A Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny
feladatai (1995. október 20-30)

1. Igazoljuk, hogy a síkon nem azonosan zéró harmonikus függvény nem tűnhet el kétdimenziós pozitív mértékű halmazon.

2. Az $f, g \in L^1[0,1]$ függvényekről tudjuk, hogy
$$\int_0^1 f = \int_0^1 g = 1.$$
Igazoljuk, hogy van olyan I intervallum, amelyre
$$\int_I f = \int_I g = 1/2.$$

3. Jelölje $\langle x \rangle$ az x valós szám távolságát a legközelebbi egész számtól. Legyen f szakaszonként lineáris, 1 szerint periodikus, folytonos valós függvény. Bizonyítsuk be, hogy pontosan akkor vannak alkalmas n-nel olyan $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n$ valós számok, hogy
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \langle a_i x + b_i \rangle$$
minden x-re, ha van olyan k, hogy
$$\sum_{j=1}^{2^k} f\left(x + \frac{j}{2^k}\right)$$
konstans.

4. Az $a_1, \ldots, a_k$ páratlan és $b_1, \ldots, b_k$ páros számokra tudjuk, hogy
$$\sum_{j=1}^{k} a_j^n = \sum_{j=1}^{k} b_j^n$$
teljesül $n = 1, 2, \ldots, N$–re. Igazoljuk, hogy ekkor $k \geq 2^N$, és hogy $k = 2^N$ esetén mindig létezik fenti tulajdonságú rendszer.

5. Legyen A az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz legalább $100\sqrt{n}$ elemű részhalmaza. Bizonyítsuk be, hogy van olyan négytagú számtani sorozat, amelynek mindegyik eleme előáll az A halmaz két-két különböző elemének összegeként.

6. Bizonyítsuk be, hogy minden véges háromszögmentes gráf beágyazható feszített részgráfként egy véges háromszögmentes 2 átmérőjű gráfba.

7. Legyen R olyan asszociatív gyűrű, amelyben egyetlen nem 0 elem négyzete sem 0. Bizonyítsuk be, hogy ha $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$ és $x_1 x_2 \cdots x_n = 0$, akkor ugyanezen elemek bármely más sorrendben vett szorzata is 0.

8. Legyen P véges részbenrendezett halmaz, melyben van legnagyobb elem és ez a minimális elemek halmazának egyetlen felső korlátja. Igazoljuk, hogy bármely $f : P^n \to P$ monoton függvény megkapható $g(x_1, x_2, ..., x_n, c_1, ..., c_m)$ alakban, ahol $c_i \in P$ és g monoton idempotens függvény P-n (g idempotens, ha $g(x, x, \ldots, x) = x$ minden $x \in P$-re).

9. Egy síkbeli $P_1, \ldots, P_m$ nem feltétlenül különböző pontokból álló pontsorozatot kígyózónak nevezünk, ha P_i és P_{i+1} távolsága legalább 1, és a $P_i P_{i+1}$ szakaszok felváltva vízszintesek ill. függőlegesek. Konstruáljunk olyan kompakt halmazt, amelyben van akármilyen hosszú kígyózó sorozat, de nincs ilyen záródó sorozat (amelyre tehát $P_m = P_i$ valamely $i < m$-re).

10. Legyen $X = \{X_1, X_2, \ldots\}$ megszámlálható halmaz a térben. Mutassuk meg, hogy van olyan $\{a_k\}$ pozitív sorozat, hogy a tér bármely $Z \notin X$ pontjára igaz az, hogy a Z pontnak az $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ halmaztól vett távolsága legalább a_k végtelen sok k-ra.

11. Egy kör kerületén vegyünk fel $2n$ diszjunkt ívet és állítsuk párba azokat. Az egyes párokat egy téglalap alakú szalag odaragasztásával összekötjük. A ragasztás történhet úgy, hogy a kör és a téglalap együtt körgyűrűvel homeomorf alakzatot ad, és úgy is, hogy Möbiusz-szalaggal homomeomorf alakzatot ad. Az utóbbit csavart, az előbbit nem-csavart ragasztásnak mondjuk. Definiáljunk egy $n \times n$-es (A_{ij}) mátrixot a következő módon: legyen $A_{ii} = 1$, ha az i-edik téglalap odaragasztása csavart, és legyen $A_{ii} = 0$, ha az nem-csavart. Legyen $A_{ij} = 0$, ha a körvonalnak van olyan íve, mely az i-edik téglalap mindkét odaragasztott oldalát tartalmazza, ám a j-edik téglalap odaragasztott oldalaival nincs közös pontja; ellenkező esetben legyen $A_{ij} = 1$. Legyen r az (A_{ij}) mátrix rangja a kételemű test felett, és k az n darab téglalap körlaphoz ragasztásával nyert felület peremköreinek a száma. Igazoljuk, hogy $n = k + r - 1$.

12. $F(x)$ legyen ismert eloszlásfüggvény, az $\eta_1, \eta_2 \ldots$ valószínűségi változók legyenek függetlenek a közös $F(x - \vartheta)$ eloszlásfüggvénnyel, ahol ϑ az ismeretlen, úgynevezett eltolási paraméter. Nevezzük az eltolási paramétert „jól becsülhetőnek”, ha létezik c pozitív konstans úgy, hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz megadható a számegyenesen olyan ε Lebesgue-mértékű E Borel-halmaz („konfidencia halmaz”) és olyan $t_n(x_1, \ldots, x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ Borel-mérhető függvény, amelyekkel bármilyen ϑ esetén

$$P(\vartheta - t_n(\eta_1, \ldots, \eta_n) \in E) > 1 - e^{-cn} \qquad (n > n_0(\varepsilon, F)).$$

Igazoljuk, hogy

a) ha F nem abszolút folytonos, akkor az eltolási paraméter „jól becsülhető”,

b) ha F abszolút folytonos és F' folytonos, akkor nem „jól becsülhető”.