Elemi feladatok felsőbb matematikai módszerekkel
(Németh József)
2005.10.22. 10:30

Feladat a **FOLYTONOSSÁG** alkalmazására:

Oldja meg a $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$ *egyenlőtlenséget!*

Megoldás: Az $x = 0$ megoldás – ez nyilvánvalóan adódik behelyettesítéssel.
Nézzük az "="-t a $>$ helyett a példában, azaz oldjuk meg a

$$\cos(\sin x) = \sin(\cos x)$$

egyenletet, amely írható így is:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin x\right) = \sin(\cos x).$$

Két eset lehet:

α) $\frac{\pi}{2} - \sin x = \cos x + 2k\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2k\pi = \cos x + \sin x$.
De $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, így $-\sqrt{2} \le \cos x + \sin x \le \sqrt{2}$; viszont a bal oldal: $\frac{\pi}{2} - 2k\pi$ nem esik ebbe az intervallumba, azaz nincs megoldás.

β) $\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \sin x\right) = \cos x + 2k\pi \ldots$ hasonlóan adódik, hogy ennek sincs megoldása.
Azaz az $f(x) = \cos(\sin x) - \sin(\cos x)$ függvénynek nincs zérushelye és $f(0) > 0$. Ebből következik, hogy az $f(x)$ sehol sem lehet negatív, mert akkor a folytonos függvény Bolzano–Darboux tulajdonsága (folytonos függvény bármely két értéke közötti összes értéket felveszi) miatt lenne olyan hely is, ahol 0-t vesz fel.
Tehát $\forall\, x$-re: $f(x) > 0$, azaz a

$$\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$$

egyenlőtlenségnek minden x megoldása.

Feladat az **INTEGRÁL** alkalmazására:

Bizonyítsuk be, hogy $\sin 20^\circ > \frac{1}{3}$; (számítógép alkalmazása nélkül).

Megoldás: Jelölje A a $(0;1)$ pontot, D a $\left(\frac{\pi}{9};0\right)$ pontot, C pedig a $\left(\frac{\pi}{9};\cos\frac{\pi}{9}\right)$ pontot és O az origót.

Megfelelő ábrát készítve adódik, hogy

$$(*) \qquad \sin 20^\circ = \int_0^{\frac{\pi}{9}} \cos x \, dx > \frac{1+\cos\frac{\pi}{9}}{2} \cdot \frac{\pi}{9},$$

ahol a jobb oldal éppen az $ODCA$ trapéz területét jelenti.
Ha a-val jelöljük a $\sin\frac{\pi}{9}$-et, akkor $\cos\frac{\pi}{9} = \sqrt{1-a^2}$, így $(*)$ a következőképpen alakul:

$$a > \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{2} \cdot \frac{\pi}{9} \Rightarrow a > \frac{36\pi}{\pi^2+18^2}.$$

Viszont így az adódik, hogy

$$a = \sin\frac{\pi}{9} = \sin 20^\circ > \frac{36\pi}{\pi^2+18^2} > \frac{36 \cdot 3,1}{324+3,2^2} = \cdots > 0,3338 > \frac{1}{3},$$

amit bizonyítani akartunk.

Feladat az **HATVÁNYSOR** alkalmazására:

Bizonyítsuk be, hogy $\sin 1$ *irracionális szám.*

Megoldás: Ismeretes, hogy

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots.$$

Így

$$(*) \qquad \sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \cdots$$

Tegyük fel, hogy $\sin 1$ racionális, azaz $\exists\, p, q \in \mathbb{Z}$ úgy, hogy $\sin 1 = \frac{p}{q}$.
Szorozzuk be $(*)$-ot $(2q+1)!$-sal, ekkor ez adódik:

$$\frac{p}{q}(2q+1)! = (2q+1)!\left[1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \cdots\right] \Rightarrow$$

$$\underbrace{\frac{p}{q}(2q+1)!}_{\text{egész}} - \underbrace{(2q+1)!\left[1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \cdots \pm \frac{1}{(2q+1)!}\right]}_{\text{egész}} =$$

$$= \underbrace{\pm(2q+1)!\left[\frac{1}{(2q+3)!} - \frac{1}{(2q+5)!}\cdots\right]}_{(**)}.$$

Mivel $0 < (**) < 1$, ezért a jobb oldal nem lehet egész, viszont a bal oldal egész szám, tehát ez ellentmondás, azaz $\sin 1$ valóban irracionális szám.