Fourier-sorok

32. Egyenletesen konvergens trigonometrikus sor összegfüggvényének és együtthatóinak kapcsolata

1. Definíció: A $T_n(x) = A + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ alakú összegeket n-edrendű *trigonometrikus polinomnak* nevezzük (ahol $A,\ a_k,\ b_k$ konstansok).

2. Definíció: Az $A + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ alakú sort *trigonometrikus sornak* nevezzük (ahol $A,\ a_k,\ b_k$ konstansok).

3. TÉTEL: *Ha az* $A + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ *függvénysor egyenletesen konvergens a* $[0; 2\pi]$*-n és összegfüggvénye* $f(x)$*, akkor az együtthatókra a következő összefüggések teljesülnek:*

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx, \tag{1}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx, \text{ ahol } k \in \mathbb{N}^+, \tag{2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx, \text{ ahol } k \in \mathbb{N}^+. \tag{3}$$

(Ezek az ún. Euler–Fourier képletek.)

Bizonyítás. Legyen tehát

$$f(x) = A + \sum_{\ell=1}^{\infty}(a_\ell \cos \ell x + b_\ell \sin \ell x), \tag{4}$$

és rögzítsünk egy $k \in \mathbb{N}^+$ számot!
Szorozzuk be (4) mindkét oldalát $\cos kx$-szel, akkor adódik, hogy

$$f(x)\cos kx = A\cos kx + \sum_{\ell=1}^{\infty}(a_\ell \cos \ell x \cos kx + b_\ell \sin \ell x \cos kx).$$

Mivel a (4) alatti sor – a feltevés szerint – egyenletesen konvergens, így a korlátos $\cos kx$-szel beszorzott sor is az, ekkor viszont tagonként integrálhatunk, azaz

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx &= \int_0^{2\pi} A\cos kx\,dx + \\ &+ \sum_{\ell=1}^{\infty}\Big\{\int_0^{2\pi} a_\ell \cos \ell x \cos kx\,dx + \int_0^{2\pi} b_\ell \sin \ell x \cos kx\,dx\Big\}.\end{aligned} \tag{5}$$

Megmutatjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\text{a) } \int_0^{2\pi} A\cos kx\,dx = 0, \\ &\text{b) } \int_0^{2\pi} a_\ell \cos \ell x \cos kx\,dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } \ell \neq k \\ \pi \cdot a_k, & \text{ha } \ell = k, \end{cases} \\ &\text{c) } \int_0^{2\pi} b_\ell \sin \ell x \cos kx\,dx = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Nyilván $\int_0^{2\pi} A\cos kx\,dx = A\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{2\pi} = 0$, ezzel 6/a bizonyított.

Legyen $\ell \neq k$, ekkor, mivel $\cos\ell x\cos kx = \frac{1}{2}[\cos(\ell+k)x + \cos(\ell-k)x]$, így

$$\int_0^{2\pi} a_\ell \cos\ell x\cos kx\,dx = \frac{1}{2}a_\ell\left[\frac{\sin(\ell+k)x}{\ell+k} + \frac{\sin(\ell-k)x}{\ell-k}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Ha $\ell = k$, akkor

$$\int_0^{2\pi} a_k\cos^2 kx\,dx = a_k\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2kx}{2}\,dx = \frac{1}{2}a_k\int_0^{2\pi} 1\,dx = \pi\cdot a_k,$$

amivel 6/b-t is beláttuk.

A 6/c belátása a 6/b-hez teljesen hasonlóan történik; a 6/a,b,c éppen (2)-t adja.

Ha $k = 0$, akkor azonnal adódik (1), hiszen (5)-ben a $\sum$ utáni tagok mind nullával egyenlőek, ha pedig $\cos kx$ helyett (5)-öt $\sin kx$-szel szorozzuk be, akkor – teljesen hasonlóan mint előbb a (2) esetén – (3)-at kapjuk.

33. A trigonometrikus rendszer ortogonalitása. A Fourier-sor

A 6/a,b,c formulák azt mutatják, hogy az

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos kx,\ \sin kx,\ \ldots$$

függvényrendszer ortogonális rendszert alkot a $[0;2\pi]$-n, ami azt jelenti, hogy e rendszer bármelyik két függvénye *ortogonális* egymásra abban az értelemben, hogy bármely két függvény „skaláris szorzata” egyenlő 0-val, ahol a g és h függvények skalárszorzatán az $\langle f,g\rangle := \int_0^{2\pi} h(x)\,g(x)\,dx$ kifejezést értjük. (Ez a kifejezés rendelkezik a „skaláris szorzat” szokásos tulajdonságaival: $\langle f,f\rangle \geq 0$, $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$, $\langle f,g+h\rangle = \langle f,g\rangle + \langle f,h\rangle$.)

Ha ugyanis az $\int_0^{2\pi}\cos kx\,dx = 0$, $\int_0^{2\pi}\sin kx\,dx = 0$ integrálokat tekintjük, akkor ez azt jelenti, hogy a $g(x) \equiv 1$ függvény ortogonális a rendszer többi elemére.

Az $\int_0^{2\pi}\sin\ell x\sin kx\,dx = 0$, $\int_0^{2\pi}\cos kx\cos\ell x\,dx = 0$, ahol $k \neq \ell$ és az $\int_0^{2\pi}\sin\ell x\cos kx\,dx = 0$ integrálok pedig valóban azt mutatják, hogy a rendszer bármely két eleme egymásra ortogonális.

Ezek után az (1), (2), (3) formulák segítségével definiálhatjuk egy függvény Fourier-sorát a következőképpen:

4. Definíció: *Legyen $f(x) \in \mathbb{R}_{[0;2\pi]}$ és legyen f 2π szerint periódikus. Ekkor az $f(x)$ függvény Fourier-során a következőt értjük:*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx),$$

ahol

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx \quad (k = 0,1,2,\ldots)$$

és

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx \quad (k = 1,2,\ldots).$$

Az $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ számokat a függvény Fourier-együtthatóinak nevezzük.

Megjegyzés. Az $\frac{a_0}{2}$ jelölést azért vezettük be A helyett, hogy az a_k-ra vonatkozó formula $k = 0$-ra is működjön.

5. TÉTEL. *Egyenletesen konvergens trigonometrikus sor az összegfüggvényének Fourier-sora.*

Ez a tétel egyenes következménye a 3. Tételnek, figyelembe véve a 4. Definíciót.

34. A Riemann-lemma

A következőkben az a_k és b_k Fourier-együtthatók sorozatának egy érdekes tulajdonságát bizonyítjuk be. Nevezetesen igaz a következő

6. TÉTEL. *Egy Riemann-integrálható f függvény $\{a_k\}, \{b_k\}$ Fourier-együtthatóinak sorozatára érvényes, hogy*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 0.$$

A fenti tétel egyszerű következménye az alábbi lemmának:

7. Lemma. (Riemann-lemma). *Ha $f \in R_{[a,b]}$, akkor*

$$\lim_{\mu\to\infty} \int_a^b f(x)\cos\mu x\,dx = \lim_{\mu\to\infty} \int_a^b f(x)\sin\mu x\,dx = 0. \tag{7}$$

Bizonyítás. Mivel $\cos\mu x = \left(\frac{\sin\mu x}{\mu}\right)'$, ezért

$$\Big|\int_a^b \cos\mu x\,dx\Big| = \Big|\frac{\sin\mu b - \sin\mu a}{\mu}\Big| \le \frac{2}{\mu} \quad (\mu > 0).$$

Hasonlóan $\Big|\int_a^b \sin\mu x\,dx\Big| \le \frac{2}{\mu}$ $(\mu > 0)$.

Ezek után térjünk rá (7) bizonyítására (csak az első határértéket látjuk be, mert a másik ugyanúgy bizonyítható).

Legyen az $[a,b]$ intervallum valamely felosztása

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b. \tag{8}$$

Ekkor

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\cos\mu x\,dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_i) + f(x_i)]\cos\mu x\,dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_i)]\cos\mu x\,dx + \sum_{i=1}^n f(x_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos\mu x\,dx,\end{aligned}$$

és így

$$\Big|\int_a^b f(x)\cos\mu x\,dx\Big| \le \tag{9}$$

$$\le \sum_{i=1}^n \Big|\int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_i)]\cos\mu x\,dx\Big| + \sum_{i=1}^n |f(x_i)|\Big|\int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos\mu x\,dx\Big|.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$|f(x) - f(x_i)||\cos\mu x| \le |f(x) - f(x_i)| \le M_i - m_i = o_i,$$

ahol

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),$$

ezért

$$\Big|\int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_i)] \cos\mu x\, dx\Big| \le (x_i - x_{i-1})o_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

továbbá

$$\Big|\int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos\mu x\, dx\Big| \le \frac{2}{\mu},$$

így (9)-et az alábbi módon becsülhetjük:

$$\Big|\int_a^b f(x)\cos\mu x\, dx\Big| \le \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})o_i + \frac{2}{\mu}\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)| = I + II. \tag{10}$$

Ezek után legyen adott egy tetszőleges pozitív ε. Mivel $f \in \mathbb{R}_{[a,b]}$, így az oszcillációs kritérium értelmében az $[a, b]$ intervallum (8) alatti beosztása megválasztható úgy, hogy

$$I < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesüljön, majd ezt a felosztást rögzítve a $\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)|$ egy fix szám, így megadható olyan N, hogy ha $\mu > N$, akkor

$$II = \frac{2}{\mu}\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

azaz, tetszőleges $\varepsilon\,(> 0)$-hoz találtunk olyan N-t, hogy ha $\mu > N$, akkor

$$\Big|\int_a^b f(x)\cos\mu x\, dx\Big| < \varepsilon,$$

ami azt jelenti, hogy (7) első állítása valóban fennáll.

Ezzel lemmánkat bebizonyítottuk.

35. A részletösszegek előállítása a Dirichlet-féle magfüggvénnyel

A továbbiakban azt a kérdést tárgyaljuk, hogy milyen esetekben igaz az, hogy egy f függvény Fourier-sora előállítja a függvényt. E célból azt kell vizsgálni, hogy milyen feltételek mellett áll fenn, hogy egy x helyen

$$s_n(x) \to f(x) \quad (n \to \infty),$$

ahol $s_n(x)$ a Fourier-sor n-edik részletösszegét jelöli.

Ezért először az $s_n(x)$-re, majd $s_n(x) - f(x)$-re keresünk olyan „zárt” formulát, amely vizsgálata már mutatja, hogy mit elég feltenni $f(x)$-ről, hogy a fenti konvergenciát állíthassuk.

Vizsgáljuk tehát $s_n(x)$-et!

$$\begin{aligned}
s_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi}\Big(\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt\Big)\cos kx + \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\Big(\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt\,dt\Big)\sin kx = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos k(x-t)\,dt = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\Big\{\frac{1}{2} + \cos(t-x) + \cdots + \cos n(t-x)\Big\}\,dt.
\end{aligned}$$

Mivel

$$\frac{1}{2} + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cdots + \cos n\varphi = \frac{\sin(2n+1)\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}},$$

ezért

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{2\cdot\sin\frac{x-t}{2}}\,dt. \tag{11}$$

A (11) előállítás jobb oldalát *Dirichlet-féle integrálnak* nevezzük.
Bevezetve az $u = t - x$ helyettesítést, (11) a következő alakba írható:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-x}^{2\pi-x} f(u+x)\frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{2\cdot\sin\frac{u}{2}}\,du. \tag{12}$$

Az integrandusz 2π szerint periodikus, ezért $\int_{-x}^{2\pi-x} = \int_0^{2\pi}$, ezért, bevezetve a

$$\frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}} = D_n(u)$$

jelölést ($D_n(u)$-t *Dirichlet-féle magfüggvénynek* nevezzük), (12) így írható:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+u)D_n(u)\,du. \tag{13}$$

Végezzünk további átalakításokat! Bontsuk fel a (13) alatti integrált $\int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi}$ összeg alakba és a második integrálnál u helyébe $-u$-t helyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
s_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+u)D_n(u)\,du + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} f(x+u)D_n(u)\,du = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+u)D_n(u)\,du - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-2\pi} f(x-u)D_n(u)\,du = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+u)D_n(u)\,du + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x-u)D_n(u)\,du = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [f(x+u) + f(x-u)]D_n(u)\,du,
\end{aligned} \tag{14}$$

azaz

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+u) + f(x-u)] D_n(u)\, du. \tag{15}$$

A (15)-ös előállításból látszik, hogy a Fourier-sor részletösszegének viselkedése alapvetően az

$$f(x+u) + f(x-u)$$

összeg x pont egy környezetében való viselkedésétől függ (ami természetesen a függvény x pont körüli viselkedésétől függ). A (15)-ös formulát *Dirichlet-formulának* nevezzük.

36. Elegendő feltételek a Fourier-sor konvergenciájára: a féloldali differenciálhatóság

Most vizsgáljuk az $s_n(x) - f(x)$ különbséget. Mivel

$$D_n(u) = \frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}} = \frac{1}{2} + \cos u + \cdots + \cos nu, \tag{16}$$

így

$$\int_0^\pi D_n(u)\, du = \frac{\pi}{2}, \tag{17}$$

viszont (17)-ből (mindkét oldal $f(x)$-szel való beszorzásával) azt kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) D_n(u)\, du \tag{18}$$

(vegyük figyelembe, hogy $f(x)$ az u szerinti integrálásnál konstans).
Figyelembe véve (15)-öt és (18)-at, az adódik, hogy

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)] D_n(u)\, du. \tag{19}$$

Vezessük be a

$$\Phi_x(u) = f(x+u) + f(x-u) - 2f(x). \tag{20}$$

jelölést, így (19) a következő alakot ölti:

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi_x(u) D_n(u)\, du. \tag{21}$$

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy $f(x)$-re milyen feltételt elég feltenni ahhoz, hogy $\Phi_x(u)$ olyan legyen, hogy $s_n(x) - f(x)$ tartson nullához, azaz

$$s_n(x) \to f(x) \quad (n \to \infty)$$

fennálljon.
Erre vonatkozik majd a következő tétel, de előtte idézzünk fel egy-két definíciót! Jelölje $f(x+0)$ és $f(x-0)$ az f függvény jobb- illetve bal oldali határértékét az x pontban. Ezek segítségével definiáljuk az f függvény x pontban levő féloldali differenciálhányadosait (amelyek a ponthoz tartozó félérintők meredekségeit jelentik).

8. Definíció. *Tegyük fel, hogy léteznek és végesek az $f(x+0)$ és $f(x-0)$ féloldali határértékek. Ekkor a*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t}$$

határértéket az f függvény x pontban vett jobb oldali differenciálhányadosának nevezzük és $f'_+(x)$-szel jelöljük; hasonlóan, a

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x-0)-f(x-t)}{t}$$

határértéket az f függvény x pontban vett bal oldali differenciálhányadosának nevezzük és $f'_-(x)$-szel jelöljük.

9. Megjegyzés. Világos, hogy ha $f \in D_x$, akkor $f'_+(x) = f'_-(x) = f'(x)$.

Ezek után megfogalmazhatjuk tételünket.

10. TÉTEL. *Ha léteznek $f'_+(x)$ és $f'_-(x)$, akkor az x pontban az f függvény Fourier-sora konvergens és összege $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.*

11. KÖVETKEZMÉNY. *Ha $f \in D_x$, akkor az f Fourier-sora konvergens és összege $f(x)$.*

A következmény egyszerűen adódik a tételből, figyelembe véve a 9. Megjegyzést.

Most térjünk rá a 10. Tétel *bizonyítására.* Induljunk ki (21)-ből és bontsuk fel a megfelelő integrált az alábbi módon:

$$\begin{aligned} s_n(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Phi_x(u) D_n(u)\,du = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\delta \Phi_x(u) D_n(u)\,du + \frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi \Phi_x(u) D_n(u)\,du, \end{aligned} \tag{22}$$

ahol $0 < \delta < \pi$.
Feltehetjük, hogy

$$f(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

ugyanis az x helyen a függvényértéket így megváltoztatva, a Fourier együtthatók nem változnak (hiszen az őket definiáló integrál értéke nem változik), azaz a Fourier-sor sem változik.
Írjuk fel ezek után (22)-t kissé részletesebben:

$$\begin{aligned} s_n(x) - f(x) = {}& \frac{1}{\pi}\int_0^\delta \left[\frac{(f(x+u)+f(x-u)-f(x+0)-f(x-0))}{u}\right] \frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}} \frac{u}{2}\,du + \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi [(f(x+u)+f(x-u)-f(x+0)-f(x-0)] \frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{2\cdot\sin\frac{u}{2}}\,du = \\ = {}& I + II. \end{aligned} \tag{23}$$

Becsüljük először I-et. Mivel $f'_+(x)$ és $f'_-(x)$ léteznek, ezért $\left|\frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}\right|$ és $\left|\frac{f(x-u)-f(x-0)}{u}\right|$ becsülhetők egy K konstanssal, ha δ elég kicsi és $0 < u < \delta < \pi$.
Az $\frac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}$ pedig monoton növő $(0;\pi)$-n, így

$$\frac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}} < \frac{\pi}{2}, \text{ ha } 0 < u < \delta,$$

továbbá $(\sin(2n+1)\frac{u}{2}) \leq 1$, így ezeket a becsléseket alkalmazva adódik, hogy

$$I \leq \frac{1}{\pi}\cdot\delta\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1\cdot K = \delta\frac{K}{2}. \tag{24}$$

Legyen most ε egy tetszőlegesen adott pozitív szám, és δ olyan, hogy $\frac{\delta K}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$, és ezután rögzítsük is ezt a δ-t így. Ezután a fenti δ-val vegyük II-t és becsüljük. Nyilvánvaló, hogy a $(\delta;\pi)$-n az

$$\frac{f(x+u)+f(x-u)-f(x+0)-f(x-0)}{2\cdot\sin\frac{u}{2}}$$

függvény Riemann-integrálható, ezért a Riemann-lemma szerint $II \to 0$, ha $n \to \infty$, azaz megadható olyan N, hogy $II < \frac{\varepsilon}{2}$, ha $n > N$ és így, figyelembe véve (24)-et és (23)-at is, azt kapjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon\,(>0)$-hoz van olyan N, hogy ha $n > N$, akkor $|s_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, ami azt jelenti, hogy a Fourier-sor összege valóban $f(x)$, és mivel $f(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ volt, ezért tételünket bebizonyítottuk.

Most nézzünk néhány példát arra, hogy hogyan határozzuk meg egyszerű függvények Fourier-sorait, továbbá arra, hogy ezeket hogyan alkalmazzuk nevezetes numerikus sorok összegének meghatározására. Ez utóbbi feladathoz sokszor jól használható az ún. *Parseval* formula, amelyet most itt bizonyítás nélkül ismertetünk:

12. TÉTEL. (Parseval-formula) *Legyen* $f \in \mathbb{R}_{[0,2\pi]}$. *Ekkor az* f *függvény Fourier-együtthatóira igaz, hogy*

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = \pi\Big(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2\Big).$$

37. Az $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$ bizonyítása

A tételt három feladat bemutatásával többféleképpen bizonyíthatjuk. Fejtsük Fourier-sorba ugyanis az alábbi függvényeket:

a) $f(x) = \frac{\pi - x}{2},\ x \in (0;2\pi),\ f(0) = 0.$

(Lásd Németh József: Előadások a végtelen sorokról c. könyv 155–156. oldalán.)

b)
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in (0;\pi), \\ -1, & \text{ha } x \in (-\pi;0), \\ 0, & \text{ha } x = 0 \text{ vagy } x = \pi. \end{cases}$$

(Lásd Németh József: Előadások a végtelen sorokról c. könyv 156–157. oldalán.)

c) $f(x) = x^2,\ x \in [-\pi;\pi].$

(Lásd Németh József: Előadások a végtelen sorokról c. könyv 157–158. oldalán.)

Most egy példát mutatunk vázlatosan a Fourier-sorok fizikai alkalmazására (a probléma kidolgozását az olvasó megtalálja Szőkefalvi-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok c. könyvében). (Lásd Németh József: Előadások a végtelen sorokról c. könyv 118-119. oldalán.)

38. A Fejér-féle összegzés megőrzi a konvergenciát

Az előzőekben beláttuk, hogy ha egy függvény differenciálható egy x_0 pontban, akkor a függvény Fourier-sora ebben a pontban konvergens és összege egyenlő $f(x_0)$-lal.

Felmerül a kérdés, hogy vajon ha csak azt tudjuk a függvényről, hogy folytonos x_0-ban, akkor az ő Fourier-sora konvergens-e ebben a pontban? A válasz „nem”.

Már Du Bois Reymond 1876-ban adott példát olyan folytonos függvényre, amelynek Fourier-sora divergens. Az olvasó pl. Szőkefalvi-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok című könyvében Fejér Lipóttól talál egy gyönyörű szellemes példát ilyen függvényre.

Meg fogjuk azonban mutatni, hogy ha az eddigieknél hatékonyabb összegzési eljárást tekintünk, akkor azzal már minden folytonos függvény Fourier-sora összegezhető éppen az adott pontban felvett függvényértékhez.

Nézzük ezt a „hatékonyabb” összegzési eljárást.

13. DEFINÍCIÓ. *Legyen adott egy $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ sor; részletösszegeit jelöljük s_n-nel, ezek számtani közepeit pedig σ_n-nel, azaz*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k; \qquad \sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}.$$

Amennyiben $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = s$, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ sornak létezik a Fejér-féle összege (vagy Fejér-féle összegzési eljárással összegezhető) *és az s-sel egyenlő.*

Meg fogjuk mutatni, hogy a Fejér-féle összegzés megőrzi a közönséges konvergenciát, de annál hatékonyabb, azaz belátjuk a következő tételt.

14. TÉTEL. *A fenti jelölésekkel érvényesek a következő állítások: ha $\exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, akkor $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = s$ is, viszont létezik olyan $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ sor, amely divergens, de $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$, azaz Fejér módszerével összegezhető.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Ekkor minden $\varepsilon\,(>0)$-hoz van olyan ν, hogy ha $n \geq \nu$, akkor $|s_n - s| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. De akkor

$$\begin{aligned}|\sigma_n - s| &= \Big|\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(s_k - s)\Big| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{\nu-1}|s_k - s| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=\nu}^{n}|s_k - s| \leq \\ &\leq \frac{1}{n+1}\nu\, M_\nu + \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

ahol

$$M_\nu = \max_{0\leq k\leq \nu-1}\{|s_k - s|\}.$$

Ha tehát n elég nagy, azaz ha $n \geq \frac{2\nu\, M_\nu}{\varepsilon}$, akkor

$$|\sigma_n - s| \leq \varepsilon,$$

amivel a tétel első felét bebizonyítottuk.

A második állítást egy példával mutatjuk meg. Legyen a $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ sor. Mivel

$$s_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 2k, \\ 0, & \text{ha } n = 2k+1, \end{cases}$$

ezért s_n nem konvergens. Ugyanakkor

$$\sigma_n = \frac{1 + 1 + \cdots + 1}{n+1} = \begin{cases} \frac{\frac{n+1}{2}}{n+1}, & \text{ha } n \text{ páratlan}, \\ \frac{\frac{n}{2}+1}{n+1}, & \text{ha } n \text{ páros}, \end{cases}$$

azaz $\sigma_n \to \frac{1}{2}$, tehát a Fejér-módszerrel összegezhető a sor.

39. A σ-közepek előállítása a Fejér-féle magfüggvénnyel

(Lásd Szőkefalvi-Nagy Béla: Valós függvények a függvénysorok című könyvéből a 351–352. oldalon (351-es oldal tetejétől a 352. oldal 23. b formulájával bezárólag.)

40. Fejér tétele a pontonkénti szummálhatóságról

(Lásd Szőkefalvi-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok című könyvéből a 352. oldalon a Fejér tétele a) része; a 352. oldal közepétől a 353. oldal közepéig.)

41. Fejér tétele az egyenletes konvergenciáról

(Lásd Szőkefalvi-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok című könyvéből a tétel kimondás a Fejér tétele b) része (352. oldal közepe) és a bizonyítás a 353. oldal közepétől a 354. oldal 2.2. pontjáig.)

42. Fejér approximációs tétele

(Lásd Szőkefalvi-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok című könyvéből a 354. oldal közepén levő b) pont a 354. oldal aljáig).