ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect

Journal of Complexity 24 (2008) 39–53

Journal of COMPLEXITY

www.elsevier.com/locate/jco

Finding a vector orthogonal to roughly half a collection of vectors

Pierre Charbit[a], Emmanuel Jeandel[b], Pascal Koiran[c,*], Sylvain Perifel[c], Stéphan Thomassé[d]

Tétel: $S \subseteq \mathbb{F}_2^n$ halmazhoz létezik H affin hipersík úgy, hogy

$$\frac{|S|}{2} - \frac{\sqrt{|S|}}{2} \le |S \cap H| \le \frac{|S|}{2} + \frac{\sqrt{|S|}}{2}$$

A szerzők megjegyzik (Remark 1), hogy a tétel élesíthető, kisebbegyenlő helyett szigorúan kisebbel is igaz. Ez nem teljesen helytálló, mert ha $|S| = 1$, akkor valamelyik oldalon egyenlőség fog állni.

1. feladat: Bizonyítsd be a tételt annak a ténynek a felhasználásával, hogy $\mathbb{F}_2^n$ affin hipersíkjai $2\text{-}(2^n, 2^{n-1}, 2^{n-1}-1)$ dizájnt alkotnak.

2. feladat: Tegyük fel, hogy $S \subseteq \mathbb{F}_2^n$ olyan, amire a tétel éles, azaz $\forall H$ affin hipersíkra

$$\frac{|S|}{2} - \frac{\sqrt{|S|}}{2} \ge |S \cap H| \quad \text{vagy} \quad |S \cap H| \ge \frac{|S|}{2} + \frac{\sqrt{|S|}}{2}.$$

Mutasd meg, hogy akkor minden H affin hipersíkra

$$|S \cap H| = \frac{|S|}{2} \pm \frac{\sqrt{|S|}}{2}.$$

3. feladat: Igaz-e, hogy ha $S \subseteq \mathbb{F}_2^n$ halmazra éles a tétel, akkor $|S| = 1$?