## 0. Az operációkutatás feladata

Adott $L \subseteq \mathbf{R}^n$ zárt halmaz és $f\colon L \to \mathbf{R}$ folytonos függvény esetén a következő állítás közül pontosan az egyik teljesül.

1. $L = \emptyset$.
2. $L \neq \emptyset$, és $f$ felülről (alulról) nem korlátos $L$-en.
3. $L \neq \emptyset$, és $f$ felülről (alulról) korlátos $L$-en. Ekkor (a többváltozós függvénytan egyik közismert tétele szerint) $f$ felveszi $L$-en maximumát (minimumát).

Az operációkutatás feladata egy olyan algoritmus megadása, mely eldönti, hogy a három eset közül melyik teljesül, és a harmadik esetben megadjon legalább egy olyan $\underline{x} \in L$ vektort, melyre $f(\underline{x})$ az $f$ függvény maximuma (minimuma) $L$-en. Az ilyen $\underline{x}$ vektorokat a feladat optimális megoldásainak, $f(\underline{x})$-et a feladat optimumának, az $f$ függvényt pedig a feladat célfüggvénynek nevezzük.

Az $L$ halmazt legtöbbször bizonyos feltételeknek eleget tevő vektorok halmazaként adják meg. Ezért nevezik $L$ elemeit lehetséges vagy megengedett megoldásoknak. Elegendő az algoritmust maximum keresésére kidolgozni, mert az $f$ minimumának keresése visszavezethető $-f$ maximumának keresésére.

Bár a kurzus neve operációkutatás, mi csak egy speciális ágának a lineáris programozásnak a bevezető fejezeteit tárgyaljuk.

Legyen $A_i$ $m_i \times n$-es mátrix, $\underline{b}_i$ $m_i$ komponensű oszlopvektor, $i = 1, 2, 3$, $\underline{c}$ pedig $n$ komponensű oszlopvektor. A lineáris programozási feladatok legáltalánosabb alakjában a lehetséges megoldások halmaza

$$L = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^n\colon A_1\underline{x} = \underline{b}_1,\ A_2\underline{x} \leq \underline{b}_2,\ A_3\underline{x} \geq \underline{b}_3,\ \underline{x} \geq 0\},$$

célfüggvénye pedig $f(\underline{x}) = \underline{c}^{\mathrm{T}}\underline{x}$. A vektorok közötti egyenlőtlenségek komponensenként értendők, az $\underline{x} \geq 0$ pedig azt jelenti, hogy $\underline{x}$ minden komponense nemnegatív. Ha $\underline{c}$ illetve $\underline{x}$ $i$-edik komponense $c_i$, illetve $x_i$, $i = 1, \ldots, n$, akkor nyilván $f(\underline{x}) = \underline{c}^{\mathrm{T}}\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$.

Természetesen az $L$-et megadó első három feltétel közül bármelyik vagy bármelyik kettő hiányozhat. Sőt az $\underline{x} \geq 0$ feltétel is elmaradhat. Bármilyen is ezen lehetőségeken belül az $L$-re vonatkozó feltételredszer, a lineáris programozási feladatot vissza lehet vezetni maximum keresésre és az

$$L = \{\underline{x}\colon A\underline{x} = \underline{b}, \underline{x} \geq 0\},\ f(x) = \underline{c}^{\mathrm{T}}\underline{x}$$

esetre. Az erre vonatkozó megfontolásokat az olvasóra bízzuk. Természetesen az előadáson kellő részletességgel tárgyaljuk.

## 1. Elemi bázistranszformáció és alkalmazásai. Lineáris egyenletrendszer bázismegoldásai.

Elemi bázistranszformációknak nevezzük azokat a bázistranszformációkat, melyeknél a két bázis csak egy vektorban különbözik.

Legyen $e_1, \ldots, e_n$ a vektortér bázisa, $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $v = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ két további vektor, és $1 \le j \le n$. Tegyük fel, hogy $e_1, \ldots, e_{j-1}, u, e_{j+1}, \ldots, e_n$ is bázis. (Könnyen ellenőrizhető, hogy ez pontosan akkor teljesül, ha $x_j \neq 0$.) Írjuk fel a $v$ vektort az új bázis lineáris kombinációjaként. Mivel

$$e_j = \frac{1}{x_j} u - \sum_{1 \le i \le n, i \neq j} \frac{x_i}{x_j} e_i,$$

ezért

$$v = \sum_{i=1}^n y_i e_i = y_j \left( \frac{1}{x_j} u - \sum_{1 \le i \le n, i \neq j} \frac{x_i}{x_j} e_i \right) + \sum_{1 \le i \le n, i \neq j} y_i e_i =$$

$$= \frac{y_j}{x_j} u + \sum_{1 \le i \le n, i \neq j} (y_i - \frac{x_i y_j}{x_j}) e_i.$$

Számolásunk eredményeként képleteket kaptunk arra, hogy elemi bázistranszformáció esetében hogyan számolhatjuk ki egy $v$ vektor új bázisbeli koordinátáit, ha ismerjük a $v$ vektor és a bázisba bevont $u$ vektor koordinátáit a régi bázisban. A most kapott ún. transzformációs formulák fontos szerepet játszanak a lineáris programozási feladatok szimplex módszerrel történő megoldásában.

Az elemi bázistranszformáció jól alkalmazható lineáris egyenletrendszerek megoldására, mátrixok inverzének kiszámítására és mátrixok rangjának meghatározására is.

Legyen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

valamely test feletti mátrixok, $\underline{x}$ pedig az $x_1, \ldots, x_n$ ismeretlenekből alkotott oszlopvektor, és tekintsük az $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszert. Legyenek továbbá $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ az $A$ mátrix oszlopvektorai, $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_m$ pedig az $m$ komponensű oszlopvektorok vektorterében a standard bázis, és képezzük a következő táblázatot:

| | $\underline{a}_1$ | $\ldots$ | $\underline{a}_k$ | $\ldots$ | $\underline{a}_n$ | $\underline{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\underline{e}_1$ | $a_{11}$ | $\ldots$ | $a_{1k}$ | $\ldots$ | $a_{1n}$ | $b_1$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\underline{e}_j$ | $a_{j1}$ | $\ldots$ | $\boxed{a_{jk}}$ | $\ldots$ | $a_{jn}$ | $b_j$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\underline{e}_m$ | $a_{m1}$ | $\ldots$ | $a_{mk}$ | $\ldots$ | $a_{mn}$ | $b_m$ |

A táblázat lényegében az egyenletrendszer bővített mátrixát tartalmazza azzal a kiegészítéssel, hogy mindegyik oszlopvektor fölött feltüntettük, hogy melyik vektor is van ott, és az első oszlopba beírtuk az $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_m$ bázisvektorokat. A táblázatnak van egy másik olvasata is. Minden oszlop a fölé írt vektor $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_m$ bázis szerinti koordinátáit tartalmazza.

Tegyük fel, hogy $a_{jk} \neq 0$, és hajtsuk végre azt az elemi bázistranszformációt, melynél az $e_j$ vektor helyébe az $\underline{a}_k$ vektor kerül. Az $a_{jk}$ elemet az elemi bázistranszformáció generáló elemének nevezzük. Számoljuk ki ebben a bázisban is a vektorok koordinátáit a korábban kapott képlet segítségével. A következő táblázatot kapjuk:

| | $\underline{a}_1$ | $\ldots$ | $\underline{a}_k$ | $\ldots$ | $\underline{a}_n$ | $\underline{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\underline{e}_1$ | $a_{11} - \frac{a_{j1}a_{1k}}{a_{jk}}$ | $\ldots$ | $0$ | $\ldots$ | $a_{1n} - \frac{a_{jn}a_{1k}}{a_{jk}}$ | $b_1 - \frac{b_j a_{1k}}{a_{jk}}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\underline{a}_k$ | $\frac{a_{j1}}{a_{jk}}$ | $\ldots$ | $1$ | $\ldots$ | $\frac{a_{jn}}{a_{jk}}$ | $\frac{b_j}{a_{jk}}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\underline{e}_m$ | $a_{m1} - \frac{a_{j1}a_{mk}}{a_{jk}}$ | $\ldots$ | $0$ | $\ldots$ | $a_{mn} - \frac{a_{jn}a_{mk}}{a_{jk}}$ | $b_m - \frac{b_j a_{mk}}{a_{jk}}$ |

Most is minden oszlopban az oszlopot jelölő vektornak az első oszlopban megadott bázis szerinti koordinátái szerepelnek. Vegyük észre, hogy a generáló elemet tartalmazó sor új értékét úgy kaptuk, hogy minden elemét megszoroztuk a generáló elem reciprokával, és e sor alkalmas skalárszorosának levonásával jutottunk az új táblázat többi sorához. Tehát az új táblázat az egyenletrendszerek Gauss-eliminációval történő megoldásánál használt elemi átalakításokkal is megkapható az első táblázatból. Ezért az új táblázat által meghatározott egyenletrendszer ekvivalens az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszerrel.

Végezzünk további elemi bázistranszformációkat úgy, hogy mindegyik alkalommal valamelyik $\underline{e}_i$-t helyettesítjük egy újabb $\underline{a}_l$-lel. Ezt mindaddig meg tudjuk csinálni, amíg az aktuális táblázatban van olyan nem nulla elem (generáló elem) melynek sora a standard bázis valamelyik elemével van jelölve. Tegyük fel, hogy ily módon az $A$ mátrix $r$ oszlopvektorát sikerült bevinni a bázisba (de többet már nem lehet). Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r$ vektorok az $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_r$ vektorok helyére kerültek, vagyis az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r, \underline{e}_{r+1}, \ldots, \underline{e}_m$ bázishoz jutottunk az $r$ elemi bázistranszformációval. A kapott táblázat a következő:

| | $\underline{a}_1$ | $\dots$ | $\underline{a}_r$ | $\underline{a}_{r+1}$ | $\dots$ | $\underline{a}_n$ | $\underline{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\underline{a}_1$ | 1 | $\dots$ | 0 | $d_{1r+1}$ | $\dots$ | $d_{1n}$ | $d_1$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\underline{a}_r$ | 0 | $\dots$ | 1 | $d_{rr+1}$ | $\dots$ | $d_{rn}$ | $d_r$ |
| $\underline{e}_{r+1}$ | 0 | $\dots$ | 0 | 0 | $\dots$ | 0 | $d_{r+1}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\underline{e}_m$ | 0 | $\dots$ | 0 | 0 | $\dots$ | 0 | $d_m$ |

E táblázat szerint az $A$ mátrix rangja (oszloprangja) $r$, mert a bázisba bekerült $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r$ vektorrendszer lineárisan független, és az $\underline{a}_{r+1}, \dots, \underline{a}_n$ vektorok lineárisan függenek az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r$ vektorrendszertől.

Végül vizsgáljuk meg a táblázathoz tartozó lineáris egyenletrendszert, mely az említett okokból ekvivalens az eredeti egyenletrendszerrel. Világos, hogy ha $d_{r+1}, \dots, d_m$ valamelyike nem nulla, akkor az egyenletrendszer ellentmondó. Ellenkező esetben az egyenletrendszer megoldása a következő:

$$\begin{aligned} x_1 &= d_1 - d_{1r+1}x_{r+1} - \dots - d_{1n}x_n \\ &\vdots \\ x_r &= d_r - d_{rr+1}x_{r+1} - \dots - d_{rn}x_n. \end{aligned}$$

Ezek az alkalmazások (beleértve a mátrix inverzének kiszámítását is) megtalálhatók például Megyesi László Lineáris algebra c. jegyzetében.

Tekintsük ismét az előbb vizsgált $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszert, megtartva a bevezetett jelöléseket. Tegyük fel, hogy van megoldása, ami a Kronecker-Capelli-tétel szerint az $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A|\underline{b}) = r$ feltétellel ekvivalens.

Az $A$ mátrix oszlopvektoraiból álló $r$ elemű lineárisan független vektorrendszereket bázisoknak nevezzük. Ha $B : \underline{a}_{i_1}, \dots, \underline{a}_{i_r}$ bázis, akkor $\underline{b}$ a bázisvektorok lineáris kombinációja. Azaz egyértelműen léteznek olyan $u_i, i \in I_B$ skalárok, hogy $\underline{b} = \sum_{i \in I_B} u_i \underline{a}_i$, ahol $I_B = \{i_1, \dots, i_r\}$ a bázisvektorok indexeinek halmaza. Legyen $\underline{u}$ azon $n$ komponensű oszlopvektor, melynek $i$-edik komponenense $u_i$, ha $i \in I_B$, egyébként pedig 0. Világos, hogy $\underline{u}$ megoldása az egyenletrendszernek. Az $\underline{u}$ megoldást a $B$ bázishoz tartozó bázismegoldásnak nevezzük. Ha $\underline{u} \geq 0$, akkor $B$-t lehetséges vagy megengedett bázisnak, $\underline{u}$-t pedig lehetséges vagy megengedett bázismegoldásnak nevezzük. A lineáris egyenletrendszer azon megoldásait, melyek minden komponense nemnegatív, lehetséges vagy megengedett megoldásoknak hívjuk. Ha valamely $i \in I_B$-re $u_i = 0$, akkor $\underline{u}$-t degenerált bázismegoldásnak, $B$-t pedig degenerált bázisnak nevezzük.

## 2. Szimplex módszer

Legyenek

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

valós mátrixok, $\underline{x}$ pedig az ismeretlenek oszlopvektora, és tekintsük az

$$(*) \qquad A\underline{x} = \underline{b},\ \underline{x} \geq \underline{0},\ \underline{c}^{\mathrm{T}}\underline{x} \to \max$$

lineáris programozási feladatot. Legyenek az $A$ mátrix oszlopvektorai $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$, $B = \{\underline{a}_{i_1}, \ldots, \underline{a}_{i_r}\}$ egy megengedett bázis, $I_B = \{i_1, \ldots, i_r\}$, és az egyszerűség kedvéért jelölje a továbbiakban $\underline{x}$ a $B$ bázishoz tartozó bázismegoldást. Az

| | $\underline{a}_1$ | $\ldots$ | $\underline{a}_n$ | $\underline{b}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\underline{a}_{i_1}$ | $d_{i_1 1}$ | $\ldots$ | $d_{i_1 n}$ | $x_{i_1}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\underline{a}_{i_r}$ | $d_{i_r 1}$ | $\ldots$ | $d_{i_r n}$ | $x_{i_r}$ |
| | $z_1 - c_1$ | $\ldots$ | $z_n - c_n$ | $f$ |

táblázatot a $(*)$ feladat $B$ bázisához tartozó szimplex táblájának nevezzük, ahol a két vízszintes vonal között és az első függőleges vonaltól jobbra elhelyezkedő oszlopvektorok rendre az $A$ mátrix oszlopvektorainak és a $\underline{b}$ vektornak a $B$ bázisbeli koordinátáiból képezett oszlopvektorok. Tehát az $\underline{x}$ vektor $i$-edik komponense $x_i$ vagy 0 aszerint, hogy $i \in I_B$ vagy $i \notin I_B$,

$$\underline{b} = \sum_{i \in I_B} \underline{a}_i x_i \quad \text{és} \quad \underline{a}_j = \sum_{i \in I_B} \underline{a}_i d_{ij},\ j = 1, \ldots, n.$$

Továbbá

$$f = \sum_{i \in I_B} c_i x_i \quad \text{és} \quad z_j = \sum_{i \in I_B} c_i d_{ij},\ j = 1, \ldots, n.$$

Vegyük észre, hogy $f$ nem más mint a célfüggvénynek a $B$ bázishoz tartozó bázismegoldáson felvett értéke, és ha $k \in I_B$, akkor $z_k - c_k = 0$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a szimplex tábla a következő három feltétel közül pontosan az egyiket teljesíti:
(a) $z_k - c_k \geq 0,\ k = 1, \ldots, n$.
(b) Van olyan $k$, hogy $z_k - c_k < 0$, és e $k$ esetén $d_{ik} \leq 0$ minden $i \in I_B$ esetén.
(c) Van olyan $k$, hogy $z_k - c_k < 0$, és minden ilyen $k$ esetén van olyan $i \in I_B$, hogy $d_{ik} > 0$.

**Tétel.** (A szimplex módszert megalapozó tétel.)

(1) Ha az (a) feltétel teljesül, akkor a $B$ bázishoz tartozó bázismegoldás a feladat optimális megoldása.

(2) A (b) esetben a célfüggvény nem korlátos felülről a lehetséges megoldások halmazán.

(3) Ha a (c) feltétel teljesül, akkor egy alkalmasan választott bázisvektort lecserélhetünk a $B$-ben nem szereplő $\underline{a}_k$ vektorra úgy, hogy olyan megengedett bázist kapjunk, melyhez tartozó bázismegoldáson felvett célfüggvény érték nagyobb vagy egyenlő, mint a $B$-hez tartozó megoldáson felvett célfüggvény érték.

**Bizonyítás.** Először tegyük fel, hogy a szimplex tábla az (a) feltételt teljesíti, és legyen $\underline{y}^{\mathrm{T}} = (y_1 \ldots, y_n)$ a lineáris programozási feladat egy lehetséges megoldása. Elég azt megmutatni, hogy

$$\underline{c}^{\mathrm{T}}\underline{y} \le \underline{c}^{\mathrm{T}}\underline{x}(= \sum_{i \in I_B} c_i x_i).$$

Ekkor a $B$ bázis függetlensége és

$$\underline{0} = \underline{b} - \underline{b} = \sum_{i \in I_B} \underline{a}_i x_i - \sum_{k=1}^{n} \underline{a}_k y_k = \sum_{i \in I_B} \underline{a}_i x_i - \sum_{k=1}^{n} (\sum_{i \in I_B} \underline{a}_i d_{ik}) y_k =$$

$$= \sum_{i \in I_B} \underline{a}_i x_i - \sum_{i \in I_B} \underline{a}_i (\sum_{k=1}^{n} d_{ik} y_k) = \sum_{i \in I_B} \underline{a}_i (x_i - \sum_{k=1}^{n} d_{ik} y_k)$$

miatt

$$x_i - \sum_{k=1}^{n} d_{ik} y_k = 0 \;\text{ és }\; x_i = \sum_{k=1}^{n} d_{ik} y_k, \; i \in I_B.$$

Ez utóbbit felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} c_k y_k \le \sum_{k=1}^{n} z_k y_k = \sum_{k=1}^{n} (\sum_{i \in I_B} c_i d_{ik}) y_k = \sum_{i \in I_B} c_i (\sum_{k=1}^{n} d_{ik} y_k) = \sum_{i \in I_B} c_i x_i.$$

Ezzel az (1) állítást igazoltuk.

Most tegyük fel, hogy teljesül a (b) feltétel a $k$ indexre, és legyen $\beta \ge 0$. Definiáljuk az $\underline{y}$ vektort a következőképpen:

$$y_i = \begin{cases} x_i - \beta d_{ik}, & \text{ha } i \in I_B, \\ \beta, & \text{ha } i = k, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases} \tag{+}$$

A feltételek miatt $\underline{y}$ minden komponense nemnegatív, $z_k - c_k < 0$ miatt $k \notin I_B$, és

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{a}_i y_i = \sum_{i \in I_B} \underline{a}_i (x_i - \beta d_{ik}) + \underline{a}_k \beta = \sum_{i \in I_B} \underline{a}_i x_i - \beta \sum_{i \in I_B} \underline{a}_i d_{ik} + \underline{a}_k \beta = \underline{b} - \underline{a}_k \beta + \underline{a}_k \beta = \underline{b}.$$

Tehát $\underline{y}$ megengedett megoldás.

Az $\underline{y}$-hoz tartozó célfüggvény érték

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i = \sum_{i \in I_B} c_i(x_i - \beta d_{ik}) + c_k\beta = \sum_{i \in I_B} c_i x_i - \beta \sum_{i \in I_B} c_i d_{ik} + c_k\beta =$$

$$= f - \beta z_k + c_k\beta = f - \beta(z_k - c_k),$$

ami a $z_k - c_k < 0$ feltétel miatt $\beta$-tól függően akármilyen nagy lehet. Ezzel a (2) állítást is igazoltuk.

Végül tegyük fel, hogy a (c) feltétel teljesül, és $z_k - c_k < 0$. Legyen

$$J = \{i | i \in I_B, d_{ik} > 0\}, \quad \beta = \min\{\frac{x_i}{d_{ik}} | i \in J\}$$

és legyen $j \in J$ olyan, hogy $\beta = \frac{x_j}{d_{jk}}$. Képezzük ezzel a $\beta$-val az $\underline{y}$ vektort az előbbi (+) módon. Világos, hogy $\underline{y}$ most is megoldása az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek. Sőt $\underline{y}$ minden komponense nemnegatív. Ezt igazolandó legyen $i \in I_B$. Ha $d_{ik} \leq 0$, akkor

$$y_i = x_i - \beta d_{ik} \geq x_i \geq 0.$$

Ha pedig $d_{ik} > 0$, azaz $i \in J$, akkor

$$y_i = x_i - \beta d_{ik} = d_{ik}(\frac{x_i}{d_{ik}} - \beta) \geq 0$$

$\beta$ választása miatt teljesül. Tehát $\underline{y}$ most is megengedett megoldás. Sőt $\underline{y}$ a

$$B' = (B \setminus \{\underline{a}_j\}) \cup \{\underline{a}_k\}$$

bázishoz tartozó megengedett bázismegoldás, mert

$$y_j = x_j - \beta d_{jk} = d_{jk}(\frac{x_j}{d_{jk}} - \beta) = d_{jk}(\beta - \beta) = 0.$$

Az $\underline{y}$-hoz tartozó célfüggvény érték most is $f - \beta(z_k - c_k)$, ami a feltételek miatt nem kisebb, mint $f$. Ezzel a (3) állítást is igazoltuk. ∎

**Megjegyzés.** A (c) esetben lényegében egy elemi bázistranszformációval jutottunk a kívánt tulajdonságú bázishoz. Az új $B'$ bázishoz tartozó szimplex táblát, úgy kaphatjuk meg a $B$-hez tartozó szimplex táblából, hogy $d_{jk}$-t generáló elemnek választva az egyenletrendszerek elemi bázistranszformációjánál megismert transzformációs képletekkel meghatározzuk az új táblát.

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
 & \underline{a}_1 & \dots & \underline{a}_k & \dots & \underline{a}_n & \underline{b} \\
\hline
\underline{a}_{i_1} & d_{i_1 1} & \dots & d_{i_1 k} & \dots & d_{i_1 n} & x_{i_1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\underline{a}_j & d_{j1} & \dots & \boxed{d_{jk}} & \dots & d_{jn} & x_j \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\underline{a}_{i_r} & d_{i_r 1} & \dots & d_{i_r k} & \dots & d_{i_r n} & x_{i_r} \\
\hline
 & z_1 - c_1 & \dots & z_k - c_k & \dots & z_n - c_n & f
\end{array}$$

Ugyanis a szimplex tábla utolsó sorát leszámítva megegyezik az egyenletrendszerhez tartozó táblával. A célfüggvény új értékét már a bizonyításban kiszámoltuk: $f' = f - \frac{x_j}{d_{jk}}(z_k - c_k)$. Az utolsó sor további helyeinek új értéke pedig

$$z'_l - c_l = \sum_{i \in I_{B'}} c_i d'_{il} - c_l = \left( \sum_{i \in I_B \setminus \{j\}} c_i (d_{il} - \frac{d_{jl} d_{ik}}{d_{jk}}) + c_k \frac{d_{jl}}{d_{jk}} \right) - c_l =$$

$$= \left( \sum_{i \in I_B} c_i (d_{il} - \frac{d_{jl} d_{ik}}{d_{jk}}) + c_k \frac{d_{jl}}{d_{jk}} \right) - c_l =$$

(hiszen a fenti sorban a szumma $j$-edik tagja 0)

$$= \left( \sum_{i \in I_B} c_i d_{il} - c_l \right) - \frac{d_{jl}}{d_{jk}} \left( \sum_{i \in I_B} c_i d_{ik} - c_k \right) = (z_l - c_l) - \frac{d_{jl}}{d_{jk}} (z_k - c_k).$$

Tehát az új szimplex tábla utolsó sorát is az egyenletrendszerek elemi bázistranszformációjánál megismert transzformációs képletek kiterjesztésével számolhatjuk ki.

**Szimplex algoritmus.** (G. B. Dantzig) Tegyük fel, hogy adott a $(*)$ feladatnak egy $B_0$ megengedett bázisa, és meghatároztuk a hozzá tartozó $T_0$ szimplex táblát. Ha a tábla az (a) vagy a (b) feltételt teljesíti, akkor vége az algoritmusnak. Az (a) esetben találtunk egy optimális megoldást, a (b) esetben pedig a célfüggvény nem korlátos a lehetséges megoldások halmazán.

Ha a tábla a (c) feltételt teljesíti, akkor legyen

$$J = \{j : z_j - c_j < 0,\ 1 \le j \le n\},\ t = \min\{z_j - c_j : j \in J\}$$

és $k \in J$ az a legkisebb (oszlop)index, melyre $z_k - c_k = t$. Legyen továbbá

$$I = \{i | i \in I_B, d_{ik} > 0\}, \quad \beta = \min\{\frac{x_i}{d_{ik}} : i \in J\}$$

és $j \in I$ az a legkisebb olyan (sor)index, melyre $\beta = \frac{x_j}{d_{jk}}$. Válasszuk $d_{jk}$-t generáló elemnek, végezzük el a hozzá tartozó elemi bázistranszformációt, és írjuk fel a kapott új $B_1$ megengedett bázishoz tartozó $T_1$ szimplex táblát. Ha az új tábla az (a) vagy a (b) feltételt teljesíti, akkor vége az algoritmusnak. Ha pedig az új táblánk a (c) feltételt teljesíti akkor az előző módon meghatározunk egy $B_2$ megengedett bázist és a hozzá tartozó $T_2$ szimplex táblát. Ezzel az eljárással kapunk egy $B_0, B_1, B_2, \ldots$ megengedett bázisokból álló sorozatot. Két eset van.

1) A sorozat véges. Ekkor az utolsó bázishoz tartozó tábla vagy optimális megoldást ad, vagy arról informál, hogy a célfüggvény nem korlátos a lehetséges megoldások halmazán.

2) A sorozat végtelen, azaz az eljárás során kapott táblákra mindig a (c) eset érvényes. Mivel a feladatnak csak véges sok megengedett bázisa van, ez csak akkor történhet meg, ha a sorozatban ismétlődések vannak (ciklizálás van). Tudjuk, hogy az eljárás során kapott célfüggvény értékek sorozata nem csökkenő. Ezért, ha $i < j$ és $B_i = B_j$, akkor

$$f_i = f_{i+1} = \cdots = f_j,$$

ahol az indexes $f$-ek a megfelelő célfüggvény értékeket jelölik. Vegyük észre, hogy az új bázishoz tartozó célfüggvény érték pontosan akkor egyezik meg az előzővel, ha a generáló elem sorában az utolsó elem 0 (a bizonyításban $x_j$). Tehát degenerált bázisról léptünk tovább. Ezért, ha a feladatnak nincs degenerált megengedett bázisa, akkor ez a második eset nem fordul elő.

Sajnos a degeneráció nagyon gyakori eset. A ciklizálás kizárására szolgál a lexikografikus szimplex módszer, amely olyan útmutatást ad a lehetséges generáló elemek közül való választásra, mely kizárja a ciklizálást.

## 3. Lexikografikus szimplex módszer

Egy $v \in \mathbf{R}^n$ vektort lexikografikusan pozitívnak nevezünk, ha $v \neq \underline{0}$ és az első nem nulla komponense pozitív. Jelölje $P$ a lexikografikusan pozitív vektorok halmazát. Világos, hogy $P$ zárt az összeadásra, a pozitív számokkal való szorzásra, és ha $v \neq \underline{0}$, akkor $v \in P$ és $-v \in P$ közül pontosan az egyik teljesül. Az mondjuk, hogy az $u$ vektor lexikografikusan megelőzi a $v$ vektort, $u, v \in \mathbf{R}^n$, ha $v - u \in P$, és ezt így jelöljük: $u \prec v$. Könnyen ellenőrizhető, hogy a $\prec$ reláció irreflexív, antiszimmetrikus, tranzitív és trichotom (azaz bármely $u, v$ vektorok esetén az $u = v$, $u \prec v$ és $v \prec u$ állítások közül pontosan az egyik teljesül).

Az előző fejezet jelöléseit megtartva tekintsük a

$$(*) \qquad A\underline{x} = \underline{b},\ \underline{x} \geq \underline{0},\ \underline{c}^{\mathrm{T}}\underline{x} \to \max$$

feladatot, és a $B$ megengedett bázisához tartozó

| | $\underline{a}_1$ | $\dots$ | $\underline{a}_n$ | $\underline{b}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\underline{a}_{i_1}$ | $d_{i_1 1}$ | $\dots$ | $d_{i_1 n}$ | $x_{i_1}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\underline{a}_{i_r}$ | $d_{i_r 1}$ | $\dots$ | $d_{i_r n}$ | $x_{i_r}$ |
| | $z_1 - c_1$ | $\dots$ | $z_n - c_n$ | $f$ |

szimplex táblát. Legyen

$$\underline{s} = (f, z_1 - c_1, \dots, z_n - c_n) \text{ és } \underline{s}_i = (x_i, d_{i1}, \dots, d_{in}), i \in I_B.$$

Azt mondjuk, hogy a fenti szimplex tábla lexikografikusan pozitív, ha $\underline{s}_i \in P$, $i \in I_B$. Például, ha $B$ nem degenerált, akkor $x_i > 0$, $i \in I_B$, és ekkor a szimlex tábla lexikografikusan pozitív. Mivel a szimplex tábla tartalmazza az $r \times r$-es egységmátrixot, az oszlopok felcserélésével (vagyis az ismeretlenek átindexelésével) lexikografikusan pozitív táblát kaphatunk.

**Tétel.** Legyen a fenti szimplex tábla lexikografikusan pozitív, teljesítse az előző fejezetben megadott (c) feltételt, és $z_k - c_k < 0$. Legyen most is

$$J = \{i | i \in I_B, d_{ik} > 0\} \text{ és } \beta = \min\{\frac{x_i}{d_{ik}} | i \in J\}.$$

Végül legyen $j \in J$ olyan, hogy

$$(**) \qquad \frac{1}{d_{jk}}\underline{s}_j \prec \frac{1}{d_{ik}}\underline{s}_i,\ i \in J \setminus \{j\}.$$

(Ilyen $j$ van, mert $\frac{1}{d_{ik}}\underline{s}_i, i \in J$ páronként különböző vektorok, hiszen $\underline{s}_i, i \in I$, lineárisan független vektorrendszer.)

Ekkor $\beta = \frac{x_j}{d_{jk}}$, és ha $d_{jk}$-t választjuk generáló elemnek, akkor olyan megengedett bázishoz jutunk, melyhez tartozó szimplex tábla is lexikografikusan pozitív, és $\underline{s} \prec \underline{s}'$, ahol $\underline{s}' = (f', z'_1 - c_1, \ldots, z'_n - c_n)$ az új tábla alsó sorából képezett megfelelő vektor.

**Bizonyítás.** Az $\frac{1}{d_{jk}}\underline{s}_j \prec \frac{1}{d_{ik}}\underline{s}_i, i \in J \setminus \{j\}$ feltétel miatt $\frac{x_j}{d_{jk}} \leq \frac{x_i}{d_{ik}}$, $i \in J$. Tehát $\beta = \frac{x_j}{d_{jk}}$. Elvégezve a $d_{jk}$ elem által indukált elemi bázistranszformációt egy $B'$ megengedett bázist kapunk. A $B'$ bázishoz tartozó szimplex tábla adatait ugyanúgy jelöljük, mint a kiindulási tábla adatait azzal a különbséggel, hogy minden jelre vessző felső indexet teszünk: $d'_{jk}, z'_k, f', \underline{s}'_i, \underline{s}'$, etc.

Először megmutatjuk, hogy az új tábla is lexikografikusan pozitív, azaz minden $i \in I'_B$ esetén $\underline{0} \prec \underline{s}'_i$. Ha $i = k$, akkor $\underline{0} \prec \underline{s}_j$ miatt $\underline{0} \prec \frac{1}{d_{jk}}\underline{s}_j = \underline{s}'_k$. Ha $i \in I'_B \setminus \{k\} = I_B \setminus \{j\}$, akkor

$$\underline{s}'_i = \underline{s}_i - \frac{d_{ik}}{d_{jk}}\underline{s}_j.$$

Ha $d_{ik} = 0$, akkor $\underline{s}'_i = \underline{s}_i$. Ha $d_{ik} < 0$, akkor $\underline{s}'_i$ két lexikografikusan pozitív vektor összege. Tehát $\underline{s}'_i$ mindkét esetben lexikografikusan pozitív. Ha pedig $d_{ik} > 0$, vagyis $i \in J$, akkor

$$\underline{s}'_i = \underline{s}_i - \frac{d_{ik}}{d_{jk}}\underline{s}_j = d_{ik}(\frac{1}{d_{ik}}\underline{s}_i - \frac{1}{d_{jk}}\underline{s}_j)$$

a $(**)$ feltétel miatt lesz lexikografikusan pozitív. Tehát az új szimplex tábla lexikografikusan pozitív.

Végül $z_k - c_k < 0$ miatt

$$\underline{s} \prec \underline{s} + (-\frac{(z_k - c_k)}{d_{jk}}\underline{s}_j) = \underline{s}',$$

mert $\underline{0} \prec -\frac{(z_k - c_k)}{d_{jk}}\underline{s}_j$. ■

**Lexikografikus szimplex algoritmus.** Olyan szimplex algoritmus, mely lexikografikusan pozitív szimplex tábláról indul, és minden lépésben a tételben megadott módon választunk generáló elemet. Előfordulhat több lehetősg a generáló elem kiválasztására, ezért a kiválasztást valamilyen módon egyértelművé kell tenni. Csak azt kell eldöntenünk, hogy melyik oszlopból válasszunk generáló elemet, mert az oszlopon belüli választás már egyértelmű.

**Következmény.** A lexikografikus szimplex algoritmus véges sok lépésben befejeződik.

**Bizonyítás.** Jelölje $\underline{s}^i$, $i \geq 0$, az algoritmus során kapott $i$-edik szimplex tábla alsó sorából képezett vektort. A tétel szerint $\underline{s}^0 \prec \underline{s}^1 \prec \underline{s}^2 \prec \cdots$, ami kizárja ciklizálást.

A szimplex algoritmus további öt változata megtalálható Bajalinov Erik és Imreh Balázs Operációkutatás c. könyvének 2.7. fejezetében. A generáló elem kiválasztásának módja különbözteti meg őket. ■

## 4. Megengedett bázis keresése. A kétfázisú módszer.

Az eddigi jelöléseinket megtartva tekintsük a

$$(*) \qquad A\underline{x} = \underline{b},\ \underline{x} \geq \underline{0},\ \underline{c}^{\mathrm{T}}\underline{x} \to \max$$

feladatot. A következőkben egy olyan algoritmust ismertetünk, mely eldönti, hogy a $(*)$ feladatnak van-e lehetséges megoldása, és ha van, akkor megad egy megengedett bázist is.

Ha valamely $i$-re $b_i < 0$, akkor az $i$-edik egyenletet helyettesítsük a $-1$-szeresével ($1 \leq i \leq m$). Ezért a továbbiakban feltesszük, hogy $\underline{b} \geq \underline{0}$. Tekintsük az

$$(**) \qquad (A\ E)\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{u}\end{pmatrix} = \underline{b},\ \underline{x} \geq 0,\ \underline{u} \geq 0,\ \underline{0}^{\mathrm{T}}\underline{x} - \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\underline{u} \to \max$$

feladatot, ahol $E$ az egységmátrix, $\underline{u}^{\mathrm{T}} = (u_1, \ldots, u_m)$ és $\mathbf{1}^{\mathrm{T}} = (1, \ldots, 1)$ az összegző vektor.

**Tétel.** A $(**)$ feladatnak van lehetséges megoldása és véges optimuma. A $(*)$ feladatnak akkor és csak akkor van lehetséges megoldása, ha a $(**)$ feladat optimuma 0. Továbbá a $(**)$ feladat bármely $\binom{\underline{x}}{\underline{u}}$ lehetséges megoldása esetén az alábbi három állítás ekvivalens:
(1) $\underline{x}$ a $(*)$ feladat lehetséges megoldása.
(2) $\underline{u} = \underline{0}$.
(3) A $(**)$ feladat optimális értéke 0, és $\binom{\underline{x}}{\underline{u}}$ optimális megoldás.

**Bizonyítás.** Világos, hogy $\binom{\underline{0}}{\underline{b}}$ lehetséges megoldása a $(**)$ feladatnak, és mivel 0 a célfüggvény felső korlátja, ezért van optimális megoldása is. A (1) és (2) állítás ekvivalenciája triviális. A célfüggvény akkor és csak akkor egyenlő valamely $\binom{\underline{x}}{\underline{u}}$ lehetséges megoldáson 0-val a felső korlátjával (ami ekkor nyilván optimális megoldás), ha $\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\underline{u} = \underline{0}$, azaz $\underline{u} = \underline{0}$, vagyis (2) és (3) is ekvivalens. Mindezekből a tétel második állítása is következik. ∎

Ezek után a következőképpen találhatjuk meg a $(*)$ feladat egy megengedett bázisát, vagy juthatunk arra az eredményre, hogy a lehetséges megoldások halmaza üres. Az $E$ mátrix $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_m$ oszlopvektorai a $(**)$ feladat megengedett bázisa, melyhez tartozó szimplex tábla

| | $\underline{a}_1$ | $\ldots$ | $\underline{a}_n$ | $\underline{e}_1$ | $\ldots$ | $\underline{e}_m$ | $\underline{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\underline{e}_1$ | $a_{11}$ | $\ldots$ | $a_{1n}$ | 1 | $\ldots$ | 0 | $b_1$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\underline{e}_m$ | $a_{m1}$ | $\ldots$ | $a_{mn}$ | 0 | $\ldots$ | 1 | $b_m$ |
| | $d_1$ | $\ldots$ | $d_n$ | 0 | $\ldots$ | 0 | $f$ |

ahol

$$d_j = -\sum_{i=1}^{m} a_{ij},\ 1 \leq j \leq n \quad \text{és} \quad f = -\sum_{i=1}^{m} b_i.$$

Erről a tábláról indulva határozzuk meg (lexikografikus) szimplex módszerrel a $(**)$ feladat egy optimális megoldását. Ha a célfüggvény optimális értéke kisebb mint 0, akkor tételünk szerint eljárásunk véget ért azzal az eredménnyel, hogy a $(*)$ feladatnak nincs lehetséges megoldása. Ellenkező esetben az optimális értéket megadó szimplex táblából a következőképpen kaphatjuk meg a $(*)$ feladat egy megengedett bázisát:

Az egyszerűség kedvéért feltehető, hogy a $(**)$ feladat optimumát adó szimplex tábla az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r, \underline{e}_{r+1}, \ldots, \underline{e}_m$ bázishoz tartozik, és az utolsó $m$ (az $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_m$ vektoroknak megfelelő) oszlopát és az utolsó sorát elhagyva (mert azokra a továbbiakban nem lesz szükségünk) a következő alakú:

$$
\begin{array}{c|cccccc|c}
 & \underline{a}_1 & \ldots & \underline{a}_r & \underline{a}_{r+1} & \ldots & \underline{a}_n & \underline{b} \\
\hline
\underline{a}_1 & 1 & \ldots & 0 & d_{1r+1} & \ldots & a_{1n} & t_1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\underline{a}_r & 0 & \ldots & 1 & d_{rr+1} & \ldots & d_{rn} & t_r \\
\underline{e}_{r+1} & 0 & \ldots & 0 & d_{r+1r+1} & \ldots & d_{r+1n} & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\underline{e}_m & 0 & \ldots & 0 & d_{mr+1} & \ldots & d_{mn} & 0 \\
\hline
 & & & & & & &
\end{array}
$$

Csupán a táblázatban feltüntetett adatokból is kiolvasható a tétel (2) $\Leftrightarrow$ (3) állítását alkalmazva, hogy az általa meghatározott bázismegoldáson a célfüggvény értéke 0, mert az utolsó oszlopba írt 0-k miatt $\underline{u} = \underline{0}$.

Ha $r = m$ (azaz a bázisvektorok az $A$ mátrix oszlopvektorai), akkor a bázis a $(*)$ feladatnak is megengedett bázisa. Ha szerepel a bázisban olyan $e_i$, melynek sorában minden elem 0, akkor töröljük a sorát a táblázatból, hiszen ekkor $e_i$-től lineárisan nem függenek sem az $A$ mátrix oszlpvektorai, sem pedig a $\underline{b}$ vektor. Ha a törlés után maradt olyan sor, amelyik valamelyik $e_l$ vektorhoz tartozik, akkor valamely $k$-ra $d_{lk} \neq 0$. Egy ilyen $d_{lk}$-t generáló elemnek választva, és elvégezve az általa meghatározott elemi bázistranszformációt egy olyan táblázathoz jutunk, melyhez tartozó bázis eggyel több oszlopvektorát tartalmazza az $A$ mátrixnak. Mivel a generáló elem sorában az utolsó elem 0 volt, a kapott táblázat utolsó oszlopát az elemi bázistranszformáció nem változtatta meg. A most említett két lehetőséggel (bizonyos sorok törlésével és megfelelően választott elemi bázistranszformáció alkalmazásával) elérhetjük, hogy a bázisban csak az $A$ mátrix oszlopvektorai szerepeljenek, és akkor a bázis a $(*)$ feladat megengedett bázisa lesz.

Az eddig vázolt eljárást, ami a $(*)$ feladat egy megengedett bázisának megtalálását eredményezi, vagy arról tanúskodik, hogy a lehetséges megoldások halmaza üres, a megoldás első fázisának nevezzük. A második fázisban képezzük a kapott bázishoz tartozó szimplex táblát, és abból indulva a szimplex módszerrel jutunk a $(*)$ feladat megoldásához.

A megengedett bázis keresésére vonatkozó fenti megfontolásokban bebizonyítottuk a következőt is:

**1. Következmény.** Ha a $(*)$ feladatnak van lehetséges megoldása, akkor van megengedett bázisa is.

**2. Következmény.** Ha a lineáris programozási feladatnak van optimális megoldása, akkor van olyan megengedett bázisa, melyhez tartozó szimplex táblára az (a) feltétel teljesül, és ezért a bázishoz tartozó megoldás optimális.

**Bizonyítás.** Tudjuk, hogy ha a lineáris programozási feladatnak van lehetséges megoldása, akkor van megengedett bázisa is, amihez tartozó szimplex táblát oszlopai átrendezésével lexikografikusan pozitívvá tehetjük. Ezen táblázatról indulva a lexikografikus szimplex algoritmus eredményeként a kívánt tulajdonságú bázis kapható. ■

## 5. Minimum keresés szimplex módszerrel

Az előző fejezetekben szereplő megfontolások olyan feladatokra vonatkoztak, melyekben a célfüggvény maximumát kerestük. Most röviden ismertetjük, hogy mi a teendő akkor, ha a célfüggvény minimumának meghatározása a cél, vagyis a következő feladatot kell megoldani:

$$(+). \qquad A\underline{x} = \underline{b},\ \underline{x} \geq \underline{0},\ \underline{c}^{\mathrm{T}}\underline{x} \to \min$$

Két lehetőséget ismertetünk. Az első visszavezeti a problémát a már részletesen tárgyalt maximum keresésre, azaz megoldjuk a

$$(++) \qquad A\underline{x} = \underline{b},\ \underline{x} \geq \underline{0},\ -\underline{c}^{\mathrm{T}}\underline{x} \to \max$$

feladatot. Világos, hogy pontosan akkor van megoldása a (+) feladatnak, mint a (++) feladatnak. Továbbá, ha van optimumuk, akkor az optimum helyek ugyanazok, és a (+) feladat optimuma a (++) feladat optimumának $-1$-szerese.

Most ismertetjük a második lehetőséget, amely lényegében a maximum keresésre vonatkozó megfontolások minimum keresésre való igazítása. A korábban megismert módon keresünk egy megengedett bázist, és elkészítjük a (+) feladat adataihoz tartozó szimplex táblát. Most az alábbi három esetbe sorolható a táblázat.

(a') $z_k - c_k \leq 0,\ k = 1, \ldots, n.$
(b') Van olyan $k$, hogy $z_k - c_k > 0$, és e $k$ esetén $d_{ik} \leq 0$ minden $i \in I_B$ esetén.
(c') Van olyan $k$, hogy $z_k - c_k > 0$, és minden ilyen $k$ esetén van olyan $i \in I_B$, hogy $d_{ik} > 0$.

**Tétel.** (A (+) feladathoz tartozó szimplex módszert megalapozó tétel.)
(1) Ha az (a') feltétel teljesül, akkor a $B$ bázishoz tartozó bázismegoldás a feladat optimális megoldása.
(2) A (b') esetben a célfüggvény nem korlátos alulról a lehetséges megoldások halmazán.
(3) Ha a (c') feltétel teljesül, akkor egy alkalmasan választott bázisvektort lecserélhetünk a $B$-ben nem szereplő $\underline{a}_k$ vektorra úgy, hogy olyan megengedett bázist kapjunk, melyhez tartozó bázismegoldáson felvett célfüggvény érték kisebb vagy egyenlő, mint a $B$-hez tartozó megoldáson felvett célfüggvény érték.

A bizonyításához csak a maximum keresésre vonatkozó változatának bizonyítását kell értelem szerint módosítani. A bizonyításban az új szimplex táblát meghatározó generáló elem pozitív $z_k - c_k$ fölött lesz. Ezek után az olvasóra bízzuk azt, hogy milyen módosításokat kell tenni a minimum keresésre vonatkozó algoritmusok meghatározásához.

## 6. Dualitás

Tekintsük a következő két egymással ekvivalens feladatot, az ún. primál feladatot:

$$A\underline{x} \le \underline{b},\ \underline{x} \ge \underline{0},\ \underline{c}^{\mathrm{T}}\underline{x} \to \max, \quad -A\underline{x} \ge -\underline{b},\ \underline{x} \ge \underline{0},\ -\underline{c}^{\mathrm{T}}\underline{x} \to \min,$$

és rendeljük hozzá a következő két egymással ekvivalens feladatot, a duálisát:

$$A^{\mathrm{T}}\underline{y} \ge \underline{c},\ \underline{y} \ge \underline{0},\ \underline{b}^{\mathrm{T}}\underline{y} \to \min, \quad -A^{\mathrm{T}}\underline{y} \le -\underline{c},\ \underline{y} \ge \underline{0},\ -\underline{b}^{\mathrm{T}}\underline{y} \to \max.$$

Tehát a primál feladatot és a duálisát is két feladatnak tekintjük. Világos, hogy a duális feladat duálisa éppen a primál feladat.

**Tétel.** (Dualitás tétele.) Ha a primál és a duál feladat közül valamelyiknek van megengedett megoldása és véges optimuma, akkor a másiknak is van megengedett megoldása és véges optimuma, továbbá két feladat optimum-értékei egyenlők.

**Bizonyítás.** Nyilván elegendő bebizonyítani, hogy ha a

$$A\underline{x} \le \underline{b},\ \underline{x} \ge \underline{0},\ \underline{c}^{\mathrm{T}}\underline{x} \to \max$$

feladatnak van megengedett megoldása és véges optimuma, akkor a

$$A^{\mathrm{T}}\underline{y} \ge \underline{c},\ \underline{y} \ge \underline{0},\ \underline{b}^{\mathrm{T}}\underline{y} \to \min$$

feladatnak is van, és a két optimum megegyezik. Tekintsük a primál feladattal ekvivalens

$$(A\ E)\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{u}\end{pmatrix} = \underline{b},\ \underline{x} \ge 0,\ \underline{u} \ge 0,\ \underline{c}^{\mathrm{T}}\underline{x} + \underline{0}^{\mathrm{T}}\underline{u} \to \max$$

feladatot, ahol $E$ az egységmátrix. A feltevések miatt ennek a feladatnak is van megengedett megoldása és véges optimuma. Ezért van olyan $B$ megengedett bázisa, melyhez tartozó szimplex táblára az (a) feltétel teljesül, és így a bázismegoldás optimális.

Jelölje $B$ azt a mátrixot is, melynek oszlopvektorai a $B$ bázis vektorai abban a sorrendben, ahogy a szimplex táblában szerepelnek. Nyilván $B$ egy $m \times m$-es nemelfajuló mátrix, melynek oszlopai az $(A\ E)$ mátrix oszlopai, azaz a

$$\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n, \underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_m$$

vektorok közül valók.

Legyen $v \in \{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n, \underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_m, \underline{b}\}$, és jelölje $\underline{d}$ a $v$ vektor $B$ bázis szerinti koordinátáiból képezett oszlopvektort. Tudjuk, hogy $\underline{d}$ egyben a szimplex tábla $v$-vel jelzett oszlopának a két vízszintes vonal közötti része. Ekkor $v = B\underline{d}$, amiből $\underline{d} = B^{-1}v$ következik. Speciálisan

$$B^{-1}\underline{a}_k, \quad B^{-1}\underline{e}_k, \quad \text{illetve} \quad B^{-1}\underline{b}$$

a szimplex tábla $\underline{a}_k$-val, $\underline{e}_k$-val illetve $\underline{b}$-vel jelölt oszlopának a két vízszintes vonal közötti része.

Jelölje $\underline{c}_B$ a bázisvektorokhoz tartozó célfüggvény együtthatókból képezett oszlopvektort. Vegyük észre, hogy $\underline{c}_B$ tetszőleges komponense $c_i$ vagy 0 aszerint, hogy a megfelelő bázisvektor $\underline{a}_i$ vagy valamelyik $\underline{e}_l$. A szimplex tábla alsó sorában az $\underline{a}_k$ vektor oszlopában

$$\underline{c}_B^{\mathrm{T}} B^{-1}\underline{a}_k - c_k, \; k = 1, \ldots, n,$$

az $e_k$ vektor oszlopában pedig

$$\underline{c}_B^{\mathrm{T}} B^{-1}\underline{e}_k - 0 = \underline{c}_B^{\mathrm{T}} B^{-1}\underline{e}_k, \; k = 1, \ldots, m$$

szerepel. A célfüggvény értéke $\underline{c}_B^{\mathrm{T}} B^{-1}\underline{b}$. Tehát a szimplex tábla a következő alakú:

| | | | $\underline{b}$ |
|---|---|---|---|
| | $B^{-1}A$ | $B^{-1}$ | $B^{-1}\underline{b}$ |
| | $\underline{c}_B^{\mathrm{T}} B^{-1}A - \underline{c}^{\mathrm{T}}$ | $\underline{c}_B^{\mathrm{T}} B^{-1}$ | $\underline{c}_B^{\mathrm{T}} B^{-1}\underline{b}$ |

A táblára az (a) feltétel teljesül, és ezért

$$\underline{c}_B^{\mathrm{T}} B^{-1}A \geq \underline{c}^{\mathrm{T}} \quad \text{és} \quad \underline{c}_B^{\mathrm{T}} B^{-1} \geq \underline{0}^{\mathrm{T}}.$$

Legyen $\underline{\tilde{y}}^{\mathrm{T}} = \underline{c}_B^{\mathrm{T}} B^{-1}$. Ekkor $\underline{\tilde{y}}$ megengedett megoldása a duális feladatnak, mert a fenti két egyenlőtlenség szerint

$$\underline{\tilde{y}}^{\mathrm{T}} A \geq \underline{c}^{\mathrm{T}} \quad \text{és} \quad \underline{\tilde{y}}^{\mathrm{T}} \geq \underline{0}^{\mathrm{T}},$$

azaz

$$A^{\mathrm{T}}\underline{\tilde{y}} \geq \underline{c} \quad \text{és} \quad \underline{\tilde{y}} \geq \underline{0}.$$

Legyen most $\underline{x}$ a primál $\underline{y}$ pedig a duál feladat megengedett megoldása. Az

$$A\underline{x} \leq \underline{b}, \; \underline{x} \geq \underline{0} \quad \text{és} \quad A^{\mathrm{T}}\underline{y} \geq \underline{c}, \; \underline{y} \geq \underline{0}$$

feltételekből kapjuk a következő két számok közötti egyenlőtlenséget:

$$\underline{y}^{\mathrm{T}} A\underline{x} \leq \underline{y}^{\mathrm{T}}\underline{b} \quad \text{és} \quad \underline{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}\underline{y} \geq \underline{x}^{\mathrm{T}}\underline{c}.$$

A két egyenlőtlenség bal oldala egyenlő, mert mint $1 \times 1$-es mátrixok, egyik a másik transzponáltja. Ezért ebből

$$\underline{x}^{\mathrm{T}}\underline{c} \leq \underline{y}^{\mathrm{T}}\underline{b}, \text{ azaz } \underline{c}^{\mathrm{T}}\underline{x} \leq \underline{b}^{\mathrm{T}}\underline{y}$$

következik, vagyis a primál feladat tetszőleges megengedett megoldásán a célfüggvény értéke kisebb vagy egyenlő, mint a duál feladat tetszőleges megengedett megoldásán a célfüggvény értéke. Ezt az állítást *gyenge dualitási tétel*nek is szokták nevezni.

Tehát, ha találunk olyan $\underline{x}$ és $\underline{y}$ megengedett megoldásokat a primál, illetve a duál feladathoz, hogy $\underline{c}^{\mathrm{T}}\underline{x} = \underline{b}^{\mathrm{T}}\underline{y}$, akkor a tétel bizonyítása készen lesz. Az említett célnak megfelel a primál feladat $B$ bázishoz tartozó $\underline{\tilde{x}}$ megengedett megoldása és a duál feladat $\underline{\tilde{y}}^{\mathrm{T}}$ megengedett megoldása. Valóban

$$\underline{c}^{\mathrm{T}}\underline{\tilde{x}} = \underline{c}_B^{\mathrm{T}}B^{-1}\underline{b} = \underline{\tilde{y}}^{\mathrm{T}}\underline{b} = \underline{b}^{\mathrm{T}}\underline{\tilde{y}}.$$

■

Fontossága miatt a gyenge dualitás tételét kiemelt állításként is megfogalmazzuk.

**Tétel.** (A gyenge dualitás tétele.) A primál feladat tetszőleges megengedett megoldásán a célfüggvény értéke kisebb vagy egyenlő, mint a duál feladat tetszőleges megengedett megoldásán a célfüggvény értéke.

**1. Következmény.** Ha a primál és duál feladatnak is van lehetséges megoldása, akkor mindkettőnek van optimuma és a két optimumérték megegyezik.

**Bizonyítás.** Ha mindkét feladatnak van lehetséges megoldása, akkor a gyenge duálitási tétel szerint a primál feladat célfüggvénye felülről korlátos a lehetséges megoldások halmazán, és ezért felveszi optimumát. (Többváltozós függvénytani tanulmányaink egyik tétele szerint zárt halmazon folytonos és felülről korlátos függvény felveszi maximumát.) Ezek után az állítás a dualitási tételből következik. ■

**2. Következmény.** Ha $\underline{x}$ a primál $\underline{y}$ pedig a duál feladat lehetséges megoldása, akkor ahhoz, hogy mindkettő optimális megoldás legyen szükséges és elegendő, hogy a két célfüggvény érték megegyezzen, azaz $\underline{c}^{\mathrm{T}}\underline{x} = \underline{b}^{\mathrm{T}}\underline{y}$.

**Bizonyítás.** Ha a két célfüggvény érték megegyezik, akkor a dualitási tétel bizonyításában elmondottak szerint (a gyenge duálitási tétel miatt) mindkét célfüggvény érték optimális. A szükségesség a dualitási tétel következménye. ■

**Tétel.** (A kiegészítő eltérések gyenge tétele.) Ha $\underline{x}$ a primál $\underline{y}$ pedig a duál feladat lehetséges megoldása, akkor ahhoz, hogy mindkettő optimális megoldás legyen szükséges és elegendő, hogy a következő két egyenlőség teljesüljön:

$$\underline{y}^{\mathrm{T}}(\underline{b} - A\underline{x}) = 0 \ \text{ és } \ \underline{x}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}\underline{y} - \underline{c}) = 0.$$

**Bizonyítás.** Vegyük észre, hogy $\underline{y}^{\mathrm{T}}A\underline{x} = (\underline{y}^{\mathrm{T}}A\underline{x})^{\mathrm{T}} = \underline{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\underline{y}$. Ezért, ha

$$\underline{y}^{\mathrm{T}}(\underline{b} - A\underline{x}) = 0 \ \text{ és } \ \underline{x}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}\underline{y} - \underline{c}) = 0,$$

akkor

$$0 = 0 + 0 = \underline{y}^{\mathrm{T}}(\underline{b} - A\underline{x}) + \underline{x}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}\underline{y} - \underline{c}) = \underline{y}^{\mathrm{T}}\underline{b} - \underline{y}^{\mathrm{T}}A\underline{x} + \underline{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\underline{y} - \underline{x}^{\mathrm{T}}\underline{c} = \underline{y}^{\mathrm{T}}\underline{b} - \underline{x}^{\mathrm{T}}\underline{c}$$

Tehát $\underline{x}^{\mathrm{T}}\underline{c} = \underline{y}^{\mathrm{T}}\underline{b}$, amiből transzponálással $\underline{c}^{\mathrm{T}}\underline{x} = \underline{b}^{\mathrm{T}}\underline{y}$ következik. Ezért a 2. Következmény szerint $\underline{x}$ a primál $\underline{y}$ pedig a duál feladat optimális megoldása. Ezzel az elegendőséget bebizonyítottuk.

A szükségesség bizonyításához tegyük fel, hogy $\underline{x}$ a primál $\underline{y}$ pedig a duál feladat optimális megoldása. Ekkor ismét a 2. Következmény szerint $\underline{c}^{\mathrm{T}}\underline{x} = \underline{b}^{\mathrm{T}}\underline{y}$, amiből transzponálással $\underline{x}^{\mathrm{T}}\underline{c} = \underline{y}^{\mathrm{T}}\underline{b}$ és

$$\underline{y}^{\mathrm{T}}(\underline{b} - A\underline{x}) + \underline{x}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}\underline{y} - \underline{c}) = \underline{y}^{\mathrm{T}}\underline{b} - \underline{y}^{\mathrm{T}}A\underline{x} + \underline{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\underline{y} - \underline{x}^{\mathrm{T}}\underline{c} = \underline{y}^{\mathrm{T}}\underline{b} - \underline{x}^{\mathrm{T}}\underline{c} = 0$$

következik. Mivel $\underline{x}, \underline{y}, \underline{b} - A\underline{x}, A^{\mathrm{T}}\underline{y} - \underline{c} \geq 0$, ezért

$$\underline{y}^{\mathrm{T}}(\underline{b} - A\underline{x}) \geq 0 \ \text{ és } \ \underline{x}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}\underline{y} - \underline{c}) \geq 0,$$

hiszen nemnegatív komponensű sor- és oszlokvektorok szorzata nemnegatív szám (pontosabban $1 \times 1$-es mátrix). Ha két nemnegatív szám összege nulla, akkor mindkét szám nulla. Ezért

$$\underline{y}^{\mathrm{T}}(\underline{b} - A\underline{x}) = 0 \ \text{ és } \ \underline{x}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}\underline{y} - \underline{c}) = 0.$$

■

**Tétel.** (A kiegészítő eltérések erős tétele.) Ha a primál és duál feladatnak is van lehetséges megoldása, akkor van a primál feladatnak olyan $\underline{x}$ optimális megoldása, illetve a duál feledatnak olyan $\underline{y}$ optimális megoldása, melyekre teljesül a következő két egyenlőség:

$$\underline{b} - A\underline{x} + \underline{y} > 0 \;\text{ és }\; A^{\mathrm{T}}\underline{y} - \underline{c} + \underline{x} > 0.$$

Végül részletesebben megvizsgáljuk, hogy mit is jelent a kiegészítő eltérések gyenge és erős tételelének feltétele. Közben magyarázatot kapunk a tételek elnevezésére is.

Legyen $\underline{x}$ a primál $\underline{y}$ pedig a duál feladat optimális megoldása, $\underline{u} = (u_1, \ldots, u_m)^{\mathrm{T}} = \underline{b} - A\underline{x}$, $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}\underline{y} - \underline{c}$, $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ és $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_m)^{\mathrm{T}}$. Ekkor nyilván $A\underline{x} + \underline{u} = \underline{b}$ és $A^{\mathrm{T}}\underline{y} - \underline{v} = \underline{c}$. Tehát $\underline{u}$ és $\underline{v}$ a megfelelő egyenlőtlenségek két oldala közötti eltérésekkel egyezik meg. Ennek megfelelően az $\underline{u}$ vektort a primál feladat $\underline{x}$ lehetséges megoldásához, a $\underline{v}$ vektort pedig a duál feladat $\underline{y}$ lehetséges megoldásához tartozó eltérésnek nevezzük. Most felírjuk az új jelölésekkel a kiegészítő eltérések gyenge tételének feltételeit:

$$0 = \underline{y}^{\mathrm{T}}(\underline{b} - A\underline{x}) = \underline{y}^{\mathrm{T}}\underline{u} = \sum_{i=1}^{m} y_i u_i \;\text{ és }\; 0 = \underline{x}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}\underline{y} - \underline{c}) = \underline{x}^{\mathrm{T}}\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i.$$

Mindkét összeg tagjai nemnegatívok, ezért pontosan akkor egyenlők nullával, ha minden tagjuk nulla. Tehát a kiegészítő eltérések gyenge tételének feltétele ekvivalens a következőkkel:

$$y_i u_i = 0,\; i = 1, \ldots, m \;\text{ és }\; x_i v_i = 0,\; i = 1, \ldots, n.$$

Vagyis, ha $u_i > 0$, akkor $y_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$, és ha $v_i > 0$, akkor $x_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Most tegyük fel, hogy $\underline{x}$ és $\underline{y}$ a kiegészítő eltérések erős tétele feltételeivel rendelkező optimális megoldások, és írjuk fel a feltételeket:

$$\underline{b} - A\underline{x} + \underline{y} = \underline{u} + \underline{y} > 0 \;\text{ és }\; A^{\mathrm{T}}\underline{y} - \underline{c} + \underline{x} = \underline{v} + \underline{x} > 0,$$

azaz

$$u_i + y_i > 0,\; i = 1, \ldots, m \;\text{ és }\; v_i + x_i > 0,\; i = 1, \ldots, n.$$

Vagyis, ha a $u_i = 0$, akkor $y_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$, és ha $v_i = 0$, akkor $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Természetesen a kiegészítő eltérések gyenge tételének feltételei most is teljesülnek.

## 7. Dualitási tétel általánosítása, Farkas-tétel

A primál-duál feladatnak van egy általánosabb változata. Legyenek $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ megfelelő méretű mátrixok, $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{c}_1, \underline{c}_2$ megfelelő méretű vektorok, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{y}_1, \underline{y}_2$ pedig megfelelő méretű ismeretlen vektorok, és tekintsük a következő két lineáris programozási feladatot:

$$A_{11}\underline{x}_1 + A_{12}\underline{x}_2 \le \underline{b}_1,\ A_{21}\underline{x}_1 + A_{22}\underline{x}_2 = \underline{b}_2,\ \underline{x}_1 \ge \underline{0},\ \underline{c}_1^{\mathrm{T}}\underline{x}_1 + \underline{c}_2^{\mathrm{T}}\underline{x}_2 \to \max$$

és

$$A_{11}^{\mathrm{T}}\underline{y}_1 + A_{21}^{\mathrm{T}}\underline{y}_2 \ge \underline{c}_1,\ A_{12}^{\mathrm{T}}\underline{y}_1 + A_{22}^{\mathrm{T}}\underline{y}_2 = \underline{c}_2,\ \underline{y}_1 \ge \underline{0},\ \underline{b}_1^{\mathrm{T}}\underline{y}_1 + \underline{b}_2^{\mathrm{T}}\underline{y}_2 \to \min.$$

Az elsőt általános primál a másodikat pedig általános duál feladatnak nevezzük. Mindkét feladatot meg kell kétszerezni a primál és duál feladatnál látottak szellemében. Ezt az olvasóra bízzuk. Vegyük észre, hogy most egyes ismeretlenekre nincs nemnegativitási feltétel. Megengedjük, hogy a fenti mátrixok sorainak vagy oszlopainak száma akár nulla legyen. Például, ha az $A_{22}$ mátrix üres (azaz nulla sora és oszlopa van), akkor $A_{12}, A_{21}, \underline{b}_2, \underline{c}_2, \underline{x}_2, \underline{y}_2$ is üres, és a fenti két feladat a korábban definiált primál-duál feladatra redukálódik.

**Tétel.** (Általános dualítási tétel.) Ha az általános primál-duál feladat közül valamelyiknek van lehetséges megoldása és véges optimuma, akkor a másiknak is van lehetséges megoldása és véges optimuma, továbbá a két feladat optimum-értékei egyenlők.

**Bizonyítás.** Írjuk fel az $\underline{x}_2$ és $\underline{y}_2$ vektorokat nemnegatív vektorok különbségeként:

$$\underline{x}_2 = \underline{x}_2^+ - \underline{x}_2^- \text{ és } \underline{y}_2 = \underline{y}_2^+ - \underline{y}_2^-,$$

és tekintsük a következő primál-duál feladatpárt:

$$\begin{gathered}
A_{11}\underline{x}_1 + A_{12}\underline{x}_2^+ - A_{12}\underline{x}_2^- \le \underline{b}_1,\\
A_{21}\underline{x}_1 + A_{22}\underline{x}_2^+ - A_{22}\underline{x}_2^- \le \underline{b}_2,\\
-A_{21}\underline{x}_1 - A_{22}\underline{x}_2^+ + A_{22}\underline{x}_2^- \le -\underline{b}_2,\\
\underline{x}_1, \underline{x}_2^+, \underline{x}_2^- \ge \underline{0},\\
\underline{c}_1^{\mathrm{T}}\underline{x}_1 + \underline{c}_2^{\mathrm{T}}\underline{x}_2^+ - \underline{c}_2^{\mathrm{T}}\underline{x}_2^- \to \max,
\end{gathered}$$

és

$$\begin{gathered}
A_{11}^{\mathrm{T}}\underline{y}_1 + A_{21}^{\mathrm{T}}\underline{y}_2^+ - A_{21}^{\mathrm{T}}\underline{y}_2^- \ge \underline{c}_1,\\
A_{12}^{\mathrm{T}}\underline{y}_1 + A_{22}^{\mathrm{T}}\underline{y}_2^+ - A_{22}^{\mathrm{T}}\underline{y}_2^- \ge \underline{c}_2,\\
-A_{12}^{\mathrm{T}}\underline{y}_1 - A_{22}^{\mathrm{T}}\underline{y}_2^+ + A_{22}^{\mathrm{T}}\underline{y}_2^- \ge -\underline{c}_2,\\
\underline{y}_1, \underline{y}_2^+, \underline{y}_2^- \ge \underline{0},\\
\underline{b}_1^{\mathrm{T}}\underline{y}_1 + \underline{b}_2^{\mathrm{T}}\underline{y}_2^+ - \underline{b}_2^{\mathrm{T}}\underline{y}_2^- \to \min.
\end{gathered}$$

Világos, hogy ez a feladatpár ekvivalens az általános primál-duál feladatpárral. Így, ha alkalmazzuk a dualítási tételt erre a primál-duál feladatpárra, akkor a tétel állítását kapjuk.

■

Most felhasználjuk e tételt a ún. Farkas-tétel bizonyítására. Legyen $A$ egy $m \times n$-es mátrix és $\underline{c}$ egy $n$ komponensű vektor. Azt mondjuk, hogy a $\underline{c}^{\mathrm{T}}\underline{x} \le 0$ egyenlőtlenség az $A\underline{x} \le \underline{0}$ vektorok közötti egyenlőtlenség (vagy $m$ egyenlőtlenségből álló rendszer) következménye, ha valahányszor egy $n$ kompononensű $\underline{u}$ vektorra $A\underline{u} \le 0$, mindannyiszor $\underline{c}^{\mathrm{T}}\underline{u} \le 0$.

**Tétel.** (Farkas-tétel.) A $\underline{c}^{\mathrm{T}}\underline{x} \le 0$ egyenlőtlenség akkor és csak akkor következménye az $A\underline{x} \le \underline{0}$ vektorok közötti egyenlőtlenségnek, ha van olyan $\underline{y} \ge \underline{0}$ $m$ komponensű vektor, hogy $\underline{c} = A^{\mathrm{T}}\underline{y}$.

**Bizonyítás.** Az elegendőség triviális, hiszen azt állítja, hogy azok az egyenlőtlenségek következmények, melyek a kiindulási egyenlőtlenségekből nemnegatív együtthatós lineáris kombinációval adódnak. A szükségesség bizonyításához tegyük fel, hogy a $\underline{c}^{\mathrm{T}}\underline{x} \le 0$ egyenlőtlenség következménye az $A\underline{x} \le \underline{0}$ egyenlőtlenségnek, és tekintsük a következő két lineáris programozási feladatot:

$$A\underline{x} \le \underline{0},\ \ \underline{c}^{\mathrm{T}}\underline{x} \to \max$$

és

$$A^{\mathrm{T}}\underline{y} = \underline{c},\ \ \underline{y} \ge \underline{0},\ \ \underline{0}^{\mathrm{T}}\underline{y} \to \min.$$

Világos, hogy az első feladatnak van lehetséges megoldása és véges optimuma, hiszen a feltevés szerint a 0 felső korlátja a célfüggvénynek a lehetséges megoldások halmazán. Ráadásul a két feladat általános primál-duál feladatpárt alkot, hiszen ha az $A_{11}, A_{21}$ és a $A_{22}$ mátrixok nulla méretűek, akkor az általános primál-duál feladatpár éppen ilyen alakú. Tehát az állításnak eleget tevő $\underline{y}$ vektor az általános dualitási tétel szerint létezik. ∎