2015.06.30. Műmat NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. A megfelelő sorfejtések első 4 tagjának segítségével becsüljük meg $\int_1^2 \frac{e^{-x^2}}{x}\,dx$, illetve $\ln 5$ értékét. *22pt*

2. Ábrázoljuk a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z+3-i)^{n-2}}{5^n\sqrt{2n-1}}$ függvénysor konvergencia tartományát. Hogyan viselkedik a sor a $z_1 = -4 + i/2$, illetve a $z_1 = 1 + i$ pontban? *22pt*

3. Határozzuk meg $\int_\gamma \frac{z + 2Imz}{3Rez - i}\,dz$ értékét, ahol γ a:) a $z_1 = 0 \to z_3 = 2 + i$ pontokat összekötő szakasz, b:) a $z_1 = 0 \to z_2 = 2 \to z_3 = 2 + i$ pontokat összekötő tört szakasz. *23pt*

4. Határozzuk meg az $f(z) = \frac{z-i}{z^3+8}$ Laurent–sorait a $z_0 = 1 - i$ pont körül kifejtve. *23p*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a), \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x)e^{-px}dx, \quad L[e^{ax}f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p), \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}},$$

$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\int_k^\infty f(x)dx < \sum_{n=k}^\infty a_n < a_k + \int_k^\infty f(x)dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad a_0 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)dx,$$

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\sin nx dx$$

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad u'_x = v'_y, \ -u'_y = v'_x, \quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz, \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)\,dz, \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^\infty c_n(z-z_0)^n.$$

$$Res(f,a) = \frac{h(a)}{g'(a)}, \quad Res(f,a) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}[(z-a)^n f(z)]^{(n-1)}.$$

$$c_k := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)e^{-ikx}\,dx, \quad \hat{f}(x) := \sum_{k=-\infty}^\infty c_k e^{ikx}, \quad \hat{F}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-i\omega x}\,dx$$

2015.06.30. Matematika II. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. A tanult módon vizsgáljuk a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{n+1} \left(\frac{3x-1}{2} \right)^{n-3}$ sort. *22pt*
2. Oldjuk meg: $xy' - y = 4x^2 - 1 - y'$, $y(1) = 2$. *22pt*
3. Ábrázoljuk az $f(x, y) = x - \sqrt{2x - y}$ függvény értelmezési tartományát, majd definíció alapján és formálisan is határozzuk meg az $f'_x(2, 1)$, $f''_{xx}(1, -1)$ parciális deriváltakat. *23pt*
4. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 - 2xy - y^2 + 4y$ függvény szélsőértékeit a $(0, 0)$, $(1, 3)$ és $(2, 0)$ pontok által kijelölt zárt háromszögön. *23pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ (\alpha\neq-1),\quad \int\frac{1}{x+a}dx=\ln|x+a|+C,\ (x\neq a),\quad \int\sin x dx=-\cos x+C$$
$$\int\cos x dx=\sin x+C,\quad \int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\operatorname{tg}x+C,\quad \int\frac{1}{x^2+1}dx=\operatorname{arctg}x+C,\quad \int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\operatorname{ctg}x+C,$$
$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C,\quad \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C,\ (0<a\neq 1),$$
$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C,\quad \int\frac{1}{\sin x}dx=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

$$L[f](p):=\int_0^{\infty}f(x)e^{-px}dx,\quad L[e^{ax}f(x)](p)=L[f(x)](p-a),\quad L[xf(x)](p)=-L'[f(x)](p),\quad L[x^n](p)=\frac{n!}{p^{n+1}},$$
$$L[\cos ax](p)=\frac{p}{p^2+a^2},\quad L[\sin ax](p)=\frac{a}{p^2+a^2},\quad L[y']=pL[y]-y(0),\quad L[y'']=p^2L[y]-py(0)-y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}<\infty \iff p>1,\quad \sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\iff |x|<1,\quad (1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n\iff |x|<1,$$
$$\int_k^{\infty}f(x)dx<\sum_{n=k}^{\infty}a_n<a_k+\int_k^{\infty}f(x)dx.$$

$$\tilde{f}(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right),\quad a_0:=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,$$
$$a_n:=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx,\quad b_n:=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx$$

$$z=x+iy,\quad f(z)=u(x,y)+iv(x,y),\quad u'_x=v'_y,\ -u'_y=v'_x,\quad u''_{xx}+u''_{yy}=0$$

$$\int_L f(z)dz=\int_{\alpha}^{\beta}f(z(t))z'(t)dt$$

$$c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\ dz,\quad c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}f(z)\ dz,\quad f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n.$$

$$Res(f,a)=\frac{h(a)}{g'(a)},\quad Res(f,a)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}[(z-a)^nf(z)]^{(n-1)}.$$

$$c_k:=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}\ dx,\quad \hat{f}(x):=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ikx},\quad \hat{F}(\omega):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}\ dx$$