2010.12.21. Kalkulus I. NÉV:..................................

A csoport EHA:..................................

`FELADATOK:`

1. Monotonitás és korlátosság szempontjából vizsgáljuk az $a_n = \dfrac{2n-4}{3n+2}$ sorozatot. Továbbá adjuk meg az $\inf a_n$ és $\sup a_n$ értékeket. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+5}\right), \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-5}{5n+2}\right)^{n-1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-x)^2}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_{-3}^{1} \frac{z^2}{\sqrt{z^3+5}}dz, \qquad \text{(ii)} \int_{2}^{\infty} \frac{3}{1-u^2}du.$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat monoton csökkenő. *5pt*

(ii) Az f függvény differenciálható a 2 pontban. *5pt*

(iii) f–nek helyi maximuma van x_0–ban. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$. *5pt*

(v) A korlátos E számhalmaz supremuma. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2010.12.21. Kalkulus II. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Definíció alapján és formálisan is határozzuk meg az $f(x,y) = x^2y^3$ függvény $P(0,1)$ pontbeli parciális deriváltjait. *18pt*
2. Oldjuk meg $2y'' + (y')^3 = 0,\ y(1) = y'(y) = 1$. *18pt*
3. Határozzuk meg $\int_L (2x-y)dx + x\cos y\ dy$ –t, ahol L a $(-3,2)$, $(1,-2)$ pontokat összekötő szakasz. *18pt*
4. Határozzuk meg $\int_H\int (3x-2y+1)\ dxy$ értékét, ahol H a $(-1,0)$, $(2,-2)$ és $(4,2)$ pontok által kijelölt háromszög. *18pt*
5. A megfelelő sorfejtés első 4 tagjának segítségével becsüljük meg $\int_0^1 x^3e^{-x^2}\ dx$ értékét. *18pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$
$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a),$$
$$L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2},$$
$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2 L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad u'_x = v'_y,\ -u'_y = v'_x, \quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$
$$\int_L f(z) dz = \int_\alpha^\beta f(z(t)) z'(t) dt$$
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z) dz.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1,$$
$$\int_k^\infty f(x) dx < \sum_{n=k}^{\infty} a_n < a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

2010.12.22. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. A tanult módon vizsgáljuk az $a_1 = 4$ $a_n = \sqrt{3 + a_{n-1}}$ rekurzív sorozatot . *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{4}-1}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 0} 3x\operatorname{ctg} 2x.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \sqrt[3]{x^2}e^{-2x/3}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték.

(iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^2 \frac{x}{x^2+x-6}dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^\infty \frac{x}{e^x}dx.$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat határértéke -1. *5pt*

(ii) Az f függvény konkáv I–n. *5pt*

(iii) Az $\{a_n\}$ sorozat korlátos. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to -2} f(x) = -\infty$. *5pt*

(v) f egyenletesen folytonos $[a;b]$–n. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2010.12.22. Kalkulus II. NÉV:..................................

A csoport EHA:..................................

`FELADATOK`

1. Definíció alapján és formálisan is határozzuk meg az $f(x,y) = 2x^2 - 3xy$ függvénynek a $P(1,-2)$ pontban az $u(-3,4)$ irányban vett iránymenti deriváltját. *18pt*
2. Oldjuk meg: $(x^3 + y)dx - xdy = 0$, $y(2) = 1$. *18pt*
3. Oldjuk meg: $e^x(x+1) - y\sin x + y'\cos x = 0$, $y(0) = 2$. *18pt*
4. A tanult módon vizsgáljuk a $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n + 3}{n2^n + 1}(3x+2)^n$ sort. *18pt*
5. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 8x^2 - 8y^2$ függvénynek a szélsőértékeit. *18pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2010.12.29. Kalkulus I. NÉV:................................

C csoport EHA:................................

`FELADATOK:`

1. Adjuk meg az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény 0 pontbeli harmadrendű Taylor–polinomját, segítségével becsüljük meg $\operatorname{tg} 1$ értékét és a hiba nagyságát. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n - 4^n + 3^n}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-3}{2n+2}\right)^{n+1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x \ln^2 |x|$. függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+9}dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^1 xe^{-x^2+3}dx.$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat konvergál -2–höz. *5pt*

(ii) Az f függvény egyenessel közelíthető az 1 pontban. *5pt*

(iii) Az $\{a_n\}$ sorozat monoton nő. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. *5pt*

(v) f integrálható $[a;b]$–n. (részletesen) *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2010.12.29. Kalkulus II. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Definíció alapján és formálisan is határozzuk meg az $f(x,y) = x^2y - 3\dfrac{x}{y}$ függvény $P(2,1)$ pontbeli parciális deriváltjait. *18pt*
2. Oldjuk meg: $y'' + y' = \cos 2x + 5y$. *18pt*
3. Oldjuk meg: $y'' + (y')^3 = 0$, $y(1) = y'(1) = 1$. *18pt*
4. A tanult módon, 10^{-3} pontossággal becsüljük meg $\arcsin 1/2$ értékét. *18pt*
5. Határozzuk meg az $\int_H\int (y+1)\,dxy$ integrál értékét, ahol H a $(0,0)$, $(1,3)$ és $(5,1)$ pontok által kijelölt háromszög. *18pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2011.01.05. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Adjuk meg az $f(x)=\sqrt{x}\ln(x^2+1)$ függvénynek az $x=4$ pontba húzott érintőegyenesének egyenletét, illetve a harmadik deriváltját. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2+3n+1}-\sqrt[3]{n^2+1}\right), \qquad \text{(ii)}\ \lim_{x\to o}\frac{\cos x-1}{x^2}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x)=xe^{-1/x^2}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)}\ \int_{-2}^{0}\frac{x}{x^2+4x+4}dx, \qquad \text{(ii)}\ \int_{2}^{\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\ dx.$$

$$\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ (\alpha\neq -1), \qquad \int\frac{1}{x+a}dx=\ln|x+a|+C,\ (x\neq a)$$
$$\int\cos x dx=\sin x+C, \qquad \int\sin x dx=-\cos x+C, \qquad \int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\operatorname{tg} x+C,$$
$$\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\operatorname{ctg} x+C, \qquad \int\frac{1}{x^2+1}dx=\operatorname{arctg} x+C,$$
$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C, \qquad \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C,\ (0<a\neq 1),$$
$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C, \qquad \int\frac{1}{\sin x}dx=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az E számhalmaz infimuma. *5pt*

(ii) Az f függvény felülről korlátos. *5pt*

(iii) a_n Cauchy–sorozat. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to 1} f(x) = -3$. *5pt*

(v) Integrálközép. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2011.01.05. Kalkulus I. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. A tanult módon vizsgáljuk az $a_1 = 7$, $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 3}{a_n + 3}$ $(n \geq 1)$ rekurzív sorozatot. *10pt*
2. Adjuk meg az $f(x) = x \ln(x+1)$ függvénynek az $x = 4$ pontban vett negyedrendű Taylor–polinomját. *10pt*
3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{1}{x} \ln^{2/3} x$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_{-1}^{2} \frac{2}{x^2 - 4} dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{e^x + 2}\right) \; dx.$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat konvergens. *5pt*

(ii) Az f függvény differenciálható az 1 pontban. *5pt*

(iii) Az $\{a_n\}$ sorozat nem korlátos. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$. *5pt*

(v) Az $[a; b]$ intervallum egy beosztása, a beosztás finomsága. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2011.01.05. Kalkulus II. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK`

1. Határozzuk meg $\int_L \ln(x+2)dx - xdy$ –t, ahol L a $(2,0)$, $(-1,1)$ pontokat összekötő szakasz. *18pt*
2. 10^{-4}–en pontossággal becsüljük meg $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{2n^2+3n-2}$ értékét. *18pt*
3. Oldjuk meg: $y^2 + y'x^2 = y'xy$, $y(1) = 2$. *18pt*
4. A tanult módon vizsgáljuk a $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n \ln n}{2n^2+1}(2x-1)^{2n+1}$ sort. *18pt*
5. Határozzuk meg $\int_H \int (x-y)dxy$–t, ahol H a $(2,1)$ $(4,-1)$ és $(7,-3)$ pontok által meghatározott háromszög. *18pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2011.01.11. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK`

1. Monotonitás és korlátosság szempontjából vizsgáljuk az $a_n = \dfrac{n^2 - 7n + 7}{n - 2}$ sorozatot. Továbbá adjuk meg az $\inf a_n$ és $\sup a_n$ értékeket. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n-3} - \sqrt{n+3}), \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-5}{2n+1}\right)^{5n-1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = 2 + \sqrt{\dfrac{x^3}{x-6}}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} dz, \qquad \text{(ii)} \int_3^\infty \frac{1}{4-u^2} du.$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat korlátos *5pt*

(ii) Az f függvény differenciálható az $x_0 = 3$ pontban. *5pt*

(iii) f–nek helyi minimuma van a–ban. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$. *5pt*

(v) f egyenletesen folytonos I–n. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2011.01.11. Kalkulus I. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Definíció szerint es formálisan is határozzuk meg az $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3}$ deriváltját az $a = 1$ helyen. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n - 2^n - 3}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{1-n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1 - x^2}{x^2}}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték.

(iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_1^\infty \frac{\ln z}{z^{7/2}} dz, \qquad \text{(ii)} \int_{-1}^2 \frac{2}{x^2 + 3x} dx.$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat konvergál -1–hez. (részletesen!) *5pt*

(ii) Az f függvény lineárisan approximálható az $x_0 = 2$ pontban. *5pt*

(iii) f konkáv $[a, b]$–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$. *5pt*

(v) f integrálfüggvénye *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2011.01.12. Kalkulus I. NÉV:.................................

C csoport EHA:.................................

`FELADATOK`

1. A tanult módon vizsgáljuk az $a_n = \sqrt{5a_{n-1} - 4}$, $a_1 = 5$ rekurzív sorozatot. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 - 2n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}), \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-5}{3n+1}\right)^{5n-1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{1-x^2}}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték.

(iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^{\infty} \frac{1}{z^2 + 2z + 5} dz, \qquad \text{(ii)} \int_0^1 \frac{1 + 2u}{\cos^2(u^2 + u - 1)} du.$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat szigorúan monoton csökkenő. *5pt*

(ii) Az f függvény folytonos az I–n. *5pt*

(iii) f–nek helyi maximuma van a–ban. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = -2$. *5pt*

(v) A korlátos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényRiemann–féle integrálközelítő összege. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2011.01.12. Kalkulus I. NÉV:.................................

D csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Adjuk meg az $\ln(1+x)$ negyedrendű Taylor–polinomját, segítségével becsüljük meg $\ln 2$ értékét, illetve a hiba nagyságát. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n+2^n-3}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3-2n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = 2x - 2 - 3\sqrt[3]{x^2}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_1^\infty z^{-3/2} \ln z dz, \qquad \text{(ii)} \int_{-1}^2 \frac{2}{x^2+3x+3} dx.$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat konvergál 3–hoz.(részletesen!) *5pt*

(ii) Az f függvény lineárisan approximálható az x_0 pontban. *5pt*

(iii) f konkáv $[a, b]$–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \to -2} f(x) = \infty$. *5pt*

(v) f integrálható. (részletesen!) *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2010.01.11. Kalkulus II. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Határozzuk meg $\int_L x\,dx - \,dy$ értéket, ahol L a $P(0,1)$ középpontú, egységsugarú körív $A(-1,1)$,$B(0,0)$ pontjait negatív irányban köti össze. *18pt*
2. Oldjuk meg $2x^3dy = y(2x^2 - y^2)dx$, $y(1) = 3$. *18pt*
3. Oldjuk meg $\cos x - x\sin x + y = (\cos y - x)y'$, $y(0) = \pi/2$. *18pt*
4. A tanult módon vizsgáljuk $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(2n-1)^n}{2^{n-1}n^n}(x+1)^{2n+1}$. *18pt*
5. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 8x^2 - 8y^2$ szélsőértékeit. *18pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2011.01.19. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Határozzuk meg az $(x+1)\cos x$–nek az $a=0$ pontban vett negyedrendű Taylor–polinomját. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n+2}{2n^3+n+1}, \qquad \text{(ii)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-1}{3n+1}\right)^{2+n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x)=\dfrac{e^x}{1+x}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték.

(iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)}\ \int_0^1 (z^2+1)(z^3+3z+7)^8\,dz, \qquad \text{(ii)}\ \int_0^1 \frac{2u+1}{u^2+4u}\,du.$$

$$\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ (\alpha\neq-1), \qquad \int\frac{1}{x+a}dx=\ln|x+a|+C,\ (x\neq a)$$

$$\int\cos x dx=\sin x+C, \qquad \int\sin x dx=-\cos x+C, \qquad \int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\operatorname{tg} x+C,$$

$$\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\operatorname{ctg} x+C, \qquad \int\frac{1}{x^2+1}dx=\operatorname{arctg} x+C,$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C, \qquad \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C,\ (0<a\neq1),$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C, \qquad \int\frac{1}{\sin x}dx=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat korlátos *5pt*

(ii) Az f függvény differenciálható az $x_0 = 3$ pontban. *5pt*

(iii) f–nek helyi minimuma van a–ban. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$. *5pt*

(v) f egyenletesen folytonos I–n. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2011.01.25.	Kalkulus I.	NÉV:.................................
	B csoport	EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x}\ln x$ függvénynek az $x = 1$, $x = e$ koordinátájú pontokba húzott érintőegyeneseinek egyeneleteit. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 2n + 1}{5 - 3n - 2n^2}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{n^2+1}\right)^{1-n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_1^2 \frac{x}{e^x}\,dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^\infty \frac{2}{x^2+3x+2}\,dx.$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat konvergál -1–hez. (részletesen!) *5pt*

(ii) Az f függvény lineárisan approximálható az $x_0 = 2$ pontban. *5pt*

(iii) f konkáv $[a, b]$–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$. *5pt*

(v) f integrálfüggvénye *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2011.01.26. Kalkulus I. NÉV:.................................

C csoport EHA:.................................

`FELADATOK`

1. Határozzuk meg az $f(x) = (x+1)\ln x$ függvénynek az $x = 1$, $x = e$ koordinátájú pontokba húzott érintőegyeneseinek egyenleteit. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1-n^2}{5+3n+n^2}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+1}{2n^2+3}\right)^{1+n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = (x-5)^3 \cdot \sqrt{x^2}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^\infty xe^{-3x}\, dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^1 \frac{3x^5-1}{\sqrt[3]{x^6-2x+3}}\, dx.$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat szigorúan monoton csökkenő. *5pt*

(ii) Az f függvény folytonos az I–n. *5pt*

(iii) f–nek helyi maximuma van a–ban. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = -2$. *5pt*

(v) A korlátos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann–féle integrálközelítő összege. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2011.01.26. Kalkulus I. NÉV:.................................

D csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg $\sqrt[3]{x+1}$ –nek a deriváltját az $a = 8$ pontban . *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 2 + n^2}{n^2 - 2 + 2n}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{3n+5}\right)^{n^2+n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x + e^{-1/x}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték.

(iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^2 + 4z + 8}\, dz, \qquad \text{(ii)} \int_0^{\pi/4} x \sin 2x\, dx.$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat konvergál 3–hoz.(részletesen!) *5pt*

(ii) Az f függvény lineárisan approximálható az x_0 pontban. *5pt*

(iii) f konkáv $[a, b]$–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to-2} f(x) = \infty$. *5pt*

(v) f integrálható. (részletesen!) *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2010.01.25. Kalkulus II. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg az $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{2x-y+1}}{y}$ függvénynek a parciális deriváltjait a $P(2,1)$ helyen. *18pt*
2. Oldjuk meg $\operatorname{tg} x dy - y dx = 0,\ y(\pi/4) = \sqrt{2}$. *18pt*
3. Oldjuk meg $xy'' = y'(\ln y' - \ln x)$. *18pt*
4. A tanult módon, 10^{-3} pontossággal becsüljük meg $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{2n^2-n-3}$ értékét. *18pt*
5. Határozzuk meg $\displaystyle\int_H\int (y-x)dxy$ értékat ha H az $(1,1),(4,1),(2,-3)$ pontok által meghatározott háromszög. *18pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2011.01.25. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Határozzuk meg a $\sqrt[3]{1+x}$–nek az $a = 0$ pontban vett negyedrendű Taylor–polinomját és ennek segítségével becsüljük meg $\sqrt[3]{2}$ értékét. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n + 1}{2n^3 - n - 1}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n - 2^n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = xe^{-1/x^2}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 (z^2 - 1)\sin(z^3 - 3z + 1)\ dz, \qquad \text{(ii)} \int_1^\infty \frac{1}{u^2 - 1/4}\ du.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat korlátos *5pt*

(ii) Az f függvény differenciálható az $x_0 = 3$ pontban. *5pt*

(iii) f–nek helyi minimuma van x_0–ban. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. *5pt*

(v) f Darboux–féle felső integrálközelítő összege. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2011.01.25. Kalkulus I. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x}e^{2-x}$ függvénynek az $x = 1$, $x = 4$ koordinátájú pontokba húzott érintőegyeneseinek egyenleteit. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+1}{3-n-2n^2}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 0} \cos(x+\sin x).$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_1^{\sqrt{3}} 2x \operatorname{arctg} x \; dx, \qquad \text{(ii)} \int_1^2 \frac{3}{x^2+x-2} \; dx.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat határértéke végtelen. *5pt*

(ii) Az f függvény lineárisan approximálható az $x_0 = -1$ pontban. *5pt*

(iii) f konkáv $[a, b]$–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$. *5pt*

(v) f integrálfüggvénye *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2011.01.26. Kalkulus I. NÉV:.................................

C csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Monotonitás és korlátosság szempontjából vizsgáljuk az $a_n = \dfrac{n+1}{n^2-5}$ sorozatot, továbbá határozzuk meg az $\inf a_n$ és $\sup a_n$–et. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n^2}{2-n+n^2}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x^2+2x-3}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = (x-5)^3 \cdot \sqrt{x^2}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^\infty 3xe^{-2x}\, dx, \qquad \text{(ii)} \int_1^2 \frac{4x+2}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}\, dx.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat szigorúan monoton növekvő. *5pt*

(ii) Az f függvény folytonos az $x_0 = 2$ pontban. *5pt*

(iii) f–nek helyi maximuma van a–ban. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = -1$. *5pt*

(v) A korlátos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann–féle integrálközelítő összege. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2011.01.26. Kalkulus I. NÉV:................................

D csoport EHA:................................

FELADATOK:

1. Definíció szerint igazoljuk, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{2n^2 - n} = \frac{3}{2}$. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 1 + 2n^2}{n^2 - 2 + 3n}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-1}{1+2n}\right)^{n-1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x \ln^2 |x|$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték.

(iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^\infty \frac{dz}{z^2 + 6z + 13}, \qquad \text{(ii)} \int_1^2 \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat határértéke 2. *5pt*

(ii) Az f függvény lineárisan approximálható az a pontban. *5pt*

(iii) f konvex $[a, b]$–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = \infty$. *5pt*

(v) f egyenletesen folytonos I–n. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2010.01.25. Kalkulus II. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg az $f(x,y)=\sqrt{x(1-y)}$ függvénynek a $P(2,-3)$ helyen az $u(1,4)$ irányban vett iránymenti deriváltját. *18pt*
2. Oldjuk meg $\cos x dy=(1-y\sin x)dx,\ \ y(\pi/2)=2$. *18pt*
3. Oldjuk meg $2yy'-y''=0$, $y(1)=y'(1)=2$. *18pt*
4. Határozzuk meg $f(x,y)=x^2+y^2$ –nek az $(x-2)^2+y^2=1$ feltétel mellletti szélsőértértékeit. *18pt*
5. Oldjuk meg $\int_L 2yx\,dx{+}x^2\,dy$, ahol L a $(4,1),(0,-3),(1,3),(4,2)$ pontokat összekötő szakasz. (Sorrendre figyeljenek!) *18pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2011.05.24. Analízis NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Definíció alapján és formálisan is határozzuk meg az $f(x,y) = (x^2-3)\sqrt{y-2}$ függvény $P(1,3)$ pontbeli parciális deriváltjait. *18pt*
2. Határozzuk meg $\oint_{\gamma^-_{1+i,4}} \frac{\cos 4z}{z^3+z}\,dz$ –t. *18pt*
3. Határozzuk meg $\int_L (\bar{z}+z-2i)\,dz$ –t, ahol L az $A=i$, $B=-1$ pontokat összekötő negyedkörív és a $B=-1$, $C=-i$ pontokat összekötő szakasz. *18pt*
4. Laplace–transzformációval oldjuk meg $y''-4y = 4e^{-2x} - 8\sin 2x$, $y(0)=3$, $y'(0)=1$. *18pt*
5. Adjuk meg a két lehetséges integrálását a $\int\int_H (x-2y)\,dxy$–nak, ahol H a $(-1,0),(2,0)$ és $(0,1)$ pontok által kijelölt háromszög, majd az egyiket számoljuk is ki. *18pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ (\alpha\neq -1),\quad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a|+C,\ (x\neq a),\quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,\quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,\quad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,\quad \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C,\quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C,\ (0<a\neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C,\quad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n \sin nx\right),\quad a_0 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$
$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\quad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

$$L[f](p) := \int_0^{\infty} f(x)e^{-px}dx,\quad L[e^{ax}f(x)](p) = L[f(x)](p-a),\quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}},$$
$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2},\quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2},\quad L[y'] = pL[y]-y(0),\quad L[y''] = p^2L[y]-py(0)-y'(0),$$

$$z = x+iy,\quad f(z) = u(x,y)+iv(x,y),\quad u'_x = v'_y,\ -u'_y = v'_x,\quad u''_{xx}+u''_{yy} = 0$$

$$\int_L f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,\quad c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}<\infty \iff p>1,\quad \sum_{n=0}^{\infty}x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x|<1,\quad (1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \iff |x|<1,$$
$$\int_k^{\infty} f(x)dx < \sum_{n=k}^{\infty} a_n < a_k + \int_k^{\infty} f(x)dx.$$

$$c_k := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx,\quad \hat{f}(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},\quad \hat{F}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx$$

2011.05.24. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Monotonitás és korlátosság szempontjából vizsgáljuk az $a_n = \dfrac{2n-3}{3n-2}$ sorozatot. Továbbá adjuk meg az $\inf a_n$ és $\sup a_n$ értékeket. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+5}\right), \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{5n+1}\right)^{n-1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-x)^2}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_{-3}^{1} \frac{z^2}{\sqrt{z^3+1}}dz, \qquad \text{(ii)} \int_{2}^{\infty} \frac{1}{1-u^2}du.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat monoton csökkenő. *5pt*

(ii) Az f függvény differenciálható a 2 pontban. *5pt*

(iii) f–nek helyi maximuma van x_0–ban. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$. *5pt*

(v) A korlátos E számhalmaz supremuma. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2011.05.24. Analízis NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK`

1. Definíció alapján és formálisan is határozzuk meg az $f(x,y) = (x-3)\sqrt{y^2-2}$ függvénynek a $P(1,3)$ pontbeli, $u(-2,3)$ irányban vett deriváltját. *18pt*
2. Határozzuk meg $\oint_{\gamma^-_{1+i,2}} \frac{chz^2}{z^3+8}\,dz$ –t. *18pt*
3. Határozzuk meg $\int_L (Rez + e^{2iz})\,dz$ –t, ahol L az $A = 1+i$, $B = 0$ pontokat összekötő negyedkörív, a $B = 0$, $C = 1-i$–t összekötő szakasz és a $C = 1-i$, $D = 2$–t összekötő negyedkörív. *18pt*
4. Határozzuk meg az a) $\sqrt{-1+\sqrt{3}i}$, b)$(1+i)^{17}$, c)2^i, d)$ch(i\pi) - sh(i\pi/3)$ értékeket. *18pt*
5. Igazoljuk, hogy $u(x,y) = 5x^2 + 4xy - 5y^2$ harmonikus és keressük meg a harmonikus társát. *18pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a), \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \quad a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$
$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}},$$
$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2 L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad u'_x = v'_y,\ -u'_y = v'_x, \quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

$$\int_L f(z) dz = \int_\alpha^\beta f(z(t)) z'(t) dt$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z) dz.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$
$$\int_k^\infty f(x) dx < \sum_{n=k}^{\infty} a_n < a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx, \quad \hat{f}(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad \hat{F}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx$$

2011.05.24. Kalkulus I. NÉV:................................

A csoport EHA:................................

`FELADATOK:`

1. A tanult módon vizsgáljuk az $a_1 = 2$, $a_n = \sqrt{3a_{n-1} - 1}$ rekuzív sorozatot. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n+3}}{\sqrt{n^2+5}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} 3n \sin\frac{5}{n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x\ln^2|x|$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték.

(iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_{-3}^{1} \frac{z^6}{\sin^2(z^7+3)}dz, \qquad \text{(ii)} \int_{2}^{\infty} \frac{1}{4u+u^3}du.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat monoton nő. *5pt*

(ii) Az f függvény lineárisan közelíthető az $a = 2$ pontban. *5pt*

(iii) f egyenletesen folytonos I–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = -2$. *5pt*

(v) Az $[a, b]$ egy beosztása, a beosztás finomsága. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2011.05.31. Analízis NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Határozzuk meg az $f(x,y) = ye^{y+3}$ függvény szélsőértékeit a $(0,0),(1,0),(1,1)$ és $(0,1)$ pontok által meghatározott zárt négyzeten. *18pt*

2. Oldjuk meg az $x^2dy + (y - 2xy - 1)dx = 0$ egyenletet. *18pt*

3. Határozzuk meg $\int_L (Imz + zchz^2)\, dz$ –t, ahol L az $A = 1+i$, $B = 1-i$ pontokat összekötő, 1 középpontú, 1 sugarú pozitív irányítású félkörív, továbbá a $B = 1 - i$, $D = 2$–t összekötő szakasz. *18pt*

4. A megfelelő sorfejtések első négy tagjának segítségével becsüljük meg az

   a) $\sqrt[3]{2}$, b) $6 \arcsin 1/2$ értékeket. *18pt*

5. A tanult módon vizsgáljuk a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n3^n}(2x-1)^n$ függvénysort. *18pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2011.05.31. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Definíció szerint igazoljuk, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3-2n+1}{5n^3-n^2+3} = \frac{3}{5}$. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n+2} - \frac{2n^2+n+1}{2n-1}\right), \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n - 2^{2n}}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = xe^{-1/x^2}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték.

(iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_2^3 \frac{v-1}{\sqrt[3]{v^2-2v}}dv, \qquad \text{(ii)} \int_0^\infty 2xe^{-3x}dx.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat alulról korlátos. *5pt*

(ii) Az f függvény differenciálható az $a = 1$ pontban. *5pt*

(iii) f folytonos az $x_0 = 2$ pontban. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$. *5pt*

(v) Darboux–féle felső integrálközelítő összeg. (részletesen) *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2011.06.07. Analízis NÉV:................................

A csoport EHA:................................

`FELADATOK`

1. Határozzuk meg az $f(x,y) = 3x^2 - y^2 - 6x + 2y + 1$ függvény szélsőértékeit a $(0,0), (2,0), (2,2)$ és $(0,2)$ pontok által meghatározott zárt négyzeteten. *18pt*
2. Laplace–transzformációval oldjuk meg az $y'' - y' - 2y = 8\sin x - 2\cos x$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$ kezdetiérték problémát. *18pt*
3. Határozzuk meg $\int_L (Imz + zchz^2)\, dz$ –t, ahol L az $A = 1+i$, $B = 1-i$ pontokat összekötő, 1 középpontú, 1 sugarú negatív irányítású félkörív, továbbá a $B = 1-i$, $C = 2$–t összekötő szakasz. *18pt*
4. Határozzuk meg $\oint_{\gamma_{i,1}^+} \frac{shz^2}{(z^2+1)^2}\, dz$ –t. *18pt*
5. Hol differenciálható az $f(z) = |z|^2$ komplex függvény. *18pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2011.06.07. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Adjuk meg az $f(x) = xe^{x^2-x}$ függvénynek az $a = 1$ pontban vett negyedrendű Taylor–polinomját. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n\sqrt{n} + n}{n\sqrt{n^3+1}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-1}{4n+3}\right)^{2-n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték.

(iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_2^3 \frac{2y-1}{y^2+y-6}dy, \qquad \text{(ii)} \int_0^\infty z^{-5/2} \ln z dz.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat konvergens. (részletesen) *5pt*

(ii) Az f függvény integrálfüggvénye. *5pt*

(iii) f konvex I–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \infty$. *5pt*

(v) Darboux–féle alsó integrálközelítő összeg. (részletesen) *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2011.06.13. Analízis NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Határozzuk meg az $f(x, y) = 3x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1$ függvény szélsőértékeit a $(0, 0), (3, 0)$ és $(2, 3)$ pontok által meghatározott zárt háromszögön. *18pt*
2. Határozzuk meg $\oint_{\gamma_{1,1}^-} \frac{\cos z^2}{z^4 + 1}\, dz$ –t. *18pt*
3. Határozzuk meg $\int_L (Imz + sh(2iz - 3))\, dz$ –t, ahol L a $B = 0$, $C = 1 - i$–t összekötő szakasz és a $C = 1 - i$, $D = 2$–t összekötő, negatív irányítású negyedkörív. *18pt*
4. Határozzuk meg az a) $\sqrt{-1 - \sqrt{3}i}$, b)$(1 - i)^{117}$, c)$sh(i\pi/2) - ch(i\pi/6)$ értékeket. *18pt*
5. Igazoljuk, hogy $u(x, y) = x^2 + xy - y^2$ harmonikus és keressük meg a harmonikus társát. *18pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2011.06.13. Kalkulus I. NÉV:...............................

A csoport EHA:...............................

`FELADATOK:`

1. A tanult módon vizsgáljuk az $a_1 = 2$, $a_n = \sqrt{3a_{n-1} - 1}$ rekuzív sorozatot. *10pt*
2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n+3}}{\sqrt{n^2+5}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} 3n \sin\frac{5}{n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x\ln^2|x|$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték.

(iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_{-3}^{1} \frac{z^6}{\sin^2(z^7+3)}dz, \qquad \text{(ii)} \int_{2}^{\infty} \frac{1}{4u+u^3}du.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat monoton nő. *5pt*

(ii) Az f függvény lineárisan közelíthető az $a = 2$ pontban. *5pt*

(iii) f egyenletesen folytonos I–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = -2$. *5pt*

(v) Az $[a, b]$ egy beosztása, a beosztás finomsága. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2011.06.20. Analízis NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Az integrálkritérium segítségével, 10^{-2} pontossággal becsüljük meg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+5n+2}$ értékét. *18pt*
2. Határozzuk meg $\oint_{\gamma^-_{-i,1}} \frac{\sin(z^2-z)}{(z^2+2)^3}\,dz$ –t. *18pt*
3. Határozzuk meg $\int_L ((z-1)\overline{z-i} + 3z + 2 - i)\ dz$ –t, ahol L a $-i$ középpontú, $r = 2$ sugarú körnek az $A = i$, $B = -3i$ pontjait negatív irányban összekötő félkörív ($A \to B$). *18pt*
4. Oldjuk meg $(x+y)dy = (x-y)dx$, $y(0) = 1$. *18pt*
5. Oldjuk meg $(x \ln x)y'' = y'$, $y(1) = 1, y'(e) = 2$. *18pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2011.06.20. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Monotonitás és korlátosság szempontjából vizsgáljuk az $a_n = \dfrac{2n-41}{3n+22}$ sorozatot. Továbbá adjuk meg az $\inf a_n$ és $\sup a_n$ értékeket. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n-3}}{\sqrt{n^3-7n-5}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} 3n \operatorname{tg} \frac{5}{n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x + e^{-1/x}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_1^2 \frac{z}{\sqrt{z^2-1}} dz, \qquad \text{(ii)} \int_2^\infty \frac{1}{u-u^2} du.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat monoton csökkenő. *5pt*

(ii) Az f függvény lineárisan approximálható az $a = -1$ pontban. *5pt*

(iii) f folytonos az $x_0 = 2$ pontban. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. *5pt*

(v) Az $[a, b]$ egy beosztása, a beosztás finomsága. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**