2005.05.26. Kalkulus II. NÉV:.................................

C csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Legyen $f(x,y,z)=\dfrac{e^{xy}}{\ln z}$. Határozzuk meg f'''_{xyz}–t. *4pt*
2. Határozzuk meg az $\displaystyle\int_L ydx-xydy$ görbementi integrált, ahol L a $(2,1)$ pontot a $(0,-1)$ ponttal összekötő szakasz. *7pt*
3. Határozzuk meg $\displaystyle\int_3^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx$. *7pt*
4. Cseréljük fel az integrálás sorrendjét: $\displaystyle\int_1^2\int_{(1-2x)/x}^{\ln x} f(x,y)dydx$. *9pt*
5. Oldjuk meg $(x^3+y)dx-xdy=0$. *9pt*
6. Hol konvergens $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2^n\ln n}{n^2}(x+2)^n$. *10 pt*

ELMÉLET

1. Definiáljuk a következő fogalmakat:
   (i) Az L görbe egyszerű és sima. *5pt*
   (ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\infty,-2)} f(x,y)=-\infty$. *5pt*
   (iii) Az $f(x,y)$ függvény $A(a_1,a_2)$ pontbeli (u_1,u_2) irány menti deriváltja. *5pt*
2. Igazoljuk a következő állításokat:
   (i) Ha $f(x,y)$ totálisan differenciálható, akkor parciálisan is differenciálható. *10pt*
   (ii) Ha $P(x,y),Q(x,y)$ folytonos és van olyan $U(x,y)$, hogy U totálisan differenciálható és $dU=Pdx+Qdy$, akkor az $\int_L Pdx+Qdy$ vonalintegrál az út alakjától független. *15pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat és az elmélet részből legalább 15-15 pontot el kell érni és a gyakorlatról hozott pontokkal együtt 50 pontnál nem lehet kevesebb. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!** Jegybeírás a következő vizsga idejében, de az intézeti irodán az index bármikor leadható.

2005.05.26. Kalkulus I. NÉV:.................................

D csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Definíció alapján igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-8n-15}{2n^2+17} = \dfrac{1}{2}$. *5pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *5pt, 5pt, 5pt*

$$\text{(i)}\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^{2n}-5^n} \qquad \text{(ii)}\ \lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-4x+4} \qquad \text{(iii)}\ \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x-2}\right)^{2+x}$$

3. Deriváljuk a $g(x) = (1+\sqrt{x})^{x^2-2\sqrt{x+1}}$ függvényt. *5pt*

4. Adjuk meg az $f(x) = \sqrt[3]{x^2-2x+1}$ függvénynek az $x=0$ ponba húzott érintőjének egyenletét. *5pt*

5. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x + e^{-\frac{1}{x}}$ függvényt.

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték.

(iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet. *2+3+4+4+3pt*

ELMÉLET

1. Definiáljuk a következő fogalmakat:

   (i) Az f függvény differenciálható az x_0 pontban. *5pt*

   (ii) Az f függvény monoton nő az I intervallumon. *5pt*

   (iii) Az (a_n) sorozat Cauchy–sorozat. *5pt*

2. Igazoljuk a következő állításokat:

   (i) Ha $a_n \to \infty$, akkor $a_n^{-1} \to 0$. *10pt*

   (ii) Ha $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ folytonos $[a;b]$–n, akkor f egyenletesen folytonos $[a;b]$–n. *15pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat és az elmélet részből legalább 15-15 pontot el kell érni és együtt 40 pontnál nem lehet kevesebb. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!** Jegybeírás a következő vizsga idejében, de az intézeti irodán az index bármikor leadható.

2005.05.30. Kalkulus II. NÉV:................................

D csoport EHA:................................

FELADATOK

1. Legyen $f(x,y,z) = \dfrac{e^{xy}}{x \ln z}$. Határozzuk meg f'''_{xyz}–t. *4pt*
2. Határozzuk meg az $\displaystyle\int_L ydx - ydy$ görbementi integrált, ahol L a $(0,1)$ pontot a $(0,-1)$ ponttal összekötő egység sugarú félkörív pozitív irányítással. *9pt*
3. Az integrálkritérium segítségével becsüljük meg $\displaystyle\sum_3^\infty \frac{\ln n}{n^2}$ értékét. *9pt*
4. Cseréljük fel az integrálás sorrendjét: $\displaystyle\int_1^2 \int_{1-x}^{2x} f(x,y)dydx$. *7pt*
5. Oldjuk meg $xy' = y^2 - y$. *9pt*
6. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 - 2x - 2y^2$ függvény szélsőértékeit. *8pt*

ELMÉLET

1. Definiáljuk a következő fogalmakat:
   (i) A $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ alakú differenciálegyenlet egzakt. *5pt*
   (ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,-2)} f(x,y) = -\infty$. *5pt*
   (iii) Az $f(x,y)$ függvény $A(a_1,a_2)$ pontbeli parciális deriváltjai. *5pt*
2. Igazoljuk a következő állításokat:
   (i) Ha $f(x,y)$ totálisan differenciálható, akkor parciálisan is differenciálható. *10pt*
   (ii) Ha $P(x,y), Q(x,y)$ folytonos és van olyan $U(x,y)$, hogy U totálisan differenciálható és $dU = Pdx + Qdy$, akkor az $\int_L Pdx + Qdy$ vonalintegrál az út alakjától független. *15pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat és az elmélet részből legalább 15-15 pontot el kell érni és a gyakorlatról hozott pontokkal együtt 50 pontnál nem lehet kevesebb. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!** Jegybeírás a következő vizsga idejében, de az intézeti irodán az index bármikor leadható.

2005.05.30. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Igazoljuk, hogy az $a_n = \dfrac{1-2n}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat monoton. *5pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *5pt, 5pt, 5pt*

$$\text{(i)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{27}-1}{\sqrt[n]{9}-1} \qquad \text{(ii)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{4x} \qquad \text{(iii)}\ \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+9}{3x-2}\right)^{2-x}$$

3. Deriváljuk a $g(x) = (1+\sqrt{x})^{x^2-2\sqrt{x+1}}$ függvényt. *5pt*

4. Adjuk meg az $f(x) = \sqrt[3]{x^2-2x+1}$ függvénynek az $x=0$ ponba húzott érintőjének egyenletét. *5pt*

5. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = -x + e^{\frac{1}{x}}$ függvényt.

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték.

(iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet. *2+3+4+4+3pt*

ELMÉLET

1. Definiáljuk a következő fogalmakat:

   (i) Az f függvény differenciálható az x_0 pontban. *5pt*

   (ii) Az f függvény integrálható az $[a;b]$ intervallumon. *5pt*

   (iii) Az (a_n) sorozat határértéke 3. *5pt*

2. Igazoljuk a következő állításokat:

   (i) Ha $f' > 0$ I–n, akkor f szigorúan monoton nő I–n. *10pt*

   (ii) Ha $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ folytonos $[a;b]$–n, akkor f felülről korlátos $[a;b]$–n. *15pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat és az elmélet részből legalább 15-15 pontot el kell érni és együtt 40 pontnál nem lehet kevesebb. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!** Jegybeírás a következő vizsga idejében, de az intézeti irodán az index bármikor leadható.

2005.06.09. Kalkulus II. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Mutassuk meg, hogy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ nem létezik. *4pt*
2. Határozzuk meg $f(x,y) = xy^2$–nek az $u(1,-2)$ irány szerinti deriváltját az $A(2,3)$ pontban. *6pt*
3. Határozzuk meg a következő integrálokat: *6, 6, 6pt*

$$(a)\ \int t(t^2-3)^3 dt\ , \qquad (b)\ \int x^2 \ln x dx\ , \qquad (c)\ \int \frac{5x^3-3x^2+2}{x^2} dx\ .$$

4. Konvergens–e a $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}$ számsor? *6pt*
5. Cseréljük fel az integrálás sorrendjét: $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{1-y}^{y+3} f(x,y)dxdy.$ *6pt*
6. Oldjuk meg $xy' = y^2 - y$. *6pt*

ELMÉLET

1. Definiáljuk a következő fogalmakat:
   (i) A $\sum a_n$ számsor konvergens, feltételesen konvergens. *5pt*
   (ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,-2)} f(x,y) = \infty$. *5pt*
   (iii) Az $f(x,y)$ függvény totálisan differenciálható $A(a_1,a_2)$–ban. *5pt*
2. Igazoljuk a következő állításokat:
   (i) Ha $|r| > 1$, akkor a $\sum r^n$ sor divergens. *10pt*
   (ii) Ha $f(x,y)$ mindenütt totálisan differenciálható és ∇f ($=$ grad f) minden pontban nullvektor, akkor f konstans függvény. *15pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat és az elmélet részből legalább 15-15 pontot el kell érni és a gyakorlatról hozott pontokkal együtt 50 pontnál nem lehet kevesebb. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!** Jegybeírás a következő vizsga idejében, de az intézeti irodán az index bármikor leadható.

2005.06.09. Kalkulus II. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Definíció alapján határozzuk meg az $f(x,y) = x^2y$ függvénynek az y–változó szerinti parciális deriváltját az $A = (2,-3)$ pontban. *4pt*
2. Határozzuk meg a következő integrálokat: *6, 6, 6pt*

$$(a)\ \int \cos^2 x dx\ , \qquad (b)\ \int \frac{1}{x^2+3}dx\ , \qquad (c)\ \int \frac{5}{x^2+x-6}dx\ .$$

3. Határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3\cdot 2^n - 3^n}{5^n}$ konvergens sor összegét. *6pt*
4. Cseréljük fel az integrálás sorrendjét: $\int_0^2 \int_0^x f(x,y)dydx$. *6pt*
5. Oldjuk meg $(1-x)y' + y + 1 - x = 0$. *6pt*
6. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 - 2x - 2y^2$ függvény szélsőértékeit. *6pt*

ELMÉLET

1. Definiáljuk a következő fogalmakat:
   (i) Az L görbe egyszerű és sima. *5pt*
   (ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-2)} f(x,y) = -1$. *5pt*
   (iii) Az $f(x,y)$ függvény $A(a_1,a_2)$ pontbeli parciális deriváltjai. *5pt*
2. Igazoljuk a következő állításokat:
   (i) Ha $f(x,y)$ totálisan differenciálható, akkor f folytonos. *10pt*
   (ii) Ha $\sum a_n x^n$ konvergens az $x = -3$ pontban, akkor abszolút konvergens az $x = 2$ pontban. *15pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat és az elmélet részből legalább 15-15 pontot el kell érni és a gyakorlatról hozott pontokkal együtt 50 pontnál nem lehet kevesebb. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!** Jegybeírás a következő vizsga idejében, de az intézeti irodán az index bármikor leadható.

2005.06.13. Kalkulus II. NÉV:................................

A csoport EHA:................................

FELADATOK

1. Mutassuk meg, hogy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$. *4pt*
2. Határozzuk meg $f(x,y) = xy^2$–nek az $u(1,-2)$ irány szerinti deriváltját az $A(2,3)$ pontban. *6pt*
3. Határozzuk meg a következő integrálokat: *6, 6, 6pt*

$$(a) \int \frac{(t^2-3)^3}{t} dt\ , \qquad (b) \int xe^x dx\ , \qquad (c) \int \cos^3 x dx\ .$$

4. Konvergens–e a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n}}{n\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}$ számsor? *6pt*
5. Határozzuk meg az $\int_L ydx - xydy$ görbementi integrált, ahol L sorban a $(0,0)$, $(2,1)$ $(4,1)$ pontokat összekötő törtszakasz. *6pt*
6. Oldjuk meg $e^x(x+1) - y\sin x + \cos xy' = 0$. *6pt*

ELMÉLET

1. Definiáljuk a következő fogalmakat:
   (i) A $\sum a_n$ számsor konvergens, feltételesen konvergens. *5pt*
   (ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,\infty)} f(x,y) = \infty$. *5pt*
   (iii) Az $f(x,y)$ függvény totálisan differenciálható $A(a_1,a_2)$–ban. *5pt*
2. Igazoljuk a következő állításokat:
   (i) Ha $|r| > 1$, akkor a $\sum r^n$ sor divergens. *10pt*
   (ii) Ha $f(x,y)$ mindenütt totálisan differenciálható és ∇f (= grad f) minden pontban nullvektor, akkor f konstans függvény. *15pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat és az elmélet részből legalább 15-15 pontot el kell érni és a gyakorlatról hozott pontokkal együtt 50 pontnál nem lehet kevesebb. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!** Jegybeírás a következő vizsga idejében, de az intézeti irodán az index bármikor leadható.

2005.06.13. Kalkulus II. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Definíció alapján határozzuk meg az $f(x,y) = x^2y$ függvénynek az x–változó szerinti parciális deriváltját az $A = (-2, 3)$ pontban. *4pt*

2. Határozzuk meg a következő integrálokat: *6, 6, 6pt*

$$(a) \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx \ , \qquad (b) \int \frac{1}{x^2 - 4} dx \ , \qquad (c) \int \frac{2x+4}{x^2 - 4x + 5} dx \ .$$

3. Határozzuk meg a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 4^n - 3^n}{7^n}$ konvergens sor összegét. *6pt*

4. Hol konvergens $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}(x+2)^n$. *6pt*

5. Oldjuk meg $y'' + 5y' + 4y = 0$. *6pt*

6. Határozzuk meg annak a testnek a térfogatát, amelyet az $y = x^2$, $y = 0$ és $x = 2$ görbék által határolt zárt síkrész y–tengely körüli megforgatásával kapunk. *6pt*

ELMÉLET

1. Definiáljuk a következő fogalmakat:

   (i) Az L görbe egyszerű és sima. *5pt*

   (ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\infty,0)} f(x,y) = -1$. *5pt*

   (iii) Az $f(x,y)$ függvény $A(a_1, a_2)$ pontbeli parciális deriváltjai. *5pt*

2. Igazoljuk a következő állításokat:

   (i) Ha $f(x,y)$ totálisan differenciálható, akkor f parciálisan is differenciálható. *10pt*

   (ii) Ha $\sum a_n x^n$ divergens az $x = -3$ pontban, akkor divergens az $x = 4$ pontban is. *15pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat és az elmélet részből legalább 15-15 pontot el kell érni és a gyakorlatról hozott pontokkal együtt 50 pontnál nem lehet kevesebb. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!** Jegybeírás a következő vizsga idejében, de az intézeti irodán az index bármikor leadható.

2005.12.19. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Definíció alapján igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-8n-15}{2n+17} = \infty$. *5pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+4}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x^2-6x+9}.$$

3. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 xe^{-x^2}dx, \qquad \text{(ii)} \int_1^e \ln x^x dx, \qquad \text{(iii)} \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+3x+3}dx.$$

4. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ függvényt.

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték.

(iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet. *20pt*

DEFINÍCIÓ:

1. Definiáljuk a következő fogalmakat:

   (i) Az f függvény lineárisan közelíthető az x_0 pontban. *5pt*

   (ii) Az f függvény egyenletesen folytonos az I intervallumon. *5pt*

   (iii) Az f függvény B beosztáshoz tartozó Darboux–féle alsó integrálközelítő összege. *5pt*

   (iv) Az (a_n) sorozat korlátos. *5pt*

ELMÉLET:

Igazoljuk, hogy konvergens sorozat Cauchy–sorozat. *10pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2005.12.19. Kalkulus I. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2} + 3$ függvénynek az $x = 1$ pontba húzott érintőjének egyenletét. *5pt*
2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 - 2n^5 + 3}{3 - n^2}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{2 - x}.$$

3. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^{\sqrt{7}} x(x^2 - 7)^{19} dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^{\pi/2} x \cos^2 x dx, \qquad \text{(iii)} \int_{-2}^{0} \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

4. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x^2 e^{-x}$ függvényt.

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet. *20pt*

`DEFINÍCIÓ:`

1. Definiáljuk a következő fogalmakat:
   - (i) Az (a_n) sorozat határértéke mínusz végtelen. *5pt*
   - (ii) Az f függvény differenciálható az x_0 pontban. *5pt*
   - (iii) Az f függvény B beosztáshoz tartozó Riemann–féle integrálközelítő összege. *5pt*
   - (iii) Az f függvény monoton nő az $(a; b)$ intervallumon. *5pt*

`ELMÉLET:`

Igazoljuk, hogy ha $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ monoton csökkenő $[a; b]$–n, akkor f integrálható $[a; b]$–n. *10pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2005.12.19. Kalkulus II. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Határozzuk meg a következő integrálokat: *5pt, 5pt, 9pt*

$$\text{(i)} \int \sin^5 x \cos x dx \qquad \text{(ii)} \int x \operatorname{arctg} x dx \qquad \text{(iii)} \int \cos\sqrt{x} dx$$

2. Határozzuk meg az $y = x^2 + 1$ és az $y = x + 3$ görbék által határolt zárt síkidom területét. *5pt*

3. Hol konvergens *7pt, 10 pt*

$$\text{(i)} \sum \frac{n+2}{n^2+2n+3}(x-2)^n \qquad \text{(ii)} \sum \frac{n^2-5n+1}{2^n}(x-4)^{2n}$$

4. Legyen $f(x,y,z) = \dfrac{x^2y}{z} - x\ln(y^2 - z^2)$. Határozzuk meg f'''_{xyz}–t. *5pt*

ELMÉLET

1. Definiáljuk a következő fogalmakat:
   - (i) $\sum a_n$ konvergens. *5pt*
   - (ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,2)} f(x,y) = -3.$ *5pt*
   - (iii) Az $f(x,y)$ függvény totálisan differenciálható (a,b)-ben. *5pt*
   - (iv)

2. Igazoljuk a következő állításokat:
   - (i) Ha $a_n \to a$ és $a < 0$, akkor a sorozat majdnem minden eleme negatív. *10pt*
   - (ii) Ha $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ folytonos $[a;b]$–n, akkor f integrálható $[a;b]$–n. *15pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat és az elmélet részből legalább 15-15 pontot el kell érni és együtt 40 pontnál nem lehet kevesebb. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2005.12.22 Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Mutassuk meg, hogy $a_n = \dfrac{2n^2+3}{2n^2-n-21}$ monoton csokkenő, ha $n > 3$. *5pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{27}-1}{\sqrt[n]{9}-1}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

3. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_1^2 \frac{t^2}{2t^3}dt, \qquad \text{(ii)} \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx, \qquad \text{(iii)} \int_2^3 \frac{2x}{x^2+x-2}dx.$$

4. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ függvényt.

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték.

(iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet. *20pt*

DEFINÍCIÓ:

1. Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $f : D_f :\to \mathbb{R}$ függvény korlátos. *5pt*

(ii) f–nek az x_0 pontban helyi minimuma van. *5pt*

(iii) Az f függvény B beosztáshoz tartozó Darboux–féle alsó integrálközelítő összege. *5pt*

(iv) Az (a_n) sorozat konvergens. *5pt*

ELMÉLET:

Igazoljuk, hogy ha f differenciálható x_0–ban, akkor itt folytonos is. *10pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2005.12.22. Kalkulus II. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Határozzuk meg a következő integrálokat: *5pt, 5pt, 9pt*

$$\text{(i)} \int \operatorname{arctg} x dx \qquad \text{(ii)} \int \frac{3y-1}{y^2+y-6} dy \qquad \text{(iii)} \int \cos\sqrt{x} dx$$

2. Határozzuk meg $\operatorname{arctg} x$ hatványsorát. *5pt*

3. Hol konvergens *7pt, 10 pt*

$$\text{(i)} \sum \frac{4^{-n}}{2n}(x+5)^{2n-1}, \qquad \text{(ii)} \sum \frac{n^2-5n+1}{n^3}(x-4)^{2n}$$

4. Határozzuk meg az $f(x,y)=(x-1)^2-2y^2$ függvény szélsőértékeit. *5pt*

ELMÉLET

1. Definiáljuk a következő fogalmakat:
   (i) $\sum a_n$ konvergens. *5pt*
   (ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(-3,2)} f(x,y)=-3.$ *5pt*
   (iii) Az $f(x,y)$ függvény totálisan differenciálható (a,b)-ben. *5pt*

2. Igazoljuk a következő állításokat:
   (i) Ha $f(x,y)$ totálisan differenciálható (a,b)–ben, akkor itt parciálisan is differenciálható. *10pt*
   (ii) Ha $0<a_n<b_n$ és $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=L>0$, továbbá $\sum a_n$ konvergens, akkor $\sum b_n$ is konvergens. *15pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat és az elmélet részből legalább 15-15 pontot el kell érni és együtt 40 pontnál nem lehet kevesebb. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2005.12.29. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Legyen $a_1 = 3$ és $a_n = 4 + 3\sqrt{a_{n-1}}$ ha $n \geq 2$. Mutassuk meg, hogy (a_n) konvergens, majd adjuk meg a határértékét. *5pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 - 2n^5 + 3n}{3n - n^6}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{x}.$$

3. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 2^{3-5x} dx, \qquad \text{(ii)} \int_1^2 \frac{1-u}{1+u^2} du, \qquad \text{(iii)} \int_{-2}^1 \frac{3}{x^2 - x - 2} dx.$$

4. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$ függvényt.

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet. *20pt*

DEFINÍCIÓ:

1. Definiáljuk a következő fogalmakat:

   (i) k az E legkisebb felső korlátja (supremuma). *5pt*

   (ii) f differenciálható az $x_0 = 4$ pontban. *5pt*

   (iii) Az $\{a_n\}$ sorozat Cauchy–sorozat. *5pt*

   (iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. *5pt*

ELMÉLET:

Igazoljuk, hogy ha az f és g függvények differenciálhatók az x_0 pontban, akkor az $f \cdot g$ függvény is differenciálható x_0–ban. *10pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2005.12.29. Kalkulus I. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Mutassuk meg, hogy $\dfrac{2n-4}{3n+2}$ monoton. *5pt*
2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x^5-1}.$$

3. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^2 \frac{4x^3+6x}{x^4+3x^2+1}dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^{\pi/2} x\sin^2 x dx, \qquad \text{(iii)} \int_0^1 \frac{x}{x^2+2x+1}dx.$$

4. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x^2e^{-x}$ függvényt.

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték.

(iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet. *20pt*

`DEFINÍCIÓ:`

1. Definiáljuk a következő fogalmakat:
   - (i) Az (a_n) sorozat határértéke mínusz végtelen. *5pt*
   - (ii) Az f függvény monoton nő az I intervallumon. *5pt*
   - (iii) Az f függvény B beosztáshoz tartozó Riemann–féle integrálközelítő összege. *5pt*
   - (iv) f–nek helyi maximuma van x_0–ban. *5pt*

`ELMÉLET:`

Igazoljuk, hogy ha f folytonos $[a,b]$-n, akkor létezik $\xi \in [a,b]$ úgy, hogy $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. *10pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2005.12.29. Kalkulus II. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Legyen $f(x,y,z) = \dfrac{e^{xy}}{\ln z}$. Határozzuk meg f'''_{xyz}–t. *4pt*
2. Határozzuk meg az $\displaystyle\int_L y dx - xy dy$ görbementi integrált, ahol L a $(2,1)$ pontot a $(0,-1)$ ponttal összekötő szakasz. *8pt*
3. Határozzuk meg $\displaystyle\int_3^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx$. *8pt*
4. Cseréljük fel az integrálás sorrendjét: $\displaystyle\int_1^2 \int_{(1-2x)/x}^{\ln x} f(x,y) dy dx$. *8pt*
5. Oldjuk meg $(x^3 + y)dx - x dy = 0$. *8pt*
6. Hol konvergens $\displaystyle\sum_{n=3}^\infty \frac{2^n \ln n}{n^2}(x+2)^n$. *10 pt*

ELMÉLET

1. Definiáljuk a következő fogalmakat:
   (i) Az L görbe egyszerű és sima. *5pt*
   (ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\infty,-2)} f(x,y) = -\infty$. *5pt*
   (iii) Az $f(x,y)$ függvény $A(a_1,a_2)$ pontbeli (u_1,u_2) irány menti deriváltja. *5pt*
2. Igazoljuk a következő állításokat:
   (i) Ha $f(x,y)$ totálisan differenciálható, akkor parciálisan is differenciálható. *10pt*
   (ii) Ha $P(x,y), Q(x,y)$ folytonos és van olyan $U(x,y)$, hogy U totálisan differenciálható és $dU = Pdx + Qdy$, akkor az $\int_L Pdx + Qdy$ vonalintegrál az út alakjától független. *15pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat és az elmélet részből legalább 15-15 pontot el kell érni és együtt 40 pontnál nem lehet kevesebb. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2006.01.05. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Határozzuk meg az $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ függvénynek az $a=2$ pont körüli harmadrendű Taylor–féle polinomját. *5pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{2n}-3^n}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+4}{x-1}\right)^x.$$

3. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 \ln(3+5x)dx, \qquad \text{(ii)} \int_1^2 \frac{1-u+u^3}{u^2}du, \qquad \text{(iii)} \int_{-2}^1 \frac{3}{x^2-x+2}dx.$$

4. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x)=\dfrac{x}{e^x(x-1)}$ függvényt.

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet. *20pt*

`DEFINÍCIÓ:`

1. Definiáljuk a következő fogalmakat:

   (i) k az E legnagyobb alsó korlátja (infimuma). *5pt*

   (ii) f differenciálható az $x_0=4$ pontban. *5pt*

   (iii) Az $\{a_n\}$ sorozat Cauchy–sorozat. *5pt*

   (iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x)=-5$. *5pt*

`ELMÉLET:`

Igazoljuk, hogy ha az f és g függvények differenciálhatók az x_0 pontban, akkor az $f+g$ függvény is differenciálható x_0–ban. *10pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2006.01.05. Kalkulus I. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Mutassuk meg, hogy $\dfrac{n-4}{3n+7}$ monoton. *5pt*
2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+2}}{\sqrt{n^2+n}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x^2-x-12}.$$

3. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^2 \frac{3x^2+x}{2x^3+x^2+1}dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^e x^3 \ln x dx, \qquad \text{(iii)} \int_0^1 \frac{x+2}{x(x^2+3x+2)}dx.$$

4. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x \ln |x|$ függvényt.

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték.

(iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet. *20pt*

`DEFINÍCIÓ:`

1. Definiáljuk a következő fogalmakat:

   (i) Az (a_n) sorozat határértéke 3. *5pt*

   (ii) Az f függvény monoton csökken az I intervallumon. *5pt*

   (iii) Az f függvény B beosztáshoz tartozó Riemann–féle integrálközelítő összege. *5pt*

   (iv) f differenciálható x_0–ban. *5pt*

`ELMÉLET:`

Igazoljuk, hogy ha f monoton $[a, b]$-n, akkor itt integrálható is. *10pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2006.01.09. Kalkulus I. NÉV:................................

A csoport EHA:................................

FELADATOK:

1. Definíció alapján igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-3n+5}{2n-n^3-3} = 0.$ *5pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{9^n - 2^{2n}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+4}{3x-1}\right)^x.$$

3. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 x\ln(3+5x^2)dx, \qquad \text{(ii)} \int_1^2 \frac{1-u}{u^2+1}du, \qquad \text{(iii)} \int_{-2}^1 \frac{3}{x^2-x-2}dx.$$

4. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x}$ függvényt.

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték.

(iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet. *20pt*

DEFINÍCIÓ:

1. Definiáljuk a következő fogalmakat:

   (i) Az E halmaz megszámlálhatóan végtelen számosságú. *5pt*

   (ii) f folytonos az $x_0 = 4$ pontban. *5pt*

   (iii) Az $\{a_n\}$ sorozat határértéke mínusz végtelen. *5pt*

   (iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. *5pt*

ELMÉLET:

Igazoljuk, hogy konvergens sorozatnak pontosan egy határértéke van. *10pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2006.01.09. Kalkulus I. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Határozzuk meg az $f(x) = e^{x^2-2} + 3$ függvénynek az $x = 1$ pontba húzott érintőjének egyenletét. *5pt*
2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{27}-1}{\sqrt[n]{9}-1}, \qquad \text{(ii)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n+9}}.$$

3. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)}\ \int_0^2 \frac{2x}{x^4+2x^2+1}dx, \qquad \text{(ii)}\ \int_0^e x^3 \ln x^2 dx, \qquad \text{(iii)}\ \int_0^1 \frac{x+2}{x^2+5x+4}dx.$$

4. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{x}{x^3+1}$ függvényt.

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet. *20pt*

DEFINÍCIÓ:

1. Definiáljuk a következő fogalmakat:
   (i) Az (a_n) sorozat torlódási pontja. *5pt*
   (ii) Az $[a; b]$ intervallum egy beosztása. *5pt*
   (iii) Az f függvény egyenletesen folytonos az I intervallumon. *5pt*
   (iv) f bal oldali határértéke x_0–ban végtelen. *5pt*

ELMÉLET:

Igazoljuk, hogy ha $f' \geq 0$ (a, b)–n, akkor f monoton nő $[a, b]$–n. *10pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2006.01.19. Kalkulus I. NÉV:...............................

A csoport EHA:...............................

FELADATOK:

1. Definíció alapján igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\infty} \dfrac{2n-5}{n+3} = 2.$ *5pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^4-2n^5+3}{3n-n^2+2}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x+4}{2x-1}\right)^{-x}.$$

3. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 x(3+5x^2)^{12}dx, \qquad \text{(ii)} \int_1^2 \frac{3}{u^2+4}du, \qquad \text{(iii)} \int_{-2}^0 \frac{x-3}{x^2+x-2}dx.$$

4. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x\ln(x^2)$ függvényt.

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték.

(iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet. *20pt*

DEFINÍCIÓ:

1. Definiáljuk a következő fogalmakat:

   (i) Az E halmaz megszámlálhatóan végtelen számosságú. *5pt*

   (ii) f differenciálható az x_0 pontban. *5pt*

   (iii) Az $[a;b]$ intervallumon integrálható f függvény integrálfüggvénye. *5pt*

   (iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$. *5pt*

ELMÉLET:

Igazoljuk, hogy a Cauchy–sorozat konvergens. *10pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2006.01.19. Kalkulus I. NÉV:................................

B csoport EHA:................................

FELADATOK:

1. Definíció alapján igazoljuk, hogy az $f(x) = 3x^2$ függvénynek a deriváltja az $a = 2$ pontban 12. *5pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{4}-1}{\sqrt[n]{2}-1}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+x}+x\right).$$

3. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+5}dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^e x\ln x dx, \qquad \text{(iii)} \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+4x+3}dx.$$

4. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = xe^{-x^2}$ függvényt.

(i) Értelmezési tartomány, zérushely, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet. *20pt*

DEFINÍCIÓ:

1. Definiáljuk a következő fogalmakat:

   (i) Az f függvény lineárisan közelíthető az x_0 pontban. *5pt*

   (ii) Az $[a; b]$ intervallumon integrálható f függvény integrálközepe. *5pt*

   (iii) Az (a_n) sorozat korlátos. *5pt*

   (iv) Az f függvény B beosztáshoz tartozó Darboux–féle alsó integrálközelítő összege. *5pt*

ELMÉLET:

Igazoljuk, hogy ha f folytonos $[a; b]$–n, akkor f integrálható $[a; b]$–n. *10pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**