Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny
1998. október 16–október 26.

1. Megadható-e kontinuum sok kontinuum számosságú halmaz úgy, hogy

(i) bármely kettő metszete véges, és
(ii) minden halmaz, amelyik mindegyiket metszi, valamelyiket végtelen halmazban metszi?

2. Tetszőleges f polinomra jelölje P_f azon n egész számok számát, amelyekre $f(n)$ (pozitív) prímszám. Legyen $q_d = \max P_f$, ahol f végigfut a d-edfokú, $\mathbb{Q}$ fölött reducibilis egész együtthatós polinomokon. Bizonyítsuk be, hogy minden $d \geq 2$ számra $q_d = d$.

3. Legyen p prím és $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}$ a p-edrendű ciklikus csoporton értelmezett komplex értékű függvény. Definiáljuk f Fourier-transzformáltját az

$$\hat{f}(k) = \sum_{l=0}^{p-1} f(l) e^{i2\pi kl/p} \qquad (k \in \mathbb{Z}_p)$$

formulával. Mutassuk meg, hogy ha f és $\hat{f}$ zérushelyeinek együttes száma legalább p, akkor f azonosan nulla.

4. Tetszőleges $H \subset \mathbb{R}$ mérhető halmazra definiáljuk az $(a_n(H))$ sorozatot az

$$a_n(H) = \lambda \left([0,1] \setminus \bigcup_{k=n}^{2n} (H + \log_2 k) \right)$$

formulával, ahol λ a Lebesgue-mértéket, $\log_2$ pedig a kettes alapú logaritmust jelöli. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan mérhető, 1 szerint periodikus, nem nulla mértékű $H \subset \mathbb{R}$ halmaz, melyre az $a_n(H)$ sorozat egyetlen l_p térhez sem tartozik $(1 \leq p < \infty)$.

5. Legyen K_1 olyan nyílt körlap a komplex síkon, amelynek határa átmegy a -1 és $+1$ pontokon, és legyen K_2 a K_1 tükörképe a valós tengelyre. Legyen továbbá $D_1 = K_1 \cap K_2$, és D_2 a D_1 külseje. Tegyük fel, hogy az $u_1(z)$ függvény harmonikus a D_1 tartományon és folytonos a lezártján, $u_2(z)$ harmonikus D_2-ben (beleértve a ∞-t is) és folytonos a lezártján, továbbá $u_1(z) = u_2(z)$ a D_1 és D_2 tartományok közös határán. Bizonyítandó, hogy ha $u_1(x) \geq 0$ minden $-1 < x < 1$-re, akkor $u_2(x) \geq 0$ minden $x > 1$-re és $x < -1$-re.

6. Legyen U a síkban fekvő, véges sok (nem feltétlenül egyállású és nem feltétlenül diszjunkt) zárt egységnégyzet uniója. Lehet-e U kerületének és területének hányadosa akármilyen nagy?

7. Legyen P egy $4n$ pontból álló halmaz a síkban úgy, hogy a pontok közül semelyik három nem esik egy egyenesre. Bizonyítsuk be, hogy ha n elég nagy, akkor a következő két állítás ekvivalens.

(i) P felosztható n darab négyelemű részhalmazra úgy, hogy minden egyes részhalmaz egy–egy konvex négyszög csúcsait alkossa.

(ii) P nem bontható fel két, páratlan elemszámú A és B részre úgy, hogy minden olyan konvex négyszögnek, melynek csúcsai P-ből kerülnek ki, mind A-ba, mind B-be páros számú csúcsa essék.

8. Bizonyítandó, hogy ha egy kompakt T_2 tér minden $\aleph_1$ számosságú altere M_1, akkor az egész tér is M_1. (Egy topologikus tér M_1, ha minden pontjának van megszámlálható környezetbázisa.)

9. Legyen G olyan tartomány (összefüggő nyílt halmaz) az $\mathbb{R}^2$ síkban, amelynek határa lokálisan összefüggő. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G határának minden q pontjához létezik olyan v_q egyszerű ív $\mathbb{R}^2$-ben, amelyre $q \in v_q$ és $v_q \setminus \{q\} \subset G$.

10. Legyen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, nulla várható értékű valószínűségi változók olyan sorozata, melyre $\lim_{n\to\infty} E(\xi_n^2) = 0$, továbbá legyen $S_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j$. Jelölje $I(A)$ az A esemény indikátorfüggvényét. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\, I\left(\left\{\max_{1\le j\le k} |S_j| > \sqrt{k}\right\}\right) \to 0$$

1 valószínűséggel, ha $n \to \infty$.

Október 28-án, szerdán délután 4 órai kezdettel a Bolyai Kollégium matematika szemináriumán megbeszéljük a verseny feladatait. A Bolyai Kollégium címe: Budapest, XIV. Amerikai út 96., a millenniumi földalatti Mexikói úti végállomásának közelében.

Minden érdeklődőt szívesen látunk.