1. Szállítási probléma

Legyen $C = (c_{ij})$ $m \times n$-es mátrix, $a_i, b_j \geq 0,\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$ olyan számok, melyekre $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, és tekintsük a következő lineáris programozási feladatot, melyet szállítási feladatnak nevezünk:

$$\sum_{k=1}^n x_{ik} = a_i,\ 1 \leq i \leq m,\ \sum_{k=1}^m x_{kj} = b_j,\ 1 \leq j \leq n,$$

$$(*) \qquad x_{ij} \geq 0,\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n,$$

$$\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n c_{kl} x_{kl} \to \min.$$

A szállítási feladatra vezető gyakorlati problémát most nem ismertetjük. Azt sem tárgyaljuk itt, hogy azt az általánosabb esetet, amikor $\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_i$, hogyan lehet visszavezetni a $(*)$ feladatra.

Célunk megoldást adni a $(*)$ feladatra a szimplex módszer segítségével. Az algoritmus ismertetése előtt számos megfontolásra van szükségünk. Vezessük be a következő jelöléseket.

$$\underline{b}^{\mathrm{T}} = (a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n),$$

$$\underline{c}^{\mathrm{T}} = (c_{11}, \ldots, c_{1n}, \ldots, c_{m1}, \ldots, c_{mn})$$

és

$$\underline{x}^{\mathrm{T}} = (x_{11}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{m1}, \ldots, x_{mn}).$$

Legyen továbbá A a következő $(m+n) \times mn$-es mátrix

$$A = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{1}} & \underline{0} & \ldots & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\mathbf{1}} & \ldots & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{0} & \underline{0} & \ldots & \underline{\mathbf{1}} \\ E & E & \ldots & E \end{pmatrix},$$

melyre $\underline{\mathbf{1}} = (1, \ldots, 1)$, illetve $\underline{0} = (0, \ldots, 0)$ az 1, illetve a 0 számból felépülő n komponensű sorvektor, és E pedig az $n \times n$-es egységmátrix. Tehát A fenti blokkosított alakja $(m+1) \times m$-es.

A most bevezetett jelölésekkel a szállítási feladat a következő jól ismert alakú lineáris programozási feladat:

$$A\underline{x} = \underline{b},\ \underline{x} \geq 0,\ \underline{c}^{\mathrm{T}}\underline{x} \to \min.$$

Az A mátrix oszlopvektorait jelölje rendre

$$\underline{a}_{11}, \ldots, \underline{a}_{1n}, \ldots, \underline{a}_{m1}, \ldots, \underline{a}_{mn}.$$

Az A mátrixból azonnal leolvasható, hogy

$$\underline{a}_{ik} = \underline{e}_i + \underline{e}_{m+k},\ 1 \le i \le m,\ 1 \le k \le n,$$

ahol $\underline{e}_j$ a j-edik $(m+n)$-dimenziós egységvektort jelöli. Ezen jelölések bevezetésével az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer (mátrix egyenlet) a következő vektoregyenlettel ekvivalens:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \underline{a}_{ik} x_{ik} = \underline{b}.$$

A feladat egy lehetséges megoldása

$$x_{ik} = \frac{a_i b_k}{\sum_{l=1}^{m} a_l},\ 1 \le i \le m,\ 1 \le k \le n,$$

mert az egyenletrendszer $(*)$ szerinti alakját és a $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ egyenlőséget felhasználva kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_i b_k}{\sum_{l=1}^{m} a_l} = \frac{a_i}{\sum_{l=1}^{m} a_l} \sum_{k=1}^{n} b_k = a_i,\ 1 \le i \le m$$

és

$$\sum_{k=1}^{m} x_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k b_j}{\sum_{l=1}^{m} a_l} = \frac{b_j}{\sum_{l=1}^{m} a_l} \sum_{k=1}^{m} a_k = b_j\ 1 \le j \le n.$$

Az is könnyen igazolható, hogy a célfüggvény korlátos a lehetséges megoldások halmazán. Tehát a szállítási feladatnak mindig van optimuma.

2. A szállítási feladat mátrixának és bázis megoldásainak tulajdonságai

Ebben és néhány további fejezetben is megtartjuk az előző fejezetben bevezetett jelöléseket.

1. Állítás. Az A mátrix rangja $m + n - 1$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy az A mátrix első m sorának összege és az utolsó n sorának összege is az a vektor, melynek mindegyik komponense 1. Ezért A sorvektorrendszere lineárisan függő, és ezért A rangja kisebb mint $m + n$ (a sorok száma).

Legyen M azon $(m+n-1) \times (m+n-1)$-es mátrix, melynek oszlopai rendre az A mátrix utolsó sorának elhagyásával kapott mátrix $1, 2, \ldots, n, 2n, \ldots, mn$ oszlopai. Ekkor

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Felcserélve M első m sorát és utolsó $n-1$ sorát (mint két blokkot) az

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixot kapjuk. $\hat{M}$ determinánsa 1, mert főátlójában minden elem 1, és főátlója fölött pedig minden elem 0. Következésképpen az M mátrix determinánsa 1 vagy -1. Mivel $|M|$ az A mátrix $m+n-1$-edrendű nemeltűnő aldeterminánsa, ezért A rangja $m+n-1$. ■

2. Állítás. Az A mátrix minden aldeterminánsa 0, 1 vagy -1. A mindegyik reguláris almátrixa sorainak és oszlopainak alkalmas felcserélésével felső trianguláris mátrixszá alakítható.

Bizonyítás. A bizonyítást az aldetermináns rendje szerinti teljes indukcióval végezzük. Az 1 rendű determinánsokra nyilvánvalóan teljesül az állítás. Tegyük fel, hogy $k \geq 2$, és a $(k-1)$-edrendű aldeterminánsokra igaz az állítás.

Legyen D az A mátrix egy k-adrendű aldeterminánsa. Ha D-nek van olyan oszlopa, melynek minden eleme 0, akkor $D = 0$. Ha D-nek van olyan oszlopa, melynek valamelyik eleme 1 és a többi eleme 0, akkor D egy ilyen oszlopa szerinti kifejtése egyetlen tagra redukálódik, vagyis D előjeltől eltekintve megegyezik egyik elemének komplementer aldeterminánsával, ami A-nak $(k-1)$-edrendű aldeterminánsa. Az indukciós feltevést alkalmava kapjuk, hogy D 0, 1 vagy -1.

Ha megfigyeljük az A mátrix felépítését, akkor mindenki számára világos, hogy a maradék esetben D minden oszlopában két 1-es van, és az oszlop többi eleme 0 (hiszen ugyanez érvényes A oszlopaira is). Tegyük fel, végül, hogy D ezzel a tulajdonsággal rendelkezik. Azt mondjuk, hogy a D determinánsban szereplő valamely 1-es felső (alsó) 1-es, ha az oszlopában lévő két 1-es közül ő a felső (alsó). Nevezzük a D determináns egy sorát felső (alsó) sornak, ha van a sorban felső (alsó) 1-es. Az A mátrix felépítését újra megfigyelve világos, hogy D egyik sora sem lehet egyszerre felső és alsó sor is. Ezért, ha D felső sorai összegéből levonjuk alsó sorainak összegét, akkor a nullvektort kapjuk. Tehát D sorainak rendszere lineárisan függő, s ezért $D = 0$.

Legyen M az A mátrix egy $l \times l$-es reguláris almátrixa. Az M mátrix alakjára vonatkozó állítást l szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Ha $l = 1$, akkor az állítás triviálisan teljesül. Tegyük fel, hogy $l \geq 2$, és az $(l-1) \times (l-1)$-es reguláris almátrixokra érvényes az állítás. Az aldeterminánsok értékére vonatkozó állítás biznyítására vonatkozó megfontolásaink szerint van M-nek olyan oszlopa, melynek valamelyik eleme 1-es és a többi eleme 0. Ezért M-ből sor- és oszlopcserével olyan M' mátrixot kaphatunk, melyben az első oszlop első eleme 1-es, és az első oszlop többi eleme 0. Jelölje M'' azon $(l-1) \times (l-1)$ mátrixot, melyet M'-ből első sorának és első oszlopának törlésével kapunk. Világos, hogy M' és M'' determinánsa megegyezik, ezért M'' is reguláris mátrix. Az indukciós feltevés szerint M''-ből sorainak és oszlopainak felcserélésével felső trianguláris mátrix kapható. Ezeket a cseréket az M' mátrixon belül az M'' almátrixán végrehajtva felső trianguláris mátrixot kapunk. ∎

3. Állítás. Legyen B egy olyan $(m+n) \times (m+n-1)$-es mátrix, melynek oszlopvektorai az A mátrix oszlopvektorainak egy lineárisan független részrendszere. A B mátrix bármely sorának elhagyásával kapott $(m+n-1) \times (m+n-1)$-es mátrix reguláris (azaz determinánsa nem 0).

Bizonyítás. Jelölje $\underline{s}_i$, $i = 1, \ldots, m+n$, a B mátrix i-edik sorvektorát. Mivel egy négyzetes mátrix akkor és csak akkor reguláris, ha sorvektorai lineárisan független rendszert alkotnak, ezért a regularitás igazolásához elég azt megmutatni, hogy ha $1 \leq k \leq m+n$, akkor az

$$\{\underline{s}_i \colon 1 \leq i \leq m+n, i \neq k\}$$

vektorrendszer lineárisan független. Ez pedig ekvivalens azzal, hogy a vektorrendszer által generált altér dimenziója megegyezik a vektorok számával $(m+n-1)$-gyel. Mivel B rangja (sorrangja) $m+n-1$, B összes sorvektora által generált altér $m+n-1$ dimenziós. Az A mátrix alakjából következik, hogy

$$\underline{s}_1 + \ldots + \underline{s}_m - \underline{s}_{m+1} - \ldots - \underline{s}_{m+n} = \underline{0},$$

amiből látszik, hogy $\underline{s}_k$ a többi sorvektor lineáris kombinációja. Ezért az

$$\{\underline{s}_i \colon 1 \leq i \leq m+n, i \neq k\}$$

vektorrendszer ugyanazt az alteret generálja, mint az összes sorvektor, vagyis egy $m+n-1$ dimenziós alteret. ∎

A fejezet további részében a szállítási feladat bázismegoldásainak alakját vizsgáljuk. Legyen B a szállítási feladat megengedett bázisa. Ahogy korábban is előfordult B egyben azt a mátrixot is jelöli, melynek oszlopvektorai a bázisvektorok. Tudjuk, hogy a B bázishoz tartozó bázismegoldás komponensei egyértelműen megkaphatók a

$$B\underline{x}_B = \underline{b}$$

egyenletrendszerből. Az egyenletrendszer utolsó egyenletét elhagyva a $C\underline{x}_B = \underline{\hat{b}}$ egyenletrendszert kapjuk. A 2. Állítás szerint a C reguláris mátrix, s így a 2. Állítás miatt a determinánsa $|C| \in \{1, -1\}$. A bevezető lineáris algebrai tanulmányainkból tudjuk, hogy C^{-1} i-edik sorának j-edik eleme

$$\frac{(-1)^{i+j} C_{ji}}{|C|},$$

ahol C_{ji} a C mátrix j-edik sorának i-edik eleméhez tartozó komplementer aldetermináns. A 2. Állítás szerint $C_{ji} \in \{0, 1, -1\}$, következésképpen C^{-1} minden eleme 0, 1 vagy -1. Ezért az

$$\underline{x}_B = C^{-1}\underline{\hat{b}}$$

bázismegoldás komponenseire érvényes a következő:

4. Tétel. Tetszőleges B megengedett bázis esetén $\underline{x}_B$ komponensei mindig megkaphatók a következő alakban.

$$x_{kl} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{n} \mu_j b_j, \quad (k, l) \in I_B,$$

ahol $\lambda_i, \mu_j \in \{0, 1, -1\}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots n$. Következésképpen, ha az $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ számok egészek, akkor $\underline{x}_B$ komponensei is egészek.

3. A szállítási feladat bázisainak jellemzése páros gráfokkal és cellagráfokkal.

Ezen fejezet megértéséhez az olvasónak ismerni kell néhány alapvető gráfelméleti fogalmat és összefüggést, melyek megtalálhatók Hajnal Péter Gráfelmélet c. könyvében (HP). Nevezetesen ismertnek tekintjük az egyszerű gráf, út, kör, összefüggő gráf, páros gráf és a fa definícióját, valamint a fák néhány nagyon egyszerű tulajdonságát.

Továbbra is megtartjuk a szállítási feladattal kapcsolatos jelöléseinket.

Legyen $M = \{1, \ldots, m\}$, $N = \{1, \ldots, n\}$ és $N' = \{1', \ldots, n'\}$. Ekkor a szállítási feladat A mátrixának oszlopvektorai az $\underline{a}_{ij}, (i, j) \in M \times N$ vektorok. Ha $\alpha = (i, j) \in M \times N$, akkor $\underline{a}_{ij}$ és $\underline{a}_\alpha$ ugyanazt a vektort jelöli.

Ha $I \subseteq M \times N$, akkor G_I jelöli azt a páros gráfot, mely csúcsainak halmaza $M \cup N'$, éleinek halmaza pedig $\{\{i, j'\} : (i, j) \in I\}$ ($\{i, j'\}$-t az (i, j) elempárhoz tartozó élnek nevezzük).

Az I halmazhoz tartozó cellagráfnak nevezzük, és cG_I-vel jelöljük azt a gráfot, mely csúcsainak halmaza I, és az $(i, j), (k, l) \in I$ élek pontosan akkor vannak összekötve éllel, ha $i = k$ vagy $j = l$. Ha $M \times N$ elemeit azonosítjuk egy m sorból és n oszlopból álló ún. cellákból álló táblázattal, akkor a cG_I gráf csúcsai éppen az I-beli elemekhez tartozó cellák, és két csúcs a cG_I gráfban pontosan akkor van összekötve, ha a hozzájuk tartozó cellák egy sorban vagy egy oszlopban vannak. Mostantól kezdve a cG_I gráf csúcsait azonosítjuk a nekik megfelelő cellákkal.

1. Állítás. Legyen $I \subseteq M \times N$. Ha valamely $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k} \in I$ elempárokhoz tartozó élek kört alkotnak a G_I páros gráfban az adott sorrendben, akkor

$$\underline{a}_{\alpha_1} - \underline{a}_{\alpha_2} + \underline{a}_{\alpha_3} - \dots + \underline{a}_{\alpha_{2k-1}} - \underline{a}_{\alpha_{2k}} = \underline{0}.$$

Bizonyítás. Világos, hogy páros gráfban minden körben páros sok él van, és a feltételek miatt

$$\alpha_1 = (i_1, j_1),$$
$$\alpha_2 = (i_2, j_1),$$
$$\alpha_3 = (i_2, j_2),$$
$$\vdots$$
$$\alpha_{2k-1} = (i_k, j_k),$$
$$\alpha_{2k} = (i_1, j_k).$$

Korábbról tudjuk, hogy az A mátrix oszlopvektorai

$$\underline{a}_{ij} = \underline{e}_i + \underline{e}_{m+j}, \ 1 \le i \le m, \ 1 \le k \le n$$

alakúak, ahol $\underline{e}_l$ a l-edik $(m+n)$-dimenziós egységvektort jelöli, $1 \le l \le m+n$. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\underline{a}_{\alpha_1} - \underline{a}_{\alpha_2} + \underline{a}_{\alpha_3} - \dots + \underline{a}_{\alpha_{2k-1}} - \underline{a}_{\alpha_{2k}} =$$

$$(\underline{e}_{i_1} + \underline{e}_{m+j_1}) - (\underline{e}_{i_2} + \underline{e}_{m+j_1}) + (\underline{e}_{i_2} + \underline{e}_{m+j_2}) - \dots + (\underline{e}_{i_k} + \underline{e}_{m+j_k}) - (\underline{e}_{i_1} + \underline{e}_{m+j_k}) = \underline{0},$$

■

2. Tétel. Valamely $I \subseteq M \times N$ esetén az A mátrix $\{\underline{a}_\alpha : \alpha \in I\}$ vektorrendszere akkor és csak akkor alkot bázist, ha a G_I páros gráf fa.

Bizonyítás. Ha $\{\underline{a}_\alpha : \alpha \in I\}$ bázis, akkor az előző fejezet 1. állítása szerint $m + n - 1$ elemű, azaz a G_I gráf éleinek száma a csúcsainak száma minusz 1. Továbbá a bázis lineáris függetlensége és az 1. Állítás miatt a G_I gráfban nincs kör. HP 2.3.19(iii) feladata szerint azok a gráfok fák, amelyekben nincs kör, és eggyel kevesebb élük van mint csúcsuk. Tehát G_I fa.

Tegyük fel, hogy G_I fa. Mivel a fáknak eggyel kevesebb éle van, mint csúcsa (HP 2.3.12. Lemma), az $\{\underline{a}_\alpha : \alpha \in I\}$ vektorrendszer $m + n - 1$ elemű. Ezért az előző fejezet 1. állítása szerint annak igazolásához, hogy a vektorrendszer bázis, elég igazolni azt, hogy lineárisan független. Ezt kontrapozícióval látjuk be, azaz megmutatjuk, hogy ha a vektorrendszer lineárisan függő, akkor a G_I gráf tartalmaz kört, s így nem lehet fa.

Tehát tegyük fel, hogy a vektorrendszer lineárisan függő. Ekkor van olyan vektor a rendszerben, mely néhány további rendszerbeli vektor lineáris kombinációja. Nyilván választhatóak ezek a további vektorok úgy is, hogy lineárisan függetlenek legyenek. Tehát van olyan $\alpha \in I$, $J \subseteq I$ és $\lambda_\beta \neq 0$, $\beta \in J$ számok, melyekre $\alpha \notin J$, $\{\underline{a}_\beta : \beta \in J\}$ lineárisan független és

$$(*) \qquad \underline{a}_\alpha = \sum_{\beta \in J} \lambda_\beta \underline{a}_\beta .$$

Mivel $\{\underline{a}_\beta : \beta \in J\}$ lineárisan független, kiegészíthető bázissá. Vagyis van olyan $K \subseteq M \times N$, melyre $\{\underline{a}_\beta : \beta \in J \cup K\}$ bázis. Nyilván $\alpha \notin K$ is teljesül. Mivel azt már bebizonyítottuk, hogy a bázisokhoz tartozó páros gráfok fák, ezért $G_{J \cup K}$ is fa.

Könnyen igazolható, hogy ha egy fához hozzáveszünk egy újabb élet, akkor a kapott gráfban van (egyetlen) olyan kör, mely tartalmazza a hozzávett élet. Ezért a $G_{J \cup K \cup \{\alpha\}}$ gráfban van olyan kör, mely tartalmazza az α-hoz tartozó élet. Tehát van olyan $J' \subseteq J \cup K$, melyre $G_{J' \cup \{\alpha\}}$ kör. Az 1. állítás szerint vannak olyan $\lambda'_\beta \in \{-1, 1\}$, $\beta \in J'$ számok, melyekre

$$(**) \qquad \underline{a}_\alpha = \sum_{\beta \in J'} \lambda'_\beta \underline{a}_\beta .$$

Mivel bázis lineáris kombinációjaként minden vektor egyetlen módon áll elő, ezért a $(*)$-gal és a $(**)$-gal jelölt sorokban szereplő lineáris kombinációk ugyanazok, következésképpen $J = J'$. Tehát $G_{J' \cup \{\alpha\}} = G_{J \cup \{\alpha\}}$ kör a G_I gráfban. ∎

A most befejezett bizonyítás bizonyos részeit megismételve kapjuk, következőt.

3. Állítás. Valamely $I \subseteq M \times N$ esetén az A mátrix oszlopvektorainak $\{\underline{a}_\alpha : \alpha \in I\}$ rendszere akkor és csak akkor lineárisan független, ha a G_I gráfban nincs kör.

E fejezet befejezéseként megvizsgáljuk, hogy az a tény, hogy a G_I páros gráf fa, hogyan jellemezhető a cG_I gráfban. Először is vegyük észre, hogy ha

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2 \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$$

út a G_I gráfban (e_i a v_{i-1}, v_i csúcsokat összekötő él, $i = 1, \ldots, n$), ha az $e_1, e_2, \ldots, e_n$ élek sorozatának megfelelő cellasorozat a cG_I gráfban olyan szomszédos csúcsok sorozata, melyre teljesül a következő: a cellákat összekötő élek sorozata olyan, hogy a szomszédos élek merőlegesek egymásra ,vagyis az egyik él két ugyanazon sorbeli, a másik él pedig két ugyanazon oszlopbeli cellát köt össze.

4. Tétel. Valamely $I \subseteq M \times N$ esetén a következő három állítás ekvivalens.
(a) A $\{\underline{a}_\alpha : \alpha \in I\}$ vektorrendszer a szállítási feladat bázisa.
(b) A G_I gráf fa.
(c) A cG_I gráf minden sorból és oszlopból tartalmaz legalább egy cellát, a cG_I gráf bármely két cellája összeköthető úttal, és a cG_I gráfban nincs olyan kör, melyben a szomszédos élek merőlegesek egymásra.

Bizonyítás. Az (a) és (b) ekvivalenciáját már bizonyítottuk. A (b) és (c) ekvivalenciájának bizonyítása a fenti észrevétel felhasználásával már az olvasóra bízható. ∎

4. A szállítási feladat megoldása szimplex módszerrel

Legyen $B = \{\underline{a}_\alpha : \alpha \in I_B\}$ a szállítási feladat bázisa és x_{ij}, $(i,j) \in M \times N$ a hozzá tartozó bázismegoldás. Tudjuk, hogy $x_{ij} = 0$, ha $(i,j) \notin I_B$. A B bázishoz tartozó szállítási táblának a következő táblázatot nevezzük:

$$\begin{array}{|cccc|c}
\hline
{}^{c_{11}}x_{11} & {}^{c_{12}}x_{12} & \cdots & {}^{c_{1n}}x_{1n} & a_1 \\
{}^{c_{21}}x_{21} & {}^{c_{22}}x_{22} & \cdots & {}^{c_{2n}}x_{2n} & a_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
{}^{c_{m1}}x_{m1} & {}^{c_{m2}}x_{m2} & \cdots & {}^{c_{mn}}x_{mn} & a_m \\
\hline
b_1 & b_2 & \cdots & b_n &
\end{array}$$

Megjegyezzük, hogy a szállítási táblában meg szokás jelölni a bázisvektorokhoz tartozó cellákat pl. úgy, hogy minden $(i,j) \in I_B$-re az x_{ij} értéket bekarikázzák.

Mivel a szállítási feladatnak mindig van optimuma, csak két eset lehetséges: a B bázishoz tartozó megoldás optimális, vagy elemi bázistranszformációval egy olyan B' bázist kaphatunk, melyhez tartozó célfüggvény értéke nem nagyobb, mint a B-hez tartozó célfüggvény értéke. Ne feledjük, hogy a célfüggvényt most minimalizálni kell.

Ahhoz, hogy kiderítsük melyik eset teljesül, meg kell határozni a $z_\alpha - c_\alpha,\ \alpha \in M \times N$ számokat. Ha ezek mindegyike nem pozitív, akkor a táblázat optimális megoldást tartalmaz. Ha valamely β esetén $z_\beta - c_\beta > 0$, akkor valamelyik bázisvektor lecserélhető az $\underline{a}_\beta$ vektorra az említett eredménnyel.

Most számoljuk ki a $z_\alpha - c_\alpha$ értékeket. Tudjuk, hogy $z_\alpha - c_\alpha = 0$, ha $\alpha \in I_B$. Ha $\beta \notin I_B$, akkor van a $G_{I_B \cup \{\beta\}}$ gráfban olyan kör, mely tartalmazza β-t. Ha e körben szereplő élekhez tartozó cellák $\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2k-1}$ (minden körben páros sok él van), akkor

$$(*) \qquad \underline{a}_\beta = \underline{a}_{\beta_1} - \underline{a}_{\beta_2} + \ldots + \underline{a}_{\beta_{2k-1}}$$

és ezért

$$z_\beta - c_\beta = c_{\beta_1} - c_{\beta_2} + \ldots + c_{\beta_{2k-1}} - c_\beta.$$

Végül azt mutatjuk meg, hogy $z_\beta - c_\beta > 0$ esetén melyik bázisvektort cserélhetjük le a $\underline{a}_\beta$ vektorra. Tudjuk, hogy ezt a generáló elem kiválasztásával határoztuk meg. Most a generáló elem a $(*)$ lineáris kombináció valamelyik pozitív együtthatója (azaz valamelyik 1-es) lesz, vagyis a $\underline{a}_{\beta_1}, \underline{a}_{\beta_3}, \ldots, \underline{a}_{\beta_{2k-1}}$ vektorok valamelyike kerül ki a bázisból. Mégpedig egy olyan vektor, melyhez tartozó bázisváltozó minimális. Tehát az $x_{\beta_1}, x_{\beta_3}, \ldots, x_{\beta_{2k-1}}$ bázisváltozók közül kiválasztunk egy minimálisat, és a hozzá tartozó bázisvektor helyére kerül $\underline{a}_\beta$ vektor.

Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy az $\underline{a}_{\beta_1}$ vektor helyére kerül $\underline{a}_\beta$ vektor. Ekkor az új bázishoz tartozó megoldás értékei a következők lesznek:

$$x'_\beta = x_{\beta_1} \text{ és } x'_{\beta_i} = x_{\beta_i} + (-1)^i x_{\beta_1},\ i = 1, \ldots, 2k-1.$$

A többi érték nem változik.

A most ismertetett eljárás a $z_\beta - c_\beta$ értékek kiszámítására nagyon hosszadalmas. Van erre egy sokkal hatásosabb módszer az ún. duálvektorok felhasználásával. A következő állításban a lineáris programozási feladatoknál szokásos jelöléseket használjuk.

4. Tétel. Tekintsünk egy lineáris programozási feladatot, és legyen B egy tetszőleges bázisa (most B egy mátrix, melynek oszlopvektorai a bázisvektorok). Ha $\underline{y}$ egy duálvektor, azaz teljesíti a $B^T \underline{y} = \underline{c}_B$ feltételt, akkor minden k-ra $z_k = \underline{a}_k^T \underline{y}$. (Duálvektor mindig létezik, mert a B^{T} mátrix rangja megegyezik sorai számával.)

Bizonyítás. Legyen $\underline{y}$ egy duálvektor. Ekkor

$$z_k = \sum_{i \in I_B} d_{ik} c_i = \sum_{i \in I_B} d_{ik} (\underline{a}_i^T \underline{y}) = \sum_{i \in I_B} (d_{ik} \underline{a}_i^T) \underline{y} = \left(\sum_{i \in I_B} d_{ik} \underline{a}_i^T \right) \underline{y} = \underline{a}_k^T \underline{y}.$$

∎

Alkalmazzuk a tételt a szállítási feladatra. Most a B^{T} mátrixnak $m+n-1$ sora, az $\underline{y}$ vektornak pedig $m+n$ komponense van. Ha $\underline{y}^T = (u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n)$, akkor a $B^{\mathrm{T}}\underline{y} = \underline{c}_B$ vektorok közötti egyenlőség ekvivalens a következő $m+n-1$ db. számok közötti egyenlőséggel:

$$(**) \qquad u_i + v_j = c_{ij}, \ (i,j) \in I_B.$$

Mivel $(**)$ lényegében az $\underline{y}$ komponenseire vonatkozó 1 (= ismeretlenek száma minusz a mátrixának rangja) szabadsági fokkal rendelkező egyenletrendszer, pl. a $u_1 = 0$ választással a $\underline{y}$ vektor többi komponense gyorsan kiszámolható. Végül vegyük észre, hogy most

$$z_{ij} - c_{ij} = \underline{a}_{ij}^T \underline{y} - c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}, \ (i,j) \in M \times N.$$

Befejezésül megfogalmazzuk a szállítási feladat duálisát, amelyet az általános dualitási tételnél definiált primál-duál feladatpár figyelembevételével nyerhetünk (és aminek ugyanaz az optimuma, mint a szállítási feladatnak). A részleteket az olvasóra bízzuk.

$$u_i + v_j \le c_{ij}, \ (i,j) \in M \times N, \ \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{i=1}^{n} b_i v_i \to \max.$$

5. Hozzárendelési feladat

A hozzárendelési feladat pl. a következő probléma matematikai modellje: Van n dolgozó, akiknek n feladat kell kiosztani. Mindegyik dolgozóra rá lehet bízni bármelyik feladatot, és mindegyik csak egy feladatot kaphat. Az i-edik dolgozó a j-edik feladatot c_{ij} forintért tudja megcsinálni. Hogyan osszuk ki a feladatokat, hogy az összköltség minimális legyen? Tehát a hozzárendelési feladat a következő.

Adott $C = (c_{ij})$ $n \times n$-es mátrix esetén meghatározandó a

$$\min\{\sum_{i=1}^{n} c_{ii\pi} \colon \pi \in S_n\},$$

ahol S_n az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz permutációinak halmazát jelöli. Természetesen nemcsak a minimális értéket kell meghatározni, hanem egy olyan π permutációt is melyre a fenti összeg minimális. A

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ii\pi}, \ \pi \in S_n$$

alakú összegeket a C mátrix diagonálösszegeinek nevezzük. Nem tettük fel, hogy a C mátrix elemei nemnegatívak, mert ez a c_{ij} elemekhez egy alkalmas konstans hozzáadásával elérhető, és ez az átalakítás nem változtatja meg a diagonálösszegek nagyságrendi viszonyát. A gyakorlati életben a C mátrix elemei racionális számok. Ezért alkalmas λ pozitív egész szám esetén a λC mátrix elemei egész számok, és diagonálösszegei a C mátrix ugyanazon permutációhoz tartozó diagonálösszegeinek λ-szorosa. Következésképpen, a C és a λC mátrix minimális diagonálösszegei ugyanazon permutációkhoz tartoznak. **Ezért mostantól feltehető, hogy a C mátrix elemei pozitív egész számok**.

1. Állítás. Tetszőleges $u_i, v_i,\ i = 1, \ldots, n$ számok esetén legyen $d_{ij} = c_{ij} + u_i + v_j,\ 1 \leq i, j \leq n$. Ekkor $D = (d_{ij})$ mátrix diagonálösszegei csak a $\sum_{i=1}^{n}(u_i + v_i)$ konstans tagban térnek el a C mátrix diagonálösszegeitől. Következésképpen, a C és D mátrix minimális diagonálösszegei ugyanazon permutációkhoz tartoznak.

Bizonyítás. Teszőleges π permutáció esetén

$$\sum_{i=1}^{n} d_{ii\pi} = \sum_{i=1}^{n}(c_{ii\pi} + u_i + v_{i\pi}) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii\pi} + \sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{i=1}^{n} v_{i\pi} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ii\pi} + \sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} c_{ii\pi} + \sum_{i=1}^{n}(u_i + v_i).$$

A második állítás triviális. ■

A C mátrix állításbeli átalakításait megengedett transzformációknak nevezzük. Ezek a transzformációk fontos eszközei a hozzárendelési feladatnak az ún. magyar módszerrel történő megoldásában. A megoldás megadásához még szükségünk van a Kőnig-tételre.

Legyen A egy $n \times n$-es mátrix, melyben ki vannak tüntetve bizonyos helyek, mondjuk úgy, hogy a kitüntetett helyeken nullák állnak, a többi helyen pedig nem nulla áll. Azt mondjuk, hogy a nullák egy részhalmaza független, ha mindegyik külön sorban és külön oszlopban van. Az A mátrix sorait és oszlopait most vonalaknak nevezzük.

2. Tétel. (Kőnig-tétel) Az A mátrixban a független nullák maximális száma megegyezik az összes nullát lefedő vonalak minimális számával.

A bizonyítást most elhagyjuk annak ellenére, hogy lényegében algoritmust ad az összes nullát lefedő minimális számú vonal megadására, ami fontos része a magyar módszernek.

Magyar módszer. Tekintsük az egész számokból álló C mátrixú hozzárendelési feladatot, és legyen C_1 az a mátrix, melyet megengedett transzformációkkal kapunk a C mátrixból a következő módon. Először minden i-re levonjuk a C mátrix i-edik sorának minden eleméből az i-edik sor legkisebb elemét, majd az így kapott mátrix oszlopaira is megtesszük ezt (azaz minden i-re levonjuk az i-edik oszlopának minden eleméből az i-edik oszlop legkisebb elemét). Vegyük észre, hogy a C_1 mátrix minden eleme nemnegatív, és minden sorában és oszlopában van legalább egy nulla. Két estet különböztetünk meg.

1. Van a C_1 mátrixban n független nulla. Ekkor válasszunk ki n független nullát, és ezek összege lévén diagonálösszeg a feladat megoldását adja.

2. A független nullák maximális száma kisebb, mint n. Ekkor legyen a független nullák maximális száma f, és fedjük le az összes nullát f számú vonallal. A Kőnig-tétel miatt ilyen lefedés van. Ezen f vonalból álló halmaz álljon az $s_1 < \ldots < s_k$ sorokból, és az $o_1 < \ldots < o_l$ oszlopokból, $f = k + l$. Képezzük a C_2 mátrixot a C_1 mátrixból a következő megengedett transzformációval: Legyen u a C_1 mátrix azon elemeinek minimuma, melyek nincsenek lefedve vonallal. Először vonjuk ki a C_1 mátrix mindazon elemeiből u-t, melyek nem az $s_1, \ldots, s_k$ sorok valamelyikében vannak, majd adjunk hozzá u-t az $o_1, \ldots, o_l$ oszlopokban álló elemekhez. Vegyük észre, hogy a C_2 mátrix a következőképpen is megkapható a C_1 mátrixból. Vonjunk le mindazon elemekből u-t, melyek nincsenek lefedve vonallal, és adjunk hozzá u-t mindazon elemekhez, melyek két vonallal vannak lefedve (vagyis minden $i, j,\ i = 1, \ldots, k, j = 1, \ldots, l$ esetén az s_i és o_j vonalak találkozásában álló elemekhez). Tehát a vonalak találkozásában levő elemeket kivéve a C_2 mátrix elemei nem nagyobbak, mint a C_1 mátrix ugyanazon helyen álló elemei. Ezért, ha a C_2 mátrix valamelyik sorában vagy oszlopában nem lenne nulla, akkor az csak valamelyik fedővonal lehetne (hiszen a C_1 mátrix minden sorában és oszlopában van legalább egy nulla). Ha például egy fedővonalon nincs nulla a C_2 mátrixban, akkor ugyanezen a vonalon a C_1 mátrixban csak a vonalak kereszteződéseiben lehetnek nullák. Ezért ez a vonal elhagyható a fedőrendszerből úgy, hogy a maradó vonalak az összes nullát lefedik. Ez pedig lehetetlen mert a fedővonalrendszer minimális elemszámú. Tehát a C_2 mátrix minden sorában és oszlopában is van legalább egy nulla.

Legyen x a C_1 mátrix, y pedig a C_2 mátrix összes elemének összege. Ekkor

$$y = x - (n-k)nu + lnu = x - (n - (k+l))nu = x - (n-f)nu \leq x - n.$$

A becslésnél figyelembe vettük, hogy $n - f \geq 1$ és $u \geq 1$ (hiszen u pozitív egész szám). Tehát azon túl, hogy a C_2 mátrix minden sorában és oszlopában van legalább egy nulla, elemeinek összege legalább n-nel kevesebb, mint C_1 elemeinek összege. A C_2 mátrixra is két lehetőség van. Ha van benne n független nulla, akkor készen vagyunk. Ellenkező eseben a C_1 mátrixra leírt módon megengedett traszformációval kaphatunk belőle egy C_3 mátrixot, melynek minden sorában és oszlopában van nulla, és elemeinek összege legalább n-nel kevesebb, mint C_2 elemeinek összege. Folytatva ezt az eljárást véges sok lépésben egy olyan mátrixot kapunk, melyben van n független nulla (ami a feladat megoldását jelenti), hiszen az eljárás során kapott mindegyik mátrix elemei nemnegatív egészek, és mindegyik elemeinek összege legalább n-nel kevesebb, mint az előző mátrix elemeinek összege.

A hozzárendelési feladat megoldása szállítási feladatként

Adott $C = (c_{ij})$ $n \times n$-es mátrix esetén tekintsük a következő szállítási feladatot:

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik} = 1,\ 1 \le i \le n,\ \sum_{k=1}^{n} x_{kj} = 1,\ 1 \le j \le n,$$

$$(*) \qquad x_{ij} \ge 0,\ 1 \le i, j \le n,$$

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} c_{kl} x_{kl} \to \min.$$

A következő állítás szerint a fenti szállítási feladat szimplex módszerrel való megoldása egyben a C mátrixú hozzárendelési feladat megoldását adja.

1. Tétel. Az $x_{ij} \ge 0,\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$, számok akkor és csak akkor alkotják a $(*)$ feladat bázismegoldását, ha a hozzá tartozó célfüggvény érték a C mátrix diagonálösszege, azaz van olyan π permutáció, melyre $x_{ii\pi} = 1,\ i = 1, \ldots, n$, és $x_{ij} = 0$, ha $j \ne i\pi$. Következésképpen a $(*)$ szállítási feladat optimuma megegyezik a C mátrix diagonálösszegei minimumával.

Bizonyítás. Legyen $X = (x_{ij})$ egy bázismegoldás komponenseiből képezett mátrix. A 2. fejezetbeli 4. Tétel szerint X elemei nemnegatív egész számok. Mivel x_{ij}-k kielégítik a fenti egyenlőségeket, X minden sorában és oszlopában pontosan egy 1-es van, és a többi elem 0. Ezért van olyan π permutáció, melyre $x_{ii\pi} = 1,\ i = 1, \ldots, n$, és $x_{ij} = 0$, ha $j \ne i\pi$. Ezzel a szükségességet igazoltuk. Legyen most π egy permutáció, $x_{ii\pi} = 1,\ i = 1, \ldots, n$ és $x_{ij} = 0$, ha $j \ne i\pi$. Világos, hogy $x_{ij} - k$ lehetséges megoldást adnak. Csak azt kell igazolni, hogy ez a megoldás bázismegoldás. Ehhez elég azt belátni, hogy a $(*)$ feladat mátrixának $\underline{a}_{ii\pi},\ i = 1, \ldots, n$ vektorrendszere valamely bázis része, ami ekvivalens azzal, hogy lineárisan független. Könnyű ellenőrizni, hogy a $G_{\{(1,1\pi),\ldots,(n,n\pi)\}}$ gráfban nincs kör, ezért a 3. fejezetbeli 3. Állítás szerint lineárisan független, ■

Az általános dualitási tétel és a fenti tétel felhasználásával kapjuk a következőt:

2. Tétel. (Egerváry-tétel) Tetszőleges $C = (c_{ij})$ $n \times n$-es mátrix esetén a $(*)$ feladat duálisának, azaz a

$$u_i + v_j \le c_{ij},\ 1 \le i, j \le n,\ \sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{i=1}^{n} v_i \to \max.$$

feladatnak az optimuma megegyezik a C mátrix diagonálösszegei minimumával.