A 2007. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai

1. Igazoljuk, hogy van
a) nem mérhető,
b) 0 mértékű és kontinuum számosságú
részteste $\mathbf{R}$-nek!

2. Egy n^2+n-1 elemű halmaz összes n elemű részhalmazát két csoportba osztjuk. Bizonyítsuk be, hogy valamelyik csoportban lesz n páronként diszjunkt halmaz!

3. Jelölje $\omega(n)$ az n természetes szám prímosztóinak számát (multiplicitás nélkül). Legyen

$$F(x) = \max_{n\le x} \omega(n), \qquad G(x) = \max_{n\le x} \left(\omega(n) + \omega(n^2+1)\right).$$

Igazoljuk, hogy hogy $G(x) - F(x) \to \infty$ ha $x \to \infty$.

4. Legyen p prímszám, és legyenek $a_1, \ldots, a_{p-1}$ a p elemű $\mathbf{Z}_p$ (mod p) csoport nem feltétlenül különböző nem 0 elemei. Igazoljuk, hogy $\mathbf{Z}_p$ minden eleme előáll bizonyos a_i-k összegeként (az üres összeg 0)!

5. Legyen $D = \{(x,y) \mid x > 0,\ y \ne 0\}$, és legyen $u \in C^1(\overline{D})$ olyan korlátos függvény, amely harmonikus D-ben, és amelyre $u = 0$ az y tengelyen. Mutassuk meg, hogy u azonosan 0!

6. Mely $A \subset \mathbf{R}$ halmazokra igaz az, hogy ha $0 \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le 1$, $n = 1, 2, \ldots$ tetszőlegesek, akkor vannak olyan $y_j \in A$ számok, hogy $y_{j+1} - y_j > x_{j+1} - x_j$ minden $0 \le j < n$-re?

7. Mutassuk meg, hogy léteznek n_k, m_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ természetes számok úgy, hogy az $n_k + m_k$, $k = 1, 2, \ldots$ összegek különböző prímszámok, és az $x^{n_k} y^{m_k}$ polinomok lineáris kombinációinak halmaza sűrű $C([0,1] \times [0,1])$-ben a szuprémum normára nézve!

8. Egy $A = \{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ sorozatra legyen $SA = \{a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots\}$ az $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ sor részletösszegeinek sorozata. Van-e olyan nem azonosan nulla A sorozat, amelyre az A, SA, SSA, $SSSA$, … sorozatok mind konvergensek?

9. Legyen A és B két háromszög a síkon úgy, hogy mindkettő a belsejében tartalmazza az origót, és minden origó középpontú C_r körvonalra $|C_r \cap A| = |C_r \cap B|$ (itt $|\cdot|$ ívmértéket jelent a C_r-en). Igazoljuk, hogy A és B egybevágó. Igaz marad-e az állítás, ha az origó A és B határán van?

10. Legyenek $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ azonos eloszlású, valós értékű független valószínűségi változók 0 várható értékkel. Tegyük fel, hogy a $\Lambda(\lambda) := \log \mathbf{E} \exp(\lambda\zeta_i)$ logaritmikus momentumgeneráló függvényük minden $\lambda \in \mathbf{R}$-re létezik ($\mathbf{E}$ a várható értéket jelöli). Legyen továbbá $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ olyan függvény, amelyre $G(x) \le \min(|x|, x^2)$. Bizonyítsuk be, hogy akkor elég kis $\gamma > 0$-ra az alábbi sorozat korlátos:

$$\left\{ \mathbf{E} \exp\left(\gamma l G\left(\frac{1}{l}(\zeta_1 + \ldots + \zeta_l) \right) \right) \right\}_{l=1}^{\infty}.$$

Beadási határidő: **2007. november 5. (hétfő) 12.00 óra**. A megoldások a BJMT helyi tagozatánál nyújthatók be, vagy a fenti időpontig ajánlottan postára kell őket adni a versenybizottság címére: Totik Vilmos, SZTE TTK, Bolyai Intzet, 6720, Szeged, Aradi vértanúk tere 1.