, míg a felső instabil. A nemlineáris egyenletek első közelítésben történő stabilitásvizsgálata, melyet először Ljapunov írt le [31], azt jelenti, hogy az eredeti rendszert - szokás perturbált rendszernek nevezni - egy alkalmas, lineáris - perturbálatlan - rendszerrel közelítjük. Jelen esetben ez azt jelenti, hogy az egyensúlyi helyzetek kis környezetében - jelölje ezeket rendre  $U_0$  és  $U_\pi$  - az (1) egyenletet linearizáljuk. Ha  $\psi \in U_0$ , akkor  $\sin \psi \approx \psi$ , ha pedig  $\psi \in U_\pi$ , akkor  $\sin \psi \approx -\psi + \pi = -(\psi - \pi)$ . Legyen  $\theta := \psi - \pi$ , vagyis amikor  $\psi = \pi$ , akkor  $\theta = 0$ . Fölírhatjuk most már az alsó, illetve felső egyensúlyi helyzet körüli „kis” mozgásokat leíró lineáris másodrendű differenciálegyenleteinket:

$$\ddot{\psi} + \frac{g}{l} \psi = 0, \quad \ddot{\theta} - \frac{g}{l} \theta = 0. \quad (2)$$

Az általunk vizsgált mozgásegyenleteket formailag az

$$\ddot{x} \pm a^2(t)x = 0, \quad a(t) := a_k, \text{ ha } t_{k-1} \leq t < t_k \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (3)$$

alakúra tudjuk hozni, ahol  $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ ,  $\{t_k\}_{k=0}^\infty$  pozitív számok olyan sorozatai, melyekre  $t_k < t_{k+1}$  minden  $k \in \mathbb{N}$  esetén,  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ , és  $t_0 := 0$ .

Amikor a felső egyensúlyi helyzetet stabilizálni, az alsót pedig destabilizálni akarjuk, akkor a (2) egyenletekben a lineáris tag együtthatója nem állandó, hanem egy periodikus függvény. Mi azokat az eseteket vizsgáljuk, amikor ez az együttható egy periodikus lépcsősfüggvény, és egy periódus két lépcsőből áll. A [16]-ban bevezetett és a [17]-ben kifejtett módszerrel a (2) egyenletek átírhatóak egy-egy megfelelő, úgynevezett impulzív dinamikus rendszerbe. Nevezetesen, az alsó egyensúlyi helyzet körüli mozgásokat leíró egyenlet az

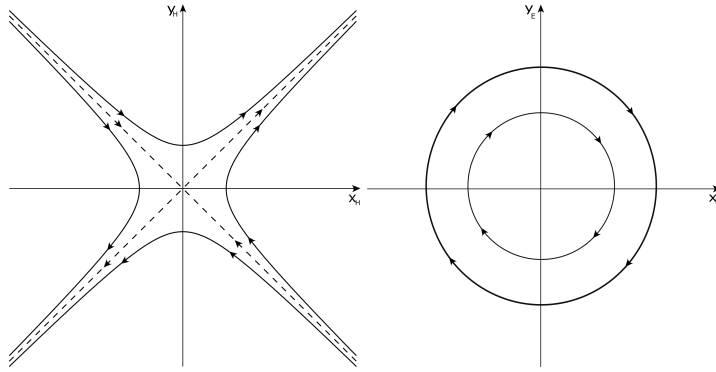
$$\begin{cases} \dot{x} = a_k y, & \dot{y} = -a_k x & (t_{k-1} \leq t < t_k), \\ x(t_k) = x(t_k - 0), & y(t_k) = \frac{a_k}{a_{k+1}} y(t_k - 0) & (k \in \mathbb{N}) \end{cases} \quad (4)$$

rendszerbe, míg a felső egyensúlyi helyzet körüli mozgásokra vonatkozó egyenlet az

$$\begin{cases} \dot{x} = a_k y, & \dot{y} = a_k x & (t_{k-1} \leq t < t_k), \\ x(t_k) = x(t_k - 0), & y(t_k) = \frac{a_k}{a_{k+1}} y(t_k - 0) & (k \in \mathbb{N}) \end{cases} \quad (5)$$

rendszerbe transzformálható, ahol  $f(t-0)$  az  $f$  függvény bal oldali határértéke a  $t$  helyen. Az impulzív jelző arra utal, hogy a fázissíkon a (4), illetve (5) dinamikák folytonos komponensei között egy függőleges irányú kontrakció/dilatáció történik.

Nem nehéz megmutatni, hogy a (4) rendszer folytonos komponense origó körüli „elliptikus (közönséges) forgatás”, s így a trajektóriák origó körüli körívek, míg a (5) rendszer folytonos komponense „hiperbolikus forgatás”, lásd az 1 ábrát. Tehát ebben az esetben a fázispont hiperbolákon mozog.



1. ábra. Hiperbolikus és elliptikus forgás

## 2. A hintázásról

A hinta egy olyan inga, melynek hossza az időben változik: a hintázó hol guggoló, hol kinyújtott testhelyzetet vesz föl, azaz testének tömegközéppontját hol följebb, hol lejjebb helyezve igyekszik a hinta alsó egyensúlyi helyzetét destabilizálni. Arnold [1] művében leírtak szerint, tegyük föl, hogy a hintázó hatására a hinta hossza periodikusan változik, azaz tekintsük az

$$\ddot{x} + a^2(t)x = 0,$$

$$a(t) := \begin{cases} a_1 := \sqrt{\frac{g}{l-\varepsilon}}, & \text{ha } 2kT \leq t < (2k+1)T, \\ a_2 := \sqrt{\frac{g}{l+\varepsilon}}, & \text{ha } (2k+1)T \leq t < (2k+2)T, \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (6)$$

egyenletet, ahol  $x$  jelöli az inga rúdjának a függőlegessel bezárt szögét, továbbá  $\varepsilon > 0$  az a paraméter, melynek segítségével a hintázás intenzitását jellemezzük,  $T > 0$  az inga hosszváltozásának fél periódusa. A hintázás problémáját a következőképpen lehet megfogalmazni: határozzuk meg a  $(T, \varepsilon)$  paramétersík instabil tartományát, vagyis azon részét, ahonnan választott paraméterértékekkel a (6) egyenlet  $x = 0$  megoldása instabil.

Periodikus együtthatós differenciálegyenletek vizsgálatához nagy segítséget nyújt a Floquet-elv, amelynek itt egy következményét fogalmazzuk meg. Legyen  $\Phi(t)$  a (6) egyenlet azon alapmátrixa, melyre teljesül, hogy  $\Phi(0) = E$ , ahol  $E$  a  $2 \times 2$ -es egységmátrix. Ha  $|\text{Tr } \Phi(T)| < 2$ , akkor a (6) egyenlet  $x = 0$  megoldása stabil. Továbbá, ha  $|\text{Tr } \Phi(T)| > 2$ , akkor a (6) egyenlet  $x = 0$  megoldása instabil. Ennek alkalmazása, ahogyan azt az [1] műben is láthatjuk, gyakran sorfejtéseken alapuló becslések használatára vezet, sokszor nehézkessé válik. Mivel célunk a pontos instabilitási tartomány leírása, ezért más, ráadásul könnyebben számolható utat mutatunk. Azt viszont nagyon lényeges megjegyezni, amint az a Floquet-elvből következik, hogy az instabilitási tartomány határát a  $|\text{Tr } \Phi(T)| = 2$  egyenlet írja le. Elemi módszerekkel megmutatjuk, hogy a  $(T, \varepsilon)$  sík instabilitási zónájának határát azon  $T = f(\varepsilon)$ ,  $T = g(\varepsilon)$  görbék alkotják, melyek pontjai megfelelnek a (6) egyenlet  $2T$ - vagy  $4T$ -periodikus megoldásainak. Azt is megmutatjuk, hogy  $f(\varepsilon)$ ,  $g(\varepsilon)$  a  $((k/2)(\pi\sqrt{l/g}), 0)$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) pontok valamelyikéhez konvergálnak, amint  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Ennek a ténynek van egy fontos gyakorlati jelentése. Ha minél kisebb energiabefektetéssel akarunk destabilizálni, illetve kis gyermeket akarunk megtanítani hintázni ( $\varepsilon > 0$  kicsi), akkor a  $T = (k/2)(\pi\sqrt{l/g})$ , ( $k \in \mathbb{N}$ ) kritikus félperiódusok valamelyikét kell választani.

A destabilizálási probléma megoldásának első lépéseként próbáljunk olyan feltételeket megadni, melyek garantálják, hogy a (6) rendszer  $t \mapsto (x(t; x_0, \dot{x}_0), \dot{x}(t; x_0, \dot{x}_0))$  trajektóriája elindulva a fázissík egy  $P(x_0, \dot{x}_0)$  pontjából  $2T$  idő alatt visszatérjen a sík azon  $L$  egyenesére, mely összeköti a  $(0, 0)$  koordinátájú origót a  $P$  ponttal, vagyis  $(x(2T; x_0, \dot{x}_0), \dot{x}(2T; x_0, \dot{x}_0)) \in L$ . Egy ilyen trajektória az origóhoz közeledik, illetve távolodik az origótól attól függően, hogy  $(x(2T; x_0, \dot{x}_0), \dot{x}(2T; x_0, \dot{x}_0))$  pont közelebb, illetve távolabb van az origótól, mint az  $(x_0, \dot{x}_0)$  pont. Ha a két pont ugyanolyan távol van az origótól, akkor a megoldás vagy  $2T$ -, vagy  $4T$ -periodikus. Annak érdekében, hogy tetszőleges  $2T$  gerjesztési periódus esetén ugyanaz legyen az egyenlet periódusa ( $2L$ ), egy függetlennváltozó-transzformációt hajtunk végre ( $\tau = (L/T)t$ ). Ez azt jelenti, hogy a fázispont mozgását  $L$  függvényében tekintjük. A (4) impulzív rendszert az  $(x, y)$  sík egy diszkrét dinamikus rendszereként is interpretáljuk. Vezessük be ugyanis az  $(r, \varphi)$  polárkoordinátákat a

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (r > 0, -\infty < \varphi < \infty)$$

formulákkal. Ekkor a (4) rendszerrel ekvivalens diszkrét dinamikus rendszer:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ a_{k+2} \end{pmatrix} R(a_{k+1}(t_{k+1} - t_k)) \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (7)$$

ahol  $R(\theta)$  a forgatás, míg  $C(\kappa)$  a kontrakció-dilatáció hatását leíró mátrix. A fázispont kezdeti állapotát  $(r_0, \varphi_0)$  jelöli.

**1. Definió.** *A hintázás modelljéül szolgáló (7) egyenletrendszer egy megoldásáról azt mondjuk, hogy  $2\pi$  modulusú szögperiodikus, illetve  $4\pi$  modulusú szögperiodikus, ha*

$$\varphi(2L) \equiv \varphi_0 \pmod{2\pi}, \text{ illetve } \varphi(2L) \equiv \varphi_0 - \pi \pmod{2\pi}.$$

**2. Definió.** *A hintázás modelljéül szolgáló (7) egyenletrendszer egy  $2\pi$  modulusú, vagy  $4\pi$  modulusú szögperiodikus megoldását (origóhoz) közeledőnek, illetve (az origótól) távolodónak mondunk, ha*

$$r(2L) < r_0, \text{ illetve } r(2L) > r_0.$$

Miután a szögperiodikus origóhoz közeledő, illetve attól távolodó megoldásokat karakterizáltuk, segítségükkel megfogalmazzuk a mozgásegyenlet  $2T$ -, illetve  $4T$ -periodikus megoldásainak létezésére vonatkozó szükséges és elegendő föltételt.

**3. Tétel.** *Bármely  $\varepsilon > 0$  esetén van olyan  $\{T_k(\varepsilon)\}_{k=1}^\infty$ , illetve  $\{\tilde{T}_k(\varepsilon)\}_{k=1}^\infty$  sorozat, hogy a (6) egyenletnek a  $T = T_k(\varepsilon)$  választással  $2T_k(\varepsilon)$ -periodikus, illetve a  $T = \tilde{T}_k(\varepsilon)$  választással  $4\tilde{T}_k(\varepsilon)$ -periodikus megoldása van. Továbbá,*

$$0 < \tilde{T}_1 \leq \tilde{T}_2 < T_1 \leq T_2 < \tilde{T}_3 \leq \tilde{T}_4 < \dots; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} T_k = \infty, \quad (8)$$

és

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} 2T_{2p+1}(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} 2T_{2p+2}(\varepsilon) = (2p+2) \left( \frac{1}{2} \left( 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \right) \right),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} 2\tilde{T}_{2p+1}(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} 2\tilde{T}_{2p+2}(\varepsilon) = (2p+1) \left( \frac{1}{2} \left( 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \right) \right)$$

teljesül minden  $p \in \mathbb{N}$  esetén.

Ennek birtokában bizonyítható az a tétel, mely leírja a keresett instabilitási tartományt.

**4. Tétel.** *A (6) egyenletre vonatkozó  $(T, \varepsilon)$  paramétersík instabil tartományának belseje*

$$\cup_{0 < \varepsilon < l} (\cup_{p=0}^\infty (\{(T, \varepsilon) : T_{2p+1}(\varepsilon) < T < T_{2p+2}(\varepsilon)\} \cup \{(T, \varepsilon) : \tilde{T}_{2p+1}(\varepsilon) < T < \tilde{T}_{2p+2}(\varepsilon)\})),$$

ahol a  $T_k, \tilde{T}_k$  kifejezéseket a (8)-ben értelmeltük.

### 3. A főső egyensúlyi helyzet stabilizálása

Azt, hogy az inga főső egyensúlyi helyzetét lehetséges a fölfüggesztési pontja alkalmasan választott frekvenciájú és amplitúdójú függőleges irányú rezggetésével is stabilizálni, elsőként A. Stephenson írta le 1908-ban [34, 35]. A főső egyensúlyi helyzet körüli mozgásokat leíró egyenletet teljes részleteibe menően 1951-ben megjelent cikkeiben P. L. Kapica vizsgálta [23, 24], és azóta gyakran Kapica-ingaként hivatkoznak erre a jelenségre. M. Levi és W. Weckesser a [28] cikkükben egy egyszerű geometriai háttérű magyarázatot adnak arra, hogy miként is lehetséges a stabilizálás nagy frekvencia esetén. Dolgozatukban olyan nagy frekvenciájú rezgést vizsgálnak, melynek során a gyorsulás lényegesen nagyobb a gravitációs gyorsulás értékénél, s emiatt ez utóbbit elhagyják. Rámutatunk arra, hogy a gravitáció hatásának figyelembe vételekor az általuk adott módszer nem működik, emiatt azt módosítani kell. Tovább általánosítva az elgondolást, megvizsgáljuk, hogy a föl-le rezggetés aszimmetriája milyen hatással van a stabilizálhatóságra.

A [28] cikket követve, tegyük föl, hogy az inga fölfüggesztési pontjára olyan erő hat, melynek hatására létrejövő gyorsulás

$$a(t) := \begin{cases} A, & \text{ha } kT \leq t < (2k+1)\frac{T}{2}, \\ -A, & \text{ha } (2k+1)\frac{T}{2} \leq t < (k+1)T, \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (9)$$

Tehát az  $a(t)$  függvény egy  $T$ -periodikus lépcsősfüggvény, melyet abban az értelemben mondunk szimmetrikusnak, hogy a fél-periódusok egyenlő hosszúak, és a fölvelt függvényértékek egymás ellentettjei. A mozgásegyenletet ennek hatására a következőképp módosul:

$$\ddot{\psi} - \frac{1}{l}(g + a(t))\psi = 0. \quad (10)$$

A továbbiakban a szerzők fölteszik, hogy  $A \gg g$ , s emiatt a (10) egyenletben a gravitációs gyorsulást nem veszik figyelembe - úgynevezett gravitációmentes eset. Bevezetve az  $\omega = \sqrt{A/l}$  mennyiséget a (10) a következő, (3)-hoz hasonló formában írható:

$$\ddot{\psi} \pm \omega^2 \psi = 0,$$

ahol az előjel az  $a(t)$  függvénynek megfelelően változik.

**5. Tétel (M. Levi, W. Weckesser; [28]).** *Tekintsük a fordított inga (10) mozgásegyenletét a gravitációmentes ( $g = 0$ ) esetben. Ekkor ha*

$$\omega T < \pi \quad \left( \omega := \sqrt{\frac{A}{l}} \right), \quad (11)$$

*akkor a (10) erősen stabil.*

Az erős stabilitás röviden szólva azt jelenti, hogy a rendszer annak minden kis perturbáltjával együtt stabil. A pontos definíció a disszertációban olvasható. A (9) formulában adott függvény két értékének megfelel két különböző fázis, ahogyan azt a (3) után kifejtettük. A két különböző fázis geometriailag két különböző jellegű forgatást jelent. A szerzők alapötlete, hogy ezen forgatásokat megadó mátrixok hatására a sík vektorain létrejövő forgatás mértékét becsülték. Megtartva ezt a becsléses módszert megvizsgáljuk, hogy a gravitáció hatását is figyelembe véve mire jutunk. Föltesszük továbbá, hogy a fölfüggesztési pontot egy aszimmetrikus hatás éri, s így annak gyorsulása:

$$a(t) := \begin{cases} A_h, \text{ ha} & kT \leq t < kT + T_h, \\ -A_e, \text{ ha} & kT + T_h \leq t < (kT + T_h) + T_e, \\ (k = 0, 1, \dots) & ; \end{cases}$$

ahol  $A_h, A_e, T_h, T_e$  pozitív konstansok ( $T_h + T_e = T$ ), tehát a felfüggesztési pont mozgása  $T$ -periodikus. A  $h$  és  $e$  indexek arra utalnak, hogy két különböző fázisból áll össze a mozgás: egy elliptikus és egy hiperbolikus részből. A mozgás-egyenlet formailag továbbra is (10) alakú. Meggondolásaink eredményeképpen a következőt állíthatjuk.

**6. Tétel.** Jelölje  $\text{Rem}(\varphi; \pi)$  a  $\varphi \in \mathbb{R}$  valós szám osztási maradékát moduló  $\pi$  ( $0 \leq \text{Rem}(\varphi; \pi) < \pi$ ).

*Ha*

$$2 \arctan \frac{e^{\omega_h T_h} - 1}{e^{\omega_h T_h} + 1} + 4 \left| \arctan \sqrt{\frac{\omega_h}{\omega_e} - \frac{\pi}{4}} \right| < \min\{\text{Rem}(\omega_e T_e; \pi); \pi - \text{Rem}(\omega_e T_e; \pi)\}, \quad (12)$$

akkor a (10) egyenlet erősen stabil,

ahol

$$\omega_h := \sqrt{\frac{A_h + g}{l}}, \quad \omega_e := \sqrt{\frac{A_e - g}{l}}.$$

A gravitációmentes esethez képest most merőben más helyzettel állunk szemben: az eltérő  $\omega_h$  és  $\omega_e$  miatt a hiperbolikus és elliptikus fázis között az Előzményekben említett impulzív effektus történik a fázistéren. Így ennek forgató hatását is figyelembe kell venni a tétel fölírásakor. Alkalmazzuk a 6. tételt a gravitációmentes és szimmetrikus esetre. Ekkor a következőt kapjuk.

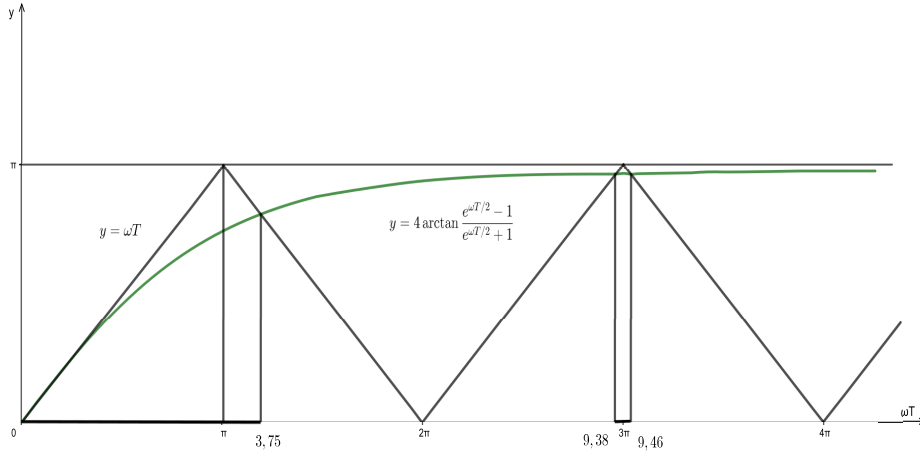
**7. Következmény.** Tegyük föl, hogy a (10) egyenletben  $g = 0$ , valamint  $A_h = A_e = A$ . *Ha*

$$4 \arctan \frac{e^{\omega T/2} - 1}{e^{\omega T/2} + 1} < \min\{\text{Rem}(\omega T; 2\pi); 2\pi - \text{Rem}(\omega T; 2\pi)\}, \quad (13)$$

akkor (10) erősen stabil.



A 7. következmény lényegesen javítja a 5. tételt: az első olyan intervallum, ami-  
 be stabil megoldásoknak megfelelő pontok vannak az  $\omega T$ -tengelyen, kielégítve a  
 (13) feltételt, a  $(0, 3,75 \dots)$  (lásd a 2. ábrát) a  $(0, \pi)$  helyett, amit a (11) alapján  
 eddig tudtunk. Másfelől pedig, a 7. következmény a 5. tételt abban az értele-  
 mben is javítja, ha úgy tetszik kiterjeszti, hogy további stabil intervallumokat  
 találhatunk az  $\omega T$ -tengelyen a  $2\pi$  után is (lásd a vastagított intervallumot a 2.  
 ábrán). Azt mondhatjuk tehát, hogy tetszőlegesen nagy  $\omega T = T\sqrt{A/l}$  esetén  
 lehetséges a stabilizálás. Erre a (11) feltételből nem lehet következtetni.



2. ábra. Stabil intervallumok

A szimmetrikus esetet ( $A_h = A_e = A, T_h = T_e = T/2$ ) Arnold is vizsgálta  
 [1], bevezetve az

$$\varepsilon := \sqrt{\frac{D}{l}}, \quad \mu := \sqrt{\frac{g}{A}},$$

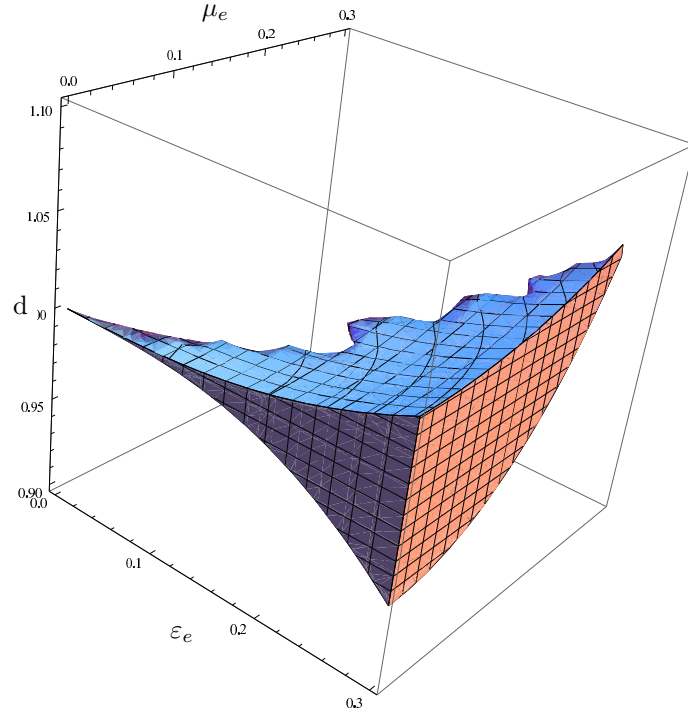
paramétereket, ahol a  $D$  a fölfüggesztési pont legnagyobb kitérése (amplitúdója)  
 a rezgetés során. Arnold azzal a föltevással élt, hogy ezek a paraméterek kicsik  
 ( $\varepsilon \ll 1, \mu \ll 1$ ); és a Floquet-elvre vonatkozó közvetlen számolásokkal jutott  
 arra a közelítésre, hogy  $\mu < \varepsilon/3$  elegendő feltétele az erős stabilitásnak. Alkal-  
 mazva a 6. tételünket ebben a szimmetrikus, a gravitáció hatását is figyelembe  
 vevő esetben, az  $\varepsilon$  és  $\mu$  paraméterek segítségével átírva a (12) föltételt, valamint  
 semmilyen nagyságrendi korlátot föl nem tételezve a paraméterek értékeire, az  
 $\varepsilon - \mu$  sík *globális* stabilitási térképét kapjuk.

Az általános (aszimmetrikus) esetet tekintve, használva az Arnold nyomán  
 bevezetett

$$\varepsilon_h := \sqrt{\frac{D_h}{l}}, \quad \mu_h := \sqrt{\frac{g}{A_h}}; \quad \varepsilon_e := \sqrt{\frac{D_e}{l}}, \quad \mu_e := \sqrt{\frac{g}{A_e}}.$$

paramétereket, valamint a

$$d := \frac{\varepsilon_h}{\varepsilon_e} = \frac{\mu_h}{\mu_e} = \sqrt{\frac{A_e}{A_h}} = \sqrt{\frac{T_h}{T_e}} = \sqrt{\frac{D_h}{D_e}},$$



3. ábra. A stabilitási tartomány egy része az aszimmetrikus esetben

paramétert, amelyik méri a hiperbolikus és elliptikus fázis arányát a fölfüggesztési pont rezgetése során, a 6. tétel a következő alakot ölti:

**8. Következmény.** *Ha*

$$2 \arctan \frac{\exp \left[ 2\sqrt{2}d\varepsilon_e \sqrt{1 + d^2\mu_e^2} \right] - 1}{\exp \left[ 2\sqrt{2}d\varepsilon_e \sqrt{1 + d^2\mu_e^2} \right] + 1} + 4 \left| \arctan \frac{\sqrt{\frac{1 + d^2\mu_e^2}{1 - \mu_e^2}}}{d} - \frac{\pi}{4} \right| <$$

$$< \min\{\text{Rem}(2\sqrt{2}\varepsilon_e \sqrt{1 - \mu_e^2}; \pi); \pi - \text{Rem}(2\sqrt{2}\varepsilon_e \sqrt{1 - \mu_e^2}; \pi)\},$$

*akkor a (10) egyenlet erősen stabil.*

A 8. következmény által megadott stabilitási tartomány egy részét láthatjuk a 3. ábrán.

Nem nehéz belátni, hogy az aszimmetrikusan rezgetett eset kedvezőbb a stabilitás szempontjából, hiszen a gyorsulást egy előre adott értéken lehet rögzíteni. Tehát bármely  $\bar{\mu}_e$  ( $0 \leq \bar{\mu}_e < \sqrt{2}/2$ ) esetén található olyan  $\bar{d} \geq 1$  és  $\bar{\varepsilon}_e^{(k)}$  ( $\bar{\varepsilon}_e^{(k)} \rightarrow \infty$ , ha  $k \rightarrow \infty$ ) úgy, hogy a (10) egyenlet az  $\bar{\varepsilon}_e^{(k)}$ ,  $\bar{\mu}_e$ ,  $\bar{d}$  paraméterekkel erősen stabil.

## 4. A fordított inga periodikus mozgásai

Az előző fejezetben az inga felső egyensúlyi helyzetének stabilizálhatóságával kapcsolatos vizsgálataink során, becsléseken alapuló számolások segítségével eljutottunk a globális stabilitási térkép egy jó közelítéséhez. Ebben a fejezetben célunk, hogy a fordított ingára vonatkozóan elkészítsük a pontos stabilitási térképet úgy, hogy megkeressük a  $2T$ -periodikus együtthatós egyenlet  $2T$ -, illetve  $4T$ -periodikus megoldásait, melyekről tudjuk, hogy az ezeknek megfelelő görbék alkotják a paramétersík instabil zónájának határát.

Ebben a részben azt az esetet tárgyaljuk, amikor az inga fölfüggesztési pontjára egy függőleges irányú szimmetrikus erő gyakorol hatást, továbbá a gravitáció hatását is figyelembe vesszük. Tekintsük tehát a (9) egyenlettel adott lépcsősfüggvényt mint az inga fölfüggesztési pontjára kifejtett rezgetés hatására létrejövő gyorsulást. A (9)-ben adothoz képest annyi technikai változtatást teszünk, hogy az említett gyorsulás  $2T$ -periodikus. A (10) mozgásegyenletet a hintázás problémájánál látottakhoz hasonlóan, a fázistérben ható diszkrét impulzív rendszerbe transzformálással, és így a fázistér trajektóriái segítségével vizsgáljuk.

Meggondolásaink nyomán kiderült, hogy  $2T$ -, illetve  $4T$ -periodikus megoldásnak megfelelő trajektóriát nem indíthatunk az  $(x, y)$  fázissík tetszőleges pontjából, hanem csakis az  $y = -x$  egyenes, tehát a stabil altér közeléből. Ezeket a megfelelő trajektóriákat föltárva jutunk a fejezet fő eredményéhez: a keresett periodikus megoldások létezésére vonatkozó szükséges és elegendő föltételt megadó tételekhez.

**9. Tétel.** *A (10) egyenletnek akkor és csakis akkor van  $2T$ -periodikus megoldása, ha vannak olyan  $A$  és  $T$  pozitív konstansok az (9) kifejezésben, és van olyan nemnegatív egész  $k$ , hogy vagy*

$$2 \arctan \left( D \frac{e^{\omega_h T} - 1}{e^{\omega_h T} + 1} \right) + 2k\pi = \omega_e T,$$

*vagy*

$$2 \arctan \left( D \frac{e^{\omega_h T} + 1}{e^{\omega_h T} - 1} \right) + (2k + 1)\pi = \omega_e T.$$

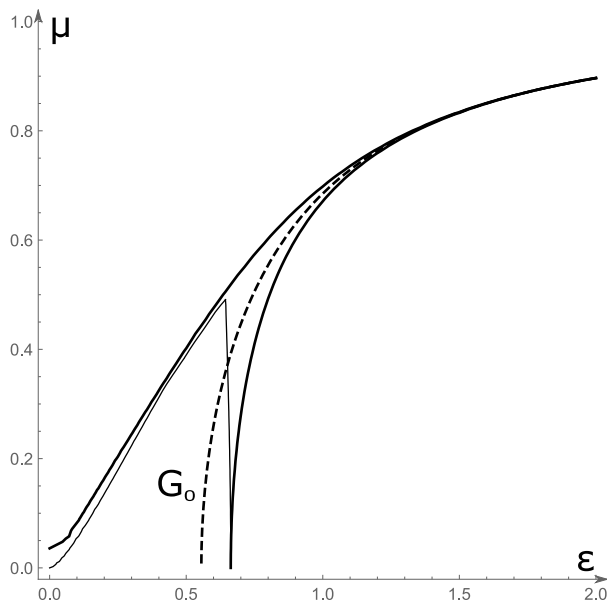
**10. Tétel.** *A (10) egyenletnek akkor és csakis akkor van  $4T$ -periodikus, de nem  $2T$ -periodikus megoldása, ha vannak olyan  $A$  és  $T$  pozitív konstansok az (9) kifejezésben, és van olyan nemnegatív egész  $k$ , hogy vagy*

$$2 \arctan \left( D \frac{e^{\omega_h T} - 1}{e^{\omega_h T} + 1} \right) + (2k + 1)\pi = \omega_e T,$$

*vagy*

$$2 \arctan \left( D \frac{e^{\omega_h T} + 1}{e^{\omega_h T} - 1} \right) + 2k\pi = \omega_e T.$$

Így már a pontos stabilitási térképet tudjuk elkészíteni, valamint arra is mód van, hogy összehasonlítsuk a becsléssel kapott eredményünkkel a teljesen pontosat. Ez utóbbit láthatjuk a 4. ábrán. A  $G_0$  jelű görbe környezetében található a stabil zóna, szokás azt mondani, hogy ez a görbe alkotja az adott Arnold-nyelv gerincét.



4. ábra. A korábban becsléssel kapott és a pontos stabil zóna

## Hivatkozások

- [1] V. I. Arnold, *Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [2] D. J. Acheson, T. Mullin, Upside-down pendulums, *Nature*, **366**(2004), 215–216.
- [3] J. Barrow, *100 alapvető dolog a matematikáról és a művészetről, amiről nem tudtuk, hogy nem tudjuk*, Akkord Kiadó Kft, 2015.
- [4] J. A. Blackburn, H. J. T. Smith and N. Gronbeck-Jensen, Stability and Hopf bifurcation in an inverted pendulum, *Amer. J. Physics*, **60**(1992), 903–908.
- [5] H. Broer, M. Levi, Geometrical aspects of stability theory for Hill's equations, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **131**(1995), 225–240.

- [6] H. Broer, C. Simo, Resonance Tongues in Hill's Equations; A Geometric Approach, *J. Differential Equations*, **166**(2000), 290–327.
- [7] E. Butikov, An improved criterion for Kapitza's pendulum, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**(2011), 1–16.
- [8] C. Chicone, *Ordinary Differential Equations with Applications*, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [9] L. Csizmadia, L. Hatvani, An extension of the Levi-Weckesser method to the stabilization of the inverted pendulum under gravity, *Meccanica*, **49**(2014), 1091–1100.
- [10] L. Csizmadia, L. Hatvani, On a linear model of swinging with a periodic step function coefficient, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **81**(2015), 483–502.
- [11] L. Csizmadia, L. Hatvani, On the existence of periodic motions of the excited inverted pendulum by elementary methods (benyújtva).
- [12] S. Csörgő, L. Hatvani, Stability properties of solutions of linear second order differential equations with random coefficients, *J. Differential Equations*, **248**(2010), no. 1, 21–49.
- [13] A. M. Formal'skii, On the stabilization of an inverted pendulum with a fixed or moving suspension point, *Dokl. Akad. Nauk*, **406**(2006), no. 2, 175–179.
- [14] J. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Wiley-Interscience, New York, 1969.
- [15] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, Birkhäuser, Boston, 2nd edn., 1982.
- [16] L. Hatvani, On the existence of a small solution to linear second order differential equations with step function coefficients, *Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems*, **4**(1998), 321–330.
- [17] L. Hatvani, An elementary method for the study of Meissner's equation and its application to proving the Oscillation Theorem, *Acta Sci. Math.*, **79**(2013), no. 1–2, 87–105.
- [18] L. Hatvani, On the parametrically excited pendulum equation with a square wave coefficient, *Internat. J. Non-Linear Mech.*, **77**(2015), 172–182.
- [19] L. Hatvani, On small solutions of second order linear differential equations with non-monotonous random coefficients, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **68**(2002), 705–725.

- [20] L. Hatvani, L. Stachó, On small solutions of second order differential equations with random coefficients, *Arch. Math. (Brno)*, Equadiff 9 (Brno, 1997), **34**(1998), 119–126.
- [21] G. W. Hill, On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon, *Acta Mathematica*, **12**(1886), Vol. 8, 1–36.
- [22] H. Hochstadt, A special Hill's equation with discontinuous coefficients, *Amer. Math. Monthly*, **70**(1963), 18–26.
- [23] P. L. Kapitsa, Dynamical stability of a pendulum when its point of suspension vibrates, *Zh. Eksper. Teoret. Fiz.*, **21**(1951) (Russian)
- [24] P. L. Kapitsa, Pendulum with a vibrating suspension, *Uspekhi Fiz. Nauk*, **44**(1951) (Russian)
- [25] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Mechanics*, Course of Theoretical Physics, Vol. 1, Elsevier, Amsterdam, 1976.
- [26] M. Levi, Stability of the inverted pendulum - a topological explanation, *SIAM Rev.*, **30**(1988), 639–644.
- [27] M. Levi, Geometry of Kapitsa' potentials, *Nonlinearity*, **11**(1998), 1365–1368.
- [28] M. Levi, W. Weckesser, Stabilization of the inverted, linearized pendulum by high frequency vibrations, *SIAM Rev.*, **37**(1995), 219–223.
- [29] W. Magnus, S. Winkler, *Hill's equation*, Dover Publications, Inc., New York, 1979.
- [30] J. Meixner, F.W. Schäfer, *Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen*, Springer, 1954.
- [31] E. Meissner, Über Schüttel-schwingungen in Systemen mit Periodisch Veränderlicher Elastizität, *Schweizer Bauzeitung*, **72**(1918), no. 10, 95–98.
- [32] D. R. Merkin, *Introduction to the Theory of Stability*, Springer-Verlag, 1997.
- [33] A. A. Seyranian and A. P. Seyranian, The stability of an inverted pendulum with a vibrating suspension point, *J. Appl. Math. Mech.*, **70**(2006), 754–761.
- [34] A. Stephenson, On an induced stability, *Phil. Mag.*, Vol. 15. **6**(1908), 233–236.

- [35] A. Stephenson, On a new type of dynamical stability, *Manchester Memoirs*, **52**(1908), 1–10.
- [36] G. Stépán, Mikrokaosz, *Természet Világa*, **135**(2004), 60–64.
- [37] B. Van der Pol, M.J. O. Strutt, On the stability of the solutions of Mathieu's equation, *The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag.*, 7th Series **5**(1928), 18–38.

## Társszerzői nyilatkozat

Kijelentem, hogy ismerem Csizmadia László Ph. D. fokozatra pályázó Az inga egyensúlyi helyzeteinek stabilitása és destabilitása című disszertációját, amelyet a Szegedi Tudományegyetemre nyújt be.

A következő cikkekből felhasznált eredményekben a pályázó hozzájárulása meghatározó volt:

- L. Csizmadia, L. Hatvani, An extension of the Levi-Weckesser method to the stabilization of the inverted pendulum under gravity, *Meccanica*, **49**(2014), 1091–1100.
- L. Csizmadia, L. Hatvani, On a linear model of swinging with a periodic step function coefficient. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **81**(2015), 483–502.
- L. Csizmadia, L. Hatvani, On the existence of periodic motions of the excited inverted pendulum by elementary methods (benyújtva).

Csizmadia László hozzájárulása ezekhez a cikkekhez 50-50%.

Kijelentem, hogy ezeket az eredményeket nem használtam fel, és nem is fogom felhasználni tudományos fokozat megszerzéséhez.

Szeged, 2017. december 20.

Dr. Hatvani László  
Szegedi Tudományegyetem  
MTA rendes tagja