2006.12.18. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+x-6}{x^2-2x-8}}$ függvény értelmezési tartományát. *5pt*
2. Definíció alapján igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-3n+1}{n^2+5n-17} = 2.$ *5pt*
3. Határozzuk meg a következő határértékeket: *15pt*

$$\text{(i)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+n}-n}{\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n}}, \qquad \text{(ii)}\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-3}{2n+5}\right)^{n+1}, \qquad \text{(iii)}\ \lim_{x\to1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}.$$

4. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x^2e^{-x}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

5. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)}\ \int_0^1 \frac{1}{x^2+3}dx, \qquad \text{(ii)}\ \int_0^1 \frac{2u-1}{2+3u+u^2}du, \qquad \text{(iii)}\ \int_e^\infty \frac{1}{x\ln x}dx.$$

`DEFINÍCIÓ:`

1. Definiáljuk a következő fogalmakat:

   (i) k torlódási pontja (a_n)–nek. *5pt*

   (ii) f differenciálható az x_0 pontban. *5pt*

   (iii) Az $\{a_n\}$ sorozat korlátos. *5pt*

   (iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to1} f(x) = \infty$. *5pt*

   (v) f integrálfüggvénye. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tíltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\frac{dx}{dt}dt, \quad A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi, \quad L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx,$$
$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt, \quad \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}d\varphi,$$
$$V_X = \pi\int_a^b f^2(x)dx, \quad V_Y = 2\pi\int_a^b xf(x)dx,$$
$$V_X = 2\pi\int_c^d y(h(y) - t(y))dy, \quad V_Y = \pi\int_c^d (h^2(y) - t^2(y))dy,$$
$$V_X = \pi\int_{t_1}^{t_2} y^2\frac{dx}{dt}dt, \quad V_Y = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} xy\frac{dx}{dt}dt, \quad V_P = \frac{2}{3}\pi\int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin\varphi d\varphi,$$
$$S_X = 2\pi\int_c^d y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx, \quad S_X = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt,$$
$$S_P = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} r\sin\varphi\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}d\varphi$$

2006.12.18. Kalkulus II. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Határozzuk meg az $f(x,y)=\sqrt{1-\ln(4-x^2-y^2)}$ függvény értelmezési tartományát. *7pt*

2. Definíció alapján igazoljuk, hogy $f(x,y)=x^2y$ esetén $f'_x(x,y)=2xy$. *7pt*

3. Határozzuk meg az $f(x,y)=x^2e^y-\cos xy$ függvénynek a $P(2,0)$ pontban, $u=(3,-1)$ irányban vett deriváltját. *7pt*

4. Cseréljük fel az integrálási sorrendet $\int_0^1\left(\int_{-x}^{x^2} f(x,y)dy\right)dx$ *7pt*

5. Becsüljük meg a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+2n+2}$ sor összegét. *10pt*

6. Határozzuk meg $\int_L x^2dx+xydy$ –t, ha L a $P_1(2,3)$ és $P_2(1,0)$ pontokat összekötő szakasz. *10pt*

7. Oldjuk meg $xdy-(y^3-y)dx=0$, $y(2)=1$. *12pt*

8. Hol konvergens $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2n}{n^3+3n-2}(x+3)^n$. *14pt*

9. Az $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$, $|x|<1$, összefüggés alapján határozzuk az $f(x)=\frac{x^3}{1+x^2}$ és $g(x)=\frac{x^4+3x^2}{(1+x^2)^2}$ függvények 0 pont körüli hatványsorát. *16pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tíltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2006.12.20. Kalkulus I. NÉV:................................

A csoport EHA:................................

FELADATOK:

1. Határozzuk meg az $f(x) = \ln \dfrac{x-6}{x+8}$ függvény értelmezési tartományát. *5pt*
2. Definíció alapján igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-3n+1}{n^3+5n-17} = 0.$ *5pt*
3. Határozzuk meg a következő határértékeket: *15pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{27}-1}{\sqrt[n]{9}-1}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n-3}{3n+5}\right)^{6-2n}, \qquad \text{(iii)} \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\sqrt{x}-1}.$$

4. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{x}{e^x(x-1)}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

5. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+3}dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^1 u^2 \sin u du, \qquad \text{(iii)} \int_{-3}^4 \frac{x^2+2x-3}{\sqrt{x}}dx.$$

DEFINÍCIÓ:

1. Definiáljuk a következő fogalmakat:
   - (i) k legnagyobb alsó korlátja E $(\subset \mathbb{R})$–nek. *5pt*
   - (ii) f differenciálható az x_0 pontban. *5pt*
   - (iii) Az $\{a_n\}$ sorozat monoton nő. *5pt*
   - (iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = -1$. *5pt*
   - (v) f egyenletesen folytonos $[a;b]$–n. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tíltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\frac{dx}{dt} dt, \quad A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi) d\varphi, \quad L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, \quad \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi,$$

$$V_X = \pi \int_a^b f^2(x) dx, \quad V_Y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx,$$

$$V_X = 2\pi \int_c^d y(h(y) - t(y)) dy, \quad V_Y = \pi \int_c^d (h^2(y) - t^2(y)) dy,$$

$$V_X = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2 \frac{dx}{dt} dt, \quad V_Y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} xy \frac{dx}{dt} dt, \quad V_P = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3 \sin\varphi d\varphi,$$

$$S_X = 2\pi \int_c^d y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx, \quad S_X = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt,$$

$$S_P = 2\pi \int_\alpha^\beta r\sin\varphi\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi$$

2006.12.20. Kalkulus II. NÉV:................................

A csoport EHA:................................

FELADATOK

1. Ábrázoljuk az $f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x-y^2}}$ értelmezési tartományában azokat a pontokat ahol $f(x,y)=1$. *7pt*
2. Definíció alapján igazoljuk, hogy $f(x,y) = x^2y^3$ esetén $f'_y(x,y) = 3x^2y^2$. *7pt*
3. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2e^{-y} - \sin xy$ függvénynek a $P(2,0)$ pontban, $u = (2,-2)$ irányban vett deriváltját. *7pt*
4. Cseréljük fel az integrálási sorrendet $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left(\int_{-x^2-1}^{x^2+2} f(x,y)dy\right)dx$ *7pt*
5. Becsüljük meg a $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{5}{n^2+n-6}$ sor összegét. *10pt*
6. Határozzuk meg $\displaystyle\int_L x^2dx - xydy$ –t, ahol L a $P_1(2,3)$ és $P_2(-2,-2)$ pontokat összekötő szakasz. *10pt*
7. Oldjuk meg $(x^2+1)y' + 3xy = 6x$, $y(0) = 3$. *12pt*
8. Határozzuk meg $f(x,y) = \frac{3}{4}y^2 + \frac{1}{24}y^3 - \frac{1}{32}y^4 - x^2$ szélsőértékeit. *14pt*
9. Az $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$, összefüggés alapján határozzuk az $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$ és $g(x) = \dfrac{x^4+3x^2}{(1+x^2)^2}$ függvények 0 pont körüli hatványsorát. *16pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tíltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2007.01.03. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Határozzuk meg az $f(x) = \arcsin(2x-5)$ függvény értelmezési tartományát. *5pt*

2. Definíció alapján igazoljuk, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-3n+1}{n^2+5n-17} = \infty$. *5pt*

3. Határozzuk meg a következő határértékeket: *15pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^n - n^2}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+4} - \sqrt{n^2-3}\right), \qquad \text{(iii)} \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\sqrt{x}-1}.$$

4. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x^2 \ln x$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

5. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 \frac{t^2}{t^3+3} dt, \qquad \text{(ii)} \int_{-1}^1 u \cos u du, \qquad \text{(iii)} \int_{-2}^1 \frac{5x-12}{x^2-5x+6} dx.$$

DEFINÍCIÓ:

1. Definiáljuk a következő fogalmakat:

   (i) k legkisebb felső korlátja E ($\subset \mathbb{R}$)–nek. *5pt*

   (ii) H megszámlálhatóan végtelen számosságú. *5pt*

   (iii) Az $\{a_n\}$ sorozat konvergál a–hoz. *5pt*

   (iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. *5pt*

   (v) f monoton csökkenő $[a;b]$–n. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tíltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \frac{dx}{dt} dt, \quad A = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\varphi) d\varphi, \quad L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, \quad \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi,$$

$$V_X = \pi \int_a^b f^2(x) dx, \quad V_Y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx,$$

$$V_X = 2\pi \int_c^d y(h(y) - t(y)) dy, \quad V_Y = \pi \int_c^d (h^2(y) - t^2(y)) dy,$$

$$V_X = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2 \frac{dx}{dt} dt, \quad V_Y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} xy \frac{dx}{dt} dt, \quad V_P = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3 \sin\varphi d\varphi,$$

$$S_X = 2\pi \int_c^d y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx, \quad S_X = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt,$$

$$S_P = 2\pi \int_\alpha^\beta r \sin\varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi$$

2007.01.03. Kalkulus I. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Igazoljuk, hogy $x > -1$ esetén $(1+x)^n \geq 1+nx$ minden $n \in \mathbb{N}$–re. *5pt*

2. Definíció alapján igazoljuk, hogy $f(x) = x^3$ deriváltja, $f'(x) = 3x^2$. *5pt*

3. Határozzuk meg a következő határértékeket: *15pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{2}-1}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n-3}{3n+5}\right)^{3+2n}, \qquad \text{(iii)} \lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}.$$

4. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

5. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^1 u^2 \ln u du, \qquad \text{(iii)} \int_1^4 \frac{x+1}{x^2+4x+5}dx.$$

`DEFINÍCIÓ:`

1. Definiáljuk a következő fogalmakat:

   (i) f–nek helyi maximuma van az x_0 pontban.. *5pt*

   (ii) f folytonos az x_0 pontban. *5pt*

   (iii) Az $\{a_n\}$ sorozat határértéke végtelen. *5pt*

   (iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to 5} f(x) = -1$. *5pt*

   (v) f integrálható $[a;b]$–n. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tíltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\frac{dx}{dt}dt, \quad A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi, \quad L = \int_c^d \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx,$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt, \quad \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}d\varphi,$$

$$V_X = \pi\int_a^b f^2(x)dx, \quad V_Y = 2\pi\int_a^b xf(x)dx,$$

$$V_X = 2\pi\int_c^d y(h(y)-t(y))dy, \quad V_Y = \pi\int_c^d (h^2(y)-t^2(y))dy,$$

$$V_X = \pi\int_{t_1}^{t_2} y^2\frac{dx}{dt}dt, \quad V_Y = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} xy\frac{dx}{dt}dt, \quad V_P = \frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta r^3\sin\varphi d\varphi,$$

$$S_X = 2\pi\int_c^d y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx, \quad S_X = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt,$$

$$S_P = 2\pi\int_\alpha^\beta r\sin\varphi\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}d\varphi$$

2007.01.03. Kalkulus II. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Ábrázoljuk az $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}$ értelmezési tartományát. *7pt*
2. Definíció alapján határozzuk meg az $f(x,y)=x^2y^3$ függvény $P(2,1)$ pontbeli, $u(-1,1)$ iránymenti deriváltját. *7pt*
3. Határozzuk meg f'''_{xyz}–t, ahol $f(x,y,z)=x^2ze^{-zy}-\ln(z\sin xy)$. *7pt*
4. Oldjuk meg $\displaystyle\int_0^2\left(\int_{y/2}^1 e^{x^2}dx\right)dy$ *7pt*
5. Határozzuk meg a $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2\cdot 3^n-4^{n+1}}{2\cdot 5^{2+n}}$ sor összegét. *10pt*
6. Határozzuk meg $\displaystyle\int_L ydx-xydy$ –t, ahol L a $P_1(2,3)$, $P_2(0,0)$ és $P_3(-2,-2)$ pontokat köti össze. *10pt*
7. Oldjuk meg $y'-xe^y=2e^y$, $y(0)=0$. *12pt*
8. Határozzuk meg $f(x,y)=4xy-y^4-x^4$ szélsőértékeit. *14pt*
9. Határozzuk meg e^{-x^2} Maclaurin-sorát, és ennek segítségével becsüljüg meg az $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ integrált. *16pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tíltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2007.01.08. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Határozzuk meg az $f(x) = \ln(x+1) - \sqrt{2-x}$ függvény értelmezési tartományát. *5pt*
2. Definíció alapján igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+n+3}{2-2n-n^2} = -\infty$. *5pt*
3. Határozzuk meg a következő határértékeket: *15pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^4-2n^5+3n}{3n-n^6}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{x}, \qquad \text{(iii)} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x+4}{2x-1}\right)^{-x}.$$

4. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{x}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

5. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 2^{3-5x}dx, \qquad \text{(ii)} \int_1^2 \frac{1-u}{1+u^2}du, \qquad \text{(iii)} \int_{-2}^1 \frac{3}{x^2-x-2}dx.$$

`DEFINÍCIÓ:`

1. Definiáljuk a következő fogalmakat:
   - (i) k legkisebb felső korlátja E $(\subset \mathbb{R})$–nek. *5pt*
   - (ii) H megszámlálható számosságú. *5pt*
   - (iii) Az $\{a_n\}$ sorozat Cauchy–sorozat. *5pt*
   - (iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. *5pt*
   - (v) Az $[a;b]$ intervallumon integrálható f függvény integrálfüggvénye. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tíltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\frac{dx}{dt} dt, \quad A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi) d\varphi, \quad L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, \quad \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi,$$

$$V_X = \pi \int_a^b f^2(x) dx, \quad V_Y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx,$$

$$V_X = 2\pi \int_c^d y(h(y) - t(y)) dy, \quad V_Y = \pi \int_c^d (h^2(y) - t^2(y)) dy,$$

$$V_X = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2 \frac{dx}{dt} dt, \quad V_Y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} xy \frac{dx}{dt} dt, \quad V_P = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3 \sin\varphi d\varphi,$$

$$S_X = 2\pi \int_c^d y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx, \quad S_X = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt,$$

$$S_P = 2\pi \int_\alpha^\beta r \sin\varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi$$

2007.01.08. Kalkulus I. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Oldjuk meg $\dfrac{x-2}{x+3} \geq 1$. *5pt*
2. Határozzuk meg $f(x) = x^2 \ln x + 2$ –nek az $x = 1$ koordinátájú pontjába húzott érintő egyenletét. *5pt*
3. Határozzuk meg a következő határértékeket: *15pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^3+n}-n}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n+1}{3n-5}\right)^{3-2n}, \qquad \text{(iii)} \lim_{x\to-1} \frac{x^2-1}{2x^2+x-1}.$$

4. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték.

(iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

5. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{t^2+5}}dt, \qquad \text{(ii)} \int_0^\infty xe^{-x}dx, \qquad \text{(iii)} \int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2-5x-6}dx.$$

DEFINÍCIÓ:

1. Definiáljuk a következő fogalmakat:
   - (i) f–nek helyi maximuma van az x_0 pontban. *5pt*
   - (ii) f differenciálható az x_0 pontban. *5pt*
   - (iii) Az $\{a_n\}$ sorozat részsorozata. *5pt*
   - (iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to1} f(x) = -5$. *5pt*
   - (v) f korlátos $[a;b]$–n. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tíltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\frac{dx}{dt} dt, \quad A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi) d\varphi, \quad L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, \quad \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi,$$

$$V_X = \pi \int_a^b f^2(x) dx, \quad V_Y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx,$$

$$V_X = 2\pi \int_c^d y(h(y) - t(y)) dy, \quad V_Y = \pi \int_c^d (h^2(y) - t^2(y)) dy,$$

$$V_X = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2 \frac{dx}{dt} dt, \quad V_Y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} xy \frac{dx}{dt} dt, \quad V_P = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3 \sin\varphi d\varphi,$$

$$S_X = 2\pi \int_c^d y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx, \quad S_X = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt,$$

$$S_P = 2\pi \int_\alpha^\beta r \sin\varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi$$

2007.01.08. Kalkulus II. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Ábrázoljuk az $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}$ értelmezési tartományát. *7pt*
2. Definíció alapján határozzuk meg az $f(x,y) = xy^6$ függvény $P(2,1)$ pontbeli, $u(-1,1)$ iránymenti deriváltját. *7pt*
3. Határozzuk meg f'''_{xyz}–t, ahol $f(x,y,z) = xe^{xy} - y^2\ln(x+z)$. *7pt*
4. Határozzuk meg $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_{y/2}^1 e^{x^2}dx\right) dy$ *7pt*
5. Határozzuk meg a $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2\cdot 5^n - 4^{n-1}}{2\cdot 7^{n+3}}$ sor összegét. *10pt*
6. Határozzuk meg $\displaystyle\int_L 2xydx + (x^2-1)dy$ –t, ahol L a $P_1(2,3)$, $P_2(0,0)$, $P_3(-2,5)$ és $P_4(2,2)$ pontokat köti öszze. *10pt*
7. Oldjuk meg $y'' - 2y' = x$, $y(0) = 0$. *12pt*
8. Hol konvergens $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n\ln n}{3^n-1}(2x-1)^n$. *14pt*
9. Határozzuk meg $x^3e^{-x^2}$ Maclaurin-sorát, és segítségével becsüljüg meg az $\int_0^1 x^3e^{-x^2}dx$ integrált. *16pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tíltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2007.01.10. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Mutassuk meg, hogy $a_n = n^2/2^n$ korlátos.
2. Mutassuk meg, hogy $a_n = \dfrac{n-2}{n-3}$ monoton csökkenő ha $n > 3$. *5pt*
3. Határozzuk meg a következő határértékeket: *15pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 - 2n^3 + 3n - 2}{n + n^6}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{3x}, \qquad \text{(iii)} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+4}{2x-1}\right)^{-x}.$$

4. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = xe^{-x^2}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

5. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 3^{3-5x}dx, \qquad \text{(ii)} \int_1^2 \frac{1+u}{1+u^2}du, \qquad \text{(iii)} \int_{-2}^1 \frac{3}{x^2-x-2}dx.$$

`DEFINÍCIÓ:`

1. Definiáljuk a következő fogalmakat:
   - (i) Az (a_n) sorozat határértéke mínusz végtelen. *5pt*
   - (ii) f konvex az I intervallumon. *5pt*
   - (iii) Az $\{a_n\}$ sorozat Cauchy–sorozat. *5pt*
   - (iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. *5pt*
   - (v) Az $[a, b]$ intervallum beosztása, a beosztás finomsága. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tíltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\frac{dx}{dt}dt, \quad A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi, \quad L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, \quad \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi,$$

$$V_X = \pi\int_a^b f^2(x)dx, \quad V_Y = 2\pi\int_a^b xf(x)dx,$$

$$V_X = 2\pi\int_c^d y(h(y) - t(y))dy, \quad V_Y = \pi\int_c^d (h^2(y) - t^2(y))dy,$$

$$V_X = \pi\int_{t_1}^{t_2} y^2\frac{dx}{dt}dt, \quad V_Y = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} xy\frac{dx}{dt}dt, \quad V_P = \frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta r^3\sin\varphi d\varphi,$$

$$S_X = 2\pi\int_c^d y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx, \quad S_X = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt,$$

$$S_P = 2\pi\int_\alpha^\beta r\sin\varphi\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi$$

2007.01.10. Kalkulus I. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Legyen $a_1 = 3$ és $a_n = 4 + 3\sqrt{a_{n-1}}$ ha $n \geq 2$. Mutassuk meg, hogy (a_n) konvergens, majd adjuk meg a határértékét. *5pt*
2. Definíció alapján igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 - n + 7}{3n^2 + n - 7} = \dfrac{2}{3}$. *5pt*
3. Határozzuk meg a következő határértékeket: *15pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+4}}{\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9}, \qquad \text{(iii)} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{2x}.$$

4. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x + e^{-\frac{1}{x}}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

5. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 \frac{t}{(t^2+5)^7} dt, \qquad \text{(ii)} \int_0^\infty \sin x e^{-x} dx, \qquad \text{(iii)} \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 + 3x} dx.$$

`DEFINÍCIÓ:`

1. Definiáljuk a következő fogalmakat:
   - (i) Az f függvény egyenletesen folytonos az I intervallumon. *5pt*
   - (ii) Az f függvény lineárisan közelíthető az x_0 pontban. *5pt*
   - (iii) Az $\{a_n\}$ sorozat torlódási pontja. *5pt*
   - (iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = -5$. *5pt*
   - (v) Az f függvény B beosztáshoz tartozó Darboux–féle alsó integrálközelítő összege. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \frac{dx}{dt} dt, \quad A = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\varphi) d\varphi, \quad L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, \quad \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi,$$

$$V_X = \pi \int_a^b f^2(x) dx, \quad V_Y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx,$$

$$V_X = 2\pi \int_c^d y(h(y) - t(y)) dy, \quad V_Y = \pi \int_c^d (h^2(y) - t^2(y)) dy,$$

$$V_X = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2 \frac{dx}{dt} dt, \quad V_Y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} xy \frac{dx}{dt} dt, \quad V_P = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3 \sin\varphi d\varphi,$$

$$S_X = 2\pi \int_c^d y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx, \quad S_X = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt,$$

$$S_P = 2\pi \int_\alpha^\beta r \sin\varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi$$

2007.01.10. Kalkulus II. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Ábrázoljuk az $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2-9}}{\sqrt{x^2-y^2-2}}$ értelmezési tartományát. *7pt*
2. Határozzuk meg az $f(x,y) = xe^{x-y-6}$ függvény $P(3,1)$ pontbeli, $u(-1,2)$ iránymenti deriváltját. *7pt*
3. Határozzuk meg az $f(x,y) = (x-1)^2 - 2y^2$ függvény szélsőértékeit. *7pt*
4. Cseréljük fel az integrálás sorrendjét $\displaystyle\int_1^2 \int_{1-2x}^1 f(x,y)dydx$ esetén. *7pt*
5. Határozzuk meg az $y = -x+4$, $y = 2$ és $x = 1$ egyenesek által meghatározott zárt síkrész y–tengely körüli megforgatásával keletkező test térfogatát. *10pt*
6. Határozzuk meg $\displaystyle\int_L xydx + (x^2-1)dy$ –t, ahol L a $P_1(2,3)$, $P_2(-2,5)$ pontokat köti össze. *10pt*
7. Oldjuk meg $(4x^3+y)dx + (2y+x)dy = 0$, $y(0) = 1$. *12pt*
8. Hol konvergens $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n\ln n}{3^n-1}(2x-1)^n$. *14pt*
9. Határozzuk meg $x^3e^{-x^2}$ Maclaurin-sorát, és segítségével becsüljüg meg az $\int_0^1 x^3e^{-x^2}dx$ integrált. *16pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tíltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2007.01.22. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Határozzuk meg $f(x) = \sqrt[3]{9-x}$–nek az $a = 1$ pont körüli harmadfokú Taylor–polinomját. *5pt*

2. Mutassuk meg, hogy $\ln(x+1) \leq x$, ha $x > -1$. *5pt*

3. Határozzuk meg a következő határértékeket: *15pt*

$$\text{(i)} \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right), \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^n, \qquad \text{(iii)} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+4}{2x\ln x - 1}\right)^{-2}.$$

4. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \ln(x+1) - \dfrac{x}{x+1}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

5. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_{-2}^{1} z^2(z^3-5)^7\,dz, \qquad \text{(ii)} \int_{1}^{2} \frac{1-3u}{1+u^2}\,du, \qquad \text{(iii)} \int_{-2}^{1}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-3}\right)dx.$$

DEFINÍCIÓ:

1. Definiáljuk a következő fogalmakat:

   (i) Az A és a B halmaz számossága azonos. *5pt*

   (ii) Az f függvény differenciálható az x_0 pontban. *5pt*

   (iii) Az $\{a_n\}$ sorozat Cauchy–sorozat. *5pt*

   (iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. *5pt*

   (v) Az $[a;b]$ intervallumon integrálható f függvény integrálfüggvénye. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tíltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \frac{dx}{dt} dt, \quad A = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\varphi) d\varphi, \quad L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, \quad \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi,$$

$$V_X = \pi \int_a^b f^2(x) dx, \quad V_Y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx,$$

$$V_X = 2\pi \int_c^d y(h(y) - t(y)) dy, \quad V_Y = \pi \int_c^d (h^2(y) - t^2(y)) dy,$$

$$V_X = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2 \frac{dx}{dt} dt, \quad V_Y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} xy \frac{dx}{dt} dt, \quad V_P = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3 \sin\varphi d\varphi,$$

$$S_X = 2\pi \int_c^d y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx, \quad S_X = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt,$$

$$S_P = 2\pi \int_\alpha^\beta r \sin\varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi$$

2007.01.22. Kalkulus I. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Ha $x, y \in \mathbb{R}$ és $x > 0$, akkor van olyan $n \in N$ szám, hogy $nx > y$. *5pt*
2. Definíció alapján igazoljuk, hogy $\dfrac{3n-4}{5n+13} \to \dfrac{3}{5}$. *5pt*
3. Határozzuk meg a következő határértékeket: *15pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 - 2n^5 + 3}{3 - n^2}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{2 - x}, \qquad \text{(iii)} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

4. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

5. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{t^2+5}} dt, \qquad \text{(ii)} \int_{0}^{\pi/2} t \cos^2 t dt, \qquad \text{(iii)} \int_{-2}^{0} \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

`DEFINÍCIÓ:`

1. Definiáljuk a következő fogalmakat:

   (i) f–nek helyi maximuma van az x_0 pontban. *5pt*

   (ii) Az f függvény B beosztáshoz tartozó Darboux–féle felső integrálközelítő összege. *5pt*

   (iii) Az $\{a_n\}$ sorozat részsorozata. *5pt*

   (iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. *5pt*

   (v) f korlátos $[a; b]$–n. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tíltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \frac{dx}{dt} dt, \quad A = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\varphi) d\varphi, \quad L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$
$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, \quad \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi,$$
$$V_X = \pi \int_a^b f^2(x) dx, \quad V_Y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx,$$
$$V_X = 2\pi \int_c^d y(h(y) - t(y)) dy, \quad V_Y = \pi \int_c^d (h^2(y) - t^2(y)) dy,$$
$$V_X = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2 \frac{dx}{dt} dt, \quad V_Y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} xy \frac{dx}{dt} dt, \quad V_P = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3 \sin\varphi d\varphi,$$
$$S_X = 2\pi \int_c^d y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx, \quad S_X = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt,$$
$$S_P = 2\pi \int_\alpha^\beta r \sin\varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi$$

2007.01.22. Kalkulus II. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Határozzuk meg a $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ határértéket. *7pt*
2. Határozzuk meg az $f(x,y)=e^x y^6$ függvény $P(0,1)$ pontbeli, $u(-3,1)$ iránymenti deriváltját. *7pt*
3. Cseréljük fel az integrálás sorrendjét: $\int_1^2 \int_{(1-2x)/x}^{\ln x} f(x,y)dydx.$ *7pt*
4. Határozzuk meg az $r = cos^2\varphi$ $(0 \le \varphi \le \pi/2)$ egyenletű görbének a polár–tengely körüli megforgatásával keletkező test térfogatát. *7pt*
5. Határozzuk meg az $f(x,y)=x^2+y^2-xy+3x-3y$ függvény szélsőértékeit. *10pt*
6. Határozzuk meg az $\int_L 2yxdx+x^2dy$ görbementi integrált, ahol L a $(4,1)$, $(0,-3)$, $(1,3)$ és $(4,2)$ pontokat összekötő törtszakasz. *10pt*
7. Oldjuk meg $y' = \frac{2x-y}{1-x}$, $y(0)=0$. *12pt*
8. Hol konvergens $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n + 1}{n2^n - 1}(3x+2)^n$. *14pt*
9. Határozzuk meg $\operatorname{arctg} x$ hatványsorát és segítségével becsüljüg meg az $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$ integrált. *16pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**