**Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny**
**2000. október 27-november 6.**

**1.** Lássuk be, hogy van olyan $f : [\omega_1]^2 \to \omega_1$ függvény, amelyre
(i) $f(\alpha,\beta) < \min\{\alpha,\beta\}$, ha $\min\{\alpha,\beta\} > 0$;
(ii) ha $\alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_i < ... < \omega_1$, akkor $\sup\{\alpha_i : i < \omega\} = \sup\{f(\alpha_i,\alpha_j) : i,j < \omega\}$.

**2.** Adott egy körön $n$ piros és $n$ kék ív úgy, hogy bármely piros ív metsz bármely kék ívet. Bizonyítsuk be, hogy van olyan pont a körön, melyet legalább $n$ színes ív fed le.

**3.** Mutassuk meg, hogy minden $n \geq 3$ egész számra van olyan $N(n)$ egész, hogy teljesül a következő: ha $P$ egy legalább $N(n)$ elemű síkbeli ponthalmaz, melynek bármely három pontja olyan valódi háromszöget határoz meg, mely a belsejében legfeljebb egy $P$-beli pontot tartalmaz, akkor $P$ pontjai közül kiválaszthatók egy olyan konvex $n$-szög csúcsai, melynek belsejébe egyetlen további pontja sem esik $P$-nek.

**4.** Legyenek $a_1 < a_2 < a_3$ pozitív egész számok. Bizonyítsuk be, hogy vannak olyan $x_1, x_2, x_3$ egészek, nem mindegyik 0, hogy $\sum_{i=1}^{3} a_i x_i = 0$ és

$$\max_{1\leq i\leq 3} |x_i| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a_3} + 1.$$

Mutassuk meg, hogy a $2/\sqrt{3}$ helyébe kisebb számot írva az állítás nem marad igaz.

**5.** Igazoljuk, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $n$ és vannak olyan pozitív $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ számok, hogy $\varepsilon < x < 2\pi - \varepsilon$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx < -\frac{1}{\varepsilon}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx\right|.$$

**6.** Adott a számegyenes felbontása két nem-megszámlálható Borel halmazra. Mutassuk meg, hogy az egyik halmaznak van olyan eltoltja, amely a másikat nem-megszámlálható halmazban metszi.

**7.** Legyen $H(D)$ a $D = \{z : |z| < 1\}$ komplex egységkörön holomorf függvények tere a $D$-beli kompakt halmazokon való egyenletes konvergencia által megadott topológiával ellátva. Vezessük be $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ esetén az $S_n(f, z) = \sum_{m=0}^{n} a_m z^m$ jelölést. Nevezzünk egy $f \in H(D)$ függvényt univerzálisnak, ha tetszőleges, az egységkör határán folytonos, komplex értékű $g$ függvényt véve, alkalmas $S_{n(j)}(f, z)$ részletösszegek minden $A_\varepsilon = \{z = e^{it} : 0 \le t \le 2\pi - \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$ íven egyenletesen approximálják a $g$ függvényt.

Bizonyítsuk be, hogy $H(D)$-nek van olyan sűrű $G_\delta$ részhalmaza, melynek minden eleme univerzális.

**8.** Bizonyítandó, hogy ha az $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ leképezésre teljesül, hogy összefüggő halmaz képe összefüggő és kompakt halmaz képe kompakt, akkor $f$ folytonos.

**9.** Legyen $M$ zárt, irányítható, 3-dimenziós differenciálható sokaság, és tegyük fel, hogy $G$ az $M$ irányítástartó diffeomorfizmusainak véges csoportja. Jelölje $P$, illetve $Q$ azon $M$-beli pontok halmazát, amelyek stabilizátora $G$-nek több, mint egyelemű, illetve nem-ciklikus részcsoportja. Bizonyítsuk be, hogy $P$ Euler-karakterisztikája osztható $G$ rendjével, továbbá, hogy a $Q$ halmaz $-2\frac{\chi(P)}{|G|}$ darab $G$ szerinti orbit egyesítése, ahol $\chi(P)$ jelöli $P$ Euler-karakterisztikáját.

**10.** Ákos 4, egymástól független véletlen számot generál a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlás szerint. Ezek közül az egyiket megmutatja Bálintnak, akinek meg kell tippelnie, hogy a látott szám "szélső"-e, azaz a négy szám közül a legkisebb vagy a legnagyobb valamelyike. Van-e Ákosnak olyan determinisztikus stratégiája, amely mellett Bálint találati valószínűsége nem haladhatja meg az 1/2-et, akárhogyan okoskodják is?

November 7-én, kedden délután 4 órai kezdettel a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet Nagytermében megbeszéljük a verseny feladatait. Az intézet címe: Budapest, V. Reáltanoda utca 13-15.

Minden érdeklődőt szívesen látunk.

(http://www.bolyai.hu/schweitzer.html)