1. Bevezetés

A lineáris algebrában vizsgált objektumok (mátrixok, determinánsok, egyenletrendszerek, vektorok, stb.) tárgyalása során mindig előre meg kell adni az ún. skalárok halmazát. A jegyzetben a skalárok mindig számok, melyek halmaza zárt a négy alapműveletre. Egy diák, aki felsőfokú matematikai kurzusokat még nem hallgatott, számon általában valós számot ért, hiszen a középiskolai kötelező tananyagban nem szerepelnek a komplex számok. Ennek ellenére a jegyzetben számon mindig komplex számot értünk. Mivel a hallgatók a lineáris algebrával párhuzamosan hallgatott tárgyakban megismerkednek a komplex számokkal, ezért a komplex számok ismertetésével nem foglalkozunk. Amíg az olvasó nem ismeri a komplex számokat, addig a megfontolásokban szorítkozhat a valós számok halmazára, s amint szert tesz a komplex számok ismeretére, könnyen ellenőrizheti, hogy minden addigi megfontolás érvényes marad komplex számokra is. A jegyzetben a pozitív egész számok, a természetes számok, a racionális számok, a valós számok és a komplex számok halmazát rendre $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}_0$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ és $\mathbf{C}$ jelöli.

1.1. Definíció. *Számtest*eknek nevezzük a komplex számok halmazának olyan legalább kételemű részhalmazait, melyek zártak a négy alapműveletre, azaz tartalmazzák bármely két elemük összegét, különbségét, szorzatát és hányadosát (amennyiben az osztó nem 0). A számtestek elemeit *skalárok*nak is hívjuk.

Minden számtest tartalmaz 0-tól különböző elemet, amit önmagával elosztva 1-et kapunk, és 1-ből a négy alapművelet segítségével minden racionális szám megkapható. Tehát minden számtest tartalmazza a racionális számok $\mathbf{Q}$ halmazát. Számtestek például a következő halmazok: $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$, $\{a+b\sqrt{2}\colon\ a,b\in\mathbf{Q}\}$.

A lineáris algebra tárgyalása során sokszor fordulnak elő több tagú összegek, melyeket a $\sum$ (szumma) jel használatával lényegesen könnyebben tudunk kezelni. Például az

$$a_1+\ldots+a_n$$

összegre a

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

jelölést vezetjük be; itt i az *összegzési index*, 1 és n pedig az *összegzési határok*. A $\sum$ jel legáltalánosabb használata a

$$\sum_{\text{feltétel}} \text{tag}$$

formában történik. Ez azt jelenti, hogy képezni kell mindazon tagok összegét, melyek eleget tesznek a $\sum$ jel alá írt feltételnek. A tagokat természetesen egy előre rögzített halmazból vesszük. Például

$$\sum_{1<i<n} a_i = a_2 + \ldots + a_{n-1}.$$

Gyakran kell olyan tagokat összeadni, melyek maguk is összegzéssel keletkeznek további tagokból. Például

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right), \quad \text{amit általában} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

alakban írunk, az

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix}$$

táblázatban szereplő számok összege oly módon, hogy előbb soronként összgezünk, majd ezeket a részösszegeket összeadjuk. Természetesen ugyanerre az eredményre jutunk, ha előbb oszloponként összegzünk, vagyis

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right).$$

Ha $m = n$, akkor

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad \text{helyett a} \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}$$

jelölést is használjuk. A $\sum$ jel használata során előfordulhat, hogy az összegnek nulla tagja van. Például, ha a felső határ kisebb, mint az alsó határ, vagy a $\sum$ jel alá írt feltételt egyetlen szóba jöhető tag sem elégíti ki. Ilyenkor az összeg definíció szerint 0.

A $\prod$ (produktum) jel használata analóg a $\sum$ jeléhez, csak tagok helyett mindig tényezőket kell érteni, és ezeket összeszorozzuk. Például

$$\prod_{1\le i<j\le n} (a_j - a_i) =$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)\ldots(a_n - a_1)(a_n - a_2)\ldots(a_n - a_{n-1}).$$

A nulla tényezős szorzat definíció szerint 1.

2. Mátrixok

2.1. Definíció. Legyen T számtest és m, n pozitív egészek. A T számtest feletti $m \times n$-es *mátrix*on egy olyan téglalap alakú táblázatot értünk, melynek m sora és n oszlopa van, és elemei T-ből valók. A mátrixokat általában nagy latin betűkkel jelöljük, és részletesen úgy adjuk meg, hogy a táblázatot kerek zárójelek közé tesszük. Ha egy $m \times n$-es A mátrix i-edik sorának j-edik eleme a_{ij}, akkor a mátrix alakja

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Gyakran használjuk a tömörebb $A = (a_{ij})_{m\times n}$ jelölést. Ha nem okoz félreértést, akkor az $m \times n$ indexet elhagyjuk. Az $1 \times n$-es mátrixokat *sorvektorok*nak, az $m \times 1$-es mátrixokat pedig *oszlopvektorok*nak is hívjuk. Az

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

vektort az A mátrix i-edik sorvektorának, illetve j-edik oszlopvektorának nevezzük, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. A csupa nulla elemet tartalmazó mátrixokat *nullmátrix*oknak nevezzük, és méretüktől függetlenül $\underline{0}$-val jelöljük. Ha az A mátrix sorainak és oszlopainak száma megegyezik, akkor *négyzetes mátrix*nak hívjuk, s ekkor az $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elemek a mátrix *főátló*ját, az $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ elemek pedig a mátrix *mellékátló*ját alkotják. Az $n \times n$-es mátrixokat n-edrendű mátrixoknak is nevezzük. Azokat a négyzetes mátrixokat, melyek mindegyik főátlón kívüli eleme nulla, *diagonális mátrix*oknak nevezzük. Ha egy négyzetes mátrix főátlója alatt (felett) minden elem nulla, akkor a mátrixot *felső (alsó) trianguláris mátrix*nak hívjuk. Azt az $n \times n$-es diagonális mátrixot, melynek főátlójában minden elem 1, *egységmátrix*nak nevezzük, és E_n-nel jelöljük. Ha nem okoz félreértést, akkor az n indexet elhagyjuk. A T számtest feletti $m \times n$-es mátrixok halmazát $T^{m\times n}$-nel jelöljük.

2.2. Definíció. Értelmezzük mátrixok összeadását és skalárral való szorzását a következőképpen. Ha $(a_{ij}), (b_{ij}) \in T^{m\times n}$ és $\lambda \in T$, akkor

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

és

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix},$$

vagy röviden

$$(a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij}+b_{ij})_{m\times n} \quad \text{és} \quad \lambda(a_{ij})_{m\times n} = (\lambda a_{ij})_{m\times n}.$$

A következő tételben felsoroljuk az összeadás és a skalárral való szorzás legfontosabb tulajdonságait. Mindegyik a definíciók közvetlen következménye. Ezért a bizonyítást az olvasóra bízzuk.

2.3. Tétel. *Tetszőleges T számtest és m, n pozitív egészek esetén a $T^{m\times n}$ halmazon most bevezetett összeadás művelet kommutatív és asszociatív. A nullmátrix az összeadás egységeleme (azaz $A + \underline{0} = A$ minden $A \in T^{m\times n}$ esetén), és minden A mátrixnak a $-A = (-1)A$ mátrix additív inverze (azaz $A + (-A) = \underline{0}$). Továbbá*

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B, \quad (\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A, \quad (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$$

tetszőleges $\lambda, \mu \in T$ és $A, B \in T^{m\times n}$ esetén.

2.4. Definíció. Legyen T számtest és m, n, s pozitív egészek. Ha $A = (a_{ij}) \in T^{m\times n}$ és $B = (b_{ij}) \in T^{n\times s}$, akkor az A és B mátrixok AB-vel jelölt szorzata az a $C = (c_{ij}) \in T^{m\times s}$ mátrix, melyre $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le s)$, azaz tömören

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \right)_{m\times s}.$$

2.5. Tétel. *Tetszőleges T számtest, $\lambda \in T$ és T feletti A, B, C mátrixok esetén, ha az alábbi egyenlőségek valamelyik oldala értelmezve van, akkor a másik oldal is értelmes, és az egyenlőség is teljesül.*

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B), \quad A(BC) = (AB)C,$$

$$A(B+C) = AB + AC \quad \text{és} \quad (A+B)C = AC + BC.$$

Továbbá, ha A $m \times n$-es mátrix, akkor

$$E_m A = AE_n = A,$$

ahol E_m (E_n) az $m \times m$-es ($n \times n$-es) egységmátrix.

Bizonyítás. A tétel utolsó állítása a definíció közvetlen következménye, ezért igazolását az olvasóra bízzuk. Annak igazolását, hogy ha az első állításban szereplő egyenlőségek valamelyik oldala értelmezve van, akkor a másik oldal is értelmes, és a mérete is ugyanaz, szintén az olvasóra bízzuk. Ezek után csak azt kell igazolni, hogy az egyenlőségek különböző oldalain szereplő mátrixok azonos helyen szereplő elemei ugyanazok.

Tetszőleges M mátrix esetén jelölje $(M)_{ij}$ az M mátrix i-edik sorának j-edik elemét. Legyen A $m \times n$-es, B pedig $n \times s$-es mátrix. Ha $1 \leq i \leq m$ és $1 \leq k \leq s$, akkor

$$(\lambda(AB))_{ik} = \lambda(AB)_{ik} = \lambda \sum_{j=1}^{n} (A)_{ij}(B)_{jk} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (\lambda(A)_{ij})(B)_{jk} = \sum_{j=1}^{n} (\lambda A)_{ij}(B)_{jk} = ((\lambda A)B)_{ik}.$$

Tehát $\lambda(AB) = (\lambda A)B$. A $\lambda(AB) = A(\lambda B)$ egyenlőséget hasonlóan igazolhatjuk.

Legyen C $s \times t$-s mátrix. Ha $1 \leq i \leq m$ és $1 \leq l \leq t$, akkor

$$((AB)C)_{il} = \sum_{k=1}^{s} (AB)_{ik}(C)_{kl} = \sum_{k=1}^{s} \Big(\sum_{j=1}^{n} (A)_{ij}(B)_{jk} \Big)(C)_{kl} =$$

$$= \sum_{k=1}^{s} \Big(\sum_{j=1}^{n} (A)_{ij}(B)_{jk}(C)_{kl} \Big) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{s} (A)_{ij}(B)_{jk}(C)_{kl} \Big) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} (A)_{ij} \Big(\sum_{k=1}^{s} (B)_{jk}(C)_{kl} \Big) = \sum_{j=1}^{n} (A)_{ij}(BC)_{jl} = (A(BC))_{il}.$$

Tehát $(AB)C = A(BC)$.

Legyen most A $m \times n$-es, B és C pedig $n \times s$-es mátrix. Ha $1 \leq i \leq m$ és $1 \leq k \leq s$, akkor

$$(A(B+C))_{ik} = \sum_{j=1}^{n} (A)_{ij}(B+C)_{jk} = \sum_{j=1}^{n} (A)_{ij}((B)_{jk} + (C)_{jk}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (A)_{ij}(B)_{jk} + \sum_{j=1}^{n} (A)_{ij}(C)_{jk} = (AB)_{ik} + (AC)_{ik} = (AB + AC)_{ik}.$$

Tehát $A(B + C) = AB + AC$.

Végül legyen A és B $m \times n$-es, C pedig $n \times s$-es mátrix. Ha $1 \leq i \leq m$ és $1 \leq k \leq s$, akkor

$$((A+B)C)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} (A+B)_{ij}(C)_{jk} = \sum_{j=1}^{n} ((A)_{ij} + (B)_{ij})(C)_{jk} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (A)_{ij}(C)_{jk} + \sum_{j=1}^{n} (B)_{ij}(C)_{jk} = (AC)_{ik} + (BC)_{ik} = (AC+BC)_{ik}.$$

Tehát $(A+B)C = AC + BC$. ■

2.6. Definíció. A T számtest feletti $A = (a_{ij})_{m \times n}$ mátrix transzponáltján azt az A^{T}-vel jelölt $(b_{ij})_{n \times m}$ mátrixot értjük, melyre $b_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$. Tehát

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy A^{T} megkapható A-ból, ha tükrözzük az $a_{11}, a_{22}, \dots$ elemeken áthaladó egyenesre (ha A négyzetes, akkor ez az egyenes a főátló). Ha $A = A^{\mathrm{T}}$, akkor azt mondjuk, hogy A *szimmetrikus mátrix*. Vegyük észre, hogy egy szimmetrikus mátrix szükségképpen négyzetes.

2.7. Tétel. *Tetszőleges T számtest, $\lambda \in T$ és A, B azonos méretű T fölötti mátrixok esetén $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$, $(\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}}$ és $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$. Továbbá, ha az A és B mátrix összeszorozható, akkor a B^{T} és A^{T} mátrix is összeszorozható, és $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$.*

Bizonyítás. Az első három egyenlőség igazolását az olvasóra bízzuk. Legyen most A $m \times n$-es, B pedig $n \times s$-es mátrix. Ha $1 \leq i \leq m$ és $1 \leq k \leq s$, akkor a 2.5. Tétel bizonyításában bevezetett jelölést felhasználva kapjuk, hogy

$$((AB)^{\mathrm{T}})_{ik} = (AB)_{ki} = \sum_{j=1}^{n} (A)_{kj}(B)_{ji} = \sum_{j=1}^{n} (B^{\mathrm{T}})_{ij}(A^{\mathrm{T}})_{jk} = (B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}})_{ik}.$$

Tehát $(AB)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}}$. ■

3. Az n-edrendű determináns

A determináns fogalmát, pontosabban az n-edrendű determináns fogalmát ún. rekurzív definícióval adjuk meg, azaz definiáljuk $n = 1$-re, és az $n \geq 2$ esetben az n-edrendű determináns fogalmát visszavezetjük az $(n-1)$-edrendű determináns fogalmára.

3.1. Definíció. Legyen T számtest, n pozitív egész szám és $A = (a_{ij}) \in T^{n\times n}$. Az A *mátrix determinánsa*, vagy más szóval az a_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, elemekből képezett

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n-edrendű determináns értéke a következő. Ha $n = 1$, akkor $|A| = a_{11}$. Ha $n \geq 2$, akkor

$$|A| = a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{1n}D_{1n} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{1k}D_{1k},$$

ahol

$$D_{1k} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Az $|A|$ jelölés helyett a $\det A$ jelölést is használjuk.

Az $n = 2$ és az $n = 3$ esetben a definíció szerint

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

és

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

3.2. Definíció. A T számtest feletti n-edrendű $(n \geq 2)$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determináns esetén a

$$D_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

$(n-1)$-edrendű determinánst az a_{ij} elemhez tartozó *komplementer aldeterminánsnak*, az

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

számot pedig az a_{ij} elemhez tartozó *adjungált aldeterminánsnak* nevezzük.

3.3. Tétel. *Ha egy determináns két sorát felcseréljük, akkor értéke* (-1)*-szeresére változik.*

Bizonyítás. A determináns rendje szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 1$-re nincs mit igazolni. $n = 2$-re könnyen ellenőrizhető, hogy igaz az állítás. Legyen $n \geq 3$, és tegyük fel, hogy az $(n-1)$-edrendű determinánsokra az állítás igaz. Legyen $A = (a_{ij})$ egy $n \times n$-es mátrix. Jelölje $\tilde{A}$ azt a mátrixot, melyet úgy kapunk A-ból, hogy az i-edik és a j-edik sorát felcseréljük, $1 \leq i < j \leq n$. Jelölje továbbá D_{kl}, illetve $\tilde{D}_{kl}$ a k-adik sor l-edik eleméhez tartozó komplementer aldeterminánst $|A|$-ban, illetve $|\tilde{A}|$-ban. Igazolnunk kell, hogy $|A| = -|\tilde{A}|$.

Először tegyük fel, hogy $1 < i < j$. Ekkor D_{1k}-ból két sor felcserélésével megkapható $\tilde{D}_{1k}$. Ezért az indukciós feltevés szerint $D_{1k} = -\tilde{D}_{1k}$, $k = 1, \ldots n$. Így

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{k+1} D_{1k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{k+1}(-\tilde{D}_{1k}) = -\sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{k+1}\tilde{D}_{1k} = -|\tilde{A}|.$$

Most tegyük fel, hogy $i = 1$ és $j = 2$. Jelölje M^{kl}, $k \neq l$, azt az $(n-2)$-edrendű determinánst, melyet az eredeti determinánsból úgy kapunk, hogy töröljük az első és második sorát, valamint a k-adik és l-edik oszlopát. Ekkor

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{k+1} D_{1k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{k+1} \left(\sum_{l=1}^{k-1} a_{2l}(-1)^{l+1} M^{kl} + \sum_{l=k+1}^{n} a_{2l}(-1)^{l} M^{kl} \right) =$$

$$= \sum_{1\le l<k\le n} a_{1k}a_{2l}(-1)^{k+l}M^{kl} + \sum_{1\le k<l\le n} a_{1k}a_{2l}(-1)^{k+l+1}M^{kl} =$$

$$= -\left(\sum_{1\le k<l\le n} a_{1k}a_{2l}(-1)^{k+l}M^{kl} + \sum_{1\le l<k\le n} a_{1k}a_{2l}(-1)^{k+l+1}M^{kl}\right) =$$

$$= -\left(\sum_{l=1}^{n} a_{2l}(-1)^{l+1}\left(\sum_{k=1}^{l-1} a_{1k}(-1)^{k+1}M^{kl} + \sum_{k=l+1}^{n} a_{1k}(-1)^{k}M^{kl}\right)\right) =$$

$$= -\left(\sum_{l=1}^{n} a_{2l}(-1)^{l+1}\tilde{D}_{1l}\right) = -|\tilde{A}|.$$

Végül, ha $i = 1$ és $j > 2$ tetszőleges, akkor az első és a j-edik sor cseréje a következő három sorcserével elérhető: előbb felcseréljük a második és j-edik sort, majd az első és második sort, és végül újra a második és a j-edik sort. Az előzőek szerint mindhárom csere megváltoztatja a determináns előjelét, azaz végeredményben a determináns előjele most is megváltozik. ■

3.4. Tétel. *Legyen T számtest, $n \geq 2$ és $A = (a_{ij}) \in T^{n\times n}$. Tetszőleges $1 \leq i \leq n$ esetén*

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}.$$

Bizonyítás. Legyen

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{és} \quad \tilde{D} = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Mivel $\tilde{D}$ a D-ből $i-1$ szomszédos sor egymás utáni felcserélésével megkapható (az i-edik sort megcseréljük a felette állóval, azután újra a felette állóval, stb.), ezért a 3.3. Tétel és a determináns definíciója szerint

$$D = (-1)^{i-1}\tilde{D} = (-1)^{i-1}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{k+1}\tilde{D}_{1k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}\tilde{D}_{1k} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}D_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik},$$

ahol $\tilde{D}_{1k}$ a $\tilde{D}$ determináns első sorának k-adik eleméhez tartozó komplementer aldeterminánst jelöli. Felhasználtuk, hogy $\tilde{D}_{1k} = D_{ik}$, $k = 1, \ldots, n$. ■

A 3.4. Tételbeli egyenlőség jobb oldalán álló összeget a *determináns i-edik sora szerinti kifejtésének hívjuk.*

3.5. Tétel. (**A determináns soraira vonatkozó tulajdonságok.**)

(3.5.1) Tetszőleges $1 \leq i \leq n$ és bármely $c \in T$ esetén

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(3.5.2) A determináns értéke nulla, ha valamelyik sorában mindegyik elem nulla.

(3.5.3) A determináns értéke nulla, ha van két egyforma sora.

(3.5.4) Tetszőleges $1 \leq i \leq n$ esetén

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(3.5.5) Tetszőleges $1 \leq i, j \leq n,\ i \neq j$ és bármely $c \in T$ esetén

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+ca_{j1} & a_{i2}+ca_{j2} & \cdots & a_{in}+ca_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Bizonyítás. (3.5.1) Jelölje D, illetve $\tilde{D}$ az egyenlőség jobb illetve bal oldalán álló determinánst, A_{ij}, illetve $\tilde{A}_{ij}$ pedig D, illetve $\tilde{D}$ i-edik sorának j-edik eleméhez tartozó adjungált aldeterminánsát, $j = 1, \dots, n$. Azt kell igazolni, hogy $\tilde{D} = cD$. Vegyük észre, hogy $A_{ij} = \tilde{A}_{ij}$, $j = 1, \dots, n$. Ezért

$$\tilde{D} = \sum_{j=1}^{n} (ca_{ij})\tilde{A}_{ij} = c\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = cD.$$

(3.5.2) Az állítás a determináns i-edik sora szerinti kifejtésével azonnal adódik.

(3.5.3) Ha egy D determináns két sora megegyezik, akkor az e két sor felcserélésével kapott $\hat{D}$ determinásra azt kapjuk, hogy $\hat{D} = D$ és $\hat{D} = -D$, amiből $D = 0$ következik.

(3.5.4) Jelölje rendre $\hat{D}$, D és D' az egyenlőségben szereplő három deterninánst balról jobbra haladva. Azt kell megmutatni, hogy $\hat{D} = D + D'$. Mivel a három determináns csak az i-edik sorban különbözik, ezért az i-edik sor j-edik eleméhez tartozó adjungált aldetermináns mindhárom determinánsban ugyanaz, mondjuk A_{ij}, $j = 1, \dots, n$. Így

$$\hat{D} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij})A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}A_{ij} = D + D'.$$

(3.5.5) A (3.5.4), (3.5.1) és (3.5.3) állításokat felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + ca_{j1} & a_{i2} + ca_{j2} & \cdots & a_{in} + ca_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

mert a c-vel szorzott determináns i-edik és j-edik sora megegyezik, és (3.5.3) szerint értéke nulla. ∎

3.6. Tétel. *Bármely négyzetes mátrix determinánsa megegyezik transzponáltjának determinánsával, azaz bármely T számtest, $n \geq 1$ és $a_{ij} \in T$, $1 \leq i, j \leq n$, elemek esetén*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Bizonyítás. Az állítást n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 1$, akkor az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $n \geq 2$, és az $(n-1)$-edrendű determinánsokra teljesül az állítás. Tekintsük a

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

és

$$D^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinánst. Jelölje D_{ij}, illetve D^*_{ij} az i-edik sor j-edik eleméhez tartozó komplementer aldeterminánst D-ben, illetve D^*-ban. Vegyük észre, hogy az indukciós feltevés szerint a D^*_{ij} és a D_{ji} determinánsok megegyeznek. Fejtsük ki D-t és D^*-ot mindegyik sora szerint, és ezek összegeként megkapjuk nD-t és nD^*-ot:

$$nD = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} D_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} D_{ij} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} D^*_{ji} \right) = nD^*.$$

Végül az $nD = nD^*$ egyenlőségből $D = D^*$ következik. ∎

Egy mátrix transzponáltjának sorai rendre megegyeznek az eredeti mátrix oszlopaival, a mátrix transzponáltjának oszlopai rendre megegyeznek az eredeti mátrix soraival. Az előző tétel alapján adódik a következő fontos tény.

3.7. Determinánselméleti dualitási elv. *Bármely determinánsokra vonatkozó érvényes állításból ismét érvényes állítást kapunk, ha benne a "sor" szó helyett mindenhol az "oszlop" szót, az "oszlop" szó helyett pedig mindenhol a "sor" szót írjuk.*

Az ilyen módon kapott állítást az eredeti állítás duálisának nevezzük. Például a 3.3. és 3.4. Tételek duálisa a következő:

3.8. Tétel. *Ha egy determináns két oszlopát felcseréljük, akkor értéke* (-1)*-szeresére változik.*

3.9. Tétel. *Legyen* T *számtest,* $n \geq 2$ *és* $A = (a_{ij}) \in T^{n \times n}$*. Tetszőleges* $1 \leq i \leq n$ *esetén*

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{ki}.$$

Az fenti egyenlőség jobb oldalán álló összeget a *determináns* i*-edik oszlopa szerinti kifejtésének* hívjuk.

A 3.5. Tételben szereplő, a determináns soraival kapcsolatos tulajdonságok oszlopokra is érvényesek. Például a determináns értéke nulla, ha van olyan oszlopa, melyben minden elem nulla, vagy ha van két egyforma oszlopa.

3.10. A ferde kifejtés tétele. *Legyen* T *számtest,* $n \geq 2$ *és* $A = (a_{ij}) \in T^{n \times n}$*. Tetszőleges* $1 \leq i, j \leq n$ *esetén*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} |A|, & \text{ha } i = j, \\ 0, & \text{ha } i \neq j; \end{cases} \qquad \text{és} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = \begin{cases} |A|, & \text{ha } i = j, \\ 0, & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$$

Bizonyítás. Elég az első egyenlőséget igazolni, hiszen a második az első duálisa. Az első egyenlőség $i = j$ esetén ugyanaz, mint a 3.4. Tétel. Tegyük fel, hogy $i \neq j$, és tekintsük azt az $\hat{A}$ mátrixot, melyet A-ból úgy kapunk, hogy a j-edik sorába rendre az i-edik sorának elemeit írjuk:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & \cdots & a_{j-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{j+1,1} & a_{j+1,2} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ekkor $|\hat{A}| = 0$, hiszen $\hat{A}$ két sora megegyezik. Mivel a két determináns csak a j-edik sorban különbözik, ezért a j-edik sor elemeihez tartozó adjungált aldeterminánsok az $|A|$ és az $|\hat{A}|$ determinánsban rendre ugyanazok. Végül fejtsük ki $|\hat{A}|$-t a j-edik sora szerint:

$$0 = |\hat{A}| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk}.$$

■

3.11. Definíció. Legyen T számtest, $n > 1$ és $x_1, \ldots, x_n \in T$. Ekkor a

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

determinánst az $x_1, \ldots, x_n$ számokhoz tartozó *Vandermonde-determinánsnak* nevezzük.

3.12. Tétel. *Tetszőleges $n > 1$ és $x_1, \ldots, x_n$ számok esetén*

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Bizonyítás. A bizonyítás n szerinti teljes indukcióval történik. $n = 2$ esetén

$$V(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{1 \leq i < j \leq 2} (x_j - x_i),$$

vagyis érvényes az állítás. Legyen $n > 2$, és tegyük fel, hogy $(n-1)$-re érvényes az állítás. Az indukciós feltevés miatt

$$V(x_2, \ldots, x_n) = \prod_{2 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Vonjuk le $V(x_1, \ldots, x_n)$ mindegyik oszlopából hátulról előre haladva az előtte álló oszlop x_1-szeresét. A 3.5. Tétel duálisa szerint a determináns értéke nem változik. Ezután fejtsük ki a kapott determinánst az első sora szerint:

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & \cdots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & \cdots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & (x_2 - x_1)x_2 & \cdots & (x_2 - x_1)x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_1 & (x_n - x_1)x_n & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

(emeljük ki mindegyik sorból a közös tényezőt)

$$= (x_2 - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_1) V(x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= (x_2 - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_1) \prod_{2 \le i < j \le n} (x_j - x_i) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

■

3.13. Definíció. Legyen T számtest, $n \ge 1$, $1 \le r \le n$ és $A = (a_{ij})$ egy T feletti $n \times n$-es mátrix. Ha kijelöljük az A mátrix r sorát és r oszlopát, akkor a kijelölt sorokban és a kijelölt oszlopokban álló elemekből képezett r-edrendű determinánst az A mátrix *aldeterminánsának* nevezzük. Legyenek $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$ a kijelölt sorok és $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$ a kijelölt oszlopok indexei. Jelölje $M_{i_1,i_2,\ldots,i_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}$ az A mátrix $i_1, i_2, \ldots, i_r$ soraiban és $j_1, j_2, \ldots, j_r$ oszlopaiban álló elemeiből képezett r-edrendű aldeterninánst, azaz

$$M_{i_1,i_2,\ldots,i_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_r} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_r j_1} & a_{i_r j_2} & \cdots & a_{i_r j_r} \end{vmatrix}.$$

Legyen $D_{i_1,i_2,\ldots,i_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}$ az A mátrix azon $(n - r)$-edrendű aldeterminása, melyet a mátrix $i_1, i_2, \ldots, i_r$-en kívüli sorai és a $j_1, j_2, \ldots, j_r$-en kívüli oszlopai határoznak meg. A $D_{i_1,i_2,\ldots,i_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}$ determinánst az $M_{i_1,i_2,\ldots,i_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}$ aldetermináns *komplementer aldeterminánsának* nevezzük.

Bizonyítás nélkül ismertetjük az alábbi fontos tételt, mely a 3.4. Tétel általánosítása.

3.14. Laplace-tétel. *Legyen T számtest, $n \ge 2$, $A = (a_{ij})$ egy T feletti $n \times n$-es mátrix, $1 \le r \le n$ és $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_r \le n$. Ekkor*

$$|A| = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_r \le n} M_{i_1,i_2,\ldots,i_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r} \cdot D_{i_1,i_2,\ldots,i_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r} \cdot (-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_r+j_1+j_2+\ldots+j_r}.$$

A fenti összeget a *determináns $i_1, i_2, \ldots, i_r$ sorai szerinti kifejtés*ének nevezzük.

Ha a 3.14. Tételben $r = 1$, $i_1 = i$ és $j_1 = j$, akkor $M_i^j = a_{ij}$ és $D_i^j = D_{ij}$. Ekkor a tétel állítása a következő:

$$|A| = \sum_{1 \le i \le n} M_i^j D_i^j (-1)^{i+j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} D_{ij} (-1)^{i+j},$$

ami ugyanaz, mint a 3.4. Tétel.

Természetesen érvényes a 3.14. Tétel duálisa is:

3.15. Tétel. *Legyen T számtest, $n \ge 2$, $A = (a_{ij})$ egy T feletti $n \times n$-es mátrix, $1 \le r \le n$ és $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_r \le n$. Ekkor*

$$|A| = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_r \le n} M_{i_1,i_2,\ldots,i_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r} \cdot D_{i_1,i_2,\ldots,i_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r} \cdot (-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_r+j_1+j_2+\ldots+j_r}.$$

A fenti összeget a *determináns $j_1, j_2, \ldots, j_r$ oszlopai szerinti kifejtésének nevezzük.*

3.16. A determinánsok szorzástétele. *Tetszőleges A és B megegyező méretű négyzetes mátrixok esetén*

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

Bizonyítás. Legyen $A = (a_{ij})$ és $B = (b_{ij})$ $n \times n$-es mátrix, $C = (c_{ij}) = AB$, és tekintsük a

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

determinánst. Először fejtsük ki D-t az $1, 2, \ldots, n$ sorai szerint:

$$D = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_n \le n} M_{1,2,\ldots,n}^{j_1,j_2,\ldots,j_n} \cdot D_{1,2,\ldots,n}^{j_1,j_2,\ldots,j_n} \cdot (-1)^{1+2+\ldots+n+j_1+j_2+\ldots+j_n}.$$

Ha $(j_1, j_2, \ldots, j_n) \ne (1, 2, \ldots, n)$, akkor az $M_{1,2,\ldots,n}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}$ determináns 0, mert van olyan oszlopa, melynek mindegyik eleme 0. Ezért

$$D = M_{1,2,\ldots,n}^{1,2,\ldots,n} \cdot D_{1,2,\ldots,n}^{1,2,\ldots,n} \cdot (-1)^{1+2+\ldots+n+1+2+\ldots+n} = |A| \cdot |B|,$$

hiszen $M_{1,2,\ldots,n}^{1,2,\ldots,n} = |A|$, $D_{1,2,\ldots,n}^{1,2,\ldots,n} = |B|$, és a -1 kitevője páros szám.

Alakítsuk át a D determinánst a következőképpen: minden $1 \leq j \leq n$-re adjuk hozzá az $n+j$-edik oszlophoz az első oszlop b_{1j}-szeresét, a második oszlop b_{2j}-szeresét, és így tovább, az n-edik oszlop b_{nj}-szeresét. Ezen átalakítások után a következő D-vel egyenlő determinánst kapjuk:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

Fejtsük ki ezt a determinánst is az $1, 2, \ldots, n$ sorai szerint. Ha

$$(j_1, j_2, \ldots, j_n) \neq (n+1, n+2, \ldots, 2n),$$

akkor a $D_{1,2,\ldots,n}^{j_1,j_2,\ldots,j_n}$ determináns 0, mert van olyan oszlopa, melynek mindegyik eleme 0. Ezért

$$D = M_{1,2,\ldots,n}^{n+1,n+2,\ldots,2n} \cdot D_{1,2,\ldots,n}^{n+1,n+2,\ldots,2n} \cdot (-1)^{1+2+\ldots+n+(n+1)+(n+2)+\ldots+2n} =$$

$$= |C| \cdot (-1)^n \cdot (-1)^{1+2+\ldots+n+(n+1)+(n+2)+\ldots+2n} = |C| = |AB|,$$

hiszen $M_{1,2,\ldots,n}^{n+1,n+2,\ldots,2n} = |C|$, $D_{1,2,\ldots,n}^{n+1,n+2,\ldots,2n} = (-1)^n$, és a -1 kitevője

$$n + (1 + 2 + \ldots + n + (n+1) + (n+2) + \ldots + 2n) = n + (1+2n)n = 2n + 2n^2$$

páros szám. ■

4. Inverzmátrix

4.1. Definíció. Legyen T számtest, $n \geq 1$ és $A \in T^{n\times n}$. Azt mondjuk, hogy $X \in T^{n\times n}$ az A *mátrix inverze*, ha $XA = AX = E$, ahol E az $n \times n$-es egységmátrix. A következő tétel szerint az A mátrixnak legfeljebb egy inverze van, s amennyiben létezik, azt A^{-1}-gyel jelöljük.

4.2. Tétel. *Minden mátrixnak legfeljebb egy inverze van. Egy négyzetes A mátrixnak akkor és csak akkor van inverze, ha $|A| \neq 0$. Ha az A és B $n \times n$-es mátrixoknak van inverze, akkor $(A^{-1})^{-1} = A$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ és $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$.*

Bizonyítás. Ha A-nak X és Y is inverze, akkor $X = XE = X(AY) = (XA)Y = EY = Y$. Tehát A-nak legfeljebb egy inverze van. Ha A-nak X inverze, akkor $1 = |E| = |AX| = |A| \cdot |X|$, amiből $|A| \neq 0$ következik.

Legyen $A = (a_{ij})_{n\times n}$, és tegyük fel, hogy $|A| \neq 0$. Megmutatjuk, hogy

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

ahol A_{ij} az i-edik sor j-edik eleméhez tartozó adjungált aldetermináns $|A|$-ban. Jelölje B az egyenlőség jobb oldalán álló mátrixot. A ferde kifejtési tétel sorokra vonatkozó állítását felhasználva kapjuk, hogy

$$AB = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}\right)_{n\times n} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = E,$$

A $BA = E$ egyenlőséget a ferde kifejtési tétel oszlopokra vonatkozó állítását felhasználva hasonlóan igazolhatjuk. Így valóban $B = A^{-1}$.

Vegyük észre, hogy az $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, illetve az

$$A^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{-1}A)^{\mathrm{T}} = E^{\mathrm{T}} = E \quad \text{és} \quad (A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = (AA^{-1})^{\mathrm{T}} = E^{\mathrm{T}} = E$$

egyenlőségekből az inverz egyértelműsége miatt következik, hogy A^{-1} inverze éppen A, azaz $(A^{-1})^{-1} = A$, illetve A^{T} inverze éppen $(A^{-1})^{\mathrm{T}}$, azaz $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

Végül

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (A(BB^{-1}))A^{-1} = (AE)A^{-1} = AA^{-1} = E$$

és

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}((A^{-1}A)B) = B^{-1}(EB) = B^{-1}B = E,$$

amiből újra a mátrix inverzének egyértelműségét használva $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ következik. ■

4.3. Definíció. Azt mondjuk, hogy az A négyzetes mátrix *elfajuló* (*nemelfajuló*), ha $|A| = 0$ ($|A| \neq 0$).

4.4. Definíció. Legyen T számtest, $n \geq 1$ és $A, B \in T^{n\times n}$. Azt mondjuk, hogy A és B *hasonló*, ha van olyan $X \in T^{n\times n}$ nemelfajuló mátrix, hogy $B = X^{-1}AX$. Jele: $A \approx B$.

4.5. Tétel. *A mátrixok hasonlósági relációja a $T^{n\times n}$ halmazon reflexív (azaz $A \approx A$ minden $A \in T^{n\times n}$ mátrixra), szimmetrikus (azaz $A \approx B$-ból $B \approx A$ következik) és tranzitív (azaz, ha $A \approx B$ és $B \approx C$, akkor $A \approx C$). Hasonló mátrixok determinánsa megegyezik.*

Bizonyítás. Tetszőleges A mátrixra $A = E^{-1}AE$ miatt $A \approx A$, azaz $\approx$ reflexív. Ha $A \approx B$, azaz $B = X^{-1}AX$ valamely X mátrixra, akkor $A = XBX^{-1} = (X^{-1})^{-1}BX^{-1}$ miatt $B \approx A$. Tehát $\approx$ szimmetrikus. Ha $A \approx B$ és $B \approx C$, azaz $B = X^{-1}AX$ és $C = Y^{-1}BY$ valamely X, Y mátrixokra, akkor

$$C = Y^{-1}BY = Y^{-1}(X^{-1}AX)Y = (XY)^{-1}A(XY),$$

azaz $A \approx C$. Tehát $\approx$ tranzitív.

Végül, ha $A \approx B$, azaz $B = X^{-1}AX$ valamely X mátrixra, akkor a determinánsok szorzástételét felhasználva kapjuk, hogy

$$|B| = |X^{-1}AX| = |X^{-1}||A||X| = |A|(|X^{-1}||X|) =$$

$$= |A||X^{-1}X| = |A||E| = |A|1 = |A|.$$

■

5. Lineáris egyenletrendszerek

5.1. Definíció. Egy T számtest fölötti m egyenletből álló *n-ismeretlenes lineáris egyenletrendszer* általános alakja

$$(*)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

ahol az a_{ij} *együtthatók* és a b_i *konstansok* T-ből valók, $1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$. Azt mondjuk, hogy a $c_1, \ldots, c_n \in T$ sorozat vagy a $(c_1, \ldots, c_n) \in T^n$ elem-n-es a $(*)$ *egyenletrendszer egy megoldása*, ha az $x_1, \ldots, x_n$ helyére rendre a $c_1, \ldots, c_n$ számokat írva, mindegyik egyenletből érvényes egyenlőség lesz. Ha az egyenletrendszernek van megoldása, akkor azt mondjuk, hogy *megoldható*, ellenkező esetben *ellentmondó*.

Képezzük az egyenletrendszer adataiból a következő mátrixokat:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A|\underline{b} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Az A mátrixot az *egyenletrendszer mátrix*ának, az $A|\underline{b}$ mátrixot pedig az *egyenletrendszer bővített mátrix*ának nevezzük. Új jelöléseink segítségével az egyenletrendszer a következő mátrix egyenlet és vektor egyenlet alakban is felírható:

$$(**)\qquad A\underline{x} = \underline{b}$$

és

$$(***)\qquad x_1\underline{a}_1 + \ldots + x_n\underline{a}_n = \underline{b}.$$

A $(**)$ alakban az egyenletrendszer megoldása egy olyan $\underline{c} \in T^{n\times 1}$ oszlopvektor, melyre $A\underline{c} = \underline{b}$. A $(***)$ alakban pedig az egyenletrendszer megoldása olyan skalárokból álló $c_1, \ldots, c_n$ sorozat, melyekre a $c_1\underline{a}_1 + \ldots + c_n\underline{a}_n$ oszlopvektor megegyezik a $\underline{b}$ vektorral.

Az $A\underline{x} = \underline{0}$ alakú egyenletrendszereket *homogén lineáris egyenletrendszer*eknek nevezzük. Az ilyen egyenletrendszereknek a csupa nulla elemből álló oszlopvektor mindig megoldása, melyet *triviális megoldás*nak nevezünk.

A lineáris egyenletrendszerek elméletének feladata olyan módszerek kidolgozása, melyek segítségével meg tudjuk állapítani, megoldható-e egy adott egyenletrendszer vagy sem, és ha megoldható, akkor szolgáltatja az összes megoldást. A következőkben ismertetünk egy ilyen módszert az ún. *Gauss-kiküszöbölés*t, vagy latinosan a *Gauss-eliminációt*.

5.2. Definíció. *Két egyenletrendszer ekvivalens*, ha pontosan ugyanazok a megoldásaik. Egy *egyenletrendszer elemi átalakításai* a következők:

(5.2.1) Ha valamelyik egyenletben mindegyik együttható és az egyenlőség jobb oldalán szereplő konstans is nulla, akkor az egyenletet elhagyjuk.
(5.2.2) Valamelyik egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk ugyanazon nullától különböző skalárral.
(5.2.3) Valamelyik egyenlethez hozzáadjuk egy másik egyenlet skalárszorosát.
(5.2.4) Két egyenletet felcserélünk.

Ezek az átalakítások rendre megfelelnek az egyenletrendszer bővített mátrixának sorain végrehajtott következő elemi átalakításoknak:

(5.2.a) Ha valamelyik sorban mindegyik elem nulla, akkor a sort elhagyjuk.
(5.2.b) Valamelyik sor minden elemét megszorozzuk egy nullától különböző skalárral.
(5.2.c) Valamelyik sorhoz hozzáadjuk egy másik sor skalárszorosát.
(5.2.d) Két sort felcserélünk.

Könnyen ellenőrizhető, hogy bármely egyenletrendszert az elemi átalakítások vele ekvivalens egyenletrendszerbe viszik át.

5.3. Definíció. Azt mondjuk, hogy a *lineáris egyenletrendszer lépcsős alakú*, ha bővített mátrixa rendelkezik a következő három tulajdonsággal:

(5.3.1) Nincs olyan sora, melynek mindegyik eleme nulla.
(5.3.2) Minden sorban az első nem nulla elem 1-es, és ezen 1-esek oszlopában a többi elem mind nulla.
(5.3.3) Minden sorban az első nem nulla elem hátrább van, mint a fölötte álló sor hasonló eleme.

5.4. Tétel. *Ha egy egyenletrendszer valamelyik együtthatója vagy konstansa nem nulla (azaz bővített mátrixa nem a nullmátrix), akkor elemi átalakításokkal lépcsős alakra hozható.*

Bizonyítás. Az állítást az egyenletek száma szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Ha egyetlen egyenlet van, akkor megszorozva a bővített mátrix egyetlen sorát a sorban szereplő első nem nulla elem reciprokával, lépcsős alakot kapunk. Tegyük fel, hogy $m > 1$ egyenletünk van, és az m-nél kevesebb egyenletből álló egyenletrendszerekre igaz az állítás. Végezzük el a következő elemi átalakításokat: A bővített mátrixban válasszunk ki egy olyan nem nulla elemet, amely előtti oszlopokban minden elem nulla. (Ha x_1 együtthatója mindegyik egyenletben nulla, akkor ez az elem nem az első oszlopban van.) Ezen elem sorát cseréljük fel az első sorral, majd szorozzuk meg az első sort a sorban szereplő első nem nulla elem reciprokával. Ekkor a következő alakú bővített mátrixhoz jutottunk:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{1,k+1} & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2k} & a_{2,k+1} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{mk} & a_{m,k+1} & \cdots \end{pmatrix}, \quad k \geq 1.$$

Levonva minden i-re, $2 \leq i \leq m$, az első sor a_{ik}-szorosát az i-edik sorból, és azután elhagyva a nullától különböző elemet nem tartalmazó sorokat a következő alakú bővített mátrixot kapjuk:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{1,k+1} & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & d_{2,k+1} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & d_{l,k+1} & \cdots \end{pmatrix}, \quad k \geq 1,\ l \leq m.$$

Ha ennek a mátrixnak egyetlen sora van, akkor a neki megfelelő egyenletrendszer lépcsős alakú. (Ez a helyzet akkor, ha az egyenletrendszer mindegyik egyenlete megkapható az első egyenletből úgy, hogy megszorozzuk mindkét oldalát egy alkalmasan választott számmal.) Ha a mátrixnak legalább két sora van, akkor az indukciós feltevés szerint alkalmas elemi átalakításokat végezve a $2, \ldots, l$ sorokon, az első sort figyelmen kívül hagyva, a mátrix lépcsős alakú lesz:

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccc|c} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & a & s_2 & \cdots & b & s_3 & \cdots & c & s_r & \cdots & b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & d & 0 & \cdots & e & 0 & \cdots & b_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & f & 0 & \cdots & b_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & b_r \end{array}\right).$$

Az első sorban a többi sor első nem nulla elemei oszlopában szereplő $s_2, s_3, \ldots, s_r$ számok nem biztos, hogy mind nullák. Ha az első sorból rendre levonjuk a második sor s_2-szeresét, a harmadik sor s_3-szorosát, és így tovább, az r-edik sor s_r-szeresét, akkor lépcsős alakú mátrixot kapunk. Világos, hogy ezt a mátrixot a kiindulási mátrixból elemi átalakításokkal kaptuk. ■

5.5. Gauss-elimináció. Legyen adott egy n-ismeretlenes lineáris egyenletrendszer. Ha minden együttható és minden konstans nulla (azaz a bővített mátrix a nullmátrix), akkor mindegyik egyenlet $0 = 0$ alakú, és ezért minden szám-n-es megoldás. Ellenkező esetben az 5.4. Tétel szerint az egyenletrendszert elemi átalakításokkal lépcsőssé alakíthatjuk. Tegyük ezt meg, és vizsgáljuk ezt a lépcsős alakú egyenletrendszert, melynek pontosan ugyanazok a megoldásai, mint az eredetinek.

Ha a bővített mátrix utolsó sora $(0\dots0|1)$, azaz az utolsó egyenlet $0 = 1$ alakú, akkor az egyenletrendszer ellentmondó. Ellenkező esetben a bővített mátrix a következő alakú:

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccc|c}
0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & a & 0 & \cdots & b & 0 & \cdots & c & 0 & \cdots & b_1 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & d & 0 & \cdots & e & 0 & \cdots & b_2 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & f & 0 & \cdots & b_3 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & b_r
\end{array}\right).$$

Legyenek a sorokban lévő első nem nulla elemek oszlopindexei rendre $i_1, \dots, i_r$. Ekkor az ezen bővített mátrixnak megfelelő egyenletrendszer a következő:

$$\begin{aligned}
x_{i_1} + \ldots + ax_{i_2-1} + \quad \ldots \quad + bx_{i_3-1} + \quad \ldots \quad + cx_{i_r-1} + \quad \ldots \quad &= b_1 \\
x_{i_2} + \ldots + dx_{i_3-1} + \quad \ldots \quad + ex_{i_r-1} + \quad \ldots \quad &= b_2 \\
x_{i_3} + \ldots + fx_{i_r-1} + \quad \ldots \quad &= b_3 \\
&\vdots \\
x_{i_r} + \ldots &= b_r
\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy az $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$ ismeretleneket kifejezhetjük a többi ismeretlen sgítségével:

$$\begin{aligned}
x_{i_1} &= b_1 - \ldots - ax_{i_2-1} - \ldots - bx_{i_3-1} - \ldots - cx_{i_r-1} - \ldots \\
x_{i_2} &= b_2 - \ldots - dx_{i_3-1} - \ldots - ex_{i_r-1} - \ldots \\
x_{i_3} &= b_3 - \ldots - fx_{i_r-1} - \ldots \\
&\vdots \\
x_{i_r} &= b_r - \ldots
\end{aligned}$$

Ezért az $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$ ismeretleneket *kötött ismeretlenek*nek, a többi $n-r$ ismeretlent pedig *szabad ismeretlen*nek hívjuk. Világos, hogy ez az egyenletrendszer megoldható, továbbá minden megoldást megkaphatunk úgy, hogy a szabad ismeretleneknek tetszőlegesen értékeket adunk, és a kötött ismeretleneket a fenti egyenlőségek felhasználásával kiszámoljuk. (Innen származik a "szabad", illetve a "kötött" jelző.) Ha $n = r$, akkor nincs szabad ismeretlen, és az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van. Ha $r < n$, akkor $n - r > 0$ szabad ismeretlen van. Ekkor annyi megoldás van, ahányféleképpen értékeket adhatunk a szabad ismeretleneknek. Mivel a szabad ismeretlenek egy számtestből szabadon választhatók, aminek végtelen sok eleme van, a megoldások száma is végtelen lesz.

5.6. Példák.

(5.6.1) Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\
4x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 6 \\
7x_1 + 7x_2 + 8x_3 &= 10.
\end{aligned}
$$

Végezzük el az egyenletrendszer bővített mátrixán az alábbi elemi átalakításokat:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 7 & 8 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -11 \end{array}\right) \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).
$$

Az első lépésben levontuk az első sor négyszeresét a második sorból, a hétszeresét pedig a harmadik sorból. A második lépésben levontuk a második sor kétszeresét a harmadik sorból, majd elosztottuk a második sort -3-mal. A harmadik lépésben levontuk a második sor kétszeresét az első sorból. A negyedik mátrix lépcsős alakú, és az utolsó sora miatt az egyenletrendszer ellentmondó. Ez már a harmadik mátrixból is megállapítható.

(5.6.2) Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\
5x_1 + 6x_2 + 7x_3 &= 8 \\
9x_1 + 10x_2 + 11x_3 &= 12 \\
13x_1 + 14x_2 + 15x_3 &= 16.
\end{aligned}
$$

A következképpen járhatunk el:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \\ 0 & -12 & -24 & -36 \end{array}\right) \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right).
$$

Az utolsó mátrixhoz tartozó egyenletrendszer:

$$
\begin{aligned}
x_1 \qquad - x_3 &= -2 \\
x_2 + 2x_3 &= 3
\end{aligned}.
$$

Most x_3 az egyetlen szabad ismeretlen, melyből a másik két ismeretlen a következőképpen kapható:

$$x_1 = -2 + x_3$$
$$x_2 = 3 - 2x_3$$

5.7. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $(*)$ egyenletrendszer *szabályos*, ha $m = n$ (azaz ugyanannyi egyenlete van, mint ismeretlene), és $|A| \neq 0$.

5.8. Cramer-szabály. *Ha a $(*)$ egyenletrendszer szabályos, akkor egyetlen megoldása van, mégpedig*

$$x_k = \frac{D_k}{D}, \ 1 \leq k \leq n,$$

ahol $D = |A|$ és

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $(*)$ egyenletrendszer szabályos, és legyen a $\underline{c}$ oszlopvektor megoldás, azaz $A\underline{c} = \underline{b}$. Mivel $|A| \neq 0$, ezért létezik az A^{-1} mátrix, és

$$\underline{c} = E\underline{c} = (A^{-1}A)\underline{c} = A^{-1}(A\underline{c}) = A^{-1}\underline{b}.$$

Tehát csak $A^{-1}\underline{b}$ lehet a megoldás, és $A^{-1}\underline{b}$ valóban megoldás, hiszen

$$A(A^{-1}\underline{b}) = (AA^{-1})\underline{b} = E\underline{b} = \underline{b}.$$

Most kiszámoljuk az $A^{-1}\underline{b}$ megoldásvektor elemeit. A 4.2. Tétel bizonyításában láttuk, hogy

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

ahol A_{ij} az i-edik sor j-edik eleméhez tartozó adjungált aldetermináns $|A|$-ban. Így

$$A^{-1}\underline{b} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1k} & A_{2k} & \cdots & A_{nk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{D}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n b_i A_{i1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n b_i A_{ik} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n b_i A_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D_1}{D} \\ \vdots \\ \frac{D_k}{D} \\ \vdots \\ \frac{D_n}{D} \end{pmatrix},$$

hiszen $\sum_{i=1}^n b_i A_{ik}$ a D_k determináns k-adik oszlop szerinti kifejtése, $k = 1, \ldots, n$. ■

5.9. Következmény. *Ha $A\underline{x} = \underline{0}$ olyan homogén lineáris egyenletrendszer, melynek mátrixa négyzetes, és van triviálistól különböző megoldása, akkor $|A| = 0$.*

Bizonyítás. Ha $|A| \neq 0$, akkor a Cramer-szabály szerint az egyenletrendszernek egyetlen megoldása lenne, a triviális, ami ellentmond a feltevésnek. ■

5.10. Definíció. Ha $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer, akkor azt mondjuk, hogy az $A\underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer az $A\underline{x} = \underline{b}$ *egyenletrendszerhez tartozó homogén lineáris egyenletrendszer.*

5.11. Tétel. *Legyen $A\underline{x} = \underline{b}$ egy lineáris egyenletrendszer, és $A\underline{x} = \underline{0}$ a hozzá tartozó homogén lineáris egyenletrendszer. Érvényesek a következők:*

(5.11.1) Ha $\underline{c}$ és $\underline{d}$ megoldása $A\underline{x} = \underline{b}$-nek, akkor $\underline{c} - \underline{d}$ megoldása $A\underline{x} = \underline{0}$-nak.

(5.11.2) Ha $\underline{c}, \underline{d}$ megoldása $A\underline{x} = \underline{0}$-nak és λ tetszőleges skalár, akkor $\underline{c} + \underline{d}$ és $\lambda\underline{c}$ is megoldása $A\underline{x} = \underline{0}$-nak (azaz homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmaza zárt az összeadásra és tetszőleges skalárral való szorzásra).

(5.11.3) Legyen $\underline{c}_0$ megoldása $A\underline{x} = \underline{b}$-nek. Ha $\underline{d}$ tetszőleges megoldása $A\underline{x} = \underline{0}$-nak, akkor $\underline{c}_0 + \underline{d}$ is megoldása $A\underline{x} = \underline{b}$-nek. Fordítva, az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer tetszőleges $\underline{c}$ megoldásához van az $A\underline{x} = \underline{0}$ egyenletrendszernek olyan $\underline{d}$ megoldása, hogy $\underline{c} = \underline{c}_0 + \underline{d}$.

Bizonyítás. (5.11.1) Ha $\underline{c}$ és $\underline{d}$ megoldása $A\underline{x} = \underline{b}$-nek, akkor

$$A(\underline{c} - \underline{d}) = A\underline{c} - A\underline{d} = \underline{b} - \underline{b} = \underline{0}.$$

(5.11.2) Ha $\underline{c}, \underline{d}$ megoldása $A\underline{x} = \underline{0}$-nak és λ egy skalár, akkor

$$A(\underline{c} + \underline{d}) = A\underline{c} + A\underline{d} = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0} \quad \text{és} \quad A(\lambda\underline{c}) = \lambda(A\underline{c}) = \lambda\underline{0} = \underline{0}.$$

(5.11.3) Ha $\underline{c}_0$ megoldása $A\underline{x} = \underline{b}$-nek, $\underline{d}$ pedig $A\underline{x} = \underline{0}$-nak, akkor

$$A(\underline{c}_0 + \underline{d}) = A\underline{c}_0 + A\underline{d} = \underline{b} + \underline{0} = \underline{b}.$$

Ha $\underline{c}_0$ és $\underline{c}$ megoldása $A\underline{x} = \underline{b}$-nek, akkor $\underline{d} = \underline{c} - \underline{c}_0$ megoldása $A\underline{x} = \underline{0}$-nak, és $\underline{c} = \underline{c}_0 + \underline{d}$. ■

6. Vektortér, altér, generálás

6.1. Definíció. Legyen T számtest, V pedig egy nemüres halmaz, melyen értelmezve van egy összeadásnak nevezett kétváltozós művelet, mely bármely két $u, v \in V$ elemhez hozzárendel egy $u + v$-vel jelölt V-beli elemet. Továbbá minden $\lambda \in T$-hez tartozik egy V-n értelmezett egyváltozós művelet, mely V tetszőleges u eleméhez hozzárendeli V egy λu-val jelölt elemét (adott λ esetén ezt a műveletet λ-val való szorzásnak nevezzük). Az említett műveletekkel ellátott V halmazt *T feletti vektortér*nek, elemeit pedig *vektorok*nak nevezzük, ha teljesülnek az alábbi tulajdonságok, az ún. *vektortér-axiómák*:

(6.1.1) az összeadás *kommutatív*: $u + v = v + u$ minden $u, v \in V$-re;
(6.1.2) az összeadás *asszociatív*: $(u + v) + w = u + (v + w)$ minden $u, v, w \in V$-re;
(6.1.3) az összeadásra nézve létezik *egységelem*, vagyis olyan o vektor, melyre $u+o = u$ minden $u \in V$-re (később igazoljuk, hogy az összeadásra nézve egyetlen egységelem van, melyet *nullvektornak* vagy *zéróvektor*nak nevezünk és $\underline{0}$-val jelölünk);
(6.1.4) V bármely v elemének van az összeadásra vonatkozóan inverze, ún. *additív inverze*, azaz olyan v' elem, hogy $v+v' = \underline{0}$ (később igazoljuk, hogy mindegyik v vektornak egyetlen additív inverze van, amit $-v$-vel jelölünk);
(6.1.5) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ minden $\lambda \in T$ és $u, v \in V$ esetén;
(6.1.6) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$ minden $\lambda, \mu \in T$ és $u \in V$ esetén;
(6.1.7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$ minden $\lambda, \mu \in T$ és $u \in V$ esetén;
(6.1.8) $1u = u$ bármely $u \in V$-re.

6.2. Példák.

(6.2.1) A síkbeli vektorok, illetve a térbeli vektorok az $\mathbf{R}$ valós számtest felett vektorteret alkotnak, ha a vektorok összeadását és skalárral való szorzását a szokásos módon értelmezzük.
(6.2.2) Tetszőleges T számtest és $m, n \in \mathbf{N}$ esetén az $m \times n$-es mátrixok $T^{m\times n}$ halmaza a 2.3. Tétel szerint T feletti vektortér, ha a műveletek a mátrixok összeadása és a mátrixok skalárral való szorzása.
(6.2.3) A valós számsorozatok $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ halmaza vektortér $\mathbf{R}$ felett, ha a sorozatokat (a szokásos módon) tagonként adjuk össze, és skalárral úgy szorzunk, hogy a sorozat minden tagját megszorozzuk a skalárral.
(6.2.4) A valós függvények $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ halmaza vektortér $\mathbf{R}$ felett, ha a függvényeket a szokásos módon adjuk össze és szorozzuk skalárral: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ és $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, minden f, g függvény és λ skalár esetén.
(6.2.5) Tetszőleges T számtest és $n \in \mathbf{N}$ esetén a T-beli elemekből képezett elem-n-esek T^n halmaza T feletti vektortér az alábbi műveletekkel:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

és
$$\lambda(x_1,\ldots,x_n)=(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n),$$
minden $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\in T^n$ és $\lambda\in T$ esetén.

6.3. Tétel. *Tetszőleges T számtest és T feletti V vektortér esetén teljesülnek a következők:*
(6.3.1) A V-n értelmezett összeadásra vonatkozóan egyetlen egységelem van.
(6.3.2) Minden vektornak egyetlen additív inverze van.
(6.3.3) $\lambda\underline{0}=0v=\underline{0}$ bármely $\lambda\in T$ és $v\in V$ esetén.
(6.3.4) Ha $\lambda v=\underline{0}$ valamely $\lambda\in T$ és $v\in V$ esetén, akkor $\lambda=0$ vagy $v=\underline{0}$.
(6.3.5) $(-\lambda)v=\lambda(-v)=-(\lambda v)$ bármely $\lambda\in T$ és $v\in V$ esetén.

Bizonyítás. A (6.3.1) állítás igazolásához elég megmutatni azt, hogy ha o_1 és o_2 is a vektor összeadásra nézve egységelem, akkor $o_1=o_2$. Ez pedig igaz, mert $o_1=o_1+o_2=o_2$ (az első egyenlőség azért teljesül, mert o_2 egységelem, a második pedig azért, mert o_1 egységelem). Ha valamely u vektornak u_1 és u_2 is additív inverze, akkor $u_1=u_1+\underline{0}=u_1+(u+u_2)=(u_1+u)+u_2=\underline{0}+u_2=u_2$, amiből következik (6.3.2). Ha $v\in V$ és $\lambda\in T$, akkor a vektortér-axiómákat felhasználva kapjuk, hogy
$$\lambda\underline{0}=\lambda\underline{0}+\underline{0}=\lambda\underline{0}+(\lambda\underline{0}+(-\lambda\underline{0}))=(\lambda\underline{0}+\lambda\underline{0})+(-\lambda\underline{0})=$$
$$=\lambda(\underline{0}+\underline{0})+(-\lambda\underline{0})=\lambda\underline{0}+(-\lambda\underline{0})=\underline{0}$$
és
$$0v=0v+\underline{0}=0v+(0v+(-0v))=(0v+0v)+(-0v)=$$
$$=(0+0)v+(-0v)=0v+(-0v)=\underline{0}.$$
Ezzel a (6.3.3) állítást is igazoltuk. A (6.3.4) állítás bizonyításához elég a következőt belátni: ha $\lambda v=\underline{0}$ és $\lambda\neq 0$, akkor $v=\underline{0}$. Ez pedig igaz, mert ha $\lambda v=\underline{0}$ és $\lambda\neq 0$, akkor (6.3.3)-at felhasználva kapjuk, hogy
$$v=1v=\left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right)v=\frac{1}{\lambda}(\lambda v)=\frac{1}{\lambda}\underline{0}=\underline{0}.$$
Végül ha $v\in V$ és $\lambda\in T$, akkor
$$\lambda v+(-\lambda)v=(\lambda+(-\lambda))v=0v=\underline{0}$$
és
$$\lambda v+\lambda(-v)=\lambda(v+(-v))=\lambda\underline{0}=\underline{0},$$
amiből következik, hogy $(-\lambda)v$ és $\lambda(-v)$ is λv additív inverze, azaz $-\lambda v$. Ez igazolja (6.3.5)-öt. ∎

6.4. Definíció. Legyen V vektortér a T számtest felett. Értelmezzük a vektorok különbségét:

$$u - v = u + (-v)$$

minden $u, v \in V$-re.

6.5. Tétel. *Legyen V vektortér a T számtest felett. Tetszőleges $\lambda, \mu \in T$ és $u, v \in V$ esetén*

$$\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v \quad \text{és} \quad (\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u.$$

Bizonyítás. Ha $\lambda, \mu \in T$ és $u, v \in V$, akkor az axiómákat és (6.3.5)-öt felhasználva kapjuk, hogy

$$\lambda(u - v) = \lambda(u + (-v)) = \lambda u + \lambda(-v) = \lambda u + (-\lambda v) = \lambda u - \lambda v$$

és

$$(\lambda - \mu)u = (\lambda + (-\mu))u = \lambda u + (-\mu)u = \lambda u + (-\mu u) = \lambda u - \mu u.$$

■

6.6. Definíció. Egy T számtest feletti V vektortér valamely nemüres U részhalmazát *altér*nek nevezzük, ha U vektorteret alkot T felett azzal a vektor összeadással és a vektorok T-beli számokkal való szorzásával, melyet ugyanúgy kell elvégezni, mint a V vektortérben (azaz U-n az összeadás, illetve a skalárral való szorzás nem más, mint a V-beli összeadás, illetve skalárral való szorzás U-ra való megszorítása).

6.7. Tétel. *Legyen V vektortér a T számtest felett.*

(6.7.1) Ha U altér V-ben, akkor U nullvektora megegyezik V nullvektorával, és U bármely elemének U-beli additív inverze ugyanaz, mint a V-beli additív inverze.

(6.7.2) A V vektortér valamely nemüres U részhalmaza akkor és csak akkor altér, ha zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra, azaz tetszőleges $u, v \in U$ és $\lambda \in T$ esetén $u + v, \lambda u \in U$.

(6.7.3) Alterek metszete is altér.

Bizonyítás. (6.7.1) Ha U altér és $v \in U$, akkor felhasználva azt, hogy a skalárral való szorzást ugyanúgy kell elvégezni az altérben, mint V-ben, azt kapjuk, hogy

$$\underline{0} = 0v \in U \quad \text{és} \quad -v = (-1)v \in U.$$

Tehát U tartalmazza V nullvektorát és minden elemének V-beli additív inverzét. Világos, hogy $\underline{0}$ egységelem az összeadásra nézve az U altérben is. Mivel az altérben is egyetlen egységelem van az összeadásra nézve, ezért az U altér nullvektora is $\underline{0}$. Világos, hogy ha $v \in U$, akkor $-v \in U$ a v vektor additív inverze az altérben is.

(6.7.2) Legyen U nemüres részhalmaza V-nek. Ha U altér, akkor zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve, mert az altérben a vektorok összeadását és skalárral való szorzását ugyanúgy kell elvégezni, mint a V vektortérben. Fordítva, tegyük fel, hogy U zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra. Világos, hogy ekkor az összeadás és a skalárral való szorzás U-ra való megszorítása is teljesíti a (6.1.1), (6.1.2), (6.1.5)–(6.1.8) axiómákat. A (6.7.1) bizonyításában leírtakkal megegyezően most is belátható, hogy $\underline{0} \in U$, és $-v \in U$ minden $v \in U$ esetén. Ezért az összeadás U-ra való megszorítása teljesíti a (6.1.3) és (6.1.4) axiómákat is.

(6.7.3) Az álítást az egyszerűség kedvéért két altérre igazoljuk. Legyen U_1 és U_2 két altér. A (6.7.2) szerint elég azt megmutatni, hogy $U_1 \cap U_2$ nemüres, és zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra. A (6.7.1) szerint $\underline{0} \in U_1, U_1$, s ezért $\underline{0} \in U_1 \cap U_1$. Tehát $U_1 \cap U_2$ nemüres. Ha $u, v \in U_1 \cap U_2$ és $\lambda \in T$, akkor $u, v \in U_1, U_2$, és ezért $u+v, \lambda u \in U_1, U_2$, amiből $u+v, \lambda u \in U_1 \cap U_2$ következik. ■

6.8. Példák

(6.8.1) Minden V vektortérben $\{\underline{0}\}$ és V altér. Őket *triviális altereknek* hívjuk. A nemtriviális altereket *valódi altereknek* nevezzük. Ha lerögzítünk a térben egy Descartes-féle koordinátarendszert, akkor minden térbeli vektor megegyezik egy origóból kiinduló ún. helyvektorral, melyet egyértelműen meghatároz a végpontja. Így a tér minden pontja egy térbeli vektort határoz meg. Ha azonosítjuk a tér pontjait a megfelelő vektorral, akkor a térbeli vektorok $\mathbf{R}$ feletti vektorterében altér minden origón átmenő egyenes és sík, és nincs más valódi altér.

(6.8.2) A sorozatok vektorterében altér azoknak a sorozatoknak a halmaza, melyek i-edik tagja nulla minden $i \in I$-re, ahol $I \subseteq \mathbf{N}$ egy rögzített halmaz. Altér azoknak a sorozatoknak a halmaza is, melyeknek csak véges sok tagja nem nulla.

(6.8.3) A valós függvények vektorterében altér a polinomok halmaza, és altér azoknak az $f(x)$ függvényeknek a halmaza, melyekre $f(x) = 0$ minden $x \in X$ esetén, ahol $X \subseteq \mathbf{R}$ egy rögzített halmaz.

6.9. Definíció. Legyen V vektortér a T számtest felett, $v_1, \ldots, v_n \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T$. Ekkor a

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

vektort a $v_1, \ldots, v_n$ vektorok $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ együtthatókkal képezett *lineáris kombináció*jának nevezzük. A szumma jel segítségével felírva $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, akkor triviális lineáris kombinációról beszélünk. Megengedjük a nulla tagú lineáris kombinációt is: ha $n = 0$, akkor a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ lineáris kombináció megállapodás szerint a nullvektor.

Tetszőleges $X \subseteq V$ részhalmaz esetén jelölje $[X]$ az X-beli vektorok összes lineáris kombinációjának halmazát, azaz

$$[X] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \colon\ n \geq 0,\ v_1, \ldots, v_n \in X,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T \right\}.$$

Mivel a nulla tagú lineáris kombináció a nullvektor, ezért $\underline{0} \in [X]$ minden $X \subseteq V$ esetén, speciálisan $[\emptyset] = \{\underline{0}\}$. Ha $[X] = V$, akkor azt mondjuk, hogy X *generátorrendszer* a V vektortérben, illetve X *kifeszíti* vagy *generálja* a V vektorteret. Ha $X = \{v_1, \ldots, v_k\}$, akkor a $[\{v_1, \ldots, v_k\}]$ helyett a $[v_1, \ldots, v_k]$ jelölést is használjuk.

6.10. Tétel. *A T számtest feletti V vektortér bármely X részhalmaza esetén $[X]$ a legszűkebb X-et tartalmazó altér V-ben. Továbbá $X \subseteq [X] = [[X]]$ minden $X \subseteq V$ esetén, ha $X \subseteq Y$, akkor $[X] \subseteq [Y]$.*

Bizonyítás. Ha $u, v \in [X]$ és $\lambda \in T$, akkor

$$u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \quad \text{és} \quad v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$$

valamely $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n \in X$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_n \in T$ esetén. Ezért

$$u + v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i \in [X] \quad \text{és} \quad \lambda u = \sum_{i=1}^{m} (\lambda \lambda_i) u_i \in [X],$$

és így a (6.7.2) szerint $[X]$ altér. Továbbá $X \subseteq [X]$, ugyanis minden $v \in X$-re $v = 1v$, mint egy tagú lineáris kombináció, eleme $[X]$-nak. Az, hogy $[X]$ a legszűkebb X-et tartalmazó altér, pontosan azt jelenti, hogy minden X-et tartalmazó altér tartalmazza $[X]$-át. Ez valóban igaz, mert ha U olyan altér, hogy $X \subseteq U$, és $v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i \in [X]$, ahol $n \geq 0$, $v_1, \ldots, v_n \in X$, akkor $v \in U$, mivel U zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra.

Láttuk, hogy $X \subseteq [X]$. Ebből X helyére $[X]$-et írva kapjuk, hogy $[X] \subseteq [[X]]$. A vektortér műveletek tulajdonságait felhasználva könnyen belátható, hogy ha $[X]$-beli vektorokból, azaz X-beli vektorok lineáris kombinációiból újabb lineáris kombinációt képezünk, akkor a kapott vektor ugyancsak X-beli vektorok lineáris kombinációja. Ezért $[[X]] \subseteq [X]$, és így $[[X]] = [X]$.

Végül, ha $X \subseteq Y$ és $v \in [X]$, azaz $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ valamely $v_1, \ldots, v_n \in X$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T$ esetén, akkor $v_1, \ldots, v_n \in Y$ miatt $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in [Y]$. Tehát $[X] \subseteq [Y]$.■

6.11. Definíció. Ha U_1 és U_2 altér valamely vektortérben, akkor az

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2\colon\ u_1 \in U_1 \text{ és } u_2 \in U_2\}$$

halmazt az U_1 és U_2 *alterek összegének* nevezzük.

6.12. Tétel. *Ha U_1 és U_2 altér valamely vektortérben, akkor $U_1 + U_2$ is altér, mégpedig $U_1 + U_2 = [U_1 \cup U_2]$.*

Bizonyítás. Legyen U_1 és U_2 altér a T számtest feletti vektortérben, $u, v \in U_1 + U_2$ és $\lambda \in T$. Ekkor $u = u_1 + u_2$ és $v = v_1 + v_2$ valamely $u_1, v_1 \in U_1$ és $u_2, v_2 \in U_2$ esetén. Ezért

$$u + v = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \in U_1 + U_2$$

és

$$\lambda u = \lambda(u_1 + u_2) = \lambda u_1 + \lambda u_2 \in U_1 + U_2.$$

Tehát $U_1 + U_2$ altér.

Az $[U_1 \cup U_2]$ altér definíciójából látszik, hogy $U_1 + U_2 \subseteq [U_1 \cup U_2]$. Másrészt világos, hogy $U_1, U_2 \subseteq U_1 + U_2$, mert $\underline{0} \in U_1, U_2$. Így $U_1 \cup U_2 \subseteq U_1 + U_2$. Mivel $[U_1 \cup U_2]$ a legszűkebb olyan altér, mely tartalmazza $U_1 \cup U_2$-t, azért $[U_1 \cup U_2] \subseteq U_1 + U_2$. ∎

7. Lineárisan független és függő vektorrendszerek

7.1. Definíció. Legyen V vektortér a T számtest felett. A vektorokból képezett véges rendszereket *vektorrendszer*eknek nevezzük. A vektorrendszer elemei ismétlődhetnek, de sorrendjük nem lényeges. A V vektortér $v_1, \ldots, v_k$ vektorrendszere *lineárisan független*, ha valahányszor $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = \underline{0}$, mindannyiszor $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$ (azaz a $v_1, \ldots, v_k$ vektorrendszer valamely lineáris kombinációja csak akkor a $\underline{0}$ vektor, ha a lineáris kombináció triviális). Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy a $v_1, \ldots, v_k$ vektorrendszer *lineárisan (össze)függő*. Az üres vektorrendszer megállapodás szerint lineárisan független.

7.2. Tétel. *Egy T számtest feletti V vektortér bármely $v_1, \ldots, v_k$ vektorrendszerére a következő három állítás ekvivalens:*

(7.2.1) A $v_1, \ldots, v_k$ vektorrendszer lineárisan függő.

(7.2.2) Van olyan $i \in \{1, \ldots, k\}$, hogy $v_i \in [v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k]$.

(7.2.3) Van olyan $i \in \{1, \ldots, k\}$, hogy $v_i \in [v_1, \ldots, v_{i-1}]$.

Bizonyítás. A (7.2.3) $\Rightarrow$ (7.2.2) állítás nyilvánvaló.

(7.2.2) $\Rightarrow$ (7.2.1). Ha valamely i-re $v_i \in [v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k]$, azaz

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_k v_k,$$

valamely $\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_k \in T$ esetén, akkor

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + (-1) v_i + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_k v_k = 0$$

miatt $v_1, \ldots, v_k$ lineárisan függő.

(7.2.1) $\Rightarrow$ (7.2.3). Ha $v_1, \ldots, v_k$ lineárisan függő, akkor van olyan nem csupa nulla $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in T$, hogy $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = 0$. Ha λ_i a legnagyobb indexű nem nulla együttható, akkor

$$v_i = -\frac{1}{\lambda_i}(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1}),$$

és ezért $v_i \in [v_1, \ldots, v_{i-1}]$. ∎

Akár a definíciót, akár a 7.2. Tételt figyelembe véve könnyen belátható, hogy egyelemű vektorrendszer pontosan akkor linárisan függő, ha vektora a nullvektor, kételemű vektorrendszer pedig pontosan akkor lineárisan függő, ha valamelyik vektora a másik skalárszorosa. A térbeli vektorok terében három vektor pontosan akkor lineárisan független, ha nem esnek egy síkba.

7.3. Tétel. *Bármely vektortérben érvényesek a következők:*

(7.3.1) Lineárisan független vektorrendszer minden részrendszere lineárisan független.

(7.3.2) Lineárisan függő vektorrendszert tartalmazó bármely vektorrendszer lineárisan függő.

(7.3.3) Ha $v_1, \ldots, v_k$ lineárisan független és $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}$ lineárisan függő, akkor $v_{k+1} \in [v_1, \ldots, v_k]$.

(7.3.4) Ha $v_1, \ldots, v_k$ lineárisan független, akkor bármely $v \in [v_1, \ldots, v_k]$ vektor felírása $v_1, \ldots, v_k$ lineáris kombinációjaként egyértelmű.

Bizonyítás. (7.3.2) Elég azt megmutatni, hogy lineárisan függő vektorrendszerből egy vektor hozzáadásával ugyancsak lineárisan függő vektorrendszert kapunk. Ha $v_1, \ldots, v_k$ lineárisan függő vektorrendszer, akkor a 7.2. Tétel szerint van olyan i, hogy $v_i \in [v_1, \ldots, v_{i-1}]$, és ezért $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}$ lineárisan függő minden v_{k+1} vektor esetén.

(7.3.1) Ha egy lineárisan független vektorrendszer valamely részrendszere lineárisan függő lenne, akkor (7.3.2) szerint az eredeti vektorrendszer is lineárisan függő lenne.

(7.3.3) Ha $v_1, \ldots, v_k$ lineárisan független és $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}$ lineárisan függő, akkor a 7.2. Tétel szerint $v_i \in [v_1, \ldots, v_{i-1}]$ valamely i-re, $1 \leq i \leq k+1$. Most $i = k+1$, mert ellenkező esetben ugyancsak a 7.2. Tétel szerint $v_1, \ldots, v_k$ lineárisan függő vektorrendszer lenne.

(7.3.4) Legyen $v_1, \ldots, v_k$ lineárisan független vektorrendszer, és legyen v tetszőleges vektor. Ha

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \quad \text{és} \quad v = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i$$

valamely $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_k \in T$-re, akkor

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \mu_i) v_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i - \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i = v - v = \underline{0},$$

amiből a vektorrendszer lineáris függetlensége miatt tetszőleges $i = 1, \ldots, k$-ra $\lambda_i - \mu_i = 0$, és így $\lambda_i = \mu_i$ következik. Tehát a v vektor egyféleképpen írható fel a $v_1, \ldots, v_k$ vektorrendszer lineáris kombinációjaként. ∎

7.4. Kicserélési tétel. *Legyen $u_1, \ldots, u_k$ és $v_1, \ldots, v_l$ a T számtest feletti V vektortér két vektorrendszere. Ha $u_1, \ldots, u_k$ lineárisan független és $u_1, \ldots, u_k \in [v_1, \ldots, v_l]$, akkor bármely u_i vektorhoz van olyan v_j vektor, hogy $u_1, \ldots, u_{i-1}, v_j, u_{i+1}, \ldots, u_k$ is lineárisan független.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $u_1, \ldots, u_k$ és a $v_1, \ldots, v_l$ vektorrendszerek teljesítik a tétel feltételeit. Ha az állítás nem igaz, akkor van olyan $i \in \{1, \ldots, k\}$, hogy az $u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_k, v_j$ vektorrendszer lineárisan függő minden j-re, $1 \leq j \leq l$. Ekkor (7.3.3) szerint $v_j \in [u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_k]$, $1 \leq j \leq l$, és

$$u_i \in [v_1, \ldots, v_l] \subseteq [u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_k],$$

amiből a 7.2. Tétel szerint azt kapjuk, hogy $u_1, \ldots, u_k$ lineárisan függő. Tehát az a feltevésünk, hogy a tétel állítása nem igaz, ellentmondást eredményezett. ∎

7.5. Következmény. *Legyen* $u_1, \ldots, u_k$ *és* $v_1, \ldots, v_l$ *a* T *számtest feletti* V *vektortér két vektorrendszere. Ha* $u_1, \ldots, u_k$ *lineárisan független és* $u_1, \ldots, u_k \in [v_1, \ldots, v_l]$, *akkor* $k \leq l$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $u_1, \ldots, u_k$ és a $v_1, \ldots, v_l$ vektorrendszerek teljesítik a következmény feltételeit. A kicserélési tétel szerint van olyan vektor a második vektorrendszerben, mellyel u_1-et kicserélve újra lineárisan független vektorrendszert kapunk. Az egyszerűség kedvéért legyen ez a vektor v_1. Tehát

$$v_1, u_2, \ldots, u_k$$

lineárisan független. Világos, hogy $u_2, \ldots, u_k, v_1 \in [v_1, \ldots, v_l]$. Ha $k \geq 2$, akkor a kicserélési tételt újra alkalmazva kapunk olyan v_j-t — az egyszerűség kedvéért legyen most $j = 2$ (a lineáris függetlenség miatt $v_j \neq v_1$) — , hogy

$$v_1, v_2, u_3, \ldots, u_k$$

lineárisan független. Ha $k \geq 3$, akkor a kicserélési tételt újra alkalmazva kapunk olyan v_j-t — az egyszerűség kedvéért legyen most $j = 3$ (a lineáris függetlenség miatt $v_j \neq v_1, v_2$) — , hogy

$$v_1, v_2, v_3, u_4, \ldots, u_k$$

lineárisan független. Ezt az eljárást addig folytathatjuk, amíg az u_k vektort is ki nem cseréltük. Ezért $k \leq l$. ■

8. Véges dimenziós vektorterek

8.1. Definíció. Egy T számtest feletti V vektortér *véges dimenziós*, ha van véges generátorrendszere. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy a vektortér *végtelen dimenziós*. A V vektortér X generátorrendszerét *minimális generátorrendszer*nek nevezzük, ha bármely $v \in X$ esetén $X \setminus \{v\}$ már nem generátorrendszer. Azt mondjuk, hogy $v_1, \ldots, v_k \in V$ *maximális lineárisan független vektorrendszer*, ha lineárisan független vektorrendszer, és minden $v \in V$ esetén $v_1, \ldots, v_k, v$ már lineárisan függő. A lineárisan független generátorrendszereket a vektortér *bázis*ainak nevezzük.

8.2. Tétel. *Egy T számtest feletti V vektortér bármely $v_1, \ldots, v_k$ vektorrendszerére a következő három állítás ekvivalens:*

(8.2.1) $v_1, \ldots, v_k$ bázis.

(8.2.2) $v_1, \ldots, v_k$ minimális generátorrendszer.

(8.2.3) $v_1, \ldots, v_k$ maximális lineárisan független vektorrendszer.

Bizonyítás. (8.2.1) $\Rightarrow$ (8.2.2). Ha a $v_1, \ldots, v_k$ bázis nem minimális generátorrendszer, akkor valamelyik vektorát, mondjuk v_i-t, elhagyva újra generátorrendszert kapunk, amiből $v_i \in [v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k]$ következik. Ez pedig lehetetlen, hiszen $v_1, \ldots, v_k$ lineárisan független.

(8.2.2) $\Rightarrow$ (8.2.3). Ha $v_1, \ldots, v_k$ minimális generátorrendszer, akkor lineárisan független, mert ellenkező esetben valamelyik vektora a többi lineáris kombinációja, és ha ezt a vektort elhagyjuk, akkor újra generátorrendszert kapunk. Továbbá $v_1, \ldots, v_k$ maximális lineárisan független vektorrendszer, mert generátorrendszer, és ezért bármely bővítése lineárisan függő.

(8.2.3) $\Rightarrow$ (8.2.1). Ha $v_1, \ldots, v_k$ maximális lineárisan független vektorrendszer, akkor bármely $v \in V$ esetén $v_1, \ldots, v_k, v$ lineárisan függő, és ezért (7.3.3) szerint $v \in [v_1, \ldots, v_k]$. Tehát $v_1, \ldots, v_k$ generátorrendszer, és ezért bázis. ∎

8.3. Tétel. *Véges dimenziós vektortérben minden lineárisan független vektorrendszer kiegészíthető bázissá, és minden generátorrendszer tartalmaz bázist. Továbbá bármely két bázis ugyanannyi elemű.*

Bizonyítás. Legyen a T számtest feletti V vektortér véges dimenziós. Ekkor V-nek van véges, mondjuk l elemű generátorrendszere. Legyen $v_1, \ldots, v_k$ lineárisan független vektorrendszer V-ben. Ha $v_1, \ldots, v_k$ nem maximális lineárisan független vektorrendszer, akkor alkalmas vektorral bővítve újra lineárisan független vektorrendszert kapunk. Ha ez sem maximális lineárisan független vektorrendszer, akkor tovább bővíthetjük úgy, hogy a bővítés ismét lineárisan független. Mivel a 7.5. Következmény szerint V minden lineárisan független vektorrendszere legfeljebb l elemű, ezért ezzel a bővítési eljárással véges sok lépésben maximális lineárisan független vektorrendszert kapunk, ami a 8.2. Tétel szerint bázis.

Legyen most $v_1, \dots, v_k$ tetszőleges generátorrendszer V-ben. Ha ez a generátorrendszer nem minimális, akkor alkalmas vektorának elhagyásával újra generátorrendszert kapunk. Ha ez sem minimális generátorrendszer, akkor tovább szűkítve ismét generátorrendszert kapunk. Ezzel a szűkítési eljárással legfeljebb k lépésben minimális generátorrendszert kapunk, ami ugyancsak a 8.2. Tétel szerint bázis. Végül, ha $u_1, \dots, u_k$ és $v_1, \dots, v_l$ bázis V-ben, akkor a 7.5. Következmény szerint $k \leq l$ és $l \leq k$, és ezért $k = l$. ∎

8.4. Definíció. Ha V véges dimenziós vektortér, akkor bázisainak (közös) elemszámát a *vektortér dimenziójá*nak nevezzük, és $\dim V$-vel jelöljük. Ha $e_1, \dots, e_n$ bázis V-ben és $v = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$, akkor a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ skalárokat, illetve a $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ szám-n-est a v vektor $e_1, \dots, e_n$ *bázishoz tartozó koordinátái*nak, illetve *koordinátasorá*nak nevezzük. (A (7.3.4) állítás szerint a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ skalárokat a v vektor és az $e_1, \dots, e_n$ bázis egyértelműen meghatározza.)

Például a síkbeli vektorok vektortere 2-dimenziós, mert két nem egy egyenesen levő vektor a síkban bázist alkot, a térbeli vektorok vektortere pedig 3-dimenziós, mert három nem egy síkban levő vektor a térben bázist alkot. A T számtest feletti (6.2.5)-ben megadott T^n vektortérben az

$$(1, 0, \dots, 0, 0), (0, 1, \dots, 0, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)$$

vektorrendszer bázis, az ún. *standard bázis*, és a vektortér n-dimenziós. Ebben a bázisban a $(\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_n) \in T^n$ vektor koordinátái rendre $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Ugyanúgy látható, hogy az $m \times n$-es mátrixok $T^{m \times n}$ vektorterében azon E_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, mátrixok, amelyekben az i-edik sor j-edik eleme 1, a többi elem 0, bázist alkotnak, és így a $T^{m \times n}$ vektortér mn-dimenziós.

8.5. Tétel. *Ha V véges dimenziós vektortér, akkor V-ben minden* $\dim V$ *elemű generátorrendszer és minden* $\dim V$ *elemű lineárisan független vektorrendszer bázis.*

Bizonyítás. Ha egy generátorrendszer $\dim V$ elemű, akkor a 8.3. Tétel szerint tartalmaz bázist, mely ugyancsak $\dim V$ elemű, és ezért megegyezik a generátorrendszerrel. Ha egy lineárisan független vektorrendszer $\dim V$ elemű, akkor a 8.3. Tétel szerint bővíthető bázissá, mely ugyancsak $\dim V$ elemű, és ezért megegyezik a lineárisan független vektorrendszerrel. ∎

8.6. Tétel. *Legyen U altér a V véges dimenziós vektortérben. Ekkor U is véges dimenziós, és $\dim U \leq \dim V$. Továbbá, $\dim U = \dim V$ akkor és csak akkor, ha $U = V$, és $\dim U = 0$ akkor és csak akkor, ha $U = \{\underline{0}\}$.*

Bizonyítás. Minden U-beli lineárisan független vektorrendszer V-ben is lineárisan független vektorrendszer, így a 7.5. Következmény szerint legfeljebb $\dim V$ elemű. Ezért az üres halmaz bővíthető U-ban maximális lineárisan független vektorrendszerré, ami bázis U-ban. Tehát U véges dimenziós, és a 7.5. Következmény szerint $\dim U \leq \dim V$. Világos, hogy ha $U = V$, akkor $\dim U = \dim V$, ha pedig $U = \{\underline{0}\}$, akkor $\dim U = 0$. Fordíva, ha $\dim U = \dim V$, akkor a 8.5. Tétel szerint U minden bázisa V-ben is bázis, és ezért $U = V$. Végül pedig, ha $\dim U = 0$, akkor U-ban nincs egyelemű lineárisan független vektorrendszer, azaz nincs U-ban $\underline{0}$-tól különböző vektor. ■

8.7. Alterek dimenziótétele. *Ha U és V véges dimenziós altér valamely vektortérben, akkor $U \cap V$ és $U + V$ is véges dimenziós, és*

$$\dim (U + V) = \dim U + \dim V - \dim (U \cap V).$$

Bizonyítás. A 6.7. és a 6.12. Tételekben láttuk, hogy $U \cap V$ és $U + V$ is altér. Mivel $U \cap V$ altér U-ban is, ezért a 8.6. Tétel szerint $U \cap V$ véges dimenziós.

Legyen $u_1, \ldots, u_k$ az $U \cap V$ altér bázisa. A 8.3. Tétel szerint ez a vektorrendszer kiegészíthető U és V bázisává is. Legyen $u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_m$ az U altér, $u_1, \ldots, u_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ pedig a V altér bázisa. A tétel dimenziókra vonatkozó állításának igazolásához elég megmutatni, hogy

$$u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_m, v_{k+1}, \ldots, v_n$$

bázis $U + V$-ben. Mivel tartalmazza U és V bázisát, ezért generátorrendszere $U + V$-nek. Ha valamely $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_{k+1}, \ldots, \mu_n$ skalárok esetén

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k + \lambda_{k+1} u_{k+1} + \ldots + \lambda_m u_m + \mu_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \mu_n v_n = \underline{0},$$

akkor

$$u = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k + \lambda_{k+1} u_{k+1} + \ldots + \lambda_m u_m = -\mu_{k+1} v_{k+1} - \ldots - \mu_n v_n \in U \cap V,$$

és ezért vannak olyan $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_k$ skalárok, hogy $u = \lambda'_1 u_1 + \ldots + \lambda'_k u_k$. Ekkor

$$\lambda'_1 u_1 + \ldots + \lambda'_k u_k + \mu_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \mu_n v_n = \underline{0},$$

amiből az $u_1, \ldots, u_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ vektorrendszer lineáris függetlensége miatt $\lambda'_1 = \ldots = \lambda'_k = \mu_{k+1} = \ldots = \mu_n = 0$, és így

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k + \lambda_{k+1} u_{k+1} + \ldots + \lambda_m u_m = 0$$

adódik. Mivel az $u_1, \ldots, u_m$ vektorrendszer lineárisan független, ebből $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_m = 0$ következik. Tehát az

$$u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_m, v_{k+1}, \ldots, v_n$$

vektorrendszer lineárisan független, és ezért $U + V$ bázisa. ■

8.8. Definíció. Azt mondjuk, hogy az r nemnegatív egész szám a T számtest feletti V vektortér $v_1, \dots, v_k$ *vektorrendszerének rangja*, ha van a vektorrendszernek r-elemű lineárisan független részrendszere, és minden r-nél több elemű részrendszere lineárisan függő. Jele: $\mathrm{r}(v_1, \dots, v_k)$.

8.9. Tétel. *Egy T számtest feletti V vektortér bármely $v_1, \dots, v_k$ vektorrendszere esetén* $\mathrm{r}(v_1, \dots, v_k) = \dim [v_1, \dots, v_k]$.

Bizonyítás. Legyen $r = \mathrm{r}(v_1, \dots, v_k)$, és az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $v_1, \dots, v_r$ lineárisan független. Elegendő azt megmutatni, hogy $v_1, \dots, v_r$ generátorrendszer, és így bázis a $[v_1, \dots, v_k]$ altérben. Mivel $v_1, \dots, v_k$-ban nincs r-nél több elemű lineárisan független részrendszer, $v_1, \dots, v_r, v_i$ lineárisan függő minden $i \in \{r+1, \dots, k\}$ esetén. Ezért a (7.3.3) szerint $v_i \in [v_1, \dots, v_r]$ minden i-re. Tehát az altér generátorelemei előállnak $v_1, \dots, v_r$ lineáris kombinációjaként, amiből következik, hogy $v_1, \dots, v_r$ generátorrendszer a $[v_1, \dots, v_k]$ altérben. ∎

8.10. Definíció. Két vektorrendszert *ekvivalensnek* nevezünk, ha mindkét rendszer bármelyik vektora megkapható a másik vektorrendszer lineáris kombinációjaként. Vegyük észre, hogy ez pontosan azt jelenti, hogy a két vektorrendszer ugyanazt az alteret generálja.

A vektorrendszer rangjának meghatározásánál fontos szerepet játszanak a vektorrendszerek ún. elemi átalakításai.

8.11. Definíció. A vektorrendszerek *elemi átalakításai* a következők:

(8.10.1) A vektorrendszer valamelyik tagját helyettesítjük a λ-szorosával, ahol λ egy nullától különböző skalár.

(8.10.2) A vektorrendszer valamelyik tagját helyettesítjük ezen vektor és a vektorrendszer egy másik vektora (tetszőleges) skalárszorosának összegével.

(8.10.3) Elhagyjuk a vektorrendszerből a nullvektorokat.

Alkalmasan választott négy elemi átalakítással egy vektorrendszer bármelyik két vektora felcserélhető. Elegendő ezt az u, v kételemű vektorrendszerre megmutatni. Adjuk hozzá u-hoz a v vektor (-1)-szeresét, majd az így kapott vektort adjuk hozzá v-hez:

$$u - v, v$$

$$u - v, u.$$

Ezután adjuk hozzá $-u$-t $u - v$-hez, majd szorozzuk meg $-v$-t -1-gyel:

$$-v, u$$

$$v, u.$$

A 8.9. Tételből, valamint a 8.10. és 8.11. Definíciókból egyszerűen kapjuk a következőt:

8.12. Következmény. *Bármely vektorrendszert az elemi átalakítások vele ekvivalens vektorrendszerbe viszik át. Ekvivalens vektorrendszerek rangja megegyezik.*

9. Mátrixok rangja.

9.1. Definíció. Legyen T számtest, $m, n \geq 1$ és $A \in T^{m\times n}$. Ekkor az A mátrix oszlopvektorai a $T^{m\times 1}$, sorvektorai pedig a $T^{1\times n}$ vektortér elemei. Az A mátrix *oszloprang*jának az oszlopvektorai rendszerének rangját, *sorrang*jának pedig a sorvektorai rendszerének rangját nevezzük. Az oszloprangot $\mathrm{r}_o(A)$, a sorrangot pedig $\mathrm{r}_s(A)$ jelöli.

Az A mátrix *r-edrendű aldeterminánsa*inak nevezzük a következőképpen kapható determinánsokat: kijelöljük a mátrix r sorát és r oszlopát, majd e sorok és oszlopok találkozásában lévő elemekből alkotott $r \times r$-es mátrix determinánsát képezzük. Azt mondjuk, hogy az A mátrix *determinánsrangja* r, ha van az A mátrixban r-edrendű nem nulla (más szóval: nemeltűnő) aldetermináns, és A-ban minden r-nél nagyobb rendű aldetermináns nulla. A determinánsrangot $\mathrm{r}_d(A)$ jelöli.

9.2. Mátrixok rangszámtétele. *Tetszőleges A mátrix esetén* $\mathrm{r}_o(A) = \mathrm{r}_s(A) = \mathrm{r}_d(A)$.

Bizonyítás. Legyen $A = (a_{ij})_{m\times n}$ egy tetszőleges mátrix. Mivel A sorvektorainak rendszere, illetve oszlopvektorainak rendszere lényegében ugyanaz, mint A^{T} oszlopvektorainak rendszere, illetve sorvektorainak rendszere, ezért

$$\mathrm{r}_s(A) = \mathrm{r}_o(A^{\mathrm{T}}) \quad \text{és} \quad \mathrm{r}_o(A) = \mathrm{r}_s(A^{\mathrm{T}}).$$

Világos, hogy ha D egy r-edrendű nemeltűnő aldetermináns az A, illetve az A^{T} mátrixban, akkor D transzponáltja r-edrendű nemeltűnő aldetermináns lesz az A^{T}, illetve az A mátrixban. Ezért

$$\mathrm{r}_d(A) = \mathrm{r}_d(A^{\mathrm{T}}).$$

A tétel bizonyításához most már elég csak azt megmutatni, hogy a mátrixok sorrangja és determinánsrangja megegyezik, mert ebből a fenti észrevételeket is figyelembe véve azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{r}_o(A) = \mathrm{r}_s(A^{\mathrm{T}}) = \mathrm{r}_d(A^{\mathrm{T}}) = \mathrm{r}_d(A).$$

A 8.12. Következmény szerint a mátrixok sorrangja nem változik a sorain végrehajtott elemi átalakítások során. Most megmutatjuk, hogy a determinánsrang sem változik. Ha a mátrix elemi átalakítása egy olyan sor elhagyása, melynek mindegyik eleme nulla, akkor a kapott mátrixnak ugyanaz a determinánsrangja, mint az eredetinek, mert a nemeltűnő aldeterminánsok egyik sora sem származhat az elhagyott sorból. A további kétfajta elemi átalakítások eredményeként kapott mátrixokból alkalmasan választott ugyanolyan típusú elemi átalakítással visszakaphatjuk az eredeti mátrixot. Ezért annak igazolásához, hogy ezek alkalmazása során sem változik a determinánsrang, elég azt megmutatni, hogy a determinánsrang nem csökken.

Legyen A determinánsrangja r, és legyenek $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq m$ és $1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq n$ az A mátrix olyan sorai és oszlopai, melyek által meghatározott D aldetermináns nem nulla:

$$D = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_r} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_r j_1} & a_{i_r j_2} & \cdots & a_{i_r j_r} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Hajtsunk végre egy említett típusú elemi átalakítást az A mátrix sorain, és jelölje $\hat{A}$ a kapott mátrixot, $\hat{D}$ pedig az $\hat{A}$ mátrixban az $i_1, \ldots, i_r$-edik sorok és $j_1, \ldots, j_r$-edik oszlopok által meghatározott aldeterminánst. Azt kell igazolni, hogy az $\hat{A}$ mátrix rangja legalább r. Ehhez elég azt megmutatni, hogy van $\hat{A}$-ban is r-edrendű nemeltűnő aldetermináns.

Ha az elemi átalakítás az A mátrix k-adik sorában lévő elemek c-vel való szorzása, $1 \leq k \leq m$, $c \neq 0$, akkor $\hat{D} = cD$ vagy $\hat{D} = D$ aszerint, hogy $k \in \{i_1, \ldots . i_r\}$ vagy sem. Tehát $\hat{A}$-ban is van r-edrendű nemeltűnő aldeterminás.

Tegyük fel most, hogy az elemi átalakítás a következő: az A mátrix k-adik sorához hozzáadjuk az l-edik sorának c-szeresét, $1 \leq k, l \leq m$, $k \neq l$ és c tetszőleges skalár. Ha $k \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$, akkor $\hat{D} = D \neq 0$. Ha $k, l \in \{i_1, \ldots, i_r\}$, akkor $\hat{D}$ megkapható D-ből úgy, hogy valamelyik sorához hozzáadjuk egy másik sorának c-szeresét. Ezért $\hat{D} = D$, és így $\hat{D}$ most sem nulla. Végül ha $k \in \{i_1, \ldots, i_r\}$ és $l \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$, akkor

$$\hat{D} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k j_1} + c a_{l j_1} & a_{k j_2} + c a_{l j_2} & \cdots & a_{k j_r} + c a_{l j_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_r j_1} & a_{i_r j_2} & \cdots & a_{i_r j_r} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k j_1} & a_{k j_2} & \cdots & a_{k j_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_r j_1} & a_{i_r j_2} & \cdots & a_{i_r j_r} \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l j_1} & a_{l j_2} & \cdots & a_{l j_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_r j_1} & a_{i_r j_2} & \cdots & a_{i_r j_r} \end{vmatrix},$$

azaz

$$\hat{D} = D + c \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l j_1} & a_{l j_2} & \cdots & a_{l j_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_r j_1} & a_{i_r j_2} & \cdots & a_{i_r j_r} \end{vmatrix}.$$

Ha $\hat{D} \neq 0$, akkor készen vagyunk. Ha $\hat{D} = 0$, akkor a fenti egyenlőségből $D \neq 0$ miatt

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l j_1} & a_{l j_2} & \cdots & a_{l j_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_r j_1} & a_{i_r j_2} & \cdots & a_{i_r j_r} \end{vmatrix} \neq 0$$

következik. Ez a determináns pedig legfeljebb a sorainak sorrendjében különbözik az $\hat{A}$ mátrix azon aldeterminánsától, melyet az $\{i_1, \ldots, i_r, l\} \setminus \{k\}$ halmazban lévő sorai és a $j_1, \ldots, j_r$ oszlopai határoznak meg. Tehát $\hat{A}$-ban most is van r-edrendű nemeltűnő aldetermínás. Ezzel igazoltuk azt, hogy a mátrixok determinánsrangja nem változik a sorokon elvégzett elemi átalakítások során.

A fenti előkészítő megfontolások után az A mátrix sorrangjának és determinánsrangjának egyenlőségét a következőképpen bizonyíthatjuk. Ha A a nullmátrix, akkor mindegyik rangja nulla, és ezért igaz az állítás. Tegyük fel, hogy A nem a nullmátrix. Ekkor az 5.4. Tétel szerint az A mátrixból a sorain végrehajtott elemi átalakításokkal egy $\tilde{A}$ $r \times n$-es lépcsős alakú mátrix kapható (azaz olyan $\tilde{A}$ mátrix, mely rendelkezik az (5.3.1), (5.3.2) és (5.3.3) tulajdonságokkal):

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & a & 0 & \cdots & b & 0 & \cdots & c & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & d & 0 & \cdots & e & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & f & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots \end{pmatrix}.$$

Az előzőleg igazoltak szerint

$$\mathrm{r}_s(A) = \mathrm{r}_s(\tilde{A}) \ \text{ és } \ \mathrm{r}_d(A) = \mathrm{r}_d(\tilde{A}).$$

Az $\tilde{A}$ mátrix determinánsrangja r, mert ha töröljük A azon oszlopait, melyek nem tartalmazzák egyik sor első nem nulla elemét sem, akkor az $r \times r$-es egységmátrixot kapjuk, melynek a determinánsa nem nulla. Az $\tilde{A}$ mátrix sorrangja is r, mert sorvektorainak rendszere lineárisan független. Valóban, az A mátrix sorvektorainak $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ együtthatókkal képezett lineáris kombinációja

$$(\ldots, \lambda_1, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_3 \ldots, \lambda_r, \ldots)$$

alakú, ami csak a $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_r = 0$ esetben a nullvektor. Tehát

$$\mathrm{r}_s(A) = \mathrm{r}_s(\tilde{A}) = r = \mathrm{r}_d(\tilde{A}) = \mathrm{r}_d(A).$$

■

9.3. Definíció. A rangszámtétel szerint tetszőleges A mátrix oszloprangja, sorrangja és determinánsrangja megegyezik. Ezt a számot egyszerűen az *A mátrix rangjának* nevezzük, és $\mathrm{r}(A)$-val jelöljük.

Az alábbi két állítás a definíciók és a mátrixok rangszámtételének közvetlen következménye.

9.4. Következmény. *Tetszőleges $n \times n$-es A mátrix esetén a következő állítások ekvivalensek:*

(9.4.1) $|A| \neq 0$.
(9.4.2) A oszlopvektorainak rendszere lineárisan független.
(9.4.3) A sorvektorainak rendszere lineárisan független.

Bizonyítás. (9.4.1) $\Rightarrow$ (9.4.2). Ha $|A| \neq 0$, akkor a determinánsrang n, így az oszloprang is n, és ezért az n elemű oszlopvektorrendszer lineárisan független.

(9.4.2) $\Rightarrow$ (9.4.3). Ha az oszlopvektorok rendszere lineárisan független, akkor az oszloprang n, így a sorrang is n, és ezért az n elemű sorvektorrendszer lineárisan független.

(9.4.3) $\Rightarrow$ (9.4.1). Ha a sorvektorok rendszere lineárisan független, akkor a sorrang és a determinánsrang is n. Ezért az egyetlen n-edrendű aldetermináns $|A| \neq 0$. ■

Ha néhány állítás ekvivalens, akkor tagadásaik is ekvivalensek:

9.5. Következmény. *Tetszőleges $n \times n$-es A mátrix esetén a következő állítások ekvivalensek:*

(9.5.1) $|A| = 0$.
(9.5.2) A oszlopvektorainak rendszere lineárisan függő.
(9.5.3) A sorvektorainak rendszere lineárisan függő.

9.6. Tétel. *Legyen A és B olyan mátrix, melyekre az AB szorzat létezik. Ekkor* $\mathrm{r}(AB) \leq \mathrm{r}(A), \mathrm{r}(B)$. *Ha A invertálható, akkor* $\mathrm{r}(AB) = \mathrm{r}(B)$. *Ha B invertálható, akkor* $\mathrm{r}(AB) = \mathrm{r}(A)$. *Hasonló mátrixok rangja megegyezik.*

Bizonyítás. Ha egy vektorrendszer minden vektora egy másik vektorrendszer alkalmas lineáris kombinációja, akkor az első vektorrendszer által generált altér szűkebb, mint a második vektorrendszer által generált altér, s ezért a 8.6. és a 8.9. Tételek szerint az első vektorrendszer rangja nem nagyobb, mint a második vektorrendszer rangja. A mátrixok szorzásának definícióját figyelembe véve látható, hogy AB oszlovektorai az A mátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációi, AB sorvektorai pedig a B mátrix sorvektorainak lineáris kombinációi. Ezért

$$\mathrm{r}(AB) = \mathrm{r}_o(AB) \leq \mathrm{r}_o(A) = \mathrm{r}(A)$$

és
$$\mathrm{r}(AB) = \mathrm{r}_s(AB) \leq \mathrm{r}_s(B) = \mathrm{r}(B).$$

Ha A invertálható, akkor $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(A^{-1}(AB)) \leq \mathrm{r}(AB)$, és így $\mathrm{r}(AB) = \mathrm{r}(B)$. Ha B invertálható, akkor $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}((AB)B^{-1}) \leq \mathrm{r}(AB)$, és így $\mathrm{r}(AB) = \mathrm{r}(A)$. Ha A és B hasonló, azaz $B = X^{-1}AX$ valamely X invertálható mátrixra, akkor az előző állítás szerint $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}((X^{-1}A)X) = \mathrm{r}(X^{-1}A) = \mathrm{r}(A)$. ■

A rang fogalmát alkalmazva szükséges és elégséges feltétel adható arra, hogy mikor oldható meg egy lineáris egyenletrendszer.

9.7. Kronecker-Capelli-tétel. *Legyen T számtest, $m, n \geq 1$, $A \in T^{m\times n}$ és $\underline{b} \in T^{m\times 1}$. Az $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha* $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A|\underline{b})$.

Bizonyítás. Jelölje $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ az A mátrix oszlopvektorait, és vizsgáljuk az egyenletrendszert az
$$x_1\underline{a}_1 + \ldots + x_n\underline{a}_n = \underline{b}$$
vektoregyenlet alakban. Ha $c_1, \ldots, c_n$ megoldás, azaz $\underline{b} = c_1\underline{a}_1 + \ldots + c_n\underline{a}_n$, akkor
$$[\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n] = [\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n, \underline{b}].$$

Ezért
$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) = \dim([\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n]) = \dim([\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n, \underline{b}]) = \mathrm{r}(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n, \underline{b}) = \mathrm{r}(A|\underline{b}).$$

Fordítva, ha $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A|\underline{b})$, akkor
$$\dim([\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n]) = \mathrm{r}(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) = \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A|\underline{b}) = \mathrm{r}(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n, \underline{b}) = \dim([\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n, \underline{b}]),$$
amiből a 8.6. Tétel szerint
$$[\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n] = [\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n, \underline{b}]$$
következik. Tehát $\underline{b} \in [\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n]$, azaz van olyan $c_1, \ldots, c_n$, hogy $\underline{b} = c_1\underline{a}_1 + \ldots + c_n\underline{a}_n$.■

10. Lineáris leképezések és lineáris transzformációk. Vektorterek izomorfizmusa

10.1. Definíció. Legyen U és V ugyanazon T számtest feletti vektortér. Egy $\varphi\colon U \to V$ leképezést *lineáris leképezés*nek nevezünk, ha bármely $u, v \in U$ és $\lambda \in T$ esetén

$$(u + v)\varphi = u\varphi + v\varphi \text{ és } (\lambda u)\varphi = \lambda(u\varphi).$$

A

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{u \in U\colon\ u\varphi = 0\}, \quad \text{illetve } \operatorname{Im}\varphi = \{u\varphi\colon\ u \in U\}$$

halmazokat a φ *lineáris leképezés magjá*nak, illetve *képteré*nek nevezzük. Az U-ból V-be menő lineáris leképezések halmazát $\operatorname{Hom}(U, V)$ jelöli. A $\operatorname{Hom}(U, U)$ halmaz elemeit az U vektortér *lineáris transzformációi*nak hívjuk. Ha $\varphi \in \operatorname{Hom}(U, V)$ bijektív, akkor azt mondjuk, hogy φ *(vektortér) izomorfizmus.*

Minden vektortérnek lineáris transzformációja az identikus leképezés, az a leképezés, mely minden vektorhoz hozzárendeli a nullvektort és tetszőleges c skalár esetén az a leképezés, mely mindegyik vektorhoz hozzárendeli a c-szeresét. A síkbeli vektorok vektorterének lineáris transzformációja tetszőleges α szög esetén a vektorok origó körüli α szöggel való elforgatása, tetszőleges origón átmenő e egyenes esetén a vektoroknak az e egyenesre való tükrözése és az a leképezés, mely mindegyik vektorhoz hozzárendeli az e egyenesre eső merőleges vetületét. A térbeli vektorok vektorterének lineáris transzformációja tetszőleges origón átmenő s sík esetén a vektoroknak az s síkra való tükrözése és az a leképezés, mely mindegyik vektorhoz hozzárendeli az s síkra eső merőleges vetületét.

10.2. Tétel. *Legyenek U és V ugyanazon T számtest feletti vektorterek. Tetszőleges $\varphi \in \operatorname{Hom}(U, V)$ esetén érvényesek a következők:*

(10.2.1) $\underline{0}\varphi = \underline{0}$.

(10.2.2) $\operatorname{Ker}\varphi$ *altér U-ban,* $\operatorname{Im}\varphi$ *pedig altér V-ben.*

(10.2.3) φ *akkor és csak akkor injektív, ha* $\operatorname{Ker}\varphi = \{\underline{0}\}$.

(10.2.4) Ha $u_1, \ldots, u_k$ generátorrendszer U-ban, akkor $u_1\varphi, \ldots, u_k\varphi$ generátorrendszer $\operatorname{Im}\varphi$*-ben.*

Bizonyítás. Legyenek U és V ugyanazon T számtest feletti vektorterek, és legyen $\varphi \in \operatorname{Hom}(U, V)$.

(10.2.1) $\underline{0}\varphi = (0\underline{0})\varphi = 0(\underline{0}\varphi) = \underline{0}$.

(10.2.2) A $\operatorname{Ker}\varphi$ nemüres, mert a (10.2.1) szerint tartalmazza a nullvektort. Ha $u, v \in \operatorname{Ker}\varphi$, azaz $u\varphi = v\varphi = \underline{0}$, és $\lambda \in T$, akkor

$$(u + v)\varphi = u\varphi + v\varphi = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$$

és
$$(\lambda u)\varphi = \lambda(u\varphi) = \lambda\underline{0} = \underline{0}.$$
Ezért $u + v, \lambda u \in \operatorname{Ker}\varphi$, és így $\operatorname{Ker}\varphi$ altér. Ha $u, v \in \operatorname{Im}\varphi$, azaz valamely $\bar{u}, \bar{v} \in U$ vektorokra $u = \bar{u}\varphi$ és $v = \bar{v}\varphi$, és $\lambda \in T$, akkor
$$u + v = \bar{u}\varphi + \bar{v}\varphi = (\bar{u} + \bar{v})\varphi \in \operatorname{Im}\varphi$$
és
$$\lambda u = \lambda(\bar{u}\varphi) = (\lambda\bar{u})\varphi \in \operatorname{Im}\varphi.$$
Tehát $\operatorname{Im}\varphi$ is altér.

(10.2.3) Ha φ injektív és $u \in \operatorname{Ker}\varphi$, azaz $u\varphi = \underline{0} = \underline{0}\varphi$, akkor $u = \underline{0}$ következik, és ezért $\operatorname{Ker}\varphi = \{\underline{0}\}$. Ha $\operatorname{Ker}\varphi = \{\underline{0}\}$, és valamely $u, v \in U$-ra $u\varphi = v\varphi$, akkor $(u - v)\varphi = u\varphi - v\varphi = \underline{0}$, amiből $u - v \in \operatorname{Ker}\varphi = \{\underline{0}\}$ következik. Ezért $u - v = \underline{0}$, és így $u = v$. Tehát φ injektív.

(10.2.4) Ha $u_1, \ldots, u_k$ generátorrendszer U-ban és $u \in \operatorname{Im}\varphi$, akkor $u = \bar{u}\varphi$ valamely $\bar{u} \in U$-ra, és $\bar{u} = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k$ valamely $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in T$-re. Ezért
$$u = \bar{u}\varphi = (\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k)\varphi = \lambda_1(u_1\varphi) + \ldots + \lambda_k(u_k\varphi).$$
Tehát $u_1\varphi, \ldots, u_k\varphi$ generátorrendszer $\operatorname{Im}\varphi$-ben. ■

10.3. Lineáris leképezések dimenziótétele. *Legyen U és V ugyanazon T számtest feletti vektortér, és legyen $\varphi \in \operatorname{Hom}(U, V)$. Ha U véges dimenziós, akkor*
$$\dim U = \dim(\operatorname{Ker}\varphi) + \dim(\operatorname{Im}\varphi).$$

Bizonyítás. Láttuk (10.2.2)-ben, hogy $\operatorname{Ker}\varphi$ altér U-ban, $\operatorname{Im}\varphi$ pedig V-ben. A 8.6. Tétel szerint $\operatorname{Ker}\varphi$, (10.2.4) miatt pedig $\operatorname{Im}\varphi$ is véges dimenziós. Legyen $u_1, \ldots, u_k$ a $\operatorname{Ker}\varphi$ bázisa és $u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n$ egy olyan bővítése, mely U-nak bázisa. Elég azt igazolni, hogy $u_{k+1}\varphi, \ldots, u_n\varphi$ bázis $\operatorname{Im}\varphi$-ben. Ha valamely $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n \in T$-re
$$\underline{0} = \lambda_{k+1}(u_{k+1}\varphi) + \ldots + \lambda_n(u_n\varphi) = (\lambda_{k+1}u_{k+1} + \ldots + \lambda_n u_n)\varphi,$$
akkor $\lambda_{k+1}u_{k+1} + \ldots + \lambda_n u_n \in \operatorname{Ker}\varphi$. Ezért van olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in T$, hogy
$$\lambda_{k+1}u_{k+1} + \ldots + \lambda_n u_n = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k,$$
azaz
$$-\lambda_1 u_1 - \ldots - \lambda_k u_k + \lambda_{k+1}u_{k+1} + \ldots + \lambda_n u_n = \underline{0}.$$
Ebből $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$ következik, mert $u_1, \ldots, u_n$ bázis. Ezzel beláttuk, hogy $u_{k+1}\varphi, \ldots, u_n\varphi$ linárisan független. Másrészt (10.2.4) szerint
$$u_1\varphi = \underline{0}, \ldots, u_k\varphi = \underline{0}, u_{k+1}\varphi, \ldots, u_n\varphi$$
generátorrendszer $\operatorname{Im}\varphi$-ben, amiből a $\underline{0}$-okat elhagyva is generátorrendszert kapunk. ■

10.4. Következmény. *Legyen V véges dimenziós vektortér a T számtest felett. Tetszőleges $\varphi \in \operatorname{Hom}(V, V)$ esetén φ akkor és csak akkor injektív, ha szürjektív.*

Bizonyítás. Ha φ injektív, akkor a (10.2.3) szerint $\operatorname{Ker}\varphi = \{\underline{0}\}$. Ezért a 10.3. Tétel szerint

$$\dim(\operatorname{Im}\varphi) = \dim V - \dim(\operatorname{Ker}\varphi) = \dim V - \dim\{\underline{0}\} = \dim V - 0 = \dim V.$$

Ebből a 8.6. Tétel szerint $\operatorname{Im}\varphi = V$ következik. Tehát φ szürjektív.

Ha φ szürjektív, akkor $\operatorname{Im}\varphi = V$, így a 10.3. Tétel szerint

$$\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = \dim V - \dim(\operatorname{Im}\varphi) = \dim V - \dim V = 0,$$

és így $\operatorname{Ker}\varphi = \{\underline{0}\}$, amiből a (10.2.3) szerint következik, hogy φ injektív. ∎

10.5. Tétel. *Legyen T számtest, $m, n \geq 1$ és $A \in T^{m\times n}$. Az $A\underline{x} = \underline{0}$ homogén lináris egyenletrendszer megoldásainak halmaza $(n - \mathrm{r}(A))$-dimenziós altér a $T^{n\times 1}$ vektortérben. Ha $m = n$ és $|A| = 0$, akkor az $A\underline{x} = \underline{0}$ homogén lináris egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása, azaz az 5.9. Következmény megfordítása is igaz.*

Bizonyítás. Tekintsük a $\varphi\colon T^{n\times 1} \to T^{m\times 1}, \underline{x} \mapsto A\underline{x}$ leképezést. Tetszőleges $\underline{a}, \underline{b} \in T^{n\times 1}$ és $\lambda \in T$ esetén

$$(\underline{a} + \underline{b})\varphi = A(\underline{a} + \underline{b}) = A\underline{a} + A\underline{b} = \underline{a}\varphi + \underline{b}\varphi$$

és

$$(\lambda\underline{a})\varphi = A(\lambda\underline{a}) = \lambda(A\underline{a}) = \lambda(\underline{a}\varphi).$$

Ezért φ lineáris leképezés. Vegyük észre, hogy egy $T^{n\times 1}$-beli vektor pontosan akkor megoldása az $A\underline{x} = \underline{0}$ egyenletrendszernek, ha eleme $\operatorname{Ker}\varphi$-nek. Tehát a megoldások halmaza $\operatorname{Ker}\varphi$, ami (10.2.2) szerint altér. A 10.3 Tétel szerint

$$\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = \dim(T^{n\times 1}) - \dim(\operatorname{Im}\varphi) = n - \dim(\operatorname{Im}\varphi).$$

Most már csak azt kell megmutatni, hogy $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = \mathrm{r}(A)$.

Legyen $\underline{a}_j$ az A mátrix j-edik oszlopvektora, $1 \leq j \leq n$, és tekintsük a $T^{n\times 1}$ vektortér

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots\ , \ \underline{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

bázisát. A (10.2.4) állítás szerint

$$\underline{e}_1\varphi = A\underline{e}_1 = \underline{a}_1,\ \underline{e}_2\varphi = A\underline{e}_2 = \underline{a}_2,\ \ldots\ ,\ \underline{e}_n\varphi = A\underline{e}_n = \underline{a}_n$$

generátorrendszer $\operatorname{Im}\varphi$-ben. Ezért

$$\dim(\operatorname{Im}\varphi) = \dim[\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n] = \mathrm{r_o}(A) = \mathrm{r}(A).$$

Végül, ha $m = n$ és $|A| = 0$, akkor $\mathrm{r}(A) < n$ és $n - \mathrm{r}(A) > 0$. Tehát a megoldások altere legalább egydimenziós, s ezért van benne $\underline{0}$-tól különböző vektor, azaz van nemtriviális megoldás. ∎

10.6. Definíció. Legyen egy homogén lináris egyenletrendszer megoldásainak halmaza U. Ekkor U-nak, mint altérnek, a bázisait *fundamentális megoldásrendszer*eknek vagy *alaprendszer*eknek nevezzük.

A 10.5. és 8.5. Tételből következik, hogy egy megoldásokból álló vektorrendszer pontosan akkor alaprendszer, ha lineárisan független, és $n-r$ elemű, ahol n az ismeretlenek száma, r pedig az egyenletrendszer mátrixának rangja.

10.7. Tétel. *Tetszőleges U, V és W ugyanazon T számtest feletti vektorterekre érvényesek a következők:*

(10.7.1) Ha $\varphi \in \operatorname{Hom}(U,V)$ és $\psi \in \operatorname{Hom}(V,W)$, akkor $\varphi\psi \in \operatorname{Hom}(U,W)$.

(10.7.2) Ha $\varphi \in \operatorname{Hom}(U,V)$ bijektív, akkor $\varphi^{-1} \in \operatorname{Hom}(V,U)$.

Bizonyítás. (10.7.1) Legyen $\varphi \in \operatorname{Hom}(U,V)$ és $\psi \in \operatorname{Hom}(V,W)$. Ekkor minden $u,v \in U$-ra és minden $\lambda \in T$-re

$$(u+v)(\varphi\psi) = ((u+v)\varphi)\psi = (u\varphi + v\varphi)\psi = (u\varphi)\psi + (v\varphi)\psi = u(\varphi\psi) + v(\varphi\psi),$$

$$(\lambda u)(\varphi\psi) = ((\lambda u)\varphi)\psi = (\lambda(u\varphi))\psi = \lambda((u\varphi)\psi) = \lambda(u(\varphi\psi)).$$

Tehát $\varphi\psi \in \operatorname{Hom}(U,W)$.

(10.7.2) Ha $\varphi \in \operatorname{Hom}(U,V)$ bijektív, akkor tetszőleges $u,v \in V$ esetén van (egyetlen) olyan $\bar{u},\bar{v} \in U$, hogy $u = \bar{u}\varphi$ és $v = \bar{v}\varphi$. Ekkor $\bar{u} = u\varphi^{-1}$, $\bar{v} = v\varphi^{-1}$, és ezért

$$(u+v)\varphi^{-1} = (\bar{u}\varphi + \bar{v}\varphi)\varphi^{-1} = ((\bar{u}+\bar{v})\varphi)\varphi^{-1} =$$

$$= (\bar{u}+\bar{v})(\varphi\varphi^{-1}) = \bar{u}+\bar{v} = u\varphi^{-1} + v\varphi^{-1}$$

és

$$(\lambda u)\varphi^{-1} = (\lambda(\bar{u}\varphi))\varphi^{-1} = ((\lambda\bar{u})\varphi)\varphi^{-1} = (\lambda\bar{u})(\varphi\varphi^{-1}) = \lambda\bar{u} = \lambda(u\varphi^{-1}), \quad \lambda \in T.$$

Tehát $\varphi^{-1} \in \operatorname{Hom}(V,U)$. ∎

10.8. Definíció. Legyen U és V ugyanazon T számtest feletti vektortér. Azt mondjuk, hogy U *izomorf* V-vel, ha létezik $\varphi\colon U \to V$ vektortér izomorfizmus. Jele: $U \cong V$.

10.9. Tétel. *Adott T számtest feletti vektorterek bármely halmazán az $\cong$ reláció reflexív (azaz $V \cong V$ minden V vektortér esetén), szimmetrikus (azaz, $U \cong V$-ből $V \cong U$ következik) és tranzitív (azaz, ha $U \cong V$ és $V \cong W$, akkor $U \cong W$).*

Bizonyítás. Legyen U, V, W vektortér a T számtest felett. Nyilván $U \cong U$, mert U identikus transzformációja izomorfizmus. Ha $U \cong V$, akkor van $\varphi\colon U \to V$ izomorfizmus. A (10.7.2) állítás szerint $\varphi^{-1}\colon V \to U$ is izomorfizmus, így $V \cong U$. Ha $U \cong V$ és $V \cong W$, akkor létezik $\varphi\colon U \to V$ és $\psi\colon V \to W$ izomorfizmus. Ismert, hogy bijektív leképezések szorzata bijektív, tehát $\varphi\psi\colon U \to W$ bijektív. A (10.7.1) állítás pedig biztosítja, hogy $\varphi\psi$ lineáris. Így $\varphi\psi\colon U \to W$ izomorfizmus, tehát $U \cong W$.

10.10. Tétel. *Ha V a T számtest feletti n-dimenziós vektortér, akkor V izomorf a T^n vektortérrel. Bármely két T feletti n-dimenziós vektortér izomorf egymással. Ha U, V izomorf vektorterek és U n-dimenziós, akkor V is n-dimenziós.*

Bizonyítás. Legyen $e_1, \ldots, e_n$ a V vektortér bázisa, és tekintsük a

$$\varphi\colon T^n \to V,\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

leképezést. Megmutatjuk, hogy φ izomorfizmus. Szürjektív, mert $e_1, \ldots, e_n$ generátorrendszer, és (7.3.4) miatt injektív is. Ha $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in T^n$ és $c \in T$, akkor

$$\begin{aligned} ((\lambda_1, \ldots, \lambda_n) + (\mu_1, \ldots, \mu_n))\varphi &= (\lambda_1 + \mu_1, \ldots, \lambda_n + \mu_n)\varphi = \\ = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) e_i &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i = \\ &= (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\varphi + (\mu_1, \ldots, \mu_n)\varphi \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} (c(\lambda_1, \ldots, \lambda_n))\varphi &= (c\lambda_1, \ldots, c\lambda_n)\varphi = \\ = \sum_{i=1}^{n} (c\lambda_i) e_i &= c\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\Big) = c((\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\varphi). \end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy φ izomorfizmus, és így $T^n \cong V$.

Ha U is T feletti n-dimenziós vektortér, akkor $T^n \cong U$, így a 10.9. Tétel szerint $U \cong V$. Végül ha $\varphi\colon U \to V$ izomorfizmus, és $e_1, \ldots, e_n$ bázis U-ban, akkor (10.2.4) szerint $e_1\varphi, \ldots, e_n\varphi$ generátorrendszer V-ben. Ha valamely $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ skalárokra

$$\underline{0} = \lambda_1(e_1\varphi) + \ldots + \lambda_n(e_n\varphi) = (\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n)\varphi,$$

akkor

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n \in \operatorname{Ker} \varphi.$$

Mivel φ izomorfizmus, azért (10.2.3) szerint $\operatorname{Ker} \varphi = \{\underline{0}\}$, ezért $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = \underline{0}$ következik. Mivel $e_1, \ldots, e_n$ lineárisan független, azért $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Tehát az $e_1\varphi, \ldots, e_n\varphi$ vektorrendszer lineárisan független is. Tehát $e_1\varphi, \ldots, e_n\varphi$ bázis V-ben, és ezért $\dim V = n$. ■

11. Műveletek lineáris leképezésekkel

11.1. Definíció. Legyenek U és V ugyanazon T számtest feletti vektorterek. Értelmezzük lineáris leképezések összegét és skalárral való szorzatát a következőképpen. Ha $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}\,(U, V)$ és $c \in T$, akkor φ és ψ összege, illetve φ c-szerese az a $\varphi + \psi$-vel, illetve $c\varphi$-vel jelölt leképezés, melyekre

$$u(\varphi + \psi) = u\varphi + u\psi \quad \text{és} \quad u(c\varphi) = c(u\varphi) \quad \text{minden } u \in U \text{ esetén.}$$

11.2. Tétel. Tetszőleges U és V ugyanazon T számtest feletti vektorterek esetén $\mathrm{Hom}\,(U, V)$ a most bevezetett összeadással és skalárral való szorzással vektorteret alkot.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy $\mathrm{Hom}\,(U, V)$-ból nem vezet ki az összeadás és a skalárral való szorzás. Legyen $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}\,(U, V)$ és $c \in T$. Ekkor tetszőleges $u, v \in U$ és $\lambda \in T$ esetén

$$(u + v)(\varphi + \psi) = (u + v)\varphi + (u + v)\psi = (u\varphi + v\varphi) + (u\psi + v\psi) =$$

$$= (u\varphi + u\psi) + (v\varphi + v\psi) = u(\varphi + \psi) + v(\varphi + \psi),$$

$$(\lambda u)(\varphi + \psi) = (\lambda u)\varphi + (\lambda u)\psi = \lambda(u\varphi) + \lambda(u\psi) = \lambda(u\varphi + u\psi) = \lambda(u(\varphi + \psi)),$$

$$(u + v)(c\varphi) = c((u + v)\varphi) = c(u\varphi + v\varphi) = c(u\varphi) + c(v\varphi) = u(c\varphi) + v(c\varphi)$$

és

$$(\lambda u)(c\varphi) = c((\lambda u)\varphi) = c(\lambda(u\varphi)) = (c\lambda)(u\varphi) =$$

$$= (\lambda c)(u\varphi) = \lambda(c(u\varphi)) = \lambda(u(c\varphi)).$$

Tehát $\varphi + \psi, c\varphi \in \mathrm{Hom}\,(U, V)$.

Most megmutatjuk, hogy teljesülnek a vektortér-axiómák. A lineáris leképezések összeadásának definícióját, a vektorösszeadás kommutativitását és asszociativitását figyelembe véve egyszerű számolással igazolható, hogy $\mathrm{Hom}\,(U, V)$-ben az összeadás kommutatív és asszociatív. Ezért a részleteket az olvasóra bízzuk. Jelölje $\mathbf{0}\colon U \to V$ azt a leképezést, mely minden U-beli vektorhoz V nullvektorát rendeli. Ekkor nyilván $\mathbf{0} \in \mathrm{Hom}\,(U, V)$, és minden $\varphi \in \mathrm{Hom}\,(U, V)$-ra és $u \in U$-ra

$$u(\varphi + \mathbf{0}) = u\varphi + u\mathbf{0} = u\varphi + \underline{0} = u\varphi$$

és

$$u(\varphi + (-1)\varphi) = u\varphi + u((-1)\varphi) = u\varphi + (-1)(u\varphi) = \underline{0} = u\mathbf{0},$$

azaz $\varphi + \mathbf{0} = \varphi$ és $\varphi + (-1)\varphi = \mathbf{0}$. Tehát $\mathbf{0}$ egységelem az összeadásra nézve, $(-1)\varphi$ pedig φ additív inverze.

Legyen végül $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}(U, V)$ és $c, d \in T$. Ekkor tetszőleges $u \in T$ esetén

$$u(c(\varphi+\psi)) = c(u(\varphi+\psi)) = c(u\varphi + u\psi) = c(u\varphi) + c(u\psi) =$$
$$= u(c\varphi) + u(c\psi) = u(c\varphi + c\psi),$$
$$u((c+d)\varphi) = (c+d)(u\varphi) = ((c+d)u)\varphi = (cu+du)\varphi =$$
$$= (cu)\varphi + (du)\varphi = u(c\varphi) + u(d\varphi) = u(c\varphi + d\varphi),$$
$$u((cd)\varphi) = (cd)(u\varphi) = c(d(u\varphi)) = c(u(d\varphi)) = u(c(d\varphi))$$

és

$$u(1\varphi) = 1(u\varphi) = u\varphi.$$

Tehát valóban teljesül, hogy

$$c(\varphi+\psi) = c\varphi + c\psi,\ (c+d)\varphi = c\varphi + d\varphi,\ (cd)\varphi = c(d\varphi) \text{ és } 1\varphi = \varphi.$$

■

11.3. Tétel. Tetszőleges U, V és W ugyanazon T számtest feletti vektorterekre érvényesek a következők:

(11.3.1) Ha $\varphi \in \operatorname{Hom}(U, V)$ és $\psi \in \operatorname{Hom}(V, W)$, akkor $c(\varphi\psi) = (c\varphi)\psi = \varphi(c\psi)$ minden $c \in T$-re.

(11.3.2) Ha $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}(U, V)$ és $\tau \in \operatorname{Hom}(V, W)$, akkor $(\varphi+\psi)\tau = \varphi\tau + \psi\tau$. Ha $\varphi \in \operatorname{Hom}(U, V)$ és $\psi, \tau \in \operatorname{Hom}(V, W)$, akkor $\varphi(\psi+\tau) = \varphi\psi + \varphi\tau$. (Ezt a két állítást röviden úgy is szoktuk mondani, hogy a leképezések szorzása a lineáris leképezések körében disztributív az összeadásra vonatkozóan).

Bizonyítás. Legyen $\varphi \in \operatorname{Hom}(U, V)$, $\psi \in \operatorname{Hom}(V, W)$ és $c \in T$. Ekkor minden $u \in U$-ra

$$u(c(\varphi\psi)) = c(u(\varphi\psi)) = c((u\varphi)\psi) = (u\varphi)(c\psi) = u(\varphi(c\psi)).$$

Továbbá

$$u(c(\varphi\psi)) = c(u(\varphi\psi)) = c((u\varphi)\psi) = (c(u\varphi))\psi = (u(c\varphi))\psi = u((c\varphi)\psi)).$$

Ezzel igazoltuk (11.3.1)-et .

Legyen $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}(U, V)$ és $\tau \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Tetszőleges $u \in U$ esetén

$$u((\varphi+\psi)\tau) = (u(\varphi+\psi))\tau = (u\varphi + u\psi)\tau = (u\varphi)\tau + (u\psi)\tau =$$
$$= u(\varphi\tau) + u(\psi\tau) = u((\varphi\tau) + (\psi\tau)).$$

Végül legyen $\varphi \in \operatorname{Hom}(U, V)$ és $\psi, \tau \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Tetszőleges $u \in U$ esetén

$$u(\varphi(\psi+\tau)) = (u\varphi)(\psi+\tau) = (u\varphi)\psi + (u\varphi)\tau =$$
$$= u(\varphi\psi) + u(\varphi\tau) = u(\varphi\psi + \varphi\tau).$$

Tehát (11.3.2) is igaz. ■

12. Lineáris leképezések mátrixa

12.1. Tétel. *Legyen U véges dimenziós, V pedig tetszőleges vektortér a T számtest felett. Tetszőleges $e_1, \dots, e_n \in U$ bázis és $v_1, \dots, v_n \in V$ vektorrendszer esetén pontosan egy olyan $\varphi \in \operatorname{Hom}(U, V)$ létezik, amelyre $e_1\varphi = v_1, \dots, e_n\varphi = v_n$.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}(U, V)$ olyan, hogy $e_i\varphi = v_i = e_i\psi$, $i = 1, \dots, n$. Ha $u \in U$, akkor $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ valamely $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in T$ esetén, és ezért

$$u\varphi = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i)\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(e_i\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(e_i\psi) = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i)\psi = u\psi.$$

Tehát $\varphi = \psi$. Ezzel az egyértelműséget igazoltuk.

Definiáljuk a $\varphi\colon U \to V$ leképezést a következőképpen: tetszőleges $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ esetén legyen

$$u\varphi = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i)\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$

A φ leképezés ezen definíciója egyértelmű, mert minden U-beli vektor pontosan egyféleképpen áll elő $e_1, \dots, e_n$ lineáris kombinációjaként. Vegyük észre, hogy $e_i\varphi = v_i$, $i = 1, \dots, n$. Ha $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, $v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$ és $\lambda \in T$, akkor

$$(u+v)\varphi = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i\right)\varphi = \left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) e_i\right)\varphi =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) v_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right)\varphi + \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i\right)\varphi = u\varphi + v\varphi$$

és

$$\lambda(u\varphi) = \lambda\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right)\varphi\right) = \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda\lambda_i) v_i =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda\lambda_i) e_i\right)\varphi = \left(\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right)\right)\varphi = (\lambda u)\varphi.$$

Tehát φ lineáris leképezés. ∎

12.2. Definíció. Legyenek U és V véges dimenziós vektorterek a T számtest felett, $\mathcal{E}: e_1, \dots, e_m$ bázis U-ban, $\mathcal{F}: f_1, \dots, f_n$ bázis V-ben, és $\varphi \in \mathrm{Hom}\,(U, V)$. Legyen továbbá

$$e_i\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j, \quad i = 1, \dots, m.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy az $A_\varphi^{\mathcal{E},\mathcal{F}} = (a_{ij})_{m\times n}$ mátrix a φ *lineáris leképezés mátrixa* az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban. Ha nem okoz félreértést, akkor a mátrix indexeit elhagyjuk. Ha $U = V$, akkor csak egy bázist választunk, azaz ekkor $\mathcal{F} = \mathcal{E}$. Ebben az esetben $A_\varphi^{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ helyett az $A_\varphi^{\mathcal{E}}$ jelölést használjuk.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\underline{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix}, \quad \underline{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad \underline{e}\varphi = \begin{pmatrix} e_1\varphi \\ \vdots \\ e_m\varphi \end{pmatrix}$$

és

$$A_\varphi^{\mathcal{E},\mathcal{F}} \underline{f} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} f_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} f_j \end{pmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy $A_\varphi^{\mathcal{E},\mathcal{F}} \underline{f}$ az $A_\varphi^{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ mátrixból és az $\underline{f}$ oszlopvektorból a mátrixszorzás szabályai szerint adódik. Ezen tömör jelölések felhasználásával a 12.2. Definícióbeli egyenlőségek a következéképpen írhatók:

$$\underline{e}\varphi = A_\varphi^{\mathcal{E},\mathcal{F}} \underline{f}.$$

Mivel $\mathcal{F}$ bázis, az $A_\varphi^{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ mátrix az egyetlen olyan mátrix, mely az előző egyenlőségnek eleget tesz. Legyen az $u \in U$ vektor koordinátasora az $\mathcal{E}$ bázisban $\underline{x} = (x_1, \dots, x_m)$, $u\varphi$ koordinátasora az $\mathcal{F}$ bázisban pedig $\underline{y} = (y_1, \dots, y_m)$, vagyis

$$u = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i = \underline{x}\underline{e} \quad \text{és} \quad u\varphi = \sum_{j=1}^{n} y_j f_j = \underline{y}\underline{f}.$$

Mivel φ lineáris, $u\varphi = (\sum_{i=1}^{m} x_i e_i)\varphi = \sum_{i=1}^{m} x_i(e_i\varphi)$. Ezt a tömör jelölésekkel így írhatjuk le: $u\varphi = (\underline{x}\underline{e})\varphi = \underline{x}(\underline{e}\varphi)$. A formális mátrixszorzás szabályait is felhasználva kapjuk a következőt:

$$\underline{y}\underline{f} = u\varphi = (\underline{x}\underline{e})\varphi = \underline{x}(\underline{e}\varphi) = \underline{x}(A_\varphi^{\mathcal{E},\mathcal{F}} \underline{f}) = (\underline{x} A_\varphi^{\mathcal{E},\mathcal{F}})\underline{f},$$

amiből

$$\underline{y} = \underline{x} A_\varphi^{\mathcal{E},\mathcal{F}}$$

következik, mert adott bázisban a vektorok koordinátasora egyértelműen meghatározott. Tehát a következőt kaptuk: bámely $u \in U$ vektor φ szerinti képének koordinátasorát megkapjuk, ha u koordinátasorát jobbról megszorozzuk φ mátrixával.

12.3. Tétel. *Legyenek $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ rendre az U, V és W ugyanazon T számtest feletti véges dimenziós vektorterek bázisai. Ha $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}(U, V)$, $\tau \in \operatorname{Hom}(V, W)$ és $c \in T$, akkor*

$$A_{\varphi+\psi}^{\mathcal{E},\mathcal{F}} = A_{\varphi}^{\mathcal{E},\mathcal{F}} + A_{\psi}^{\mathcal{E},\mathcal{F}}, \quad A_{c\varphi}^{\mathcal{E},\mathcal{F}} = cA_{\varphi}^{\mathcal{E},\mathcal{F}} \quad \text{és} \quad A_{\varphi\tau}^{\mathcal{E},\mathcal{G}} = A_{\varphi}^{\mathcal{E},\mathcal{F}} A_{\tau}^{\mathcal{F},\mathcal{G}},$$

azaz lineáris leképezések összegének mátrixa megegyezik a leképezések mátrixainak összegével, lineáris leképezés c-szeresének mátrixa a leképezés mátrixának c-szerese, és lineáris leképezések szorzatának mátrixa megegyezik a leképezések mátrixainak szorzatával.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{E}\colon e_1, \ldots, e_m$, $\mathcal{F}\colon f_1, \ldots, f_n$, $\mathcal{G}\colon g_1, \ldots, g_s$ és

$$\underline{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix}, \quad \underline{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad \underline{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_s \end{pmatrix}.$$

Ha $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}(U, V)$, $\tau \in \operatorname{Hom}(V, W)$ és $c \in T$, akkor

$$A_{\varphi+\psi}^{\mathcal{E},\mathcal{F}} \underline{f} = \underline{e}(\varphi + \psi) = \underline{e}\varphi + \underline{e}\psi = A_{\varphi}^{\mathcal{E},\mathcal{F}} \underline{f} + A_{\psi}^{\mathcal{E},\mathcal{F}} \underline{f} = (A_{\varphi}^{\mathcal{E},\mathcal{F}} + A_{\psi}^{\mathcal{E},\mathcal{F}}) \underline{f}.$$

Mivel $\mathcal{F}$ bázis, minden vektor koordinátasora egyértelműen meghatározott, így $A_{\varphi+\psi}^{\mathcal{E},\mathcal{F}} = A_{\varphi}^{\mathcal{E},\mathcal{F}} + A_{\psi}^{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ következik. Hasonlóan

$$A_{c\varphi}^{\mathcal{E},\mathcal{F}} \underline{f} = \underline{e}(c\varphi) = c(\underline{e}\varphi) = c(A_{\varphi}^{\mathcal{E},\mathcal{F}} \underline{f}) = (cA_{\varphi}^{\mathcal{E},\mathcal{F}}) \underline{f},$$

és innen $A_{c\varphi}^{\mathcal{E},\mathcal{F}} = cA_{\varphi}^{\mathcal{E},\mathcal{F}}$. Végül

$$A_{\varphi\tau}^{\mathcal{E},\mathcal{G}} \underline{g} = \underline{e}(\varphi\tau) = (\underline{e}\varphi)\tau =$$

$$= (A_{\varphi}^{\mathcal{E},\mathcal{F}} \underline{f})\tau = A_{\varphi}^{\mathcal{E},\mathcal{F}} (\underline{f}\tau) = A_{\varphi}^{\mathcal{E},\mathcal{F}} (A_{\tau}^{\mathcal{F},\mathcal{G}} \underline{g}) = (A_{\varphi}^{\mathcal{E},\mathcal{F}} A_{\tau}^{\mathcal{F},\mathcal{G}}) \underline{g},$$

és így $A_{\varphi\tau}^{\mathcal{E},\mathcal{G}} = A_{\varphi}^{\mathcal{E},\mathcal{F}} A_{\tau}^{\mathcal{F},\mathcal{G}}$. ∎

12.4. Következmény. *Ha U m-dimenziós, V pedig n-dimenziós vektortér a T számtest felett, akkor a lineáris leképezések* $\mathrm{Hom}\,(U,V)$ *vektortere izomorf a mátrixok $T^{m\times n}$ vektorterével, és így mn-dimenziós.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{E}$ az U, $\mathcal{F}$ pedig a V vektortér bázisa, és tekintsük a

$$\Phi\colon\ \mathrm{Hom}\,(U,V) \to T^{m\times n},\ \ \varphi \mapsto A_{\varphi}^{\mathcal{E},\mathcal{F}}$$

leképezést. Mivel egy lineáris leképezés mátrixa és a bázisvektorok képei kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást, ezért a 12.1. Tétel egyértelműségre vonatkozó állításából Φ injektivitása, a létezésre vonatkozó állításából pedig Φ szürjektivitása következik. Tehát Φ bijektív. Ha $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}\,(U,V)$ és $c \in T$, akkor a 12.3. Tételt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$(\varphi+\psi)\Phi = A_{\varphi+\psi}^{\mathcal{E},\mathcal{F}} = A_{\varphi}^{\mathcal{E},\mathcal{F}} + A_{\psi}^{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \varphi\Phi + \psi\Phi$$

és

$$(c\varphi)\Phi = A_{c\varphi}^{\mathcal{E},\mathcal{F}} = cA_{\varphi}^{\mathcal{E},\mathcal{F}} = c(\varphi\Phi).$$

Tehát Φ izomorfizmus. A 8.4. Definíció után láttuk, hogy $T^{m\times n}$ mn-dimenziós. Ezért a 10.10. Tétel szerint $\mathrm{Hom}\,(U,V)$ is mn-dimenziós. ∎

13. Áttérés új bázisra. Koordináta-transzformáció

13.1. Definíció. Legyen $\mathcal{E}\colon e_1, \ldots, e_m$ és $\mathcal{E}'\colon e'_1, \ldots, e'_m$ a T számtest feletti U vektortér két bázisa. Ekkor

$$e_i = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} e'_j \quad \text{és} \quad e'_i = \sum_{j=1}^{m} p'_{ij} e_j, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{$*$}$$

ahol p_{ij}, p'_{ij}, $1 \leq i, j \leq m$, a két bázis által egyértelműen meghatározott skalárok. A $P = (p_{ij})_{m\times m}$ mátrixot az *$\mathcal{E}$ bázisról az $\mathcal{E}'$ bázisra*, a $P' = (p'_{ij})_{m\times m}$ mátrixot pedig az *$\mathcal{E}'$ bázisról az $\mathcal{E}$ bázisra való áttérés mátrix*nak hívjuk.

Vegyük észre, hogy P' az U vektortér azon lineáris transzformációjának mátrixa az $e_1, \ldots, e_m$ bázisban, mely az $e_1, \ldots, e_m$ vektorokhoz rendre az $e'_1, \ldots, e'_m$ vektorokat rendeli. Felhasználva az

$$\underline{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{e}' = \begin{pmatrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_m \end{pmatrix}$$

jelöléseket, a $(*)$ alatti egyenlőségek a következő tömör alakban írhatók:

$$\underline{e} = P\underline{e}' \quad \text{és} \quad \underline{e}' = P'\underline{e},$$

ahol

$$P\underline{e}' = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} p_{1j} e'_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} p_{mj} e_j{}' \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad P'\underline{e} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} p'_{1j} e_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} p'_{mj} e_j \end{pmatrix}$$

a mátrixszorzás szabálya szerint adódik. A fenti két egyenlőségből azt kapjuk, hogy

$$\underline{e} = P\underline{e}' = P(P'\underline{e}) = (PP')\underline{e} \quad \text{és} \quad \underline{e}' = P'\underline{e} = P'(P\underline{e}') = (P'P)\underline{e}',$$

amiből

$$PP' = P'P = E$$

következik, ahol E az $m \times m$-es egységmátrix. Tehát P és P' nemelfajuló mátrixok, és $P' = P^{-1}$. Ezzel beláttuk a következőt:

13.2. Tétel. *Legyen a T számtest feletti U vektortér két bázisa $\mathcal{E}$ és $\mathcal{E}'$, továbbá legyen P, illetve P' az áttérés mátrixa az $\mathcal{E}$ bázisról az $\mathcal{E}'$-re, illetve az $\mathcal{E}'$ bázisról az $\mathcal{E}$-re. Ekkor P és P' nemelfajuló mátrixok, és $P' = P^{-1}$.*

Legyen az $u \in U$ vektor koordinátasora az $\mathcal{E}$ bázisban $\underline{x} = (x_1, \dots, x_m)$, az $\mathcal{E}'$ bázisban pedig $\underline{x}' = (x_1', \dots, x_m')$, vagyis

$$u = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i = \sum_{i=1}^{m} x_i' e_i', \qquad \text{vagy tömören} \qquad u = \underline{x}\underline{e} = \underline{x}'\underline{e}'.$$

Ekkor

$$\underline{x}'\underline{e}' = u = \underline{x}\underline{e} = \underline{x}(P\underline{e}') = (\underline{x}P)\underline{e}',$$

amiből $\underline{x}' = \underline{x}P$ következik. Tehát érvényes az alábbi állítás:

13.3. Tétel. *Legyen a T számtest feletti U vektortér két bázisa $\mathcal{E}$ és $\mathcal{E}'$, továbbá legyen P az áttérés mátrixa az $\mathcal{E}$ bázisról az $\mathcal{E}'$-re. Ekkor tetszőleges $u \in U$ vektor esetén, ha u koordinátasora $\mathcal{E}$-ben $\underline{x}$, $\mathcal{E}'$-ben pedig $\underline{x}'$, akkor fennáll az $\underline{x}' = \underline{x}P$ egyenlőség.*

Legyen most V egy véges dimenziós vektortér T felett, és $\varphi \in \mathrm{Hom}\,(U, V)$. Legyen továbbá $\mathcal{F}\colon f_1, \dots, f_n$ és $\mathcal{F}'\colon f_1', \dots, f_n'$ a V vektortér két bázisa,

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad \underline{f}' = \begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_n' \end{pmatrix},$$

S az $\mathcal{F}$ bázisról az $\mathcal{F}'$ bázisra való áttérés mátrixa, $A_\varphi^{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ és $A_\varphi^{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}$ pedig φ mátrixa a megfelelő bázisokban, azaz

$$\underline{f} = S\underline{f}', \quad \underline{e}\varphi = A_\varphi^{\mathcal{E},\mathcal{F}}\underline{f} \quad \text{és} \quad \underline{e}'\varphi = A_\varphi^{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}\underline{f}'.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} A_\varphi^{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}\underline{f}' &= \underline{e}'\varphi = (P^{-1}\underline{e})\varphi = P^{-1}(\underline{e}\varphi) = P^{-1}(A_\varphi^{\mathcal{E},\mathcal{F}}\underline{f}) = \\ &= P^{-1}(A_\varphi^{\mathcal{E},\mathcal{F}}(S\underline{f}')) = (P^{-1}A_\varphi^{\mathcal{E},\mathcal{F}}S)\underline{f}', \end{aligned}$$

amiből

$$A_\varphi^{\mathcal{E}',\mathcal{F}'} = P^{-1}A_\varphi^{\mathcal{E},\mathcal{F}}S$$

következik. Ha $U = V$, $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ és $\mathcal{E}' = \mathcal{F}'$, akkor $P = S$ és

$$A_\varphi^{\mathcal{E}'} = P^{-1}A_\varphi^{\mathcal{E}}P.$$

Ezzel igazoltuk a következőket:

13.4. Tétel. *Legyen U és V két T számtest feletti vektortér, és legyen $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ az U, $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ pedig a V vektortér bázisa. Jelölje P, illetve S az áttérés mátrixát $\mathcal{E}$-ről $\mathcal{E}'$-re, illetve $\mathcal{F}$-ről $\mathcal{F}'$-re. Tekintsünk egy $\varphi \in \mathrm{Hom}\,(U, V)$ lineáris leképezést, és legyen a mátrixa a megfelelő bázisokban $A_\varphi^{\mathcal{E},\mathcal{F}}$, illetve $A_\varphi^{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}$. Ekkor $A_\varphi^{\mathcal{E}',\mathcal{F}'} = P^{-1}A_\varphi^{\mathcal{E},\mathcal{F}}S$.*

13.5. Következmény. *Legyen a T számtest feletti U vektortér két bázisa $\mathcal{E}$ és $\mathcal{E}'$. Jelölje az $\mathcal{E}$ bázisról az $\mathcal{E}'$-re való áttérés mátrixát P. Tekintsünk egy $\varphi \in \mathrm{Hom}\,(U,U)$ lineáris transzformációt, és legyen a mátrixa az $\mathcal{E}$, illetve $\mathcal{E}'$ bázisban $A_\varphi^{\mathcal{E}}$, illetve $A_\varphi^{\mathcal{E}'}$. Ekkor $A_\varphi^{\mathcal{E}'} = P^{-1}A_\varphi^{\mathcal{E}}P$. Tehát egy lineáris transzformáció különböző bázisokban felírt mátrixai hasonlóak.*

A fentiek szerint véges dimenziós vektorterek közötti lineáris leképezések különböző bázisbeli mátrixai megkaphatók egymásból alkalmas invertálható mátrixokkal való szorzással. Ezért a 9.6. Tétel szerint e mátrixok rangja megegyezik. Tehát lineáris leképezés minden bázisbeli mátrixának rangja ugyanaz. Az utóbbi állításnál többet is mondhatunk.

13.6. Definíció. Valamely φ *lineáris leképezés rangján* képterének dimenzióját értjük, és $\mathrm{r}(\varphi)$-vel jelöljük. Tehát $\mathrm{r}(\varphi) = \dim\,(\mathrm{Im}\,\varphi)$.

13.7. Tétel. Véges dimenziós vektorterek közötti lineáris leképezés rangja megegyezik valamely (bármely) bázisbeli mátrixának rangjával.

Bizonyítás. Legyen U, V véges dimenziós vektortér a T számtest felett, $\varphi \in \mathrm{Hom}\,(U,V)$, $e_1,\ldots,e_m$ bázis U-ban, $f_1,\ldots,f_n$ bázis V-ben és $A = (a_{ij})$ a φ lineáris leképezés mátrixa az adott bázisokban. Azt kell igazolni, hogy $\dim\,(\mathrm{Im}\,\varphi) = \mathrm{r}(A)$. Tekintsük a

$$\psi\colon V \to T^n,\ v = \sum_{j=1}^{n} x_j f_j \mapsto (x_1,\ldots,x_n)$$

leképezést. A 10.10. Tétel bizonyításában igazoltuk, hogy ψ izomorfizmus, és mivel az $\mathrm{Im}\,\varphi$ halmaz elemeinek ψ melletti képei éppen az $\mathrm{Im}\,(\varphi\psi)$ halmaz elemei, azért

$$\psi|_{\mathrm{Im}\,\varphi}\colon \mathrm{Im}\,\varphi \to \mathrm{Im}\,(\varphi\psi)$$

is izomorfizmus. Ismét a 10.10. Tétel szerint $\dim\,(\mathrm{Im}\,\varphi) = \dim\,(\mathrm{Im}\,(\varphi\psi))$. Vegyük észre, hogy

$$e_i(\varphi\psi) = (e_i\varphi)\psi = (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j)\psi = (a_{i1},\ldots,a_{in}),\ 1 \le i \le m.$$

A (10.2.4) állítás szerint $e_1(\varphi\psi),\ldots,e_m(\varphi\psi)$ generátorrendszer $\mathrm{Im}\,(\varphi\psi)$-ben, s ezért

$$\begin{aligned}\dim\,(\mathrm{Im}\,\varphi) = \dim\,(\mathrm{Im}\,(\varphi\psi)) &= \dim\,[e_1(\varphi\psi),\ldots,e_m(\varphi\psi)] = \\ &= \dim\,[(a_{11},\ldots,a_{1n}),\ldots,(a_{m1},\ldots,a_{mn})] = \\ &= \mathrm{r}((a_{11},\ldots,a_{1n}),\ldots,(a_{m1},\ldots,a_{mn})) = \\ &= \mathrm{r}_s(A) = \mathrm{r}(A).\end{aligned}$$

■

13.8. Következmény. *Legyen φ lineáris transzformáció valamely V véges dimenziós vektortérben. A φ transzformáció akkor és csak akkor bijektív, ha valamely (bármely) bázisbeli mátrixa nemelfajuló.*

Bizonyítás. Legyen φ mátrixa valamely bázisban az A $n \times n$-es mátrix. Ha φ bijektív, akkor a 13.7. Tétel szerint A (determináns)rangja megegyezik V dimenziójával, és ezért $|A| \neq 0$. Fordítva, ha $|A| \neq 0$, akkor $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = \mathrm{r}(A) = n$, amiből a 8.6. Tétel alapján $\operatorname{Im}\varphi = V$ következik. Tehát φ szürjektív, és ezért a 10.4. Következmény szerint φ bijektív. ■

14. Lineáris transzformációk és mátrixok sajátértékei, sajátvektorai és karakterisztikus polinomja

14.1. Definíció. Legyen T számtest, V vektortér T felett és φ a V vektortér lineáris transzformációja. Azt mondjuk, hogy a $v \in V$ vektor φ *sajátvektora*, ha $v \neq \underline{0}$, és van olyan $\lambda \in T$, hogy $v\varphi = \lambda v$. A $\lambda \in T$ szám φ *sajátértéke*, ha van olyan $v \in V$, $v \neq \underline{0}$, hogy $v\varphi = \lambda v$. A fenti esetekben azt is mondjuk, hogy λ, v sajátérték, sajátvektor párja φ-nek.

Legyen $n \in \mathbf{N}$ és $A = (a_{ij}) \in T^{n\times n}$. Azt mondjuk, hogy $\underline{x} \in T^n$ az A mátrix *sajátvektora*, ha $\underline{x} \neq \underline{0}$, és van olyan $\lambda \in T$, hogy $\underline{x}A = \lambda\underline{x}$. A $\lambda \in T$ szám A *sajátértéke*, ha van olyan $\underline{x} \in T^n$, $\underline{x} \neq \underline{0}$, hogy $\underline{x}A = \lambda\underline{x}$. A fenti esetekben azt is mondjuk, hogy $\lambda, \underline{x}$ sajátérték, sajátvektor párja A-nak. Az

$$f_A(x) = |A - xE| = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - x \end{vmatrix}$$

polinomot az A mátrix *karakterisztikus polinom*jának, az $f_A(x)$ polinom T-be eső gyökeit pedig az *A mátrix karakterisztikus gyöke*inek nevezzük.

14.2. Tétel. *Legyen V n-dimenziós vektortér a T számtest felett, $e_1, \dots, e_n$ bázis V-ben, $\varphi \in \mathrm{Hom}\,(V, V)$ és A a φ lináris transzformáció mátrixa az $e_1, \dots, e_n$ bázisban.*

(14.2.1) Legyen $\underline{x} \in T^n$ a $v \in V$ vektor koordinátasora és $\lambda \in T$. Ekkor λ, v akkor és csak akkor sajátérték, sajátvektor párja φ-nek, ha $\lambda, \underline{x}$ sajátérték, sajátvektor párja A-nak.

(14.2.2) A $\lambda \in T$ akkor és csak akkor sajátértéke az A mátrixnak, ha λ gyöke A karakterisztikus polinomjának.

Bizonyítás. Az előző két fejezet eredményeit figyelembe véve a következőt kapjuk:

$$v\varphi = \lambda v \iff (\underline{x}\underline{e})\varphi = \lambda(\underline{x}\underline{e}) \iff \underline{x}(\underline{e}\varphi) = \lambda(\underline{x}\underline{e}) \iff$$

$$\iff \underline{x}(A\underline{e}) = \lambda(\underline{x}\underline{e}) \iff (\underline{x}A)\underline{e} = (\lambda\underline{x})\underline{e} \iff \underline{x}A = \lambda\underline{x}.$$

Figyelembe véve még azt, hogy $v \neq \underline{0}$ pontosan akkor teljesül, ha $\underline{x} \neq \underline{0}$, ezzel az első állítást igazoltuk.

Ha $\lambda \in T$ sajátértéke az A mátrixnak, akkor van olyan $\underline{0}$-tól különböző $\underline{x}$ vektor, hogy $\underline{x}A = \lambda\underline{x}$, amiből

$$\underline{x}(A - \lambda E) = \underline{0} \ \text{ és } \ (A - \lambda E)^{\mathrm{T}}\underline{x}^{\mathrm{T}} = \underline{0}$$

következik. Tehát $\underline{x}^{\mathrm{T}}$ nemtriviális megoldása az $(A - \lambda E)^{\mathrm{T}}$ mátrixú homogén lineáris egyenletrendszernek. Ezért az 5.9. Következmény szerint

$$f_A(\lambda) = |A - \lambda E| = |(A - \lambda E)^{\mathrm{T}}| = 0.$$

Fordítva, ha valamely $\lambda \in T$ esetén

$$|(A - \lambda E)^{\mathrm{T}}| = |A - \lambda E| = f_A(\lambda) = 0,$$

akkor a 10.5. Tétel szerint van olyan $\underline{x} \in T^n$, $\underline{x} \neq \underline{0}$, hogy $(A - \lambda E)^{\mathrm{T}} \underline{x}^{\mathrm{T}} = \underline{0}$, amiből

$$\underline{x}(A - \lambda E) = \underline{0}, \quad \text{azaz} \quad \underline{x}A = \lambda \underline{x}$$

következik. ∎

14.3. Tétel. *Hasonló mátrixok karakterisztikus polinomja megegyezik.*

Bizonyítás. Legyenek A és B hasonló mátrixok. Ekkor alkalmas X invertálható mátrixra $B = X^{-1}AX$, és ezért

$$f_B(x) = |B - xE| = |X^{-1}AX - xE| = |X^{-1}(A - xE)X| =$$

$$= |X^{-1}||A - xE||X| = |X^{-1}||X||A - xE| = |X^{-1}X||A - xE| =$$

$$= |E||A - xE| = |A - xE| = f_A(x).$$

∎

A 13.5. Következményben láttuk, hogy egy lineáris transzformáció különböző bázisban felírt mátrixai hasonlóak, s ezért a 14.3. Tétel szerint egy lineáris transzformáció bármely bázisban felírt mátrixának ugyanaz a karakterisztikus polinomja.

14.4. Definíció. Véges dimenziós vektortér *lineáris transzformációjának karakterisztikus polinomja* a lineáris transzformáció valamely (bármely) bázisban felírt mátrixának karakterisztikus polinomja.

15. Bilineáris leképezések és kvadratikus alakok

15.1. Definíció. Legyen U és V vektortér a T számtest felett. Egy $l\colon U \times V \to T$ leképezést *bilineáris leképezés*nek nevezünk, ha

$$l(u_1 + u_2, v) = l(u_1, v) + l(u_2, v),$$
$$l(u, v_1 + v_2) = l(u, v_1) + l(u, v_2)$$

és

$$l(\lambda u, v) = l(u, \lambda v) = \lambda l(u, v)$$

teljesül tetszőleges $u, u_1, u_2 \in U$, $v, v_1, v_2 \in V$ és $\lambda \in T$ esetén. Ha $U = V$ és $l(u, v) = l(v, u)$ bármely $u, v \in U$ esetén, akkor azt mondjuk, hogy l *szimmetrikus bilineáris leképezés.*

Legyen U m-dimenziós, V n-dimenziós, $e_1, \dots, e_m$ bázis U-ban, $f_1, \dots, f_n$ bázis V-ben, továbbá legyen

$$\underline{x} = (x_1, \dots, x_m) \in T^m,\ \underline{y} = (y_1, \dots, y_n) \in T^n,\ u = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i,\ v = \sum_{j=1}^{n} {}_j f_j.$$

Ekkor

$$l(u, v) = l(\sum_{i=1}^{m} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_i f_i) = \sum_{i=1}^{m} x_i l(e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j f_j) =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j l(e_i, f_j) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} l(e_i, f_j) x_i y_j = \underline{x} A \underline{y}^{\mathrm{T}},$$

ahol

$$A = (l(e_i, f_j))_{m \times n}.$$

Azt mondjuk, hogy az A mátrix az l *bilineáris leképezés mátrixa* az adott bázisokban, az $\underline{x} A \underline{y}^{\mathrm{T}}$ kifejezés pedig l *koordinátás alakja* az adott bázisokban. Ha $U = V$, akkor ugyanúgy, mint a lineáris transzformációk esetében, a két bázist azonosnak választjuk.

15.2. Tétel. Legyen V véges dimenziós vektortér a T számtest felett, és $l\colon V^2 \to T$ bilineáris leképezés. Ha l szimmetrikus, akkor mátrixa bármely bázisban szimmetrikus. Fordítva, ha l mátrixa valamely bázisban szimmetrikus, akkor l is szimmetrikus.

Bizonyítás. Legyen $e_1, \dots, e_n$ a V vektortér egy bázisa. Ha l szimmetrikus, akkor $A = (l(e_i, e_j))_{n \times n}$ is szimmetrikus, hiszen $l(e_i, e_j) = l(e_j, e_i)$, $1 \le i, j \le n$. Ha $A = (l(e_i, e_j))_{n \times n}$ szimmetrikus, és

$$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in T^n,\ \underline{y} = (y_1, \dots, y_n) \in T^n,\ u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\ v = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i,$$

akkor

$$l(u, v) = \underline{x} A \underline{y}^{\mathrm{T}} = (\underline{x} A \underline{y}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \underline{y} A^{\mathrm{T}} \underline{x}^{\mathrm{T}} = \underline{y} A \underline{x}^{\mathrm{T}} = l(v, u).$$

Tehát l szimmetrikus. ■

15.3. Definíció. Legyen V véges dimenziós vektortér a T számtest felett. A $q\colon V \to T$ leképezést *kvadratikus alak*nak nevezzük, ha van olyan $l\colon V^2 \to T$ szimmetrikus bilineáris leképezés, melyre $q(v) = l(v,v)$ minden $v \in V$ esetén.

15.4. Tétel. *Bármely kvadratikus alak egyértelműen meghatározza a hozzá tartozó szimmetrikus bilineáris leképezést.*

Bizonyítás. Legyen q az l szimmetrikus bilineáris leképezés által meghatározott kvadratikus alak. Ekkor tetszőleges u és v vektorok esetén

$$q(u+v) = l(u+v, u+v) = l(u,u) + l(u,v) + l(v,u) + l(v,v) =$$

$$= q(u) + 2l(u,v) + q(v),$$

amiből

$$l(u,v) = \frac{1}{2}(q(u+v) - q(u) - q(v))$$

következik.

∎

15.5. Definíció. Egy q kvadratikus alak valamely bázisbeli mátrixán az őt meghatározó szimmetrikus bilineáris leképezés mátrixát értjük. Ha valamely bázisban q mátrixa az $n\times n$-es $A = (a_{ij})$ mátrix, és a v vektor koordinátasora $\underline{x}$, akkor az előzőek szerint $q(v) = \underline{x}A\underline{x}^{\mathrm{T}}$. Az

$$\underline{x}A\underline{x}^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

kifejezést q *koordinátás alakj*ának nevezzük.

Legyen $e_1, \ldots, e_n$ és $f_1, \ldots, f_n$ a V vektortér két bázisa, q pedig egy kvadratikus alak. Legyen továbbá a v vektor koordinátasora az első bázisban $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, a második bázisban pedig $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, valamint q mátrixa az első bázisban A, a második bázisban pedig B. Végül legyen S a második bázisról az első bázisra való átmenet mátrixa. A 13. fejezetből tudjuk, hogy $\underline{x} = \underline{y}S$. Ekkor egyrészt

$$q(v) = \underline{y}B\underline{y}^{\mathrm{T}},$$

másrészt

$$q(v) = \underline{x}A\underline{x}^{\mathrm{T}} = (\underline{y}S)A(\underline{y}S)^{\mathrm{T}} = (\underline{y}S)A(S^{\mathrm{T}}\underline{y}^{\mathrm{T}}) = \underline{y}(SAS^{\mathrm{T}})\underline{y}^{\mathrm{T}},$$

amiből

$$B = SAS^{\mathrm{T}}$$

következik. A fentiek szerint q különböző bázisbeli mátrixai megkaphatók egymásból alkalmas invertálható mátrixokkal való szorzással. Ezért a 9.6. Tétel szerint e mátrixok rangja megegyezik. Tehát kvadratikus alak minden bázisbeli mátrixának rangja ugyanaz. A fenti számolásból az is kiderül, hogy q első bázisbeli koordinátás alakjából a második bázisbeli alakját úgy kapjuk meg, hogy elvégezzük az $\underline{x} = \underline{y}S$ ún. *nemelfajuló lineáris helyettesítést.* A nemelfajuló jelző arra utal, hogy az S mátrix determinánsa nem nulla. Ezt az S mátrixot a *helyettesítés mátrix*ának nevezzük. Ha $S = (s_{ij})_{n\times n}$, akkor

$$(x_1, \dots, x_n) = \underline{x} = \underline{y}S = (y_1, \dots, y_n)(s_{ij})_{n\times n} = (\sum_{i=1}^{n} s_{i1}y_i, \dots, \sum_{i=1}^{n} s_{in}y_i),$$

amiből

$$x_j = \sum_{i=1} s_{ij}y_i, \quad j = 1, \dots, n,$$

következik. Tehát az első bázisbeli koordináták a második bázisbeli koordináták elsőfokú kifejezései. Erre utal a ”lineáris” jelző.

15.6. Definíció. A *q kvadratikus alak rangján* valamely bázisbeli mátrixának rangját értjük, és r(q)-val jelöljük. Azt mondjuk, hogy a q kvadratikus alak az $e_1, \dots, e_n$ bázisban *kanonikus alakú*, ha mátrixa diagonális.

Vegyük észre, hogy a q kvadratikus alak pontosan akkor kanonikus alakú az $e_1, \dots, e_n$ bázisban, ha koordinátás alakja $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$, ahol az $a_1, \dots, a_n$ sorozat q mátrixának főátlója. Ekkor q rangja megegyezik a 0-tól különböző a_i-k számával.

15.7. Kvadratikus alakok alaptétele. *Bármely véges dimenziós vektortéren értelmezett kvadratikus alakhoz megadható a vektortér olyan bázisa, melyben a kvadratikus alak kanonikus alakú. Ezzel ekvivalens állítás a következő: bármely véges dimenziós vektortéren értelmezett kvadratikus alak bármely bázisbeli koordinátás alakja nemelfajuló lineáris helyettesítéssel kanonikus alakra hozható.*

Bizonyítás. Már láttuk, hogy az új bázisra való áttérés nemelfajuló lineáris helyettesítést indukál a kvadratikus alak koordinátás alakján. Megfordítva, ha S egy nemelfajuló lineáris helyettesítesítés mátrixa, akkor a helyettesítés eredményeként kapott alak a kvadratikus alak azon bázisbeli koordinátás alakja, mely bázisról az eredeti bázisra való áttérés mátrixa S. Tehát a tétel két állítása ekvivalens. Ezért elég a másodikat igazolni. A bizonyítást a vektortér dimenziója szerinti teljes indukcióval végezzük. Legyen a V n-dimenziós vektortéren értelmezett q kvadratikus alak valamely bázisbeli mátrixa az $A = (a_{ij})_{n\times n}$ szimmetrikus mátrix. Ekkor q koordinátás alakja

$$q = \underline{x}A\underline{x}^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j.$$

Ha A a nullmátrix, akkor q kanonikus alakú. Tegyük fel, hogy $A \neq 0$. Ha $n = 1$, akkor $q = a_{11}x_1^2$ kanonikus alakú.

Legyen $n \geq 2$, és tegyük fel, hogy az $n-1$ koordinátás kvadratikus alakokra érvényes a tétel állítása. Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor A főátlójában van nullától különböző elem. Könnyen ellenőrizhető, hogy a koordináták átszámozása nemelfajuló lineáris helyettesítés. Ezért feltehető, hogy $a_{11} \neq 0$. Ekkor

$$q = a_{11}(x_1^2 + 2\sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{a_{11}} x_1 x_i) + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_i x_j.$$

Elvégezve az

$$y_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n,\ y_2 = x_2, \ldots,\ y_n = x_n,$$

vagyis az

$$x_1 = y_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}}y_2 - \ldots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}y_n,\ x_2 = y_2, \ldots,\ x_n = y_n$$

lineáris helyettesítést, azt kapjuk, hogy

$$q = a_{11}y_1^2 + q',$$

ahol q' az $y_2, \ldots, y_n$ koordinátákban felírt kvadratikus alak. A helyettesítés mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{a_{12}}{a_{11}} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{1n}}{a_{11}} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

nemelfajuló, mert determinánsa 1. Az indukciós feltevés szerint van olyan nemelfajuló $(n-1) \times (n-1)$-es (s_{ij}) mátrix, melyre a

$$(y_2, \ldots, y_n) = (z_2, \ldots, z_n)(s_{ij})$$

helyettesítítés q'-t a q'' kanonikus alakba viszi át. Ekkor az $(y_1, \ldots, y_n) = (z_1, \ldots, z_n)S$ helyettesítés, ahol

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_{11} & \cdots & s_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & s_{n-1,1} & \cdots & s_{n-1,n-1} \end{pmatrix},$$

nemelfajuló, mert $|S| = |s_{ij}| \neq 0$, és alkalmazása a $q = a_{11}z_1^2 + q''$ kanonikus alakot adja.

Végül, ha A főátlójában minden elem nulla, azaz

$$q = 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_i x_j,$$

akkor $A \neq 0$ miatt van a főátlón kívül nullától különböző elem. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $a_{12} \neq 0$. Ekkor az

$$x_1 = y_1 - y_2,\ x_2 = y_1 + y_2,\ x_3 = y_3, \dots,\ x_n = y_n,$$

lineáris helyettesítés nemelfajuló, mert mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

melynek determinánsa 2. Ezen helyettesítés alkalmazása a

$$q = 2a_{12}y_1^2 - 2a_{12}y_2^2 + \bar{q}$$

kvadratikus alakot adja, ahol $\bar{q}$ nem tartalmaz sem y_1^2-es sem y_2^2-es tagot. Tehát q ezen alakjának mátrixa olyan, hogy főátlójának első két eleme nem nulla. Ezért az első esetben leírtak szerint alkalmas nemelfajuló lineáris helyettesítéssel kanonikus alakú lesz.

Míg a tétel állítása szerint egy kvadratikus alak nemelfajuló lineáris helyettesítéssel egy lépésben kanonikus alakra hozható, addig a fenti gondolatmenetben ezt csak több nemelfajuló lineáris helyettesítés egymás utáni alkalmazásával értük el. Ezért még igazolni kell, hogy több helyettesítés egymás utáni végrehajtása mindig helyettesíthető eggyel. Ezt elég két helyettesítés esetén megmutatni. Világos, hogy az $\underline{x} = \underline{y}P$, majd az $\underline{y} = \underline{z}Q$ nemelfajuló lineáris helyettesítés végrehajtása ugyanazt eredményezi, mint az $\underline{x} = \underline{z}(QP)$ lineáris helyettesítés, ami $|QP| = |Q| \cdot |P|$ miatt nemelfajuló. ∎

A bizonyításból az is kiderül, hogy bármely kvadratikus alak nemelfajuló lineáris helyettesítéssel $\sum_{i=1}^{r} a_i x_i^2$ alakra hozható, ahol $a_1, \dots, a_r \neq 0$. Láttuk, hogy ekkor r a kvadratikus alak (bármely bázisban felírt) mátrixának rangja.

15.8. Következmény. *Bármely A szimmetrikus mátrixhoz megadható olyan S nemelfajuló mátrix, melyre az SAS^{T} mátrix diagonális.*

Bizonyítás. Legyen A a T számtest fölötti $n \times n$-es szimmetrikus mátrix, és legyen q a T^n vektortéren értelmezett azon kvadratikus alak, melynek mátrixa a standard bázisban A. Az alaptétel szerint van olyan bázis, melyben q kanonikus alakú, azaz a mátrixa diagonális. Ha egy bázisban q mátrixa a B diagonális mátrix, és erről a bázisról a standard bázisra való átmenet mátrixa S, akkor $B = SAS^T$. ∎

16. Valós kvadratikus alakok

16.1. Definíció. Az $\mathbf{R}$ valós számtest feletti véges dimenziós vektortereken értelmezett kvadratikus alakokat röviden *valós kvadratikus alak*oknak nevezzük. Az

$$x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_r^2$$

alakú kvadratikus alakokat *normálalakú*nak nevezzük ($0 \leq k \leq r$).

16.2. Tétel. *Bármely valós kvadratikus alak nemelfajuló lineáris helyettesítéssel normálalakra hozható.*

Bizonyítás. Legyen q kvadratikus alak valamely $\mathbf{R}$ feletti n-dimenziós vektortéren. Az előző fejezetben láttuk, hogy q alkalmas nemelfajuló lineáris helyettesítéssel

$$q = a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2$$

kanonikus alakra hozható, ahol r a kvadratikus alak rangja. Feltehető, hogy az első k együttható pozitív, a többi pedig negatív ($0 \leq k \leq r$). Tehát

$$q = b_1x_1^2 + \ldots + b_kx_k^2 - b_{k+1}x_{k+1}^2 - \ldots - b_rx_r^2,$$

ahol $b_1, \ldots, b_r > 0$. Ha végrehajtjuk az

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{b_1}}y_1, \ldots, x_r = \frac{1}{\sqrt{b_r}}y_r, \; x_{r+1} = y_{r+1}, \ldots, x_n = y_n$$

nemelfajuló helyettesítést, akkor a $q = y_1^2 + \ldots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \ldots - y_r^2$ normálalakot kapjuk. ■

16.3. Tehetetlenségi törvény. *Bármilyen módon is hozunk normálalakra nemelfajuló lineáris helyettesítéssel egy valós kvadratikus alakot, a pozitív tagok, illetve a negatív tagok száma mindig ugyanaz, azaz egy valós kvadratikus alak normálalakja egyértelműen meghatározott.*

Bizonyítás. Legyen az $\mathbf{R}$ feletti n-dimenziós V vektortéren értelmezett r rangú q kvadratikus alak normálalakú az $e_1, \ldots, e_n$ és az $f_1, \ldots, f_n$ bázisban. Az első bázisban q koordinátás alakja

$$q = x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_r^2,$$

a második bázisban pedig

$$q = y_1^2 + \ldots + y_l^2 - y_{l+1}^2 - \ldots - y_r^2.$$

Azt kell igazolni, hogy $k = l$. Ha $k \neq l$, mondjuk $k > l$, akkor az $(n + k - l)$-elemű

$$e_1, \ldots, e_k, f_{l+1}, \ldots, f_n$$

vektorrendszer lineárisan függő, mert a vektortér n dimenziójánál több eleme van. Ezért vannak olyan nem csupa nulla $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_{l+1}, \ldots, \mu_n$ valós számok, hogy

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k + \mu_{l+1} f_{l+1} + \ldots + \mu_n f_n = \underline{0}.$$

Ekkor a

$$v = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k = -\mu_{l+1} f_{l+1} - \ldots - \mu_n f_n$$

vektor nem a nullvektor. Ha ugyanis $\underline{0}$ lenne, akkor az $e_1, \ldots, e_k$ és $f_{l+1}, \ldots, f_n$ vektorrendszerek lineáris függetlenségét felhasználva azt kapnánk, hogy mindegyik együttható nulla. Ezért a $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ számok és a $\mu_{l+1}, \ldots, \mu_n$ számok között is van nullától különböző, amiből egyrészt

$$q(v) = \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_k^2 > 0,$$

másrészt

$$q(v) = -\mu_{l+1}^2 - \ldots - \mu_r^2 < 0$$

következik, ami lehetetlen. A $k < l$ esetben a bizonyítás hasonlóan történik. ■

16.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy a valós számtest feletti V vektortéren értelmezett q kvadratikus alak *pozitív definit (negatív definit)*, ha bármely $v \in V$ esetén $q(v) \geq 0$ ($q(v) \leq 0$), és $q(v) = 0$ csak a $v = \underline{0}$ esetben fordul elő. Ha $q(v) \geq 0$ ($q(v) \leq 0$) bármely $v \in V$ esetén, és $q(v) = 0$ nem csak a $v = \underline{0}$ esetben fordul elő, akkor q *pozitív szemidefinit (negatív szemidefinit)*. *Indefinit* a kvadratikus alak, ha pozitív és negatív értéket is felvesz.

A következő tétel a definíciók közvetlen következménye, s ezért a bizonyítást az olvasóra bízzuk.

16.5. Tétel. *Valamely n-dimenziós vektortéren értelmezett q valós kvadratikus alak normálalakja legyen $x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_r^2$. Ekkor*

(16.5.1) q akkor és csak akkor pozitív definit, ha $k = r = n$;
(16.5.2) q akkor és csak akkor negatív definit, ha $k = 0$ és $r = n$;
(16.5.3) q akkor és csak akkor pozitív szemidefinit, ha $k = r < n$;
(16.5.4) q akkor és csak akkor negatív szemidefinit, ha $k = 0$ és $r < n$;
(16.5.5) q akkor és csak akkor indefinit, ha $0 < k < r$.

16.6. Következmény. *Bármely olyan A szimmetrikus valós mátrixhoz, amelyhez tartozó $\underline{x}A\underline{x}^{\mathrm{T}}$ kvadratikus alak pozitív definit, megadható olyan P nemelfajuló valós mátrix, melyre az $A = PP^{\mathrm{T}}$ egyenlőség teljesül.*

Bizonyítás. Legyen A $n \times n$-es szimmetrikus valós mátrix, és legyen q az $\mathbf{R}^n$ vektortéren értelmezett azon kvadratikus alak, melynek mátrixa a standard bázisban A. Ha q pozitív definit, akkor a 16.5. Tétel szerint normálalakjának mátrixa az $n \times n$-es E egységmátrix. Legyen S annak a nemelfajuló lineáris helyettesítésnek a mátrixa, mely q-t a normálalakjába viszi. Ekkor $E = SAS^{\mathrm{T}}$, amiből

$$A = S^{-1}E(S^{\mathrm{T}})^{-1} = S^{-1}(S^{\mathrm{T}})^{-1} \tag{$*$}$$

következik. Legyen $P = S^{-1}$. A 4.2. Tétel szerint $(S^{\mathrm{T}})^{-1} = (S^{-1})^{\mathrm{T}} = P^{\mathrm{T}}$, és így a $(*)$ egyenlőségből az $A = PP^{\mathrm{T}}$ egyenlőséget kapjuk. ∎

16.7. Definíció. Egy $A = (a_{ij})_{n\times n}$ valós mátrix *főminorai*nak hívjuk az

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad 1 \le k \le n,$$

determinánsokat.

Végül bizonyítás nélkül ismertetjük a következő fontos tételt:

16.8. Tétel. *Legyen $A = (a_{ij})_{n\times n}$ egy valós kvadratikus alak mátrixa valamely bázisban. A kvadratikus alak akkor és csak akkor pozitív definit, ha az A mátrix minden főminora pozitív.*

17. Euklideszi terek

17.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{R}$ valós számtest feletti véges dimenziós V vektortér *euklideszi tér* a $\langle -,- \rangle \colon V^2 \to \mathbf{R}$ *belső szorzat*tal, ha $\langle -,- \rangle$ olyan szimmetrikus bilineáris leképezés, melyhez tartozó $V \to \mathbf{R}$, $v \mapsto \langle v,v \rangle$ kvadratikus alak pozitív definit, azaz

$$\langle u+v,w \rangle = \langle u,w \rangle + \langle v,w \rangle,\ \langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle,\ \lambda\langle u,v \rangle = \langle \lambda u,v \rangle,\ \langle u,u \rangle \geq 0$$

minden $u,v,w \in V$ és minden $\lambda \in \mathbf{R}$ esetén, és $\langle u,u \rangle = 0$-ból $u = \underline{0}$ következik.

Az u vektor *hosszán (normáján)* az $\|u\| = \sqrt{\langle u,u \rangle}$ nemnegatív számot értjük, az u és v vektorok *távolsága* $\|u-v\|$. Az u vektor *normált*, ha hossza 1.

17.2. Példa. Minden $n \geq 1$-re az $\mathbf{R}^n$ vektortér euklideszi tér az

$$\langle \underline{x},\underline{y} \rangle = \underline{x}\underline{y}^T = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \underline{x} = (x_1,\dots,x_n),\ \underline{y} = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbf{R}^n,$$

ún. *standard belső szorzat*tal.

17.3. Bunyakovszkij-Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség (BCS-egyenlőtlenség). *Euklideszi tér tetszőleges u,v vektora esetén*

$$|\langle u,v \rangle| \leq \|u\|\|v\|.$$

Bizonyítás. Ha $u = \underline{0}$, akkor igaz az állítás, mert az egyenlőtlenség mindkét oldala nulla. Tegyük fel, hogy $u \neq \underline{0}$. Ekkor minden $\lambda \in \mathbf{R}$ esetén

$$0 \leq \|\lambda u - v\|^2 = \langle \lambda u - v, \lambda u - v \rangle = \langle \lambda u, \lambda u \rangle - \langle \lambda u, v \rangle - \langle u, \lambda v \rangle + \langle v,v \rangle =$$

$$= \|u\|^2\lambda^2 - 2\langle u,v \rangle\lambda + \|v\|^2.$$

Ezért az $\|u\|^2\lambda^2 - 2\langle u,v \rangle\lambda + \|v\|^2$ másodfokú polinom diszkriminánsa nem pozitív:

$$4\langle u,v \rangle^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0,$$

amiből következik az állítás. ■

17.4. Háromszög-egyenlőtlenség. *Euklideszi tér tetszőleges u, v vektora esetén*

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Bizonyítás. Négyzetre emelve az egyenlőtlenség mindkét oldalát a következő ekvivalens egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\langle u+v, u+v\rangle = \|u+v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\|,$$

azaz

$$\|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\|,$$

ami következik a BCS-egyenlőtlenségből. ∎

17.5. Definíció. Ha $u, v \neq \underline{0}$, akkor

$$-1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|} \leq 1,$$

és ezért van pontosan egy olyan α $(0 \leq \alpha \leq \pi)$, hogy

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}.$$

Ezt az α szöget az u és v *vektorok szögé*nek nevezzünk. Az mondjuk, hogy az u és v vektorok *merőlegesek (ortogonálisak)*, ha $\langle u, v\rangle = 0$. Jele: $u \perp v$.

Az $u_1, \ldots, u_k$ *vektorrendszer ortogonális*, ha bármely $1 \leq i < j \leq k$ esetén $u_i \perp u_j$. Ha az u_i $(1 \leq i \leq n)$ vektorok normáltak is, akkor *ortonormált vektorrendszer*ről beszélünk. Az A $n \times n$-es mátrixot *ortogonális mátrix*nak nevezzük, ha sorvektorrendszere ortonormált az $\mathbf{R}^n$ euklideszi térben.

Világos, hogy $\underline{0} \perp u$ minden u vektor esetén. Vegyük észre, hogy két $\underline{0}$-tól különböző vektor pontosan akkor merőleges, ha szögük $\frac{\pi}{2}$, és egy A négyzetes mátrix pontosan akkor ortogonális, ha $AA^{\mathrm{T}} = E$, azaz $A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$.

A következő tétel bizonyítása során egy olyan algoritmust ismertetünk, mely segítségével lineárisan független vektorrendszerből ortogonális vektorrendszert kaphatunk. Az algoritmust *Gram-Schmidt-féle ortogonalizáció*nak nevezzük.

17.6. Tétel. *Euklideszi tér tetszőleges $u_1, \ldots, u_k$ lineárisan független vektorrendszere esetén van olyan $v_1, \ldots, v_k$ ortogonális vektorrendszer, melyre $[u_1, \ldots, u_i] = [v_1, \ldots, v_i]$, $i = 1, \ldots, k$.*

Bizonyítás. A bizonyítás k szerinti teljes indukcióval történik. Ha $k = 1$, akkor a $v_1 = u_1$ egyelemű vektorrendszer eleget tesz a feltételeknek. Tegyük fel, hogy $k \geq 2$, és $(k-1)$-re igaz az állítás. Legyen $u_1, \ldots, u_k$ lineárisan független vektorrendszer. Az indukciós feltevés szerint van olyan $v_1, \ldots, v_{k-1}$ ortogonális vektorrendszer, melyre $[u_1, \ldots, u_i] = [v_1, \ldots, v_i]$, $i = 1, \ldots, k-1$. Keressük a v_k vektort

$$v_k = u_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i v_i, \ \lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1} \in \mathbf{R},$$

alakban. Az ortogonalitási feltétel miatt minden j-re, $1 \leq j \leq k-1$,

$$0 = \langle v_k, v_j \rangle = \langle u_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i v_i, v_j \rangle = \langle u_k, v_j \rangle + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \langle v_i, v_j \rangle =$$

$$= \langle u_k, v_j \rangle + \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle,$$

amiből

$$\lambda_j = -\frac{\langle u_k, v_j \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle}, \ 1 \leq j \leq k-1.$$

Ha a v_k vektort a most kiszámolt együtthatókkal adjuk meg, akkor $v_1, \ldots, v_k$ ortogonális vektorrendszer lesz, és az $[u_1, \ldots, u_k] = [v_1, \ldots, v_k]$ feltétel is teljesül, hiszen a két vektorrendszer ekvivalens. Végül megjegyezzük, hogy $\langle v_j, v_j \rangle \neq 0$, mert $v_j \neq \underline{0}$, $1 \leq j \leq k-1$, ugyanis

$$k - 1 = \mathrm{r}(u_1, \ldots, u_{k-1}) = \dim [u_1, \ldots, u_{k-1}] =$$

$$= \dim [v_1, \ldots, v_{k-1}] = \mathrm{r}(v_1, \ldots, v_{k-1})$$

miatt a $v_1, \ldots, v_{k-1}$ vektorrendszer lineárisan független, s ezért vektorai különböznek a $\underline{0}$-tól. ■

17.7. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy ha $u_1, \ldots, u_l$ ortogonális részrendszere az $u_1, \ldots, u_k$ vektorrendszernek, $l \leq k$, akkor a Gram-Schmidt-féle ortogonalizáció során $v_1 = u_1, \ldots, v_l = u_l$ adódik.

17.8. Következmény. *Euklideszi tér bármely ortonormált vektorrendszere kiegészíthető ortonormált bázissá. Euklideszi térben van ortonormált bázis.*

Bizonyítás. Az első állítás igazolásához legyen $u_1, \ldots, u_k$ ortonormált vektorrendszer valamely n-dimenziós euklideszi térben. Először megmutatjuk, hogy $u_1, \ldots, u_k$ lineárisan független. Valóban, ha $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = \underline{0}$, akkor

$$0 = \langle \underline{0}, u_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i, u_j \rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle u_i, u_j \rangle = \lambda_j \langle u_j, u_j \rangle = \lambda_j, \ 1 \leq j \leq k.$$

Egészítsük ki a vektorrendszert az $u_1, \dots, u_k, u'_{k+1}, \dots, u'_n$ bázissá, és alkalmazzuk rá a Gram-Schmidt-féle ortogonalizációt. A 17.7. Megjegyzést is figyelembe véve, az $u_1, \dots, u_k, \dots, u_n$ ortogonális vektorrendszert kapjuk. Mivel

$$[u_1, \dots, u_k, u'_{k+1}, \dots, u'_n] = [u_1, \dots, u_k, \dots, u_n],$$

azért a kapott vektorrendszer is bázis. Ha a nem normált vektorokat megszorozzuk hosszuk reciprokával, akkor a feltételnek eleget tevő vektorrendszerhez jutunk. A második állítás igazolásához alkalmazzuk az első állítást az üres vektorrendszerre. ∎

17.9. Definíció. Az U és V *euklideszi terek izomorfak*, ha van olyan $\varphi\colon U \to V$ vektortér izomorfizmus, mely megtartja a belső szorzatot, azaz $\langle u\varphi, v\varphi\rangle = \langle u, v\rangle$ minden $u, v \in U$ esetén.

17.10. Tétel. *Bármely n-dimenziós euklideszi tér izomorf az $\mathbf{R}^n$ euklideszi térrel.*

Bizonyítás. Legyen V n-dimenziós euklideszi tér, $e_1, \dots, e_n$ ortonormált bázis V-ben, és tekintsük a

$$\varphi\colon \mathbf{R}^n \to V,\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

leképezést. A 10.8. Tétel bizonyításában láttuk, hogy φ vektortér izomorfizmus. Ha $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)$ vektorok $\mathbf{R}^n$-ben, akkor

$$\langle (x_1, \dots, x_n)\varphi, (y_1, \dots, y_n)\varphi\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{n} y_i e_i\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\rangle.$$

Tehát φ megtartja a belső szorzatot. ∎

18. Szimmetrikus lineáris transzformációk, a kvadratikus alakok főtengelytétele

18.1. Definíció. Ha a V euklideszi tér φ lineáris transzformációjára $\langle u\varphi, v\rangle = \langle u, v\varphi\rangle$ minden $u, v \in V$ esetén, akkor azt mondjuk, hogy φ *szimmetrikus* vagy *önadjungált lineáris transzformáció.*

18.2. Tétel. *Euklideszi tér szimmetrikus lineáris transzformációjának mátrixa bármely ortonormált bázisban szimmetrikus. Fordítva, ha egy lineáris transzformáció mátrixa valamely ortonormált bázisban szimmetrikus, akkor a lineáris transzformáció szimmetrikus.*

Bizonyítás. Legyen V euklideszi tér és $e_1, \ldots, e_n$ ortonormált bázis V-ben. Ha a φ lineáris transzformáció mátrixa $A = (a_{ij})$, akkor a 12.2. Definíció szerint $e_i\varphi = \sum_{k=1}^n a_{ik}e_k$, $1 \leq i \leq n$, és ezért minden $1 \leq i, j \leq n$ esetén egyrészt

$$\langle e_i\varphi, e_j\rangle = \langle \sum_{k=1}^n a_{ik}e_k, e_j\rangle = \sum_{k=1}^n a_{ik}\langle e_k, e_j\rangle = a_{ij},$$

másrészt

$$\langle e_i, e_j\varphi\rangle = \langle e_i, \sum_{k=1}^n a_{jk}e_k\rangle = \sum_{k=1}^n a_{jk}\langle e_i, e_k\rangle = a_{ji}.$$

Ha φ szimmetrikus, akkor $\langle e_i\varphi, e_j\rangle = \langle e_i, e_j\varphi\rangle$, $1 \leq i, j \leq n$, így $a_{ij} = a_{ji}$ következik minden $1 \leq i, j \leq n$ esetén. Tehát A szimmetrikus.

Fordítva, ha a φ lineáris transzformáció $A = (a_{ij})$ mátrixa szimmetrikus, akkor a fenti számolást figyelembe véve kapjuk, hogy

$$\langle e_i\varphi, e_j\rangle = a_{ij} = a_{ji} = \langle e_i, e_j\varphi\rangle, \ 1 \leq i, j \leq n.$$

Ezért ha $u = \sum_{i=1}^n x_ie_i, v = \sum_{i=1}^n y_ie_i \in V$, akkor

$$\langle u\varphi, v\rangle = \langle (\sum_{i=1}^n x_ie_i)\varphi, v\rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i(e_i\varphi), \sum_{i=1}^n y_ie_i\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_iy_i\langle e_i\varphi, e_j\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_iy_j\langle e_i, e_j\varphi\rangle =$$

$$= \langle \sum_{i=1}^n x_ie_i, \sum_{i=1}^n y_i(e_i\varphi)\rangle = \langle u, (\sum_{i=1}^n y_ie_i)\varphi\rangle = \langle u, v\varphi\rangle.$$

Tehát φ szimmetrikus. ∎

18.3. Segédtétel. *Euklideszi tér bármely szimmetrikus lineáris transzformációjának van sajátérték, sajátvektor párja.*

Bizonyítás. Legyen φ a V euklideszi tér szimmetrikus lineáris transzformációja, legyen $e_1, \ldots, e_n$ ortonormált bázis V-ben, és tegyük fel, hogy φ mátrixa ebben a bázisban az A szimmetrikus mátrix. A 14.2. Tétel szerint elég megmutatni, hogy A karakterisztikus polinomjának, $f_A(x) = |A - xE|$-nek van valós gyöke. A klasszikus algebra alaptétele szerint f_A-nak van gyöke a komplex számok $\mathbf{C}$ testében. Jelölje $\lambda \in \mathbf{C}$ az egyik gyököt. Az A mátrixnak, mint $\mathbf{C}$ fölötti mátrixnak λ karakterisztikus gyöke, ezért ugyancsak a 14.2. Tétel szerint van olyan nullától különböző $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{C}^n$ vektor, hogy $\underline{x}A = \lambda\underline{x}$. Tetszőleges $c \in \mathbf{C}$ komplex konjugáltját jelölje $\bar{c}$. Ha (a_{ij}) valamely $\mathbf{C}$ feletti mátrix, akkor legyen $\overline{(a_{ij})} = (\overline{a_{ij}})$. Ekkor

$$\overline{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i} = \overline{\lambda}(\overline{\underline{x}}\underline{x}^{\mathrm{T}}) = (\overline{\lambda}\overline{\underline{x}})\underline{x}^{\mathrm{T}} = (\overline{\lambda\underline{x}})\underline{x}^{\mathrm{T}} = \overline{\underline{x}A}\underline{x}^{\mathrm{T}} = (\overline{\underline{x}}\overline{A})\underline{x}^{\mathrm{T}} = (\overline{\underline{x}}A)\underline{x}^{\mathrm{T}} =$$

$$= \overline{\underline{x}}(A\underline{x}^{\mathrm{T}}) = \overline{\underline{x}}(A^{\mathrm{T}}\underline{x}^{\mathrm{T}}) = \overline{\underline{x}}((\underline{x}A)^{\mathrm{T}}) = \overline{\underline{x}}(\lambda\underline{x})^{\mathrm{T}} = \lambda(\overline{\underline{x}}\underline{x}^{\mathrm{T}}) = \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i},$$

ahonnan

$$(\lambda - \overline{\lambda})\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i} = 0.$$

Mivel van olyan $1 \leq j \leq n$, hogy $x_j \neq 0$, ezért

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \neq 0,$$

így a korábbi egyenlőségből $\lambda - \overline{\lambda} = 0$, azaz $\lambda = \overline{\lambda}$ következik. Tehát λ valós szám. ∎

18.4. Tétel. *Euklideszi tér tetszőleges φ szimmetrikus lineáris transzformációja esetén az euklideszi térnek van φ sajávektoraiból álló ortonormált bázisa. Ebben a bázisban φ mátrixa olyan diagonális mátrix, melynek főátlójában rendre a bázisvektorokhoz tartozó sajátértékek állnak.*

Bizonyítás. A tétel második, azaz φ mátrixára vonatkozó állítása a definíciók közvetlen következménye, ezért a részleteket az olvasóra bízzuk. Az első állítás bizonyítása a vektortér dimenziója szerinti teljes indukcióval történik. Az egydimenziós esetben az állítás triviális, mert bármelyik normált vektor sajátvektor és bázis is. Legyen $n \geq 2$, és tegyük fel, hogy $(n-1)$-dimenziós euklideszi terekben igaz az állítás. Legyen φ az n-dimenziós V euklideszi tér szimmetrikus lineáris transzformációja. A 18.3. Segédtétel szerint van φ-nek sajátérték, sajátvektor párja. Legyen egy ilyen pár λ, w. Ekkor az $e = \frac{1}{\|w\|}w$ normált vektor is sajátvektor, mert

$$e\varphi = (\frac{1}{\|w\|}w)\varphi = \frac{1}{\|w\|}(w\varphi) = \frac{1}{\|w\|}(\lambda w) = \lambda(\frac{1}{\|w\|}w) = \lambda e.$$

Tekintsük az

$$e^{\perp} = \{v \in V : e \perp v\}$$

halmazt, az e vektor ún. *ortogonális komplementer*ét. Ha $u, v \in e^{\perp}$ és $\mu \in \mathbf{R}$, akkor $\langle e, u\rangle = \langle e, v\rangle = 0$,

$$\langle e, u + v\rangle \;=\; \langle e, u\rangle \;+\; \langle e, v\rangle \;=\; 0 + 0 = 0,$$

$$\langle e, \mu v\rangle \;=\; \mu\langle e, v\rangle \;= \mu 0 = 0$$

és

$$\langle e, v\varphi\rangle \;=\; \langle e\varphi, v\rangle \;=\; \langle \lambda e, v\rangle \;=\; \lambda\langle e, v\rangle \;=\; \lambda 0 = 0,$$

amiből $u + v, \mu v, v\varphi \in e^{\perp}$ következik. Tehát $e^{\perp}$ olyan altér, melyet φ önmagába visz, azaz melynek $\varphi|_{e^{\perp}}$ szimmetrikus lineáris transzformációja. A 17.8. Tétel szerint az e vektor kiegészíthető $e, v_1, \ldots, v_{n-1}$ ortonormált bázissá V-ben. Mivel $e \notin e^{\perp}$, ezért $e^{\perp}$ nem lehet n-dimenziós altér. Másrészt $v_1, \ldots, v_{n-1} \in e^{\perp}$ miatt $e^{\perp}$ legalább $(n-1)$-dimenziós. Tehát $e^{\perp}$ pontosan $(n-1)$-dimenziós. Az indukciós feltevés szerint van $\varphi|_{e^{\perp}}$ sajátvektoraiból álló $e_1, \ldots, e_{n-1}$ ortonormált bázis $e^{\perp}$-ben. Ekkor $e, e_1, \ldots, e_{n-1}$ a φ lineáris transzformáció sajátvektoraiból álló ortonormált bázis V-ben ■

18.5. Következmény. *Bármely A valós szimmetrikus mátrixhoz megadható olyan P ortogonális mátrix, melyre $P^{-1}AP$ diagonális.*

Bizonyítás. Legyen az $\mathbf{R}^n$ euklideszi térben $e_1, \ldots, e_n$ a standard ortonormált bázis, és φ az a lineáris transzformáció, melynek mátrixa ebben a bázisban az A szimmetrikus mátrix. A 18.2. Tétel szerint φ szimmetrikus, ezért a 18.4. Tétel szerint van olyan $e'_1, \ldots, e'_n$ ortonormált bázis, melyben φ mátrixa D diagonális. Ha az első bázisról a második bázisra való átmenet mátrixa P, akkor a 13. fejezetben igazoltak szerint $D = P^{-1}AP$. Most már csak azt kell megmutatni, hogy $P = (p_{ij})$ ortogonális mátrix. Tudjuk, hogy $e_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}e'_k$, $1 \leq i \leq n$. Ezért ha $1 \leq i, j \leq n$, akkor

$$\langle (p_{i1}, \ldots, p_{in}), (p_{j1}, \ldots, p_{jn})\rangle \;= \sum_{k=1}^{n} p_{ik}p_{jk} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} p_{ik}p_{jl}\langle e'_k, e'_l\rangle \;=$$

$$= \;\langle \sum_{k=1}^{n} p_{ik}e'_k, \sum_{k=1}^{n} p_{jk}e'_k\rangle \;=\; \langle e_i, e_j\rangle \;= \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases}.$$

■

A 15.8. Tétel szerint bármely A szimmetrikus mátrixhoz megadható olyan S nemelfajuló mátrix, melyre az SAS^{T} mátrix diagonális. A valós mátrixokra vonatkozóan a 18.5. Tétel sokkal ”erősebb” állítás, mint a 15.8. Tétel, hiszen minden ortogonális mátrix nemelfajuló, és ortogonális mátrix inverze megegyezik a mátrix transzponáltjával.

18.6. Kvadratikus alakok főtengelytétele. *Euklideszi térben bármely kvadratikus alakhoz megadható az euklideszi tér olyan ortonormált bázisa, melyben a kvadratikus alak kanonikus alakú.*

Bizonyítás. Legyen q valamely n-dimenziós V euklideszi téren értelmezett kvadratikus alak, $e_1, \dots, e_n$ ortonormált bázis V-ben és A a q kvadratikus alak mátrixa ebben a bázisban. Legyen φ V azon lineáris transzformációja, melynek mátrixa ugyanebben a bázisban A. Mivel A szimmetrikus, a 18.2. Tétel szerint φ szimmetrikus lineáris transzformáció. Ezért a 18.4. Tétel szerint van olyan $e'_1, \dots, e'_n$ ortonormált bázis, melyben φ mátrixa diagonális. Jelölje D ezt a diagonális mátrixot. Ha a második bázisról az első bázisra való átmenet mátrixa S, akkor a 13.5. Következmény szerint $D = SAS^{-1}$. A 18.5. Tétel bizonyításából tudjuk, hogy S ortogonális, azaz $S^{-1} = S^{\mathrm{T}}$. Ezért $D = SAS^{\mathrm{T}}$, ami egyben q mátrixa a második bázisban. ∎

Irodalom

[1] D. K. Fagyejev – I. Sz. Szominszkij: Felsőfokú algebrai feladatok, Műszaki Kiadó, Budapest, 1973.

[2] Freud Róbert, Lineáris algebra, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1996.

[3] Fried Ervin, Klasszikus és lineáris algebra, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.

[4] P. R. Halmos, Véges dimenziós vektorterek, Műszaki Kiadó, Budapest, 1984.

[5] A. G. Kuros, Felsőbb algebra, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.

[6] Lenkehegyi Attila, Lineáris algebra, JATE Kiadó, Szeged, 1988.

[7] Megyesi László, Lineáris algebra, JATE Távoktatás, 1998.

[8] Megyesi László, Lineáris algebra példatár, JATE Távoktatás, 1999.

[9] Szendrei János, Algebra és számelmélet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.