2011.12.20. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Monotonitás és korlátosság szempontjából vizsgáljuk az $a_n = \dfrac{3n-2}{2n-1}$ sorozatot. Továbbá adjuk meg az $\inf a_n$ és $\sup a_n$ értékeket. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n+3}-\sqrt{n^2+n+5}\right), \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-5}{2n+1}\right)^{n-1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x^3 - 6x^2 - 3\sqrt{x^2}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_{-2}^{1} \frac{z^2}{\sqrt[3]{z^3+8}}dz, \qquad \text{(ii)} \int_0^\infty ue^{-u^2/2}du.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat monoton nő. *5pt*

(ii) Az f függvény differenciálható a -2 pontban. *5pt*

(iii) f–nek helyi maximuma van x_0–ban. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to -2^+} f(x) = -1$. *5pt*

(v) A korlátos E számhalmaz supremuma. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2011.12.20. Kalkulus I. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. A tanult módon vizsgáljuk az $a_1 = 2$, $a_n = \sqrt{3a_{n-1} - 1}$ rekuzív sorozatot. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to-\infty}\left(\sqrt{n^2-2n+3}-\sqrt{n^2+n+2}\right), \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{2n}-3^n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3\sqrt{x^2}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték.

(iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_{-2}^{1}\frac{z+2}{z^3+8}dz, \qquad \text{(ii)} \int_0^\infty te^{-\lambda t}dt.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ (\alpha\neq-1), \qquad \int\frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a|+C,\ (x\neq a)$$
$$\int\cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int\frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int\frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int\frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C,\ (0<a\neq1),$$
$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C, \qquad \int\frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $f(x)$ konvex $[a, b]$–n. *5pt*

(ii) Az f függvény lineárisan közelíthető az $a = 2$ pontban. *5pt*

(iii) f egyenletesen folytonos I–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = -1$. *5pt*

(v) Az $[a, b]$ egy beosztása, a beosztás finomsága. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2011.12.20. Kalkulus II. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Definíció alapján és formálisan is határozzuk meg az $f(x,y) = x^2\sqrt{y}$ függvény $P(-1,2)$ pontbeli parciális deriváltjait. *18pt*
2. Oldjuk meg $2y'' + (y')^3 y = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 4.$ *18pt*
3. Határozzuk meg $\int_L (2x-y)dx + x\cos y\ dy$ –t, ahol L a $(3,2)$, $(1,-2)$ pontokat összekötő szakasz. *18pt*
4. Határozzuk meg $\int_H\int (4x-2y+1)\ dxy$ értékét, ahol H a $(-1,0)$, $(2,-2)$ és $(4,0)$ pontok által kijelölt háromszög. *18pt*
5. A megfelelő sorfejtés első 4 tagjának segítségével becsüljük meg $\int_0^1 x^4 e^{-x^2/2}\ dx$ értékét. *18pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2012.01.03. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Definíció alapján igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-3n+1}{2n^2+5n-1} = \dfrac{1}{2}$. *10pt*

2. Határozzuk meg az $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{\sqrt{x+2}}$ függvénynek az $x = 3$ koordinátájú pontjához húzott érintő egyenes egyenletét. *10pt*

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = 3\sqrt[3]{x-4} - x$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_1^2 \frac{2z+1}{z^2-1}dz, \qquad \text{(ii)} \int_0^\infty u\cos u du.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat határértéke végtelen. *5pt*

(ii) Az f függvény differenciálható a -2 pontban. *5pt*

(iii) f folytonos x_0–ban. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to -2^-} f(x) = \infty$. *5pt*

(v) A korlátos E számhalmaz infimuma. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2012.01.03. Kalkulus I. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Definíció alapján igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n+1}{3n-2} = \infty.$ *10pt*

2. Határozzuk meg az $f(x) = \ln(1+x)$ függvénynek az $a = 0$ pont körüli harmadfokú Taylor–féle polinomját és a maradéktagját. *10pt*

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = xe^{-x^2}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_{-1}^{0} \frac{x+1}{x^2+1}dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^1 t\ln t dt.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat konvergál -1–hez. *5pt*

(ii) Az f függvény integrálfüggvénye. *5pt*

(iii) Az $\{a_n\}$ sorozat tórlódási pontja. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. *5pt*

(v) Darboux–féle alsó integrálközelítő összeg. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2012.01.03. Kalkulus II. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK`

1. Definíció alapján és formálisan is határozzuk meg az $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y}$ függvénynek a $P(3,1)$ pontban az $u(-1,2)$ irányban vett iránymenti deriváltját. *18pt*
2. Oldjuk meg: $y' + x^2y - 3x^2 = 0$, $y(0) = 2$. *18pt*
3. Határozzuk meg $\int_\gamma (2x - y)\ dx + (x - 2y)\ dy$ értéket, ahol γ az $A(0,0)$, $B(2,1)$ és $C(2,0)$ pontokat összekötő tört szakasz. *18pt*
4. Határozzuk meg $\int\int_H (2x + y) dxy$ értéket, ahol H az $y = x + 1$ és $y = x^2 - 1$ görbék által határolt korlátos, zárt síkrész. *18pt*
5. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4y^2 + x^2y^2$ függvénynek a szélsőértékeit az $A(0,1)$, $B(4,-1)$ és $C(-4,-1)$ pontok által meghatározott zárt háromszögön. *18pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2012.01.10. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Definíció alapján igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-3n+1}{2n^2+5n-1} = 0.$ *10pt*
2. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x^3 - \sqrt{x} + 1}$ függvénynek az $x = 3$ koordinátájú pontjához húzott érintő egyenes egyenletét. *10pt*
3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \sqrt{|x|}\ln|x|$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_{-1}^{0} \frac{x+1}{x^2+5x+6}dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^1 (u-1)\cos(u^2-2u)du.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat határértéke 2. *5pt*

(ii) Az f függvény lineárisan approximálható a 4 pontban. *5pt*

(iii) Az f függvény monoton csökkenő. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 3$. *5pt*

(v) Az f függvény konvex $[a, b]$–n. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2012.01.10. Kalkulus I. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Definíció alapján igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{3n-2} = \dfrac{1}{3}$. *10pt*
2. Határozzuk meg az $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ függvénynek a $[-1, 4]$ zárt intervallumon fölvett szélsőértékeit.

   10pt
3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = |x| \ln^{2/3} |x|$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték.

(iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_1^2 \frac{dz}{\sqrt[3]{z^2 - 2z + 1}} dz, \qquad \text{(ii)} \int_2^3 (u^3 - 1) 3u^2 \ln(u^3 - 1) du.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat monoton növő. *5pt*

(ii) Az f függvény egyenletesen folytonos. *5pt*

(iii) Az $\{a_n\}$ sorozat torlódási pontja. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = -2$. *5pt*

(v) Darboux–féle felső integrálközelítő összeg. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2012.01.10. Kalkulus II. NÉV:..................................

A csoport EHA:..................................

FELADATOK

1. A tanult módon vizsgáljuk a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^{n+3}}{3^n(n+2)}$ konvergenciáját. *18pt*
2. Oldjuk meg: $y = x(\ln x - y'),\ \ y(1) = 3$. *18pt*
3. Határozzuk meg $\int_\gamma (2x-2y)\ dx - (2x-1)\ dy$ értéket, ahol γ az $A(0,0)$, $B(3,2)$ és $C(0,-1)$ pontokat összekötő tört szakasz. *18pt*
4. Határozzuk meg $\int\int_H 3x^2 dxy$ értéket, ahol H az $y = 0$, $y = x - 2$ és $y = \sqrt{x}$ görbék által határolt korlátos, zárt síkrész. *18pt*
5. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^3 + 3yx^2 + y^3$ függvénynek a szélsőértékeit az $A(1,1)$, $B(3,1)$, $C(3,2)$ és $D(1,2)$ pontok által meghatározott zárt négyszögön. *18pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2012.01.17. Kalkulus I. NÉV:..................................

A csoport EHA:..................................

FELADATOK:

1. Definíció alapján igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-3n+1}{5n-1} = \infty$. *10pt*

2. Határozzuk meg az $f(x) = x^3 - \sqrt{x} + 1$ függvénynek az $a = 2$ pontban vett harmadfokú Taylor polinomját és a hozzá tartozó Lagrange–féle maradéktagját. *10pt*

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{x}{x+1} - \ln|x+1|$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_1^\infty \frac{1}{x^3+5x^2}dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^1 z(z^2-1)^8 dz.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat határértéke 3. *5pt*

(ii) Az f függvény lineárisan approximálható a -1 pontban. *5pt*

(iii) Az n–edik Cauchy–féle maradéktag. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -2$. *5pt*

(v) Az f függvény konkáv $[a, b]$–n. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2012.01.17. Kalkulus I. NÉV:................................

B csoport EHA:................................

`FELADATOK:`

1. Definíció alapján igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-1}{n+2} = 3.$ *10pt*
2. Határozzuk meg $f(x) = x^4 - 4x^2 + 9$ –nek a $[-1, 4]$ zárt intervallumon fölvett szélsőértékeit. *10pt*
3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \sqrt[3]{x^2}e^{-2x/3}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték.

(iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_1^3 \frac{3t^2-2}{\sqrt[7]{t^3-2t+1}}\,dt, \qquad \text{(ii)} \int_2^3 u^2 \ln u\; du.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Lagrange–féle maradéktag. *5pt*

(ii) Az f függvény folytonos az $a = 2$ pontban. *5pt*

(iii) Az $\{a_n\}$ sorozat torlódási pontja. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$. *5pt*

(v) Darboux–féle alsó integrálközelítő összeg. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2012.01.17. Kalkulus II. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK`

1. A tanult módon vizsgáljuk a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^{n-3}}{2^n(\sqrt{n}+2)}$ konvergenciáját. *18pt*
2. Oldjuk meg: $(x-y)y' = x+y$. *18pt*
3. Határozzuk meg $\int_\gamma (x-y)\, dx + (x+y)\, dy$ értéket, ahol γ az $O(1,2)$ középpontú, $r = 2$ sugarú körvonal $A(1,0)$ és $B(3,2)$ pontjait összekötő negyed körív. *18pt*
4. A megfelelő sorfejtések első négy tagjának segítségével becsüljük meg $\sqrt[3]{5}$ és $\operatorname{arctg} 1/3$ értékét. *18pt*
5. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - y^3 + 5$ függvénynek a szélsőértékeit az $A(2,-1)$, $B(2,7)$ pontok által meghatározott szakaszon. *18pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2012.01.24. Kalkulus I. NÉV:................................

A csoport EHA:................................

`FELADATOK:`

1. A tanult módon ábrázoljuk az

$$a)\ f(x) = \ln \frac{1-x}{x+1} \quad \text{és} \quad b)\ g(x) = \sqrt{|x|} \ln x^2$$

függvényeket. *40pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték.

(iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\ dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^1 \frac{dz}{z^p}.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat határértéke -1. *5pt*

(ii) Az f függvény lineárisan approximálható a -2 pontban. *5pt*

(iii) Az n–edik Cauchy–féle maradéktag. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$. *5pt*

(v) Az $[a,b]$ egy beosztása, a beosztás finomsága. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2012.01.24. Kalkulus I. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. A tanult módon ábrázoljuk az

$$a)\ f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}} \quad \text{és} \quad b)\ g(x) = \arcsin\frac{x}{x^2+1}$$

függvényeket. *40pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

2. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)}\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt, \qquad \text{(ii)}\ \int_1^\infty \frac{ds}{s^\alpha}.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Lagrange–féle maradéktag. *5pt*

(ii) Az f függvény folytonos az $a = -1$ pontban. *5pt*

(iii) Cauchy–sorozat. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. *5pt*

(v) Darboux–féle alsó integrálközelítő összeg. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2012.01.24. Kalkulus II. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. A tanult módon vizsgáljuk a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^{n-1}}{5^n\sqrt{n^3+2}}$ konvergenciáját. *18pt*
2. Oldjuk meg: $y'' + y' - 6y = \cos 2x$, $y(0) = 0$ és $y'(0) = 1$. *18pt*
3. Határozzuk meg $\int_\gamma (x-y)\,dx + (x+y)\,dy$ értéket, ahol γ az $O(1,2)$ középpontú, $r = 2$ sugarú körvonal $A(1,0)$ és $B(3,2)$ pontjait összekötő háromnegyed körív. *18pt*
4. A megfelelő sorfejtések első négy tagjának segítségével becsüljük meg $\sqrt[7]{3}$ és $\arcsin(-1/4)$ értékét. *18pt*
5. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - y^3 + 5$ függvénynek a szélsőértékeit az $A(2,-1)$, $B(2,7)$ és $C(0,7)$ pontok által meghatározott zárt háromszögön. *18pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2012.05.21. Analízis NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Laplace–transzformációval oldjuk meg $y'' + 4y = 5e^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 1$. *18pt*
2. Határozzuk meg az $f(x, y) = xy + x^2 - x + y^2 - 2$ függvény szélsőértékeit a $(0, 0), (1, 0)$ és $(0, 1)$ pontok által kijelölt zárt háromszögön. *18pt*
3. Oldjuk meg az $a)$ $z^3 = 2$, $b)$ $\cos z = -2$ egyenleteket. *18pt*
4. Ábrázoljuk $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n-2}{n^3+1}(2z-1-2i)^n$ konvergenciatartományát, továbbá vizsgáljuk a sor konvergenciáját a $z = i$ helyen. *18pt*
5. Határozzuk meg $\oint_\gamma \frac{shz}{z^2+1}\, dz$ –t, ahol γ vagy $a)$ $\gamma^+_{1+i,2}$, vagy $b)$ $\gamma^-_{1+i,1/2}$. *18pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2012.05.21. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Definíció alapján igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-3}{3n+2} = \dfrac{2}{3}$. *10pt*
2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{x\to 0^-} xe^{-1/x}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-2}{1-5n}\right)^{n-1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x\ln^2|x|$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték.

(iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_{-1}^{1} \frac{z^2}{\sqrt{z^3+1}}\, dz, \qquad \text{(ii)} \int_0^1 \frac{u(u-1)}{1+u^2}\, du.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat monoton csökkenő. *5pt*

(ii) Az f függvény differenciálható a 2 pontban. *5pt*

(iii) f–nek helyi maximuma van x_0–ban. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$. *5pt*

(v) A korlátos E számhalmaz supremuma. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2012.06.04. Analízis NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Oljuk meg: $xy'' = y' + x^2 \sin x$, $y(\pi) = y'(\pi) = 1$. *18pt*
2. Határozzuk meg $\displaystyle\oint_{\gamma^-_{i,3/2}} \frac{chz}{z^3+4z}\, dz$ –t. *18pt*
3. Határozzuk meg $\displaystyle\int_L (Imz + ze^{z^2})\, dz$ –t, ahol L az $A = 1+i$, $B = 0$ pontokat összekötő negyedkörív, ahol a kör középpontja a) az 1 pont, illetve b) az i pont. *18pt*
4. Határozzuk meg az a) $\sqrt{1+\sqrt{3}i}$, b)$(1-i)^{17}$, c)$z^3 = -2$, d)$ch(i\pi) - sh(-i\pi/3)$ értékeket. *18pt*
5. Igazoljuk, hogy $u(x, y) = 5x^2 + 2xy - 5y^2$ harmonikus és keressük meg a harmonikus társát. *18pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2012.06.04. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. A tanult módon vizsgáljuk az $a_1 = 2$, $a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 4}$ rekurzív sorozatot. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n-3}}{\sqrt{n^2+1}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} 3n \operatorname{tg} \frac{5}{n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x + e^{-1/x}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték.

(iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 z^6 \cos^2(z^7+3)dz, \qquad \text{(ii)} \int_4^\infty \frac{1}{2u-u^2}du.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat monoton nő. *5pt*

(ii) Az f függvény lineárisan közelíthető az $a = 2$ pontban. *5pt*

(iii) f egyenletesen folytonos I–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = -2$. *5pt*

(v) Az $[a, b]$ egy beosztása, a beosztás finomsága. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2012.06.11. Analízis NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^3 - yx^2 + y^3 - y^2$ függvény szélsőértékeit a $(-1,-1), (1,-1), (1,1)$ és $(-1,1)$ pontok által meghatározott zárt négyzeteten. *18pt*

2. Laplace–transzformáció segítségével oldjuk meg az $y'' - y' - 2y = e^{2x}$, $y(0) = y'(0) = 1$ kezdetiérték problémát. *18pt*

3. Határozzuk meg $\int_L (zImz + z^2 chz^3)\, dz$ –t, ahol L az $A = 1+i$, $B = -1$ pontokat szakasz, $A \to B$. *18pt*

4. A megfelelő sorfejtések első öt tagjának segítségével becsüljük meg az

   a) $\sqrt[3]{7}$, b) $\arcsin 1/2$ értékeket. *18pt*

5. Legyen $f(x) = 1 - |x|$, ha $-1 \leq x \leq 1$ és $f(x) = 0$ különben. Határozzuk meg $f(x)$ Fourier–transzformáltját. *18pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2012.06.11. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Definíció szerint igazoljuk, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3-n+4}{5n^3-2n^2+1} = \frac{3}{5}$. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n+2}-\frac{2n^2+n+1}{2n-1}\right), \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{9^n-2^{3n}}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = xe^{-1/x^2}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték.

(iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_2^4 \frac{v-1}{\sqrt[3]{v^2-2v}}dv, \qquad \text{(ii)} \int_0^\infty te^{-st}dt.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ (\alpha\neq-1), \qquad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a|+C,\ (x\neq a)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C,\ (0<a\neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C, \qquad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat alulról korlátos. *5pt*

(ii) Az f függvény differenciálható az $a = 1$ pontban. *5pt*

(iii) f folytonos az $x_0 = 2$ pontban. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$. *5pt*

(v) Darboux–féle felső integrálközelítő összeg. (részletesen) *5pt*

2012.06.18. Analízis NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Határozzuk meg az $f(x,y) = -6xy$ függvény szélsőértékeit a $4x^2 + 9y^2 = 25$ feltétel mellett. *18pt*

2. Laplace–transzformációval oldjuk meg az $y'' - 3y' - 4y = x - 1$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$ kezdetiérték problémát. *18pt*

3. Határozzuk meg $\int_L \overline{z} Im z \; dz$ –t, ahol L az $A = 2 + 3i$, $B = i$ pontokat összekötő, $2 + i$ középpontú, 2 sugarú, pozitív irányítású negyedkörív. *18pt*

4. Legyen $f(x)$ 2π szerint periodikus és $f(x) = \pi - |x|$, ha $-\pi \leq x \leq \pi$. Határozzuk meg $f(x)$ Fourier–sorának első 7 elemét. *18pt*

5. Hol differenciálható az $f(z) = z|z|^2$ komplex függvény. *18pt*

2012.06.18. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Adjuk meg az $f(x)=\sqrt{x^2-x}$ függvénynek az $a=1$ pontban vett negyedrendű Taylor–polinomját és a Lagrange–féle maradéktagot. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{9}-1}{\sqrt[n]{3}-1},\qquad \text{(ii)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{4+3n}\right)^{2-n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x)=\dfrac{x}{(1-x)e^x}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)}\ \int_0^{-1}\frac{y+3}{y^2+y-2}\,dy,\qquad \text{(ii)}\ \int_0^{\infty}\sin t e^{-st}\,dt.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ (\alpha\neq-1),\qquad \int\frac{1}{x+a}dx=\ln|x+a|+C,\ (x\neq a)$$
$$\int\cos x dx=\sin x+C,\qquad \int\sin x dx=-\cos x+C,\qquad \int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\operatorname{tg}x+C,$$
$$\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\operatorname{ctg}x+C,\qquad \int\frac{1}{x^2+1}dx=\operatorname{arctg}x+C,$$
$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C,\qquad \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C,\ (0<a\neq1),$$
$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C,\qquad \int\frac{1}{\sin x}dx=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat konvergens. (részletesen) *5pt*

(ii) Az f függvény integrálfüggvénye. *5pt*

(iii) f konvex I–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty$. *5pt*

(v) Darboux–féle alsó integrálközelítő összeg. (részletesen) *5pt*

2012.06.25. Analízis NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Oldjuk meg : $xyy' = 1 - x^2$, $y(1) = 1$. *18pt*

2. Laplace–transzformációval oldjuk meg : $y'' + 5y' + 4y = e^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 2$. *18pt*

3. A tanult módon vizsgáljuk a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 2^n - 1}(3x-1)^n$ sort . *18pt*

4. Oldjuk meg: a) $\cos z = -2$, b) $e^z = -e$, c) $chz = i$. *18pt*

5. Határozzuk meg $\oint_{\gamma^-_{1+i,2}} \frac{z+2}{4z^2-1}\, dz$ értékét. *18pt*

2012.06.25. Kalkulus I. NÉV:................................

A csoport EHA:................................

`FELADATOK:`

1. Definíció alapján igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3+2n-n^2}{2-n} = \infty$. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+3n}-n+3}{2n-1}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-1}{4+2n}\right)^{2-n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+4x}}{x-2}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték.

(iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^{\pi/4} \frac{2x+7}{x^2+2x+5}\,dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^1 \sqrt{u}\ln u\,du.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ (\alpha\neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a|+C,\ (x\neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C,\ (0<a\neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C, \qquad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat monoton nő. *5pt*

(ii) Az f függvény lineárisan közelíthető az $a = 2$ pontban. *5pt*

(iii) f egyenletesen folytonos I–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = -2$. *5pt*

(v) Az $[a, b]$ egy beosztása, a beosztás finomsága. *5pt*