A 2011. évi Schweitzer Miklós Emlékverseny feladatai
október 28 – november 7

1. feladat. Legyenek $F_1, F_2, \dots$ olyan Borel-mérhető halmazok a síkon, amelyek uniója az egész sík. Igazolandó, hogy van olyan n természetes szám és S körvonal, amelyekre az $S \cap F_n$ halmaz sűrű S-ben. Mutassuk meg azt is, hogy az állítás nem feltétlenül igaz, ha az F_j halmazok mérhetőségére vonatkozó feltételt elhagyjuk.

2. feladat. Tegyük fel, hogy egy n pontú G egyszerű gráf fokszámainak $\delta(G)$ minimuma legalább $3n/4$. Bizonyítsuk be, hogy G éleinek bármely 2-színezésében van olyan legalább $\delta(G)+1$ pontú összefüggő részgráf, melynek minden éle ugyanolyan színű.

3. feladat. A d-dimenziós $\mathbb{R}^d$ térben egy $n \times n \times \cdots \times n$-es kockarács összes (azaz n^d számú) pontját lefogtuk $2n-3$ hipersíkkal. Bizonyítsuk be, hogy ezek közül kiválasztható n hipersík úgy, hogy már azok is lefogják a rács összes pontját.

4. feladat. Legyen G, H két véges csoport, és legyen $\varphi, \psi\colon G \to H$ két szürjektív, de nem injektív homomorfizmus. Igazoljuk, hogy létezik G-nek az egységelemtől különböző olyan eleme, amelynek képe φ és ψ mellett azonos.

5. feladat. Legyenek n, k pozitív egészek. Az $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ és $a \in \mathbb{R}^k$ vektorok esetén legyen $f_a(x) := \|x-a\|^{2n}$, ahol $\|\cdot\|$ az euklideszi norma, és tekintsük az $f_a \quad (a \in \mathbb{R}^k)$ függvények által generált $Q_{n,k}$ vektorteret. Melyik az a legnagyobb N egész szám, amelyre $Q_{n,k}$ tartalmazza az $x_1, \dots, x_k$ összes olyan polinomját, amelynek teljes fokszáma legfeljebb N?

6. feladat. Legyenek $C_1, \dots, C_d$ kompakt és összefüggő halmazok $\mathbb{R}^d$-ben, és tegyük fel, hogy mindegyik C_i konvex burka tartalmazza az origót. Bizonyítandó, hogy minden i-re van olyan $c_i \in C_i$, amelyekre az origó benne van a $c_1, \dots, c_d$ pontok konvex burkában.

7. feladat. Bizonyítsuk be, hogy nemnegatív valós számok tetszőleges $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozatára

$$\liminf_{n\to\infty} \left(n^2 \left(4a_n(1-a_{n-1}) - 1\right)\right) \leq \frac{1}{4}.$$

8. feladat. Adott $a \leq 1/e$ nullától különböző valós szám esetén legyenek $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ olyan nem valós számok, amelyekre $ze^z + a = 0$ teljesül, továbbá legyenek $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ tetszőlegesek. Mutassuk meg, hogy az $f(x) := \operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j e^{z_j x}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$ függvénynek minden 1 hosszúságú zárt intervallumban van zérushelye.

9. feladat. Legyen $x\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Bizonyítsuk be, hogy ha minden $t > 1$ esetén teljesül az

$$x'(t) = -x^3(t) + \frac{t-1}{t} x^3(t-1)$$

egyenlőség, akkor $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

10. feladat. Legyenek $X_0, \xi_{i,j}, \varepsilon_k \quad (i,j,k \in \mathbb{N})$ független, nemnegatív egész értékű valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy $\xi_{i,j} \quad (i,j \in \mathbb{N})$ azonos eloszlásúak, $\varepsilon_k \quad (k \in \mathbb{N})$ is azonos eloszlásúak, $\mathbb{E}(\xi_{1,1}) = 1$, továbbá $\mathbb{E}(X_0^\ell) < \infty$, $\mathbb{E}(\xi_{1,1}^\ell) < \infty$ és $\mathbb{E}(\varepsilon_1^\ell) < \infty$ valamely $\ell \in \mathbb{N}$ esetén. Tekintsük az $X_n := \varepsilon_n + \sum_{j=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,j} \quad (n \in \mathbb{N})$ valószínűségi változókat, ahol $\sum_{j=1}^{0} \xi_{n,j} := 0$. Vezessük be az $M_n := X_n - X_{n-1} - \mathbb{E}(\varepsilon_n) \quad (n \in \mathbb{N})$ sorozatot. Bizonyítandó, hogy van olyan legfeljebb $\ell/2$ fokú P_ℓ polinom, melyre $\mathbb{E}(M_n^\ell) = P_\ell(n) \quad (n \in \mathbb{N})$.

A megoldások benyújtásának határideje 2011. november 7, déli 12 óra. A megoldásokat a BJMT helyi tagozatánál kell benyújtani (ahol a titkár az átvétel időpontját igazolja), vagy ezen időpontig ajánlottan postára kell adni a versenybizottság címére: Hatvani László, Bolyai Intézet, 6720, Szeged, Aradi vértanúk tere 1. A verseny során felmerülő megjegyzések, javítások a **www.math.u-szeged.hu/Schweitzer2011/** oldalon érhetők el.

Jó munkát kíván

a Versenybizottság.