

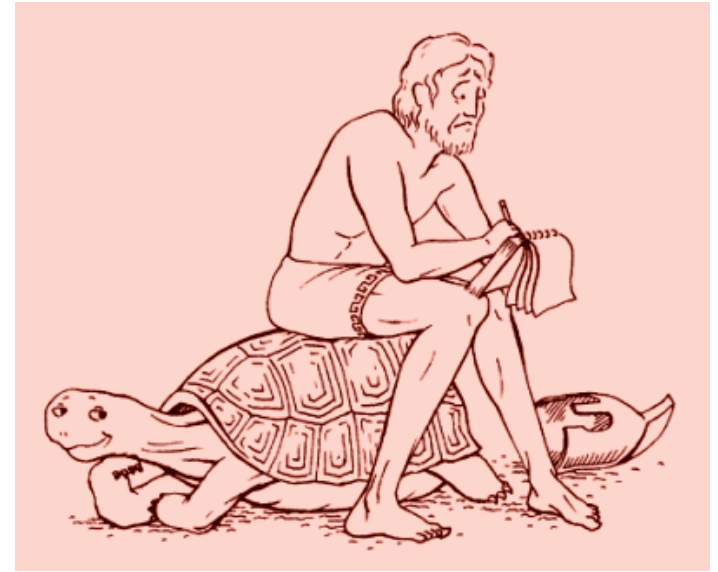
Hogyan adjunk össze végtelen sok számot?

Németh Zoltán, SZTE Bolyai Intézet
www.math.u-szeged.hu/~nemeth

2006.

Akhilleusz, a görög hős és a teknősbéka versenyt futnak. Akhilleusz tízszer olyan gyorsan fut, ezért lovagiasságból ad 1 sztadion előnyt.

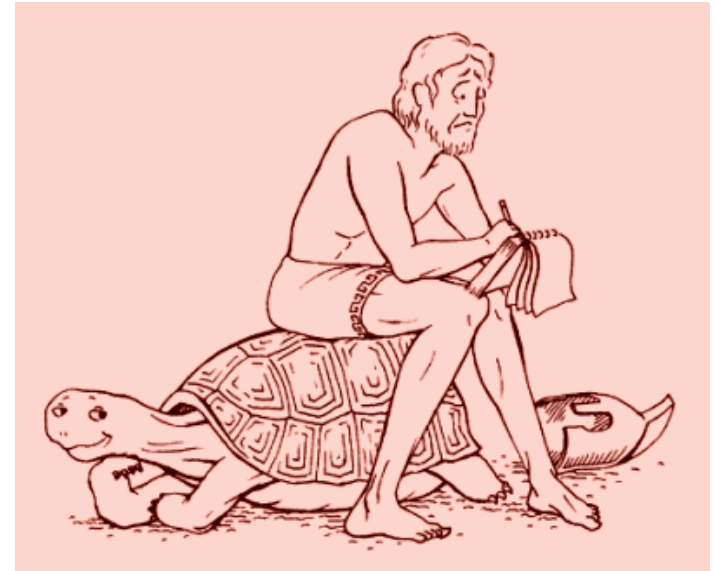
Utoléri-e Akhilleusz a teknősbékát, és ha igen, hol?



Akhilleusz, a görög hős és a teknősbéka versenyt futnak. Akhilleusz tízszer olyan gyorsan fut, ezért lovagiasságból ad 1 sztadion előnyt.

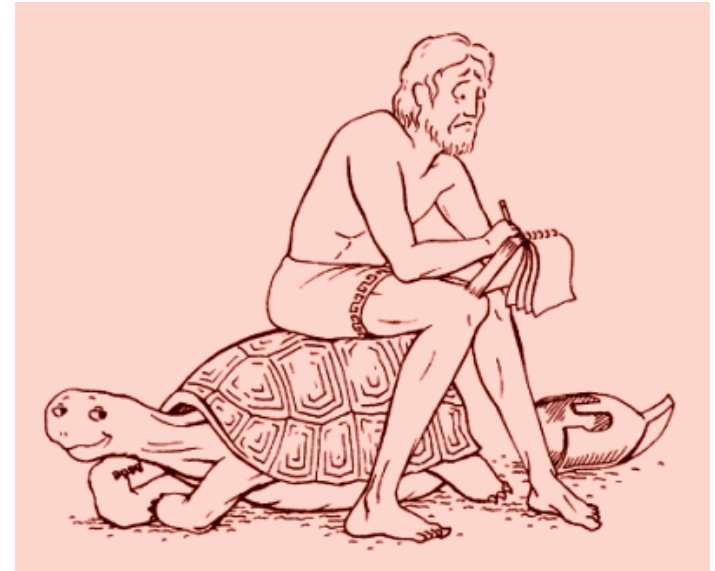
Utoléri-e Akhilleusz a teknősbékát, és ha igen, hol?

Utoléri, hiszen ha Akhilleusz megtesz mondjuk 2 sztadion utat, ezalatt a teknősbéka az előnyével együtt is csak 1,2 sztadion messzire jut, tehát lemaradt.



Akhilleusz, a görög hős és a teknősbéka versenyt futnak. Akhilleusz tízszer olyan gyorsan fut, ezért lovagiasságból ad 1 sztadion előnyt.

Utoléri-e Akhilleusz a teknősbékát, és ha igen, hol?



Utoléri, hiszen ha Akhilleusz megtesz mondjuk 2 sztadion utat, ezalatt a teknősbéka az előnyével együtt is csak 1,2 sztadion messzire jut, tehát lemaradt.

Ahhoz, hogy a teknőst utolérje, Akhilleusznak

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots + \frac{1}{10^k} + \dots$$

sztadion utat kell megtennie.

Gombóc Artúr nagyon szereti a csokoládét. Kedvenc csokija csomagjában van egy szelvény, és 10 szelvényért egy újabb csokit lehet kapni a boltban (persze becsomagolva).

Mennyit ér valójában egy csomag csoki?



Gombóc Artúr nagyon szereti a csokoládét. Kedvenc csokija csomagjában van egy szelvény, és 10 szelvényért egy újabb csokit lehet kapni a boltban (persze becsomagolva).



Mennyit ér valójában egy csomag csoki?

Világos, hogy egy tábla csokit és egy szelvényt.

De ha 10 szelvény = 1 csomag, akkor 1 szelvény = 0,1 csomag, és a tized csomaghoz is tartozik egy tized szelvény . . .

Tehát a becsomagolt csoki mindösszesen

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots + \frac{1}{10^k} + \dots$$

tábla (meztelen) csokit ér.

Másrészt, ha $10 \text{ szelvény} = 1 \text{ csomag}$, akkor

$10 \text{ szelvény} = 1 \text{ tábla csoki} + 1 \text{ szelvény}$, azaz

$9 \text{ szelvény} = 1 \text{ tábla csoki}$,

$1 \text{ szelvény} = \frac{1}{9} \text{ tábla csoki}$,

Másrészt, ha 10 szelvény = 1 csomag, akkor

10 szelvény = 1 tábla csoki + 1 szelvény, azaz

9 szelvény = 1 tábla csoki,

1 szelvény = $\frac{1}{9}$ tábla csoki,

tehát

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots + \frac{1}{10^k} + \dots = 1 + \frac{1}{9}$$

Másrészt, ha 10 szelvény = 1 csomag, akkor

10 szelvény = 1 tábla csoki + 1 szelvény, azaz

9 szelvény = 1 tábla csoki,

1 szelvény = $\frac{1}{9}$ tábla csoki,

tehát

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots + \frac{1}{10^k} + \dots = 1 + \frac{1}{9}$$

Azaz a becsomagolt csoki $1\frac{1}{9}$ tábla csokit ér; Akhilleusz $1\frac{1}{9}$ sztadion után éri utol a teknőst; és úgy adhatunk össze végtelen sok számot, hogy az elsőt 1, a másodikat 0,1, a harmadikat 0,01 másodperc alatt adjuk a többihez és így tovább – ekkor $1\frac{1}{9}$ másodperc alatt végzünk. 😊

Nézzük általánosan: Ha

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = S,$$

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = x \cdot S,$$

$$1 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots = (1 - x) \cdot S,$$

azaz

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1 - x}.$$

Nézzük általánosan: Ha

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = S,$$

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = x \cdot S,$$

$$1 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots = (1 - x) \cdot S,$$

azaz

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1 - x}.$$

Ha $x = \frac{1}{10}$, akkor

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots + \frac{1}{10^k} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1 + \frac{1}{9} \quad \text{😊}$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

Ha $x = \frac{1}{4}$, akkor

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^k} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{3}$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

Ha $x = \frac{1}{4}$, akkor

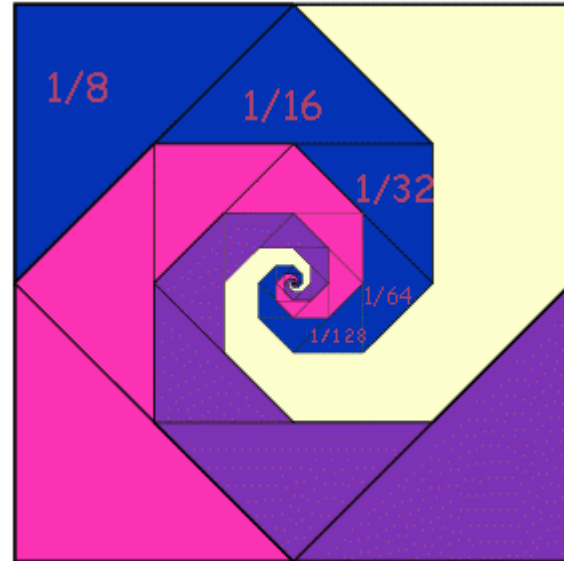
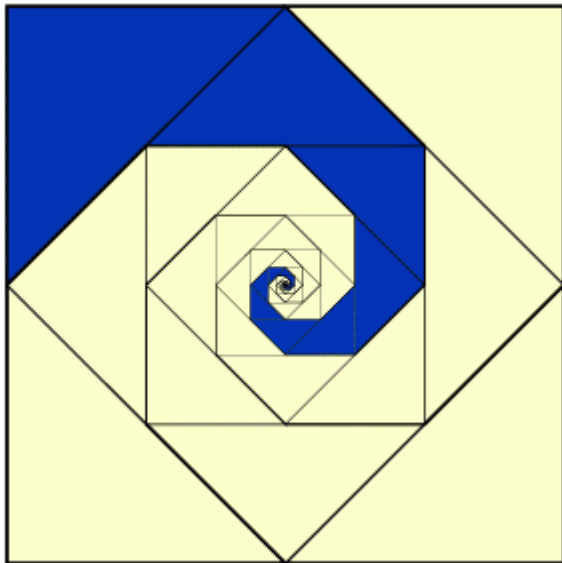
$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^k} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{3}$$



$$\begin{aligned} \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots &= \frac{1}{8} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{1}{8} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{4}$$



$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

Ha $x = -1$, akkor

$$-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}$$

Egész számok összege tört? ☹️

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

Ha $x = -1$, akkor

$$-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}$$

Egész számok összege tört? ☹️

Ha $x = 2$, akkor

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots = \frac{1}{1-2} = -1$$

Pozitív számok összege negatív? ☹️

Ideje pontos definíciót adni. Az

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_k + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

formális összegnek (végtelen sornak, numerikus sornak) képezzük a részletösszegeit a következő módon:

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \\ s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \quad \dots \quad s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n, \quad \dots$$

Ideje pontos definíciót adni. Az

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_k + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

formális összegnek (végtelen sornak, numerikus sornak) képezzük a részletösszegeit a következő módon:

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \\ s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \quad \dots \quad s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n, \quad \dots$$

Ha van olyan s szám, amit a részletösszegek “minden határon túl” megközelítenek, azt mondjuk, hogy a sor konvergens és összege s .

Ha nincs ilyen szám, az összeget nem értelmezzük, a sor divergens.

Számoljuk ki az

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^k + \dots$$

sor részletösszegeit:

$$s_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad (x \neq 1)$$

Számoljuk ki az

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^k + \dots$$

sor részletösszegeit:

$$s_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad (x \neq 1)$$

Legyen $|x| < 1$. Ha n elég nagy,

$$x^n \approx 0, \quad s_n \approx \frac{1}{1-x}, \quad s_n \rightarrow \frac{1}{1-x}$$

Számoljuk ki az

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^k + \dots$$

sor részletösszegeit:

$$s_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad (x \neq 1)$$

Legyen $|x| < 1$. Ha n elég nagy,

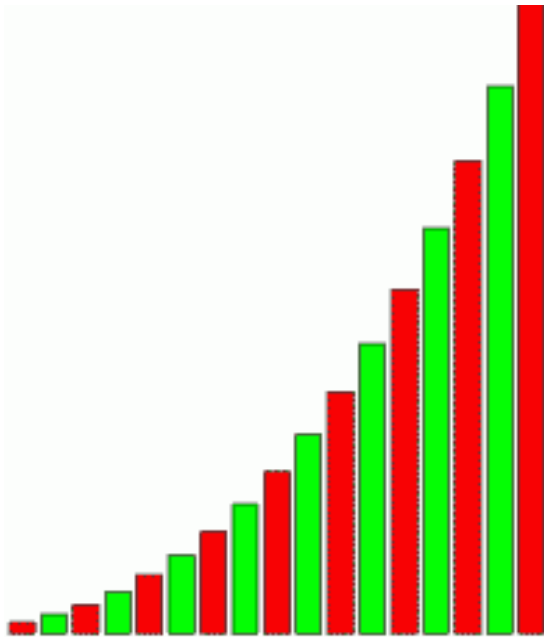
$$x^n \approx 0, \quad s_n \approx \frac{1}{1-x}, \quad s_n \rightarrow \frac{1}{1-x}$$

Tehát fenti sorunk összege $\frac{1}{1-x}$.

Ha $|x| > 1$, a részletösszegek minden határon túl növekszenek (abszolút értékben); ha $x = -1$, a 0 és az 1 között ugrálnak; a sor összege definíciónk szerint ekkor nem értelmezett.

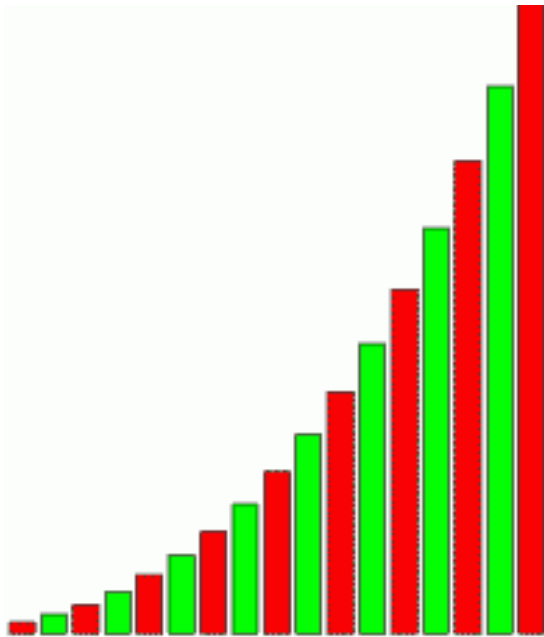
Ha a sor tagjai mind pozitívak, a részletösszegek monoton növekszenek. A helyzet egyszerű:

Ha a részletösszegek minden határon túl növekszenek, a sor divergens.

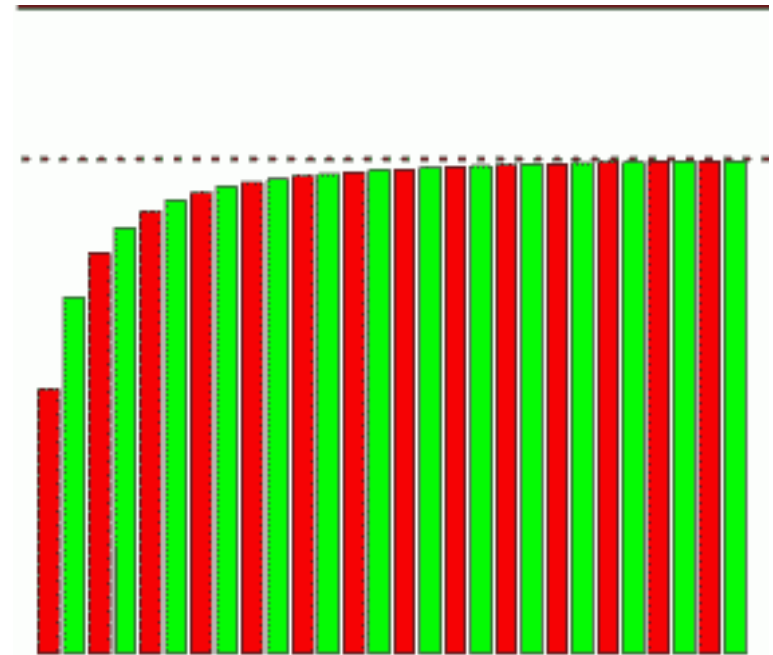


Ha a sor tagjai mind pozitívak, a részletösszegek monoton növekszenek. A helyzet egyszerű:

Ha a részletösszegek minden határon túl növekszenek, a sor divergens.



Ha a részletösszegek korlátosak, a sor konvergens.



Példa:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{k} + \dots$$

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

Példa:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{k} + \dots$$

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} \cdot n$$

A részletösszegek nem korlátosak, ezért a fenti,
ún. *harmonikus sor* divergens, azaz nincs összege.

Példa:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \dots$$

Példa:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \dots$$

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

$$\leq 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}$$

Példa:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \dots$$

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

$$\leq 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}$$

tudjuk, hogy $\frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

$$\leq 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$\leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$$

Mivel a részletösszegek (növekedőek és) korlátosak, a

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \dots$$

sornak van összege, nem tudjuk, mennyi, de legfeljebb 2.

Belátható, hogy

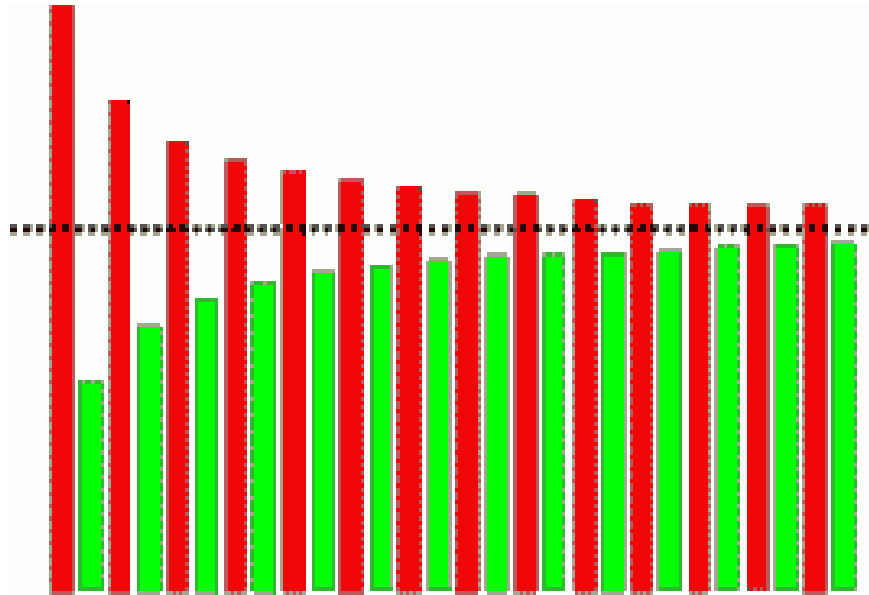
$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

Példa: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{1}{k} + \dots$

A sor tagjai egyre kisebbek és váltakozó előjelűek.

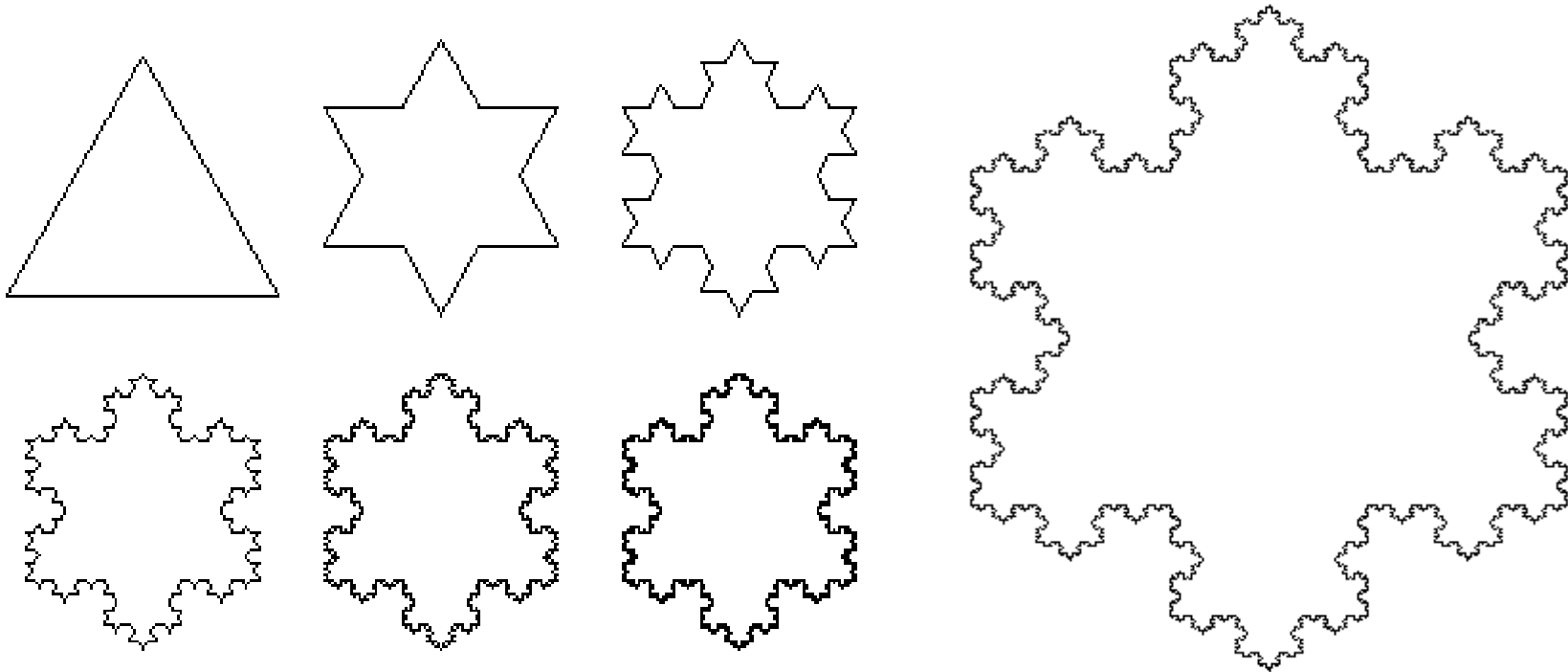
Példa: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{1}{k} + \dots$

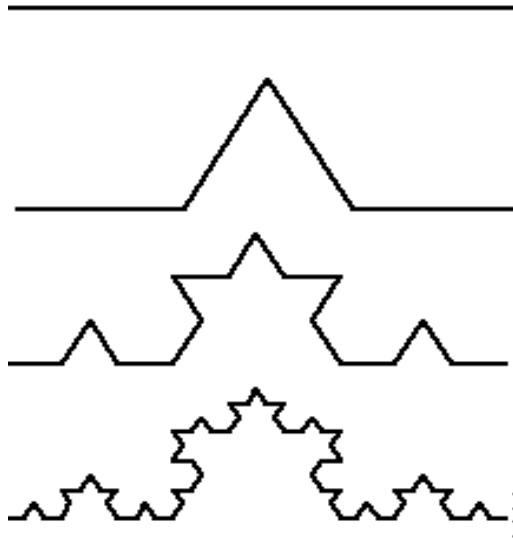
A sor tagjai egyre kisebbek és váltakozó előjelűek. Az ilyen sorok mindig konvergensek, mert a részletösszegek egy számra húzódnak rá.



Tehát a fenti sornak van összege.

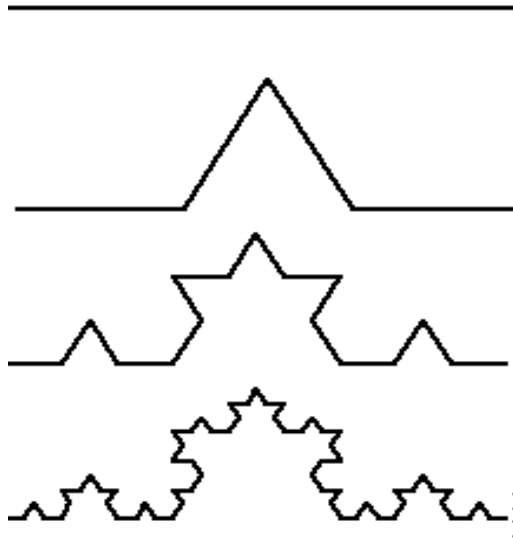
Egy háromszög minden oldalára tegyünk egy harmadakkora háromszöget, majd ezt folytassuk. A “határalakzat” az ún. *Koch-féle hópehely*.





Az eredeti háromszög oldala legyen 1.
Minden lépésben

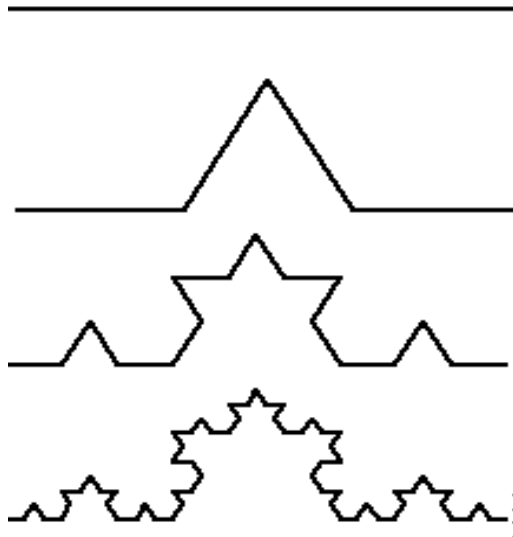
az oldalak száma megnégyszereződik,
hosszuk pedig harmadolódik.



Az eredeti háromszög oldala legyen 1.
Minden lépésben

az oldalak száma megnégyszereződik,
hosszuk pedig harmadolódik.

Az n -edik alakzat kerülete tehát $3\left(\frac{4}{3}\right)^n$.



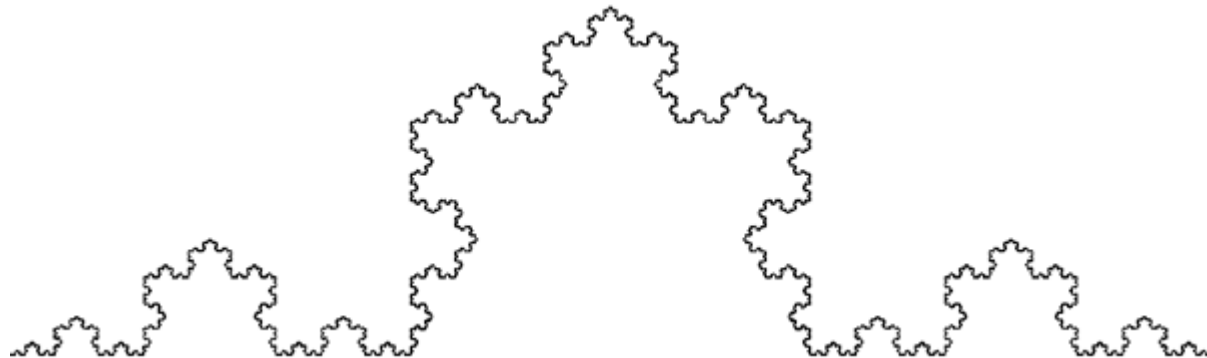
Az eredeti háromszög oldala legyen 1.
Minden lépésben

az oldalak száma megnégyszereződik,
hosszuk pedig harmadolódik.

Az n -edik alakzat kerülete tehát $3\left(\frac{4}{3}\right)^n$.

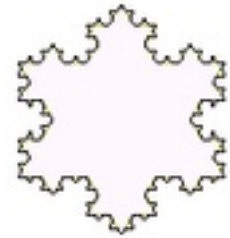
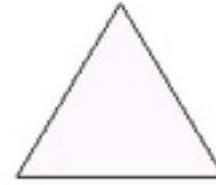
Ez a sorozat minden határon túl nő, tehát a Koch-hópehely
kerülete végtelen nagy!

Akkor igencsak kanyargós lehet . . .



Az n-edik lépésben a hozzáragasztott kis háromszögek

$$\text{területe: } 3 \cdot 4^{n-1} \left(\frac{1}{9} \right)^n \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{4}{9} \right)^{n-1},$$



Az n-edik lépésben a hozzáragasztott kis háromszögek

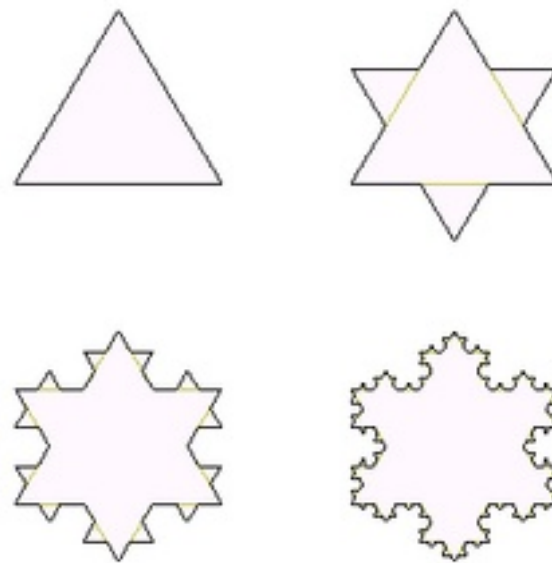
$$\text{területe: } 3 \cdot 4^{n-1} \left(\frac{1}{9} \right)^n \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{4}{9} \right)^{n-1},$$

tehát a hópehely területe

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{1}{3} \left(1 + \left(\frac{4}{9} \right) + \left(\frac{4}{9} \right)^2 + \left(\frac{4}{9} \right)^3 + \dots \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{8}{5} \frac{\sqrt{3}}{4}$$

tehát a végtelen hosszú görbe véges területet határol! 😊

(Azért a kerület és terület fogalma igazából tisztázandó.)



Egy apa elhatározza, hogy gyermekének minden születésnapjára annyiszor 1000 Ft-ot ajándékozik, ahány éves (a gyerek). Mennyi pénzt tegyen a bankba évi 6 %-os kamatra, hogy ezt akármeddig folytathassa?

Ahhoz, hogy n év múlva $n \cdot 1000$ forintunk legyen, most $\frac{n \cdot 1000}{q^n}$

Ft-ot kell a bankba rakni (ahol $q = 1,06$). A keresett összeg tehát

$$1000 \cdot \left(\frac{1}{q} + \frac{2}{q^2} + \frac{3}{q^3} + \frac{4}{q^4} + \frac{5}{q^5} + \dots \right)$$

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5} + \dots$$

$$\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5} + \dots$$

$$\frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5} + \dots$$

$$\frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5} + \dots$$

⋮

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5} + \dots$$

$$\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5} + \dots$$

$$\frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5} + \dots$$

$$\frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5} + \dots$$

⋮

$$\frac{1}{q} + \frac{2}{q^2} + \frac{3}{q^3} + \frac{4}{q^4} + \frac{5}{q^5} + \dots$$

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5} + \dots = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{1}{q-1}$$

$$\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5} + \dots = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{q-1}$$

$$\frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5} + \dots = \frac{1}{q^2} \cdot \frac{1}{q-1}$$

$$\frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5} + \dots = \frac{1}{q^3} \cdot \frac{1}{q-1}$$

⋮

$$\frac{1}{q} + \frac{2}{q^2} + \frac{3}{q^3} + \frac{4}{q^4} + \frac{5}{q^5} + \dots = \frac{1}{q-1} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5} + \dots \right)$$

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5} + \dots = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{1}{q-1}$$

$$\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5} + \dots = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{q-1}$$

$$\frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5} + \dots = \frac{1}{q^2} \cdot \frac{1}{q-1}$$

$$\frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5} + \dots = \frac{1}{q^3} \cdot \frac{1}{q-1}$$

⋮

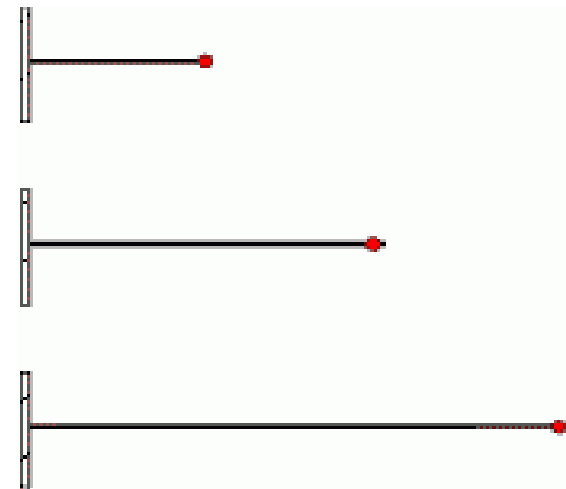
$$\frac{1}{q} + \frac{2}{q^2} + \frac{3}{q^3} + \frac{4}{q^4} + \frac{5}{q^5} + \dots = \frac{1}{q-1} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5} + \dots \right) = \left(\frac{1}{q-1} \right)^2$$

A feladat számaival ez kb. 277 ezer Ft.

Egy 10 m hosszú gumikötél egyik vége rögzített, a másik végétől egy csiga mászik a fal felé, 1 cm/s sebességgel.

Igen ám, de a kötelet egy gonosz manó közben nyújtja, 10 m/s sebességgel.

Eléri-e a csiga a falat?



1 s múlva a csiga megtett legalább 1 cm-t, a kötélt 2000 cm.

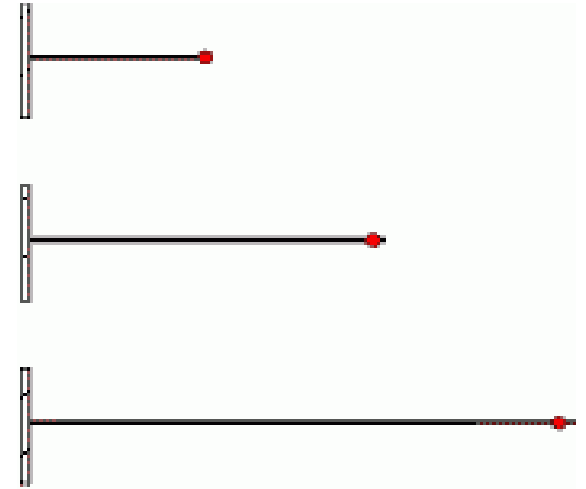
2 s múlva a csiga megtett legalább $1,5 + 1$ cm-t, a kötélt 3000 cm.

Ez nem hangzik valami jól . . .

Egy 10 m hosszú gumikötél egyik vége rögzített, a másik végétől egy csiga mászik a fal felé, 1 cm/s sebességgel.

Igen ám, de a kötelet egy gonosz manó közben nyújtja, 10 m/s sebességgel.

Eléri-e a csiga a falat?



1 s múlva a csiga megtett legalább 1 cm-t, a kötélt 2000 cm, tehát megtette az út legalább $\frac{1}{2000}$ részét.

2 s múlva a csiga megtett legalább $1,5 + 1$ cm-t, a kötélt 3000 cm, tehát megtette az út legalább $\frac{1}{2000} + \frac{1}{3000}$ részét.

Ez az!

Tehát n s múlva a csiga megtette az út legalább

$$\frac{1}{1000} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

részét. Mivel a zárójelben levő összeg minden határon túl nő. eléri az 1000 értéket is, és akkor a csiga célba ért.

(A feladat adatait komolyan véve, mintegy 10^{427} év alatt, a Föld kora mintegy 10^9 év 😊)

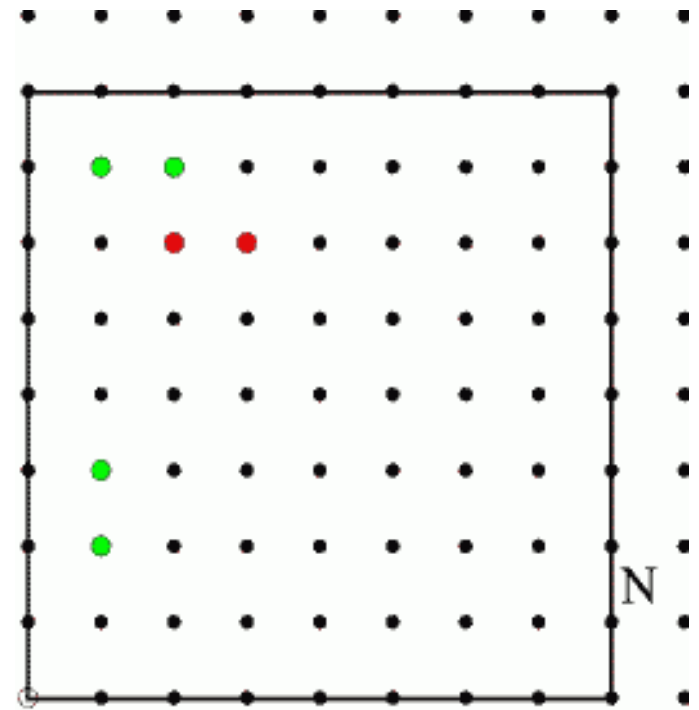
Az ábrán látható négyzetrácsban hány pont látszik a bal alsó sarokból?

Az ábrán például a zöld pontok látszanak, a pirosak nem.

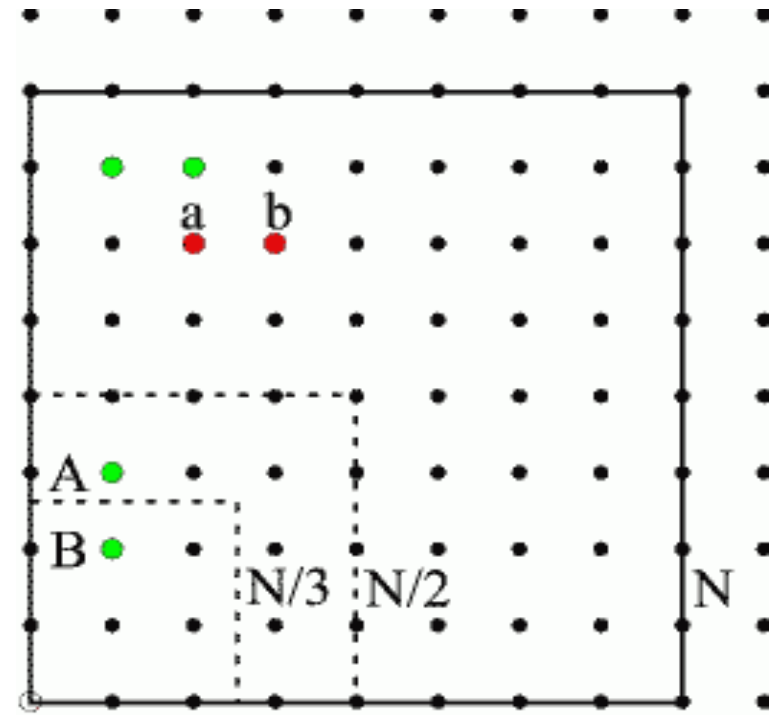
Bebizonyítható, hogy N növelésével a látható és az összes pontok számának aránya egy állandó K értékhez közelít.

Mekkora ez a K állandó?

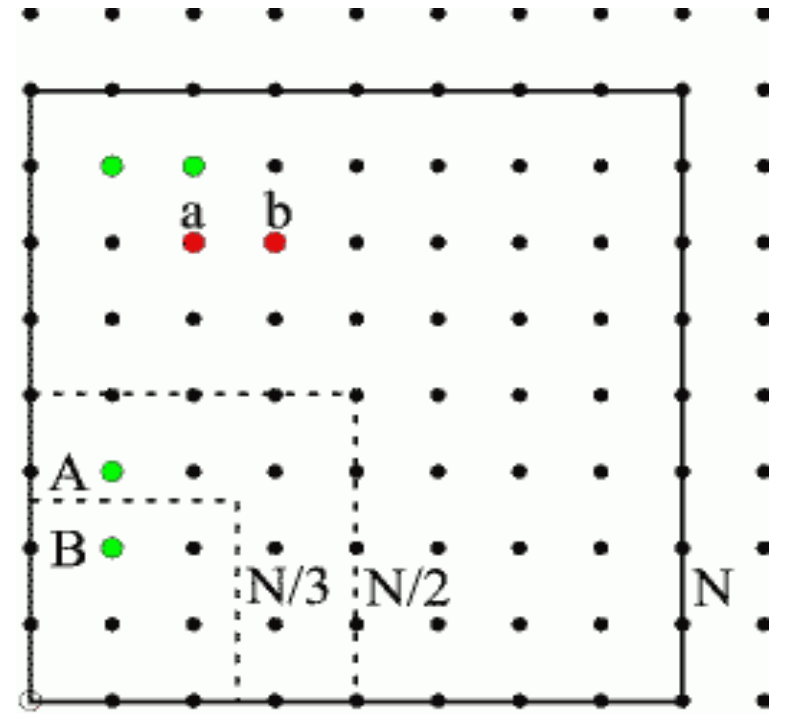
(Úgy is fogalmazhattuk volna a kérdést, hogy milyen gyakoriak a relatív prím számpárok.)



A nem látható pontokat (mint a és b), nyilván látható pontok takarják el (mint A és B). Az a pontot feleúton takarja el a A pont, az ilyen takarópontok láthatóak az $N/2$ oldalú négyzetben. A b pontot harmadúton takarja el a B , az ilyen takarópontok láthatóak az $N/3$ oldalú négyzetben . . .



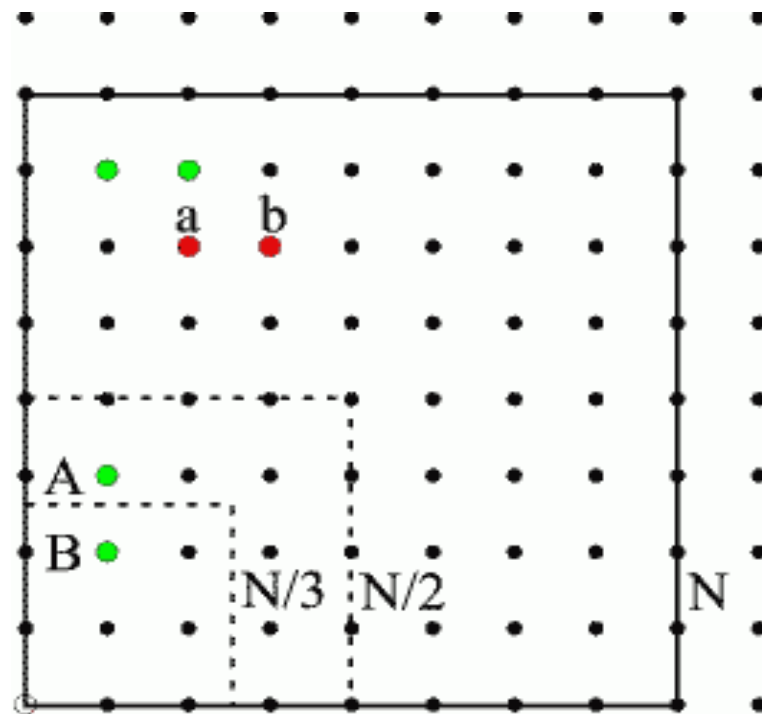
A nem látható pontokat (mint a és b), nyilván látható pontok takarják el (mint A és B). Az a pontot feleúton takarja el a A pont, az ilyen takarópontok láthatóak az $N/2$ oldalú négyzetben. A b pontot harmadúton takarja el a B , az ilyen takarópontok láthatóak az $N/3$ oldalú négyzetben . . .
 A látható pontok száma



$$K \cdot N^2 = N^2 - K \left(\frac{N}{2} \right)^2 - K \left(\frac{N}{3} \right)^2 - K \left(\frac{N}{4} \right)^2 - \dots,$$

A nem látható pontokat (mint a és b), nyilván látható pontok takarják el (mint A és B). Az a pontot feleúton takarja el a A pont, az ilyen takarópontok láthatóak az $N/2$ oldalú négyzetben. A b pontot harmadúton takarja el a B , az ilyen takarópontok láthatóak az $N/3$ oldalú négyzetben . . .

A látható pontok száma



$$K \cdot N^2 = N^2 - K \left(\frac{N}{2} \right)^2 - K \left(\frac{N}{3} \right)^2 - K \left(\frac{N}{4} \right)^2 - \dots,$$

$$K = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right)^{-1} = \frac{6}{\pi^2}$$

Tudjuk, hogy az alábbi összeg létezik:

$$(1) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = s.$$

Tudjuk, hogy az alábbi összeg létezik:

$$(1) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = s.$$

$$0 + 1 + 0 - \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{4} + \dots = s$$

Tudjuk, hogy az alábbi összeg létezik:

$$(1) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = s.$$

$$0 + 1 + 0 - \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{4} + \dots = s$$

$$(2) \quad 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \cdot s$$

Tudjuk, hogy az alábbi összeg létezik:

$$(1) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = s.$$

$$0 + 1 + 0 - \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{4} + \dots = s$$

$$(2) \quad 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \cdot s$$

$$(1) + (2) \quad 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{3}{2} \cdot s$$

Tudjuk, hogy az alábbi összeg létezik:

$$(1) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = s.$$

$$0 + 1 + 0 - \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{4} + \dots = s$$

$$(2) \quad 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \cdot s$$

$$(1) + (2) \quad 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{3}{2} \cdot s$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{3}{2} \cdot s$$

Ezek szerint az (1) összeg megváltozhat,
ha a tagokat más sorrendben adjuk össze ! ?

A végtelen összegek

érdekesek!

