Kalkulus közgazdászoknak
Házi Feladsorok

http://www.math.u-szeged.hu/ szbtmsz/gtkhf/gtkhf.html
$https : //www.youtube.com/playlist?list = PLm_pNdtN9BaoZBE - JeGrf8B3u9sDsDVuI$

1. Házi feladatsor

1. Feladat. Ánfissza (új lánynév) nyert a lottón 800 pénzegységet, és úgy döntött, hogy befekteti a nyereményét. A bank 4%-os éves kamatot fizet.

(a) Mennyi kamatot kap 1 év múlva?

(b) Mennyi pénze lesz 1 év múlva?

(c) Mennyi lesz az összes kapott kamat 7 év alatt, ha a kamatot minden évben kiveszi? (egyszerű kamat)

(d) Mennyi pénze lesz a 7. év végén, ha a kamatot nem veszi ki a bankból? (kamatos kamat)

(e) Mennyi lesz az összes kapott kamat 7 év alatt, ha a kamatot nem veszi ki a bankból? (kamatos kamat)

(A továbbiakban kamatos kamatozással dolgozunk.)

2. Feladat. Medox (fiú név) 200 pénzegység jutalmat kapott. A bankban 10 éves lekötés esetén évi 5%-os kamatot kapna. Medox szeretné, ha lejáratkor legalább 400 pénzegységet vehetne fel.

(a) Elfogadja a bank ajánlatát?

(b) Ehhez mekkora minimális tőkére lenne szükség?

(c) Vagy mekkora kamatlábra?

(d) Vagy hány éves megtakarításra?

3. Feladat. Küllikki (lány név) nyugdíjba vonulásakor, 65 évesen, 35 hűséges év után, 300 pénzegységet kapott. Bankjánál 4%-os fix kamatláb mellett a következő ajánlatok közül választhat: minden év végén ugyanakkora mennyiségű pénzt kap

(a) A: élete végéig.

(b) B: 10 évig.

(c) C: 20 évig.

Melyiket válassza, ha a 0%- os kölcsöne miatt még 5 évig legalább évi 17 pénzegységgel ki kell egészíteni a nyugdíját, továbbá jelenleg egy 65 éves nő várható élettartalma +18 év (KSH)?

4. Feladat. Kadocsa (ez is keresztnév, fiú) örökölt 500 pénzegységet. Úgy dönt, hogy 8 éves fiának, Trajánusznak, az egyetemi tanulmányaira félreteszi. A kicsi már most nagy haszonnal csereberéli megunt játékait, így Kadocsa a közgazdász képzést nézte ki Trajánusznak. 10 éves lekötésre a következő ajánlatokat kapta:

(a) Az első évre 5%-os a kamat, ezt követően $2,75\%$.

(b) Évi (ez itt nem keresztnév) 3%-os kamat.

(c) Évi $2,9\%$-os kamat (nominális), havi tőkésítéssel.

Melyiket válassza?

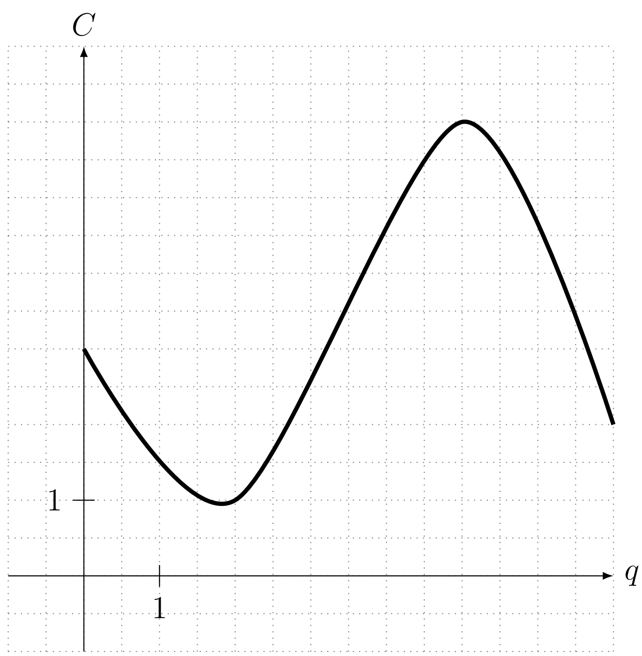
5. Feladat. Kadocsa munkatársa, Erátó jogásznak szánja fiát, Témiszt. Örökség híján Erátó úgy dönt, hogy Témisz minden születésnapján 50 egységnyi pénzt bankba tesz. Témisz nemsokára 6 éves. Fix 2%-os éves kamatot feltételezve mennyi megtakarítással számolhatnak a fiú 18. születésnapja után?

6. Feladat. Számítsd ki az alábbi sorok összegét.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{4 \cdot 3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+2}}{3 \cdot 5^{n-1}}, \qquad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{7^{n+1}}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{2n}-5}{2^{4n-2}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-(-2)^{3n+1}}{4 \cdot 5^{2n-3}}$$

2. Házi feladatsor

1. Feladat. Az alábbi függvény egy termék előállításának költségfüggvényét mutatja. A q jelöli a termék mennyiségét, C pedig az előállítási költségét.



(a) Rajta van-e a grafikonon a $(5,6)$ pont?

(b) Mennyibe kerül 3 darab termék előállítása?

(c) 4 pénzegységből hány terméket tudunk gyártani?

(d) $C(7) - C(5) = ?$

(e) Mennyit változik a költség, ha 1 helyett 5-öt termelünk?

(f) $\dfrac{C(5) - C(2)}{5 - 2} = ?$

(g) Az utóbbi eredmény mit jelent geometriailag?

2. Feladat. Tudjuk, hogy 1 darab termék előállításának költsége 200 pénzegység. A terméket futószalagon gyártjuk, a futószalag beindítása külön 300 pénzegység költséggel jár.

(a) Írjuk fel a képletét, hogy mennyibe kerül a futószalag egyszeri beindításával keletkező q mennyiségű termék költsége.

(b) Ábrázoljuk a kapott függvényt.

(c) Igaz-e, hogy a 10 termék előállítása 2600 pénzegységbe kerül?

(d) Adjuk meg, majd ábrázoljuk az átlagköltség függvényt.

3. Feladat. Egy áru inverz kínálati függvényét a $p = S(q) = S_q = \frac{2}{3}q + 150$ függvény írja le.

(a) Mit jelent a meredekség?

(b) Ábrázoljuk az inverz kínálati függvényt.

(c) Milyen áron hajlandó a termelő 45 darab terméket eladni?

(d) Mennyi a függvény változása $q = 45$ és $q = 30$ között?

(e) Mennyi a függvény átlagos változása $q = 27$ és $q = 45$ között?

(f) Határozzuk meg a kínálati függvényt.

4. Feladat. Egy termék iránti kereslet a $q = D(p) = D_p = -\frac{1}{2}p + 50$ függvény szerint változik.

(a) Mit jelent a meredekség?

(b) Ábrázoljuk a keresleti függvényt.

(c) Rajta van-e a $(80, 90)$ pont a grafikonon?

(d) Milyen ár mellett van kereslet 30 darab termékre?

(e) Hány termékre van kereslet, ha a termék egységára 30 pénzegység?

(f) Mennyi a függvény változása $p = 10$ és $p = 20$ között?

(g) Mennyi a függvény átlagos változása $p = 20$ és $p = 40$ között?

(h) Határozzuk meg az inverz keresleti függvényt.

5. Feladat. Legyen adott az $f(x) = x^2 - 2x - 3$ függvény.

(a) Rajta van-e a függvény grafikonján az $(5, 12)$ pont?

(b) Alakítsuk teljes négyzetté a függvény képletét.

(c) Határozzuk meg a függvény nevezetes pontjait (szélsőérték, zérushely).

(d) Vázoljuk a függvény grafikonját.

(e) Vizsgáljuk meg a függvény legfontosabb tulajdonságait (monotonitás, pozitív-negatív rész).

(f) Határozzuk meg a függvény 0 és 2 közötti változását.

(g) Határozzuk meg a függvény 0 és 2 közötti átlagos változását. (ARC)

(h) Határozzuk meg a függvény átlagos változását t és $t + 1$ között. (ARC)

3. Házi feladatsor

1. Feladat. Rajzoljuk fel a következő függvények grafikonjait, majd az ábra alapján olvassuk le a kért határértékeket:

(a) $p(x) = 2 - \dfrac{1}{x-3}$, $\quad \lim\limits_{x\to 2} p(x)$; $\lim\limits_{x\to 3^+} p(x)$; $\lim\limits_{x\to 3^-} p(x)$; $\lim\limits_{x\to 3} p(x)$; $\lim\limits_{x\to \infty} p(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} p(x)$

(b) $s(t) = \dfrac{1}{t^2} - 1$, $\quad \lim\limits_{t\to 0^-} s(t)$; $\lim\limits_{t\to 0^+} s(t)$; $\lim\limits_{t\to 0} s(t)$; $\lim\limits_{t\to \infty} s(t)$

(c) $r(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x \le -2 \\ 1 - x, & \text{ha } -2 < x < 3 \\ -2, & \text{ha } 3 \le x \end{cases}$ $\quad \lim\limits_{x\to -2} r(x)$; $\lim\limits_{x\to 3} r(x)$; $\lim\limits_{x\to \infty} r(x)$

(d) $C(q) = \begin{cases} q - 1, & \text{ha } q < 0 \\ 1 - \sqrt{q}, & \text{ha } 0 < q < 4 \\ 2 - q/4, & \text{ha } 4 \le q \end{cases}$ $\quad \lim\limits_{q\to 3} C(q)$; $\lim\limits_{q\to 4^+} C(q)$; $\lim\limits_{q\to 4^-} C(q)$; $\lim\limits_{q\to \infty} C(q)$; $\lim\limits_{q\to -\infty} C(q)$

2. Feladat. Határozzuk meg a következő határértékeket.

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{2x-1}$, $\lim\limits_{x\to 0} \ln(3x+2)$, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-9}{x-2}$, $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-2}$, $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+x}{x-2}$

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{x-2}$, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-x-2}$, $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x+2}{1-x^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2x-6}{x-2}$, $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x-6}{x-2}$, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x-6}{x-2}$, $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+3}{x^2-1}$, $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-x-2}{x^2+2x+1}$

(d) $\lim\limits_{x\to \infty} (x^2+x-4)$, $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{3x+2}$, $\lim\limits_{x\to \infty} \ln(5x-4)$

(e) $\lim\limits_{x\to \infty} (x^2-2x-1)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^2+2x-1)$, $\lim\limits_{x\to \infty} (\sqrt{3x+1}-x)$, $\lim\limits_{x\to \infty} (3x^2\ln x - 5x^2)$

(f) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2+x-4}{x^2-2}$, $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-2x-1}{x+2}$, $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1-x^2}{x^3-3x}$, $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{2x}-1}{2-\sqrt{x}}$, $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x-\sqrt{2x-1}}{\sqrt[4]{x^3}-x}$

(g) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3ah^2-3h}{h}$, $\lim\limits_{a\to 0} \dfrac{3ah^2-3h}{h}$, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+2y}{x-y^2}$, $\lim\limits_{y\to -1} \dfrac{x+2y}{x-y^2}$, $\lim\limits_{q\to -1} \dfrac{x+2y}{x-y^2}$

3. Feladat. A paraméter mely értéke esetén folytonos a függvény?

(a) $f(x) = \begin{cases} bx - 1, & \text{ha } x < 1 \\ x^2 - 1, & \text{különben} \end{cases}$

(b) $g(x) = \begin{cases} 2x - c, & \text{ha } x \leq 2 \\ \sqrt{x+2}, & \text{különben} \end{cases}$

4. Feladat. Vizsgáljuk a függvények folytonosságát az adott pontban.

(a) Az $x = 1$ pontban, $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}, & \text{ha } x < 1 \\ 0, & \text{ha } x = 1 \\ \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$

(b) Az $x = -1$ pontban, $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{1 - x^2}, & \text{ha } x < -1 \\ -2, & \text{ha } x = -1 \\ \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}, & \text{ha } x > -1 \end{cases}$

4. Házi feladatsor

1. Feladat. Deriváljuk a következő függvényeket. (Elemi deriválási szabályok.)

(a) $f(x) = x^5$, $g(u) = u^{-3}$, $h(t) = \frac{1}{t^2}$, $t(r) = \sqrt[3]{r}$, $C(q) = 5$, $u(t) = e^t$, $v(r) = \ln r$

(b) $D(p) = 5e^p$, $V(s) = 4s - 2s^3$, $R(p) = \dfrac{3}{p} - \sqrt{p}$, $t(z) = 5z^2 - 3/z + 2$

(c) $U(x) = \dfrac{y}{x^3} + \sqrt[5]{x^2} + \dfrac{6}{\sqrt[5]{y^3}}$, $Z(y) = \dfrac{y}{x^3} + \sqrt[5]{x^2} + \dfrac{6}{\sqrt[5]{y^3}}$, $S(q) = qe^p - 12\ln p + 3e^2 - 4\pi$

2. Feladat. Deriváljuk a következő függvényeket. (Szorzat- és hányadosfüggvény.)

(a) $f(x) = x(2\ln x - 5)$, $g(x) = 3x^2e^x$, $C(q) = (2q^4 - 3/q)(\sqrt{q} - 5q)$

(b) $V(s) = \dfrac{4s - \sqrt[3]{s^4} + 2}{s^2 - 4s}$, $E(p) = \dfrac{4\ln p + \sqrt[3]{s^4}}{p^2e^p}$, $U(x) = \dfrac{2x - y\sqrt[3]{x^5}}{x + y^27e^x}$

3. Feladat. Adott a $C = 3q^2 - 4q + \sqrt{q}$ költségfüggvény. Határozzuk meg a határköltséget 10 darab termék esetén.

4. Feladat. Adott az $R = 6q^2 + \sqrt{q}$ bevételfüggvény és a $P = 5q^2 - 3\sqrt{q} - 3$ profit függvény. Határozzuk meg a határköltséget 50 darab termék esetén.

5. Feladat. Adott a $D = \dfrac{p^2 - \sqrt[4]{p^5}}{1/p + 2\ln p}$ keresletfüggvény. Határozzuk meg a határkeresletet ha az egységár 250.

6. Feladat. Írjuk fel a következő függvények érintőjének az egyenletét a megadott pontban.

(a) $f(x) = x^2 - 5x \qquad x_0 = 1$

(b) $U(x) = 3\ln x - 2\sqrt{x} \qquad x_0 = 1$

(c) $R(q) = e^q(5q^2 - 3) \qquad q_0 = 0$

7. Feladat. Határozzuk meg az $R(q) = q^{2/3} - \sqrt{q} + 1$ bevételi függvény változásának az ütemét, ha a $q = 64$ egységnél

(a) 2 egységgel többet,

(b) 3 egységgel kevesebbet adunk el.

5. Házi feladatsor

1. Feladat. Képezzük az alábbi függvények segítségével az $f(g(x))$, $g(f(x))$, illetve az $f(y(x))$ összetett függvényeket.

(a) $f(x) = 2x^3$, $g(x) = x^2 - 1$

(b) $f(x) = e^x$, $g(x) = 3x - 2$

(c) $f(x) = \sqrt{x}$, $y = x^3 - 2x$

(d) $f(x) = \ln x$, $y = 3 - 2x$

2. Feladat. Deriváljuk a következő függvényeket.

(a) $f(x) = 2(x^2 - 1)^3$

(b) $g(x) = \sqrt{x^3 - 2x}$

(c) $R(x) = \ln(3 - 2x)$

(d) $D(x) = xe^{3x-2}$

(e) $U(x) = \dfrac{1 - 2x}{\sqrt{1 - 3x}}$

(f) $h(x) = \ln(2x - \sqrt[3]{3x - 1})$

(g) $P(x) = e^{\sqrt[5]{x^3 - 2x}}$

(h) $E(x) = xe^{-\lambda x}$

(i) $M(x) = e^{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}}$

3. Feladat. A mohácsi vágóhídon az éves szinten feldogozott állatok egységszáma (1 egység 2000 darab disznót jelöl) a hentesek számának (n) függvényében az

$$X(n) = 2n + \sqrt{3n + 2}$$

összefüggés alapján becsülhető. A hentesnek jelentkezők száma az ígért fizetéstől (s) függően

$$n(s) = \frac{3s^2 + 2\ln s}{s^2 + 5} \cdot 100$$

(1 egység kétszázezer forintnak felel meg). Adjuk meg a levágott disznók számát a fizetés függvényében ($X(s)$–t), továbbá a $\dfrac{dX}{ds}$ határfüggvényt.

4. Feladat. Az Újpest mérkőzéseit átlagosan 520 fizető néző látogatja, akik átlagosan, fejenként 600 Ft-ot költenek a klub szuvenír boltjában. Egy felmérés szerint minden egyes 100 Ft-os jegyárcsökkentés (növelés) hatására 20-szal több (kevesebb) focirajongó vesz jegyet. A jelenlegi 2000 Ft-os jegyárat hogyan változtassák, hogy maximalizálják a bevételt?

6. Házi feladatsor

1. Feladat. Monotonitás, szélsőérték szempontjából vizsgáljuk a következő függvényeket:

(a) $f(x) = x(x-3)^5$ (b) $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x^2}$ (c) $f(x) = x^2 \ln |x|$

2. Feladat. Az $f(x) = x^4/4 + x^3/3 - x^2 + 1/2$ függvénynek lehet-e (lokális) szélsőértéke az $x = 0, 1, -1, 2, -2$ pontok valamelyikében. Ahol lehet, az maximum vagy minimum hely, vagy egyik sem?

3. Feladat. Határozzuk meg a következő függvények lokális szélsőérték helyeit:

(a) $g(y) = y^5/5 - y^4/4 - \frac{2}{3}y^3 + 1$ (b) $r(q) = 2q^2 - 3q^{4/3} + 5$

4. Feladat. Konvexitás, inflexiós pont szempontjából vizsgáljuk a következő függvényeket:

(a) $f(x) = x(x-3)^4$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ (c) $f(x) = xe^{-x^2/2}$

7. Házi feladatsor

1. Feladat. Határozzuk meg a következő folytonos függvények maximum, minimum helyeit az adott zárt intervallumon.

(a) $f(x) = x^3/3 + x^2/2 - 2x + 1, \quad 0 \leq x \leq 2.$

(b) $g(y) = \sqrt{2y-3} - y/5, \quad 2 \leq y \leq 6.$

2. Feladat. Napi x termék eladásával keletkező profitot a $\Pi = \dfrac{x^2+24}{x+1} - 13$ függvény írja le. Hány termék eladása esetén lesz a profit maximális, ha gyárunk méretéből adódóan maximum 14 terméket tudunk gyártani naponta, továbbá egy darabot mindenképpen le kell gyártsunk.

3. Feladat. Két részvény áll a rendelkezésünkre, hogy befektessünk 10 pénzegységet. Ha x pénzegységet fektetünk az első részvénybe, a maradékot pedig a másodikba, akkor a kockázatot a $Var = x^3 - 10x^2 + 25x + 1$ függvény, a várható hozamot az $E = xe^{2-x/3} + 1$ függvény írja le.

(a) Mennyi lesz a várható hozam, ha a lehető legkisebb kockázatot szeretnénk vállalni a befektetéssel?

(b) Mennyi az elérhető legmagasabb hozam? Mennyi ekkor a vállalt kockázat?

4. Feladat. Ha van, adjuk meg a következő folytonos függvények maximum, minimum helyeit az adott intervallumon.

(a) $u(t) = t^3 - 4t^2 + 4t, \quad t \geq 1.$

(b) $h(p) = 1 - \dfrac{4p-3}{p^2+1}, \quad p \geq 0.$

5. Feladat. Egy termék gyártásának teljes költsége $TC(q) = q/4 - \sqrt{2q+2} + 3$. A termékből legalább 1 terméket le kell gyártanunk, továbbá akármennyit tudunk gyártani.

(a) Határozzuk meg az állandó, a változó illetve az átlagköltséget.

(b) Jelentős mennyiségű termék gyártása esetén hogyan alakul az átlagköltség?

(c) Hol lehet szélsőértéke az átlagköltségnek?

6. Feladat. Határozza a $D(p) = 5\sqrt{8-4p}$ keresleti függvény rugalmasságát $p = 1$-es ár esetén. Mekkora ár esetén 1 a rugalmasság?

8. Házi feladatsor

1. Feladat. Adjuk meg a következő kifejezések deriváltját ($\frac{d}{dx}$), ha tudjuk, hogy $y = y(x)$ és $z = z(x)$.

(a) $x^2 - x + 1, \quad e^x, \quad e^{x^2-x+1}, \quad e^{y(x)}$

(b) $\sqrt{x}, \quad x^2 - 3, \quad \sqrt{x^2-3}, \quad \sqrt{y(x)}$

(c) $(x^2 + 3x - 5)\ln(2x-1), \quad y(x)\ln(2x-1), \quad (x^2+3x-5)z(x)$

2. Feladat. Adjuk meg a következő kifejezések implicit deriváltját ($\frac{d}{dx}$), ha tudjuk, hogy $y = y(x)$ és $z = z(x)$.

(a) y^2

(b) $z^2\sqrt{5x-1}$

(c) $\ln(y - x^2 + z^2)$

(d) $\dfrac{e^{y+p^2}}{y^3 - z + 3p}$

3. Feladat. Határozzuk meg $\dfrac{dy}{dx}$–et, ha

(a) $2xy - y^{-2} = 3x^2 - 1$

(b) $\sqrt{2x-3y} + y^2 = \ln x + 3$

4. Feladat. Határozzuk meg az $\dfrac{dz}{dx}$ értékét

(a) a $P(2,-1)$ pontban, ha $z^4 - 3z = x^2 - 2x + 4$

(b) a $P(2,3)$ pontban, ha $\ln(x^2 - z) + zx = 6$

5. Feladat. Adjuk meg a $2y^2 + x^2 - 3xy = 2x + 4$ görbe $(1,-1)$ pontjához húzott érintő egyenletét $(y(x))$.

6. Feladat. A kínálatot a $p\sqrt{q+2} - 2q + 4p = 0$ implicit összefüggés írja le. Határozzuk meg a $p = 2$ árhoz tartozó lehetséges mennyiséget, $q(p)$-t .

7. Feladat. Egy termék implicit keresleti függvénye $3pq^2 - \ln q - 4p + 3 = 0$. Határozzuk meg a határkeresleti függvény értékét, amennyiben az ár $p = 3$, és a mennyiség $q = 1$ $(q(p))$.

9. Házi feladatsor

1. Feladat. Határozzuk meg a következő függvények határozatlan integrálját.

(a) x^3, $\sqrt[5]{x}$, $\dfrac{3}{x^4}$, $\dfrac{1}{2x} - 3\sqrt[3]{x}$, $e^x - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

(b) $\dfrac{x^2-3}{x}$, $\dfrac{2\sqrt{x}+3x^3}{5x^2}$, $\dfrac{3x-\sqrt{x^3}}{2\sqrt{x}}$

(c) $(x+1)(x-2)$, $\dfrac{(x-3)(\sqrt{x}-3)}{\sqrt[3]{x}}$

2. Feladat. Egyszerű függvények.

(a) $\int y^4\, dy$, $\int (2x+3)^4\, dx$

(b) $\int \sqrt{y}\, dy$, $\int \sqrt{1-\frac{z}{2}}\, dz$

(c) $\int e^y\, dy$, $\int 2e^{3p-1}\, dp$

(d) $\int \dfrac{1}{y}\, dy$, $\int \dfrac{2}{3q+1}\, dq$, $\int \dfrac{3q+2}{3q+1}\, dq$,

(e) $\int \dfrac{2q-1}{3q+1}\, dq$, $\int \dfrac{1-3q}{5q+1}\, dq$

3. Feladat. Szorzat függvények. (Helyettesítéses integrálás.)

(a) $\int 3x^2(x^3+1)^7\, dx$

(b) $\int 3v\sqrt[3]{v^2+6}\, dv$

(c) $\int 2ze^{3z^2+1}\, dz$

(d) $\int (q-2)e^{4q-q^2}\, dq$

(e) $\int \dfrac{4u}{e^{2u^2+3}}\, du$

(f) $\int \dfrac{7p}{\sqrt[5]{p^2-3}}\, dp$

(g) $\int \dfrac{\ln^2 s}{s}\, ds$

(h) $\int \dfrac{2}{3t\sqrt{\ln t}}\, dt$

10. Házi feladatsor

1. Feladat. Szorzat függvények. (Parciális integrálás.)

(a) $\int e^{-x}(x+2)\ dx$

(b) $\int ye^{-2y+1}\ dy$

(c) $\int \sqrt{q}(\ln q+1)\ dq$

(d) $\int (z+3)\sqrt{3z+2}\ dz$

(e) $\int \frac{p}{\sqrt[3]{2p-1}}\ dp$

2. Feladat. Paraméteres integrál.

(a) $\int (3x+2y+1)\ dx, \quad \int (3x+2y+1)\ dy$

(b) $\int \frac{3p-2q}{p+2q}\ dp, \quad \int \frac{3p-2q}{p+2q}\ dq$

3. Feladat. Határozott integrál. (Newton-Leibniz formula.)

(a) $\int_0^2 (2x-3\sqrt{x}+1)\ dx$

(b) $\int_1^2 \left(xy-\frac{3}{x}\right)\ dx, \quad \int_1^2 \left(xy-\frac{3}{x}\right)\ dy$

(c) $\int_0^1 \frac{2y}{3y+1}\ dy$

(d) $\int_{-1}^1 p\sqrt{p^2+1}\ dp$

(e) $\int_{-1}^1 t\sqrt{t+1}\ dt$

4. Feladat. Improprius integrál.

(a) $\int_1^\infty x^{-3}\ dx$

(b) $\int_2^\infty \sqrt{2y-1}\ dy$

(c) $\int_0^\infty ze^{-3z+1}\ dz \qquad (\lim_{t\to\infty} te^{-3t+1}=0)$

(d) $\int_0^\infty ue^{-3u^2+1}\ du$

11. Házi feladatsor

1. Feladat. Határozzuk meg a $f(x) = x^2 - 3x$ függvény grafikonja és az x–tengely által határolt síkrész területét, ha

(a) $0 \leq x \ \leq 1$ (b) $2 \leq x \ \leq 4$

2. Feladat. Határozzuk meg a $g(x) = x^3 - 2x^2$ függvény grafikonja és az x–tengely által határolt síkrész területét, ha

(a) $-1 \leq x \ \leq 1$ (b) $1 \leq x \ \leq 3$

3. Feladat. Határozzuk meg a $f(x) = 2x^2 + 3x - 1,\ g(x) = x^2 + 2x + 1$ függvények által közrezárt síkrész területét.

4. Feladat. Határozzuk meg a $f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 5,\ g(x) = x^2 + x + 5$ függvények által közrezárt síkrész területét.

5. Feladat. Egy termék piacán a következőképpen alakul a kereslet és a kínálat:

$$D_p = \frac{18 - 3p}{p - 3},\ S_p = \frac{1}{2}p^2 - 2,\ \text{az egyensúlyi ár } p_e = 4.$$

(a) Számoljuk ki az egyensúlyi árhoz tartozó fogyasztói többletet, termelői többletet.

(b) Határozzuk meg a $p_{min} = 5$ minimált árhoz tartozó fogyasztói többletet, termelői többletet, holtteher-veszteséget.

(c) Adjuk meg a $p_{max} = 3$ maximált árhoz tartozó fogyasztói többletet, termelői többletet, holtteher-veszteséget.

12. Házi feladatsor

1. Feladat. Határozzuk meg az $U(x,y) = x^3 + 3x^2y - y^2 + 2$ parciális deriváltjait az $A(1,-2)$ pontban.

2. Feladat. Határozzuk meg a $P(q,t) = q\ln(2q-t)$ parciális deriváltjait a $B(2,3)$ pontban.

3. Feladat. Határozzuk meg az $f(p,q) = \sqrt{2p-3q}e^{p-q^2}$ gradiensvektorát az $A(1,-1)$ pontban.

4. Feladat. Határozzuk meg a $C(p,t) = \dfrac{p^2-2pt}{t^2+2pt}$ totális differenciálját a $B(0,2)$ pontban.

5. Feladat. Határozzuk meg az $U(x,y) = x^{2/3}(3y^{1/3}-2)$ függvény $A(8,27)$ pontbeli változásának ütemét, ha x 1–gyel nő, y 2–vel csökken.

6. Feladat. Határozzuk meg a következő függvények másodrendű parciális deriváltjait.

(a) $F(u,v) = u^3v - u\sqrt{v+1}$ (b) $g(s,t) = s^2\ln(3s+2t)$

7. Feladat. Határozzuk meg a következő függvények helyi szélsőértékeit.

(a) $U(x,y) = x^3 - y^3 - 2xy + 1$

(b) $R(p,q) = pq + 2p - \ln p^2q$