AZ 1987. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS EMLÉKVERSENY FELADATAI

1. Az $\{1, 2, \ldots, N\}$ halmaz elemeit kiszínezzük három színnel úgy, hogy minden színből több mint $N/4$ elem van. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $x = y + z$ egyenletnek van olyan megoldása, melyben x, y, z különböző színűek.

2. Egy $\prec$ binér relációt kvázirendezésnek nevezünk, ha reflexív és tranzitív. A $\mathcal{Q}$ kvázirendezett halmaz infimuma a legbővebb $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{Q}$ részhalmaz, amelyben
(i) minden $B \in \mathcal{Q}$-hoz van nála "kisebb" elem (vagyis olyan $A \in \mathcal{J}$, amelyre $A \prec B$ fennáll),
(ii) ha két $\mathcal{J}$-beli elem összehasonlítható, akkor ekvivalens (vagyis $A \prec A' \Rightarrow A' \prec A$).
Legyen X véges ábécé, X^* az X fölötti szavak halmaza, és $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\infty(X^*)$ az X^* végtelen részhalmazainak halmaza. Ha $A, B \in \mathcal{P}$, akkor $A \prec B$ jelentse azt, hogy A minden eleme (összefüggő) részszava B valamelyik elemének. Mutassuk meg, hogy a $\langle \mathcal{P}, \prec \rangle$ kvázirendezett halmaznak létezik a $\mathcal{J}$ infimuma, és adjuk meg $\mathcal{J}$ elemeit.

3. Legyen A olyan véges egyszerű grupoid, amelyben minden valódi részgrupoid egyelemű, az egyelemű részgrupoidok száma legalább három, továbbá A automorfizmuscsoportjának nincs fixpontja. Bizonyítsuk be, hogy az A-t tartalmazó legszűkebb varietásban minden végesen generált szabad algebra izomorf A valamely direkt hatványával.

4. Tegyük fel, hogy a P véges projektív geometria (véges, komplementumos moduláris háló) részhálója az L véges moduláris hálónak. Bizonyítsuk be, hogy ekkor P beágyazható egy olyan Q projektív geometriába, amely az L-nek fedésőrző részhálója (azaz, ha Q egyik eleme egy másikat fed Q-ban, akkor fedi azt L-ben is).

5. Legyenek f és g folytonos, valós függvények, legyen továbbá $g \not\equiv 0$ kompakt tartójú. Igazoljuk, hogy létezik olyan, a g eltoltjai lineáris kombinációiból álló sorozat, amely bármely kompakt halmazon egyenletesen tart f-hez.

6. Igaz-e, hogy ha A és B unitér ekvivalens önadjungált operátorok a $\mathcal{H}$ komplex Hilbert térben, és $A \leq B$, akkor $A^+ \leq B^+$? (Itt A^+ az A pozitív része.)

7. Legyen $x : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ olyan differenciálható függvény, hogy x-re és x' deriváltjára teljesül az

$$x'(t) = -2x(t)\sin^2 t + (2 - |\cos t| + \cos t) \int_{t-1}^{t} x(s)\sin^2 s \, ds$$

azonosság az $[1, \infty)$ intervallumon. Bizonyítsuk be, hogy x korlátos a $[0, \infty)$ intervallumon, sőt $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. Igaz-e ugyanez az állítás az

$$x'(t) = -2x(t)t + (2 - |\cos t| + \cos t) \int_{t-1}^{t} x(s)s \, ds$$

azonosságot kielégítő x függvényre is?

8. Legyen $c > 0$, $c \neq 1$ adott valós szám, legyen továbbá $x \in (0,1)$ esetén

$$f(x) = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + cx^{2^k}\right).$$

Igazoljuk, hogy

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{f(x^3)}{f(x)}$$

nem létezik.

9. Igazoljuk, hogy létezik egy c_k konstans úgy, hogy a k-dimenziós tér egységgömbjében adott bármely véges V ponthalmazhoz található olyan összefüggő G gráf, hogy G csúcsainak halmaza megegyezik V-vel, élei egyenes szakaszok, és az élhosszak k-adik hatványainak összege kisebb c_k-nál.

10. Legyen F az origóra szimmetrikus olyan valószínűségi eloszlásfüggvény, amelyre $F(x) = 1 - x^{-1}K(x)$, ha $x \geq 5$, ahol

$$K(x) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } \ x \in [5,\infty) \setminus \bigcup_{n=5}^{\infty} (n!, 4n!), \\ \frac{x}{n!} & \text{, ha } \ x \in [n!, 2n!], \quad n \geq 5, \\ 3 - \frac{x}{2n!} & \text{, ha } \ x \in [2n!, 4n!], \quad n \geq 5. \end{cases}$$

Megadandó a természetes számoknak egy $\{n_k\}$ részsorozata úgy, hogy ha $X_1, X_2, \ldots$ teljesen független valószínűségi változók a közös F eloszlásfüggvénnyel, akkor minden x valós számra

$$\lim_{k \to \infty} P\left\{ \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} X_j < \pi x \right\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} x.$$

További feladatlapok a <u>könyvtárban</u> és az
<u>irodában</u> találhatók.