2015.06.02. Műmat NÉV:.....

A csoport EHA:.....

FELADATOK

1. Laplace–transzformációval oldjuk meg: $y'' + 2y' = e^{-x}\sin x + x - 2y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$. *22pt*
2. Ábrázoljuk a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n\sqrt{n+1}}{2n^2-1}(z+5-i)^{n-1}$ függvénysor konvergencia tartományát. Hogyan viselkedik a sor a $z_1 = -9/2 + i$, illetve a $z_1 = -11/2 + i$ pontban? *22pt*
3. Határozzuk meg $\int_\gamma (Rez - 2i)z\ dz$ értékét, ahol γ a:) a $\gamma^+_{1+i,2}$ kör $z_1 = 3 + i \to z_2 = 1 - i$ pontjait összekötő ív, b:) a $z_1 = 3 + i \to z_2 = 1 - i$ pontokat összekötő szakasz. *23pt*
4. A Reziduum–tétel alkalmazásával, illetve a Laurent–sor segítségével is határozzuk meg $\oint_\gamma \frac{2z+3i}{z^3+8}\ dz$ értékét, ahol γ a $\gamma^-_{-1+i,3}$ görbe. *23pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a), \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x)e^{-px}dx, \quad L[e^{ax}f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p), \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}},$$

$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\int_k^\infty f(x)dx < \sum_{n=k}^\infty a_n < a_k + \int_k^\infty f(x)dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \quad a_0 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)dx,$$

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\sin nx dx$$

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad u'_x = v'_y, \ -u'_y = v'_x, \quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz, \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)\,dz, \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^\infty c_n(z-z_0)^n.$$

$$Res(f,a) = \frac{h(a)}{g'(a)}, \quad Res(f,a) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}[(z-a)^n f(z)]^{(n-1)}.$$

$$c_k := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)e^{-ikx}\,dx, \quad \hat{f}(x) := \sum_{k=-\infty}^\infty c_k e^{ikx}, \quad \hat{F}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-i\omega x}\,dx$$

2015.06.02. Matematika II. NÉV:.....

A csoport EHA:.....

FELADATOK

1. A tanult módon vizsgáljuk a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^{n-2}}{5^n\sqrt{2n-1}}$ sort. *22pt*
2. Oldjuk meg: $(x^2+3x)y' + 4 = y^2,\ y(1) = 2.$ *23pt*
3. Definíció alapján és formálisan is határozzuk meg az $f(x,y) = 2x + \sqrt{xy} - 1/y$ függvény $f'_x(-2,-3)$, $f'_y(4,1)$ parciális deriváltjait. *22pt*
4. Határozzuk meg $\int_H \int \frac{x+y}{2x+1}\, dxy$ értékét, ahol H a $(3,0)$, $(1,3)$ és $(0,0)$ pontok által kijelölt zárt háromszög. *23pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a), \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x)e^{-px}dx, \quad L[e^{ax}f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p), \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}},$$

$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\int_k^\infty f(x)dx < \sum_{n=k}^\infty a_n < a_k + \int_k^\infty f(x)dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \quad a_0 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)dx,$$

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\sin nx dx$$

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad u'_x = v'_y, \ -u'_y = v'_x, \quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz, \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)\,dz, \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^\infty c_n(z-z_0)^n.$$

$$Res(f,a) = \frac{h(a)}{g'(a)}, \quad Res(f,a) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}[(z-a)^n f(z)]^{(n-1)}.$$

$$c_k := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)e^{-ikx}\,dx, \quad \hat{f}(x) := \sum_{k=-\infty}^\infty c_k e^{ikx}, \quad \hat{F}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-i\omega x}\,dx$$