2015.05.26. Műmat NÉV:.....

A csoport EHA:.....

FELADATOK

1. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^3 - 2xy + y^3$ szélsőértékeit a $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(-1,2)$, és $(1,2)$ pontok által kijelölt zárt négyszögön. *22pt*
2. Oldjuk meg: $a:)$ $e^z = -2$, $b:)$ $\cos z = -i$, $c:)$ $\ln z = 3i$. *22pt*
3. Határozzuk meg $\int_\gamma (z+3i)Rez\ dz$ értékét, ahol γ a $\gamma_{i,2}$ körív $z_1 = 2+i \to z_2 = -2+i$ pontjait köti össze a:) pozitív, b:) negatív irányban. *23pt*
4. A Cauchy–féle integrálformula és a Reziduum–tétel alkalmazásával is határozzuk meg $\oint_\gamma \frac{z^2 - 2iz}{(z+i)^2}\ dz$ értékét, ahol $\gamma : \gamma^+_{0,2}$. *23pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a), \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x)e^{-px}dx, \quad L[e^{ax}f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}},$$
$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$
$$\int_k^\infty f(x)dx < \sum_{n=k}^\infty a_n < a_k + \int_k^\infty f(x)dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad a_0 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)dx,$$
$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\sin nx dx$$

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad u'_x = v'_y, \ -u'_y = v'_x, \quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz, \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)\,dz, \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^\infty c_n(z-z_0)^n.$$

$$Res(f,a) = \frac{h(a)}{g'(a)}, \quad Res(f,a) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}[(z-a)^n f(z)]^{(n-1)}.$$

$$c_k := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)e^{-ikx}\,dx, \quad \hat{f}(x) := \sum_{k=-\infty}^\infty c_k e^{ikx}, \quad \hat{F}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-i\omega x}\,dx$$

2015.05.26. Matematika II. NÉV:.....

A csoport EHA:.....

FELADATOK

1. a) Határozzuk meg a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n-1} - 3 \cdot 5^{n+1}}{3^{3n+1}}$ sor összegét.

   b) Konvergens-e $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n\sqrt{\ln n^2}}$. *22pt*

2. Laplace–transzformációval oldjuk meg: $y'' + 2y' = e^{-x} \sin x - 2y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. *22pt*

3. Ábrázoljuk az $f(x, y) = \sqrt{-x + 3y}$ függvény értelmezési tartományát, majd definíció alapján és formálisan is határozzuk meg az iránymenti deriváltját a $P(-1, 2)$ pontban, az $U(-4, 3)$ irányban. *23pt*

4. Határozzuk meg az $f(x, y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ függvény szélsőértékeit az $x^2 + y^2 \leq 8$ halmazon. *23pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a), \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x)e^{-px}dx, \quad L[e^{ax}f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}},$$

$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\int_k^\infty f(x)dx < \sum_{n=k}^\infty a_n < a_k + \int_k^\infty f(x)dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \quad a_0 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)dx,$$

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\sin nx dx$$

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad u'_x = v'_y, \ -u'_y = v'_x, \quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz, \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)\,dz, \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^\infty c_n(z-z_0)^n.$$

$$Res(f,a) = \frac{h(a)}{g'(a)}, \quad Res(f,a) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}[(z-a)^n f(z)]^{(n-1)}.$$

$$c_k := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)e^{-ikx}\,dx, \quad \hat{f}(x) := \sum_{k=-\infty}^\infty c_k e^{ikx}, \quad \hat{F}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-i\omega x}\,dx$$