KALKULUS VIZSGA I. Név:......................................

2003.05.12. Szak: pm, ptm, kpm, mi, inf.

Definiálja a következő alapfogalmakat.

1. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsor
   a) konvergens. 1p.
   b) divergens. 1p.
   c) abszolút konvergens. 1p.
   d) feltételesen konvergens. 1p.
2. Az $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény
   a) $\lim\limits_{x\to 2,\ y\to\infty} f(x,y) = -3.$ 2p.
   b) $\lim\limits_{x\to -\infty,\ y\to 1} f(x,y) = -\infty.$ 2p.
3. Az $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény az (a,b) pontban
   a) totálisan differenciálható 1p.
   b) a második változója szerint parciálisan differenciálható 1p.

Igazoljuk a következő állításokat

4. Ha $|r| < 1$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ sor konvergens. 3p.
5. Ha $0 \le a_n < b_n$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L\ > 0$, továbbá a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor is konvergens. 5p.
6. Ha az $f(x,y)$ függvény totálisan differenciálható az (a,b) pontban, akkor ott parciálisan is differenciálható. 3p.

Definiálja a következő alapfogalmakat.

1. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsor konvergens. 1p.
2. Az $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény
   a) $\lim\limits_{x\to -2,\ y\to\infty} f(x,y) = -3.$ 2p.
   b) $\lim\limits_{x\to -3,\ y\to 1} f(x,y) = -\infty.$ 2p.
3. Az $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek az (a,b) pontban vett gradiense. 2p.
4. $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos, Jordan–mérhető halmaz
   a) H halmaz B beosztása. 1p.

b) a B beosztás finomsága. 1p.

c) az f függvényhez és H halmaz B beosztásához tartozó alsó integrálközelítő összege. 1p.

Igazoljuk a következő állításokat

5. Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergál a 2 pontban, akkor a hatványsor abszolút konvergens minden $x \in (-2, 2)$ pontban. 5p.
6. Ha $0 \le a_n < b_n$, továbbá a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor divergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is divergens. 3p.
7. Ha az $f(x, y)$ függvény totálisan differenciálható az (a, b) pontban, és f–nek szélsőértéke van (a, b)–ben, akkor ott a gradiens vektor nullvektor. 3p.

Definiálja a következő alapfogalmakat.

1. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsor feltételesen konvergens. 1p.
2. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény
   a) $\lim_{x\to -2,\ y\to\infty} f(x, y) = \infty$. 2p.
   b) $\lim_{x\to -3,\ y\to 1} f(x, y) = 1$. 2p.
3. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek az (a, b) pontban az $(1, -2)$ irány szerinti deriváltja. 2p.
4. $H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmaz
   a) a sík alapnégyzetrácsa. 1p.
   b) a sík m–edik négyzetrácsa. 1p.
   c) H m–edik beírt sokszöge. 1p.
   c) H belső Jordan–mértéke. 1p.
   c) H Jordan–mérhető. 1p.

Igazoljuk a következő állításokat

5. Ha $a_n \ge 0$ minden n egészre, és $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r > 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsor divergens. 3p.
6. Ha a $H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmaz Jordan–mérhető, akkor a határa nullamértékű. 3p.
7. Ha az $f(x, y)$ függvény totálisan differenciálható az (a, b) pontban, akkor a függvény ott folytonos. 3p.

Definiálja a következő alapfogalmakat.

1. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény az (a, b) pontban totálisan differenciálható 2p.
2. $\lim_{x\to -\infty,\ y\to\infty} f(x, y) = -3$. 2p.
3. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek az (a, b) pontban az $(1, -2)$ irány szerinti deriváltja. 2p.

Igazoljuk a következő állításokat

4. Ha $0 \leq a_n < b_n$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is konvergens.. 3p.

5. Ha $a_n \geq 0$ minden n egészre, és $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r < 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsor konvergens 3p.

6. Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor divergens az $x = 2$ pontban, akkor a hatványsor divergens az $x = -3$ pontban is. 3p.

7. Ha az $f(x, y)$ függvény totálisan differenciálható az (a, b) pontban, akkor a függvény ott folytonos. 3p.

8. Ha az $f(x, y)$ függvény totálisan differenciálható az (a, b) pontban, és f–nek szélsőértéke van (a, b)–ben, akkor ott a gradiens vektor a nullvektor. 3p. Definiálja a következő alapfogalmakat.

1. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsor
   a) konvergens. 1p.
   b) divergens. 1p.
   c) abszolút konvergens. 1p.
   d) feltételesen konvergens. 1p.

2. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény
   a) $\lim_{x\to 2,\ y\to\infty} f(x, y) = -3$. 2p.
   b) $\lim_{x\to -\infty,\ y\to 1} f(x, y) = -\infty$. 2p.

3. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény az (a, b) pontban
   a) totálisan differenciálható. 1p.
   b) a második változója szerint parciálisan differenciálható. 1p.
   c) vett gradiense. 2p.

Igazoljuk a következő állításokat

4. Ha $|r| < 1$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ sor konvergens. 3p.

5. Ha $0 \leq a_n < b_n$ és $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L\ > 0$, továbbá a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor is konvergens. 4p.

6. Ha az $f(x, y)$ függvény totálisan differenciálható az (a, b) pontban, akkor ott parciálisan is differenciálható. 2p.