Mátrixjátékok (2. rész)

(előadásjegyzet, 2022. március 28.)

Kátai-Urbán Kamilla

Használni fogjuk a következő két állítást, amelyek korábban már szerepeltek.

1. Tétel (Optimális stratégia tétele). *Legyen A egy $m \times n$-es mátrixjáték kifizetési mátrixa, és v a játék értéke.*

(1) *Az X az első játékos optimális stratégiája $\Longleftrightarrow$ $v \leq XA_{.j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.*
(2) *Az Y a második játékos optimális stratégiája $\Longleftrightarrow$ $A_{i.}Y \leq v$, $i = 1, 2, \ldots, m$.*

2. Következmény (Tiszta vs kevert tétel következménye). *Legyen A egy $m \times n$-es mátrixjáték kifizetési mátrixa, és v a játék értéke. Továbbá X az első játékos, Y a második játékos optimális stratégiája.*

(1) *Ha X i. komponensére $x_i > 0$, akkor $A_{i.}Y = v$.*
(2) *Ha Y j. komponensére $y_j > 0$, akkor $XA_{.j} = v$.*

1. A 3 × 3-as szimmetrikus mátrixjátékok megoldása

3. Definíció. Egy mátrixjátékot *szimmetrikusnak* nevezünk, ha az A kifizetési mátrixa ferdén szimmetrikus, azaz $A = -A^T$.

Legyen egy 3×3-as szimmetrikus mátrixjáték kifizetési mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel a mátrix ferdén szimmetrikus az 1. és 2. játékos optimális stratégiái megegyeznek, és a játék értéke $v = 0$.
A következő esetekben van nyeregpont:

(1) $a > 0$, $b > 0$, ekkor az $(1, 1)$ nyeregpont,
(2) $a \leq 0$, $c \geq 0$, ekkor a $(2, 2)$ nyeregpont,
(3) $b \leq 0$, $c \leq 0$, ekkor a $(3, 3)$ nyeregpont.

Nincs nyeregpont, ha

(a) $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$,
(b) $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$.

Tekintsük az (a) esetet. Az Optimális stratégia tétele (1. Tétel) szerint az 1. játékosnak $X = (x_1, x_2, x_3)$ optimális stratégiája akkor és csakis akkor, ha $XA_{.j} \geq v = 0$, ahol $j = 1, 2, 3$. Ez a mátrix segítségével felírható:

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \geq (0, 0, 0).$$

Elvégezve a mátrixszorzásokat a következő egyenlőtlenség-rendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} -ax_2 - bx_3 &\geq 0 \\ ax_1 - cx_3 &\geq 0 \\ bx_1 + cx_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Az egyenlőtlenségeket átrendezve, figyelembe véve, hogy az (a) esetben a, $-b$, és c is pozitív, kapjuk a következőt:

$$\begin{aligned} \tfrac{x_3}{a} &\geq \tfrac{x_2}{-b} \\ \tfrac{x_1}{c} &\geq \tfrac{x_3}{a} \\ \tfrac{x_2}{-b} &\geq \tfrac{x_1}{c}. \end{aligned}$$

Tehát azt kaptuk, hogy $\frac{x_3}{a} \geq \frac{x_2}{-b} \geq \frac{x_1}{c} \geq \frac{x_3}{a}$, mivel az első és utolsó kifejezés megegyezik, ezért egyenlőtlenség helyett egyenlőség írható. Jelöljük t-vel a hányadosok értékét: $\frac{x_3}{a} = \frac{x_2}{-b} = \frac{x_1}{c} = t$, tehát $x_1 = tc$, $x_2 = t(-b)$, $x_3 = ta$. Mivel x_1, x_2, x_3 a megfelelő stratégiák valószínűségét jelöli, így $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ teljesül, amelyből $t = \frac{1}{a-b+c}$ kifejezést kapjuk. A t helyébe ezt az összefüggést beírva az x_1, x_2, x_3 megadható.

A 3×3-as szimmetrikus mátrixjáték esetén a játék értéke 0, valamint az 1. és a 2. játékos optimális stratégiája, ha $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$:

$$x_1 = \frac{c}{a-b+c}, \quad x_2 = \frac{-b}{a-b+c}, \quad x_3 = \frac{a}{a-b+c}.$$

A (b) esetben a mátrix 2., 3. sorának, majd 2., 3. oszlopának felcserélésével az (a) esethez jutunk.

4. Példa. Tekintsük a kő-papír-olló játék mátrixát. Mivel ez a mátrix az előző (b) esetnek felel meg, így végrehajtjuk a sor és oszlopcseréket, és használjuk a formulát.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tehát $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$, így $x_1 = \frac{1}{1-(-1)+1} = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{3}$.

Az x_2 és x_3 értékét fel kell cserélni ahhoz, hogy az eredeti játékhoz tartozó valószínűségeket kapjuk (ezek most megegyeznek): $X = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

5. Feladat. Oldjuk meg a feladatsor **16.** és **17. feladatát**.

2. A 3×3-as mátrixjátékok megoldása

A megoldás menete

1. lépés: Nyeregpontot keresünk. Ha van, akkor megoldottuk a feladatot. Ha nincs, akkor a játék értéke a sor minimumok maximuma és az oszlop maximumok minimuma között lesz, folytatjuk a 2. lépésnél.

2. lépés: Dominált sorokat illetve oszlopokat keresünk. Ha találunk, akkor a 4. lépésnél folytatjuk a megoldást. Ha nem találtunk elhagyható sort vagy oszlopot, akkor a 3. lépéssel folytatjuk.

3. lépés: Vizsgáljuk, hogy lehetséges-e, hogy mind az első, mind a második játékos optimális megoldásának mind a három komponense pozitív legyen. Ekkor alkalmazhatjuk a Tiszta vs. kevert tétel következményét (2. Követekezmény). Továbbá mivel az x_i-k és az y_i-k valószínűségek, így $\sum_{i=1}^{3} x_i = \sum_{i=1}^{3} y_i = 1$ teljesül.

(a) Mivel feltettük, hogy $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ a Tiszta vs. kevert tétel következményét felhasználva a következőt kapjuk a második játékos Y optimális stratégiájára.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ v \\ v \end{pmatrix}.$$

Elvégezve a beszorzást, valamint az y_i-kre, mint valószínűségekre vonatkozó feltételeket hozzávéve, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 &= v \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 &= v \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 &= v \end{aligned} \qquad (1)$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

$$y_1 > 0 \; y_2 > 0 \; y_3 > 0$$

Ezt az egyenletrendszert kell megoldani hogy megkapjuk a második játékos optimális megoldását. Az $y_1 > 0, y_2 > 0, y_3 > 0$ feltételt elhagyjuk, a végén ellenőrizzük le majd, hogy az egyenletek megoldásai teljesítik-e. Az egyenletrendszer így 4 egyenletet és 4 ismeretlen tartalmaz (y_1, y_2, y_3, v). Az egyenletek és az ismeretlenek számát is 1-gyel csökkenthetjük azáltal, hogy az első egyenletből kivonjuk a másodikat, a másodikból pedig a harmadikat:

$$\begin{aligned}
(a_{11}-a_{21})y_1 + (a_{12}-a_{22})y_2 + (a_{13}-a_{23})y_3 &= 0\\
(a_{21}-a_{31})y_1 + (a_{22}-a_{32})y_2 + (a_{23}-a_{33})y_3 &= 0\\
y_1 + y_2 + y_3 &= 1
\end{aligned}$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{array}{lll}
k_1 = a_{11}-a_{21} & k_2 = a_{12}-a_{22} & k_3 = a_{13}-a_{23}\\
k_4 = a_{21}-a_{31} & k_5 = a_{22}-a_{32} & k_6 = a_{23}-a_{33}
\end{array}$$

A most bevezetett jelölésekkel az egyenletrendszer a következő lesz:

$$\begin{aligned}
k_1y_1 + k_2y_2 + k_3y_3 &= 0\\
k_4y_1 + k_5y_2 + k_6y_3 &= 0\\
y_1 + y_2 + y_3 &= 1
\end{aligned} \tag{2}$$

Ezt az egyenletrendszert legegyszerűbb a Cramer-szabály alapján megoldani (ha $D \neq 0$):

$$D = \begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3\\ k_4 & k_5 & k_6\\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_2 & k_3\\ k_5 & k_6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} k_1 & k_3\\ k_4 & k_6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & k_2\\ k_4 & k_5 \end{vmatrix}$$

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & k_2 & k_3\\ 0 & k_5 & k_6\\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} k_2 & k_3\\ k_5 & k_6 \end{vmatrix}}{D}$$

$$y_2 = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & 0 & k_3\\ k_4 & 0 & k_6\\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = -\frac{\begin{vmatrix} k_1 & k_3\\ k_4 & k_6 \end{vmatrix}}{D}$$

$$y_3 = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & 0\\ k_4 & k_5 & 0\\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & k_2\\ k_4 & k_5 \end{vmatrix}}{D}$$

Az eddigi számolást célszerű az (1) egyenletrendszer bővített mátrixán elvégezni. (Bővített mátrixot úgy kapjuk, hogy az egyenletrendszer mátrixához hozzáírjuk utolsó oszlopként a jobboldali konstansok oszlopát.) Kivonjuk az első sorból a második sort, a másodikból a harmadikat:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & v\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & v\\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} k_1 & k_2 & k_3 & 0\\ k_4 & k_5 & k_6 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Az utóbbi mátrixból már kiszámítható könnyebben y_1, y_2, y_3. Ellenőrizzük az $y_1 > 0, y_2 > 0, y_3 > 0$ feltételeket, ha nem tejesülnek a 4. lépésnél folytatjuk. Ha teljesülnek az egyenlőtlenségek a játék értéke is kiszámítható az (1) első három egyenlete közül valamelyikbe az y_1, y_2, y_3 helyettesítésével.

(b) A második játékos optimális megoldásához hasonlóan kapható meg az első játékos optimális megoldása. Mivel $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, $y_3 > 0$ a Tiszta vs. kevert tétel következményét

(2. Következmény) felhasználva a következőt kapjuk az első játékos $X = (x_1, x_2, x_3)$ optimális stratégiájára.

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (v, v, v).$$

Elvégezve a beszorzást, valamint az x_i-kre, mint valószínűségekre vonatkozó feltételeket hozzávéve, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 &= v \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 &= v \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 &= v \end{aligned} \tag{3}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 > 0 \; x_2 > 0 \; x_3 > 0$$

A második egyenletből kivonjuk a harmadikat, az elsőből a másodikat:

$$\begin{aligned} (a_{11} - a_{12})x_1 + (a_{21} - a_{22})x_2 + (a_{31} - a_{32})x_3 &= 0 \\ (a_{12} - a_{13})x_1 + (a_{22} - a_{23})x_2 + (a_{32} - a_{33})x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Legyen

$$\begin{array}{lll} \ell_1 = a_{11} - a_{12}, & \ell_2 = a_{21} - a_{22} & \ell_3 = a_{31} - a_{32} \\ \ell_4 = a_{12} - a_{13} & \ell_5 = a_{22} - a_{23} & \ell_6 = a_{32} - a_{33} \end{array}.$$

Ezzel a jelöléssel a (4) egyenletrendszerből a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \ell_1x_1 + \ell_2x_2 + \ell_3x_3 &= 0 \\ \ell_4x_1 + \ell_5x_2 + \ell_6x_3 &= 0 \; . \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

A Cramer-szabály alapján megkapjuk az x_1, x_2, x_3 ismeretleneket:

$$D = \begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ \ell_4 & \ell_5 & \ell_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ell_2 & \ell_3 \\ \ell_5 & \ell_6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_3 \\ \ell_4 & \ell_6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 \\ \ell_4 & \ell_5 \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & \ell_5 & \ell_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} \ell_2 & \ell_3 \\ \ell_5 & \ell_6 \end{vmatrix}}{D}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} \ell_1 & 0 & \ell_3 \\ \ell_4 & 0 & \ell_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = -\frac{\begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_3 \\ \ell_4 & \ell_6 \end{vmatrix}}{D}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 & 0 \\ \ell_4 & \ell_5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 \\ \ell_4 & \ell_5 \end{vmatrix}}{D}$$

Megjegyezzük, hogy a második játékos optimális stratégiájának kiszámításakor is D-vel jelöltük az együttható mátrix determinánsát, de ez nem véletlen, a két determináns értéke megegyezik.
Ha a második játékos optimális stratégiának kiszámolásához hasonlóan bővített mátrix segítségével szeretnénk megkapni az x_i-ket, akkor tekintsük a (3) egyenletrendszert. Látszik, hogy itt az egyenletrendszer mátrixa nem a kifizetési mátrix, hanem annak transzponáltja.

Kivonva az első sorból a második sort, a másodikból a harmadikat, olyan mátrixot kapunk, amiből az x_1, x_2, x_3 könnyebben számítható:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & | & v \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & | & v \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & | & v \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & | & 0 \\ \ell_4 & \ell_5 & \ell_6 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

4. lépés: Foglalkozzunk most azzal az esettel, amikor a 3×3-as mátrixjáték megoldása helyettesíthető, egy kisebb mátrixjáték megoldásával.

(a) Ha a 2. lépésben a dominálás miatt egy vagy több sort vagy oszlopot törültünk a játék mátrixából, akkor 2×3-as, 3×2-es illetve 2×2-es mátrixjátékként oldhatjuk meg a 3×3-as mátrixjátékot.

(b) A 3. lépésben kiderülhet, hogy nincs olyan megoldása, ahol az első és a második játékos optimális megoldásának valamennyi komponense pozitív, például a $D = 0$, vagy az optimális megoldások kiszámításakor olyan számokat kaptunk, amelyek nem lehetnek valószínűségek. Ekkor legalább egy stratégiát 0 valószínűséggel játszanak, tehát a 3×3-as mátrixjátékot vissza lehet vezetni kisebb játékra.
Nézhetjük sorra a lehetséges 2×3-as (vagy 3×2-es) feladatokat. Megnézhetjük az adott 3×3-as mátrix 9 db 2×2 részmátrixának megoldását is.
Úgy tudjuk **ellenőrizni**, hogy egy kisebb mátrixjáték megoldásával az eredeti 3×3-as mátrixjáték optimális megoldásához jutottunk, hogy mind az első, mind a második játékosra nézve a kapott megoldásoknak teljesíteni kell az Optimális stratégia tétele (1. Tétel) feltételeit a 3×3-as mátrixjátékra nézve.

6. Példa. Megoldjuk a feladatsor **19. feladatát**.

Az alábbi A mátrix egy 3×3-as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg az egyik játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét. (Segítség: mind az első, mind a második játékos optimális stratégiájának mind a három komponense pozitív.)

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

A játék alsóértéke (a sorminimumok maximuma) 2, a felsőértéke (az oszlopmaximumok minimuma) 6, tehát a játék értéke $2 \le v \le 6$. Mivel a feladatban az szerepel, hogy az optimális stratégiák mindhárom komponense pozitív, így az előző algoritmus 3. lépésének (a) részével folytathatjuk. Felírjuk az (1) egyenletrendszernek megfelelő bővített mátrixot a 2. játékos optimális stratégiáira, és elvégezzük a kivonásokat:

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 & | & v \\ 0 & 7 & 4 & | & v \\ 4 & 2 & 8 & | & v \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 & | & 0 \\ -4 & 5 & -4 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Az így kapott egyenletrendszert megoldhatjuk Cramer-szabállyal:

$$D = \begin{vmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 27 - (-36) + 18 = 81 \neq 0.$$

$$y_1 = \tfrac{27}{81} = \tfrac{1}{3}, \quad y_2 = -\tfrac{-36}{81} = \tfrac{4}{9}, \quad y_3 = \tfrac{18}{81} = \tfrac{2}{9}, \qquad Y^T = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{4}{9}, \tfrac{2}{9}\right).$$

Az egyenletrendszer speciális formájából adódik, hogy az egyes komponensek számlálójában épp a D determináns kiszámításakor megjelenő aldeterminánsok szerepelnek.

A játék értéke az egyenletrendszerbe visszahelyettesítve megkapható:

$$6 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 + y_3 = 6 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = 4 = v.$$

Az első játékos optimális stratégiája hasonlóan számítható, csak az A helyett A^T szerepel a kezdeti egyenletrendszerben, $X = \left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right)$.

7. Feladat. Oldjuk meg a feladatsor **18., 20., 21. feladatát**. Figyeljünk arra, hogy nem minden esetben alkalmazható az algoritmus 3. lépése.

3. Diagonális játékok

8. Tétel. *Legyen A egy $m \times n$-es mátrixjáték kifizetési mátrixa, v a játék értéke.*

(1) *Ha X az első játékos valamely stratégiája, továbbá a olyan szám, amelyre teljesül*

$$XA_{\cdot j} \geq a, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{$*$}$$

akkor $a \leq v$.

(2) *Ha Y a második játékos valamely stratégiája, és b olyan szám, amelyre fennáll*

$$A_{i\cdot}Y \leq b, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

akkor $b \geq v$.

Bizonyítás: Az (1) állítást bizonyítjuk, a (2) állítás bizonyítása hasonló.
Tekintsük a második játékos (egyik) optimális $Y^{*T} = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$ stratégiáját, és a (*) egyenlőtlenségeit. Szorozzuk be (*) j-edik egyenlőtlenségét y_j^*-vel (fontos, hogy $y_j^* \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$). A következő egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$XA_{\cdot j}y_j^* \geq ay_j^* \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Ha az egyenlőtlenségeket összeadjuk a következő egyenlőtlenséghez jutunk:

$$\sum_{j=1}^{n} XA_{\cdot j}y_j^* = XAY^* \geq a\sum_{j=1}^{n} y_j^* = a. \tag{$**$}$$

Ha X^* jelöli az első játékos Y^*-gal párban álló optimális stratégiáját, akkor az optimális megoldás definíciója alapján:

$$XAY^* \leq X^*AY^* = v$$

teljesül. Ezt (**)-gal összevetve $a \leq v$ következik.

■

9. Definíció. Ha egy mátrixjáték kifizetési mátrixa a következő alakú:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix},$$

ahol $a_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, akkor a játékot *diagonális mátrixjátéknak* (vagy röviden *diagonális játéknak*) nevezzük.

10. Megjegyzés. A diagonális mátrixjátékot lehet "keresési" játékként interpretálni. A második játékos elrejt egy tárgyat a szóbajöhető n hely valamelyikében. Amennyiben az első játékos megtalálja az elrejtett tárgyat, mégpedig a j-edik helyen, akkor nyereménye a_j, ha nem találja meg, akkor nyereménye 0.

11. Tétel. *Bármely diagonális játék értéke pozitív.*

Bizonyítás: Legyen az első játékost egyik lehetséges stratégiája a következő:

$$X = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right).$$

Jelölje s az $\frac{1}{n}a_j$, $(j = 1, \ldots, n)$ számok minimumát, mivel $a_j > 0$, így $s > 0$ is teljesül. Fennáll

$$XA_{\cdot j} = \frac{1}{n}a_j \geq s, \quad (j = 1, \ldots, n);$$

ahonnan a 8. Tétel szerint $v \geq s > 0$.

■

12. Tétel. *Ha egy diagonális játékban az első játékos egyik optimális stratégiája $X^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, akkor X^* valamennyi komponense pozitív.*

Bizonyítás: Indirekt úton bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy $x_i^* = 0$. A második játékos válassza az i-edik tiszta stratégiát. Ekkor

$$v \leq X^*A_{\cdot i} = x_1^* \cdot 0 + \ldots + x_{i-1}^* \cdot 0 + 0 \cdot a_i + x_{i+1}^* \cdot 0 + \ldots + x_n^* \cdot 0 = 0.$$

Így $v \leq 0$-t katunk, ami ellentmond a 11. Tétel állításának.

■

A diagonális játék megoldása

Mivel a 12. Tétel alapján az első játékos bármely optimális stratégiájának valamennyi komponense pozitív, ezért a Tiszta vs kevert tétel következménye (2. Következmény) szerint a második játékos bármely $Y^{*T} = (y_1^*, \ldots, y_n^*)$ optimális stratégiájára fennáll, hogy $A_{i\cdot}Y^* = v$. Mivel A diagonális, így

$$a_i y_i^* = v \quad (i = 1, \ldots, n).$$

A diagonális mátrixjáték definíciója miatt $a_i > 0$ teljesül, így

$$y_i^* = v/a_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{$\clubsuit$}$$

Az egyenleteket összeadva

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = v\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right).$$

Ahonnan figyelembe véve, hogy $\sum_{i=1}^{n} y_i^* = 1$, megkapjuk a játék értékét:

$$v = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} 1/a_k}.$$

Ha v-t ($\clubsuit$)-be behelyettesítjük akkor a második játékos optimális megoldásának komponenseit kitudjuk számítani:

$$y_i^* = \frac{1}{a_i} \cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} 1/a_k}.$$

Vegyük észre, hogy a második játékos optimális megoldásának valamennyi komponense pozitív. A Tiszta vs kevert tétel következménye (2. Következmény) szerint ebből az következik, hogy az első játékos $X^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ optimális megoldására az $X^*A_{\cdot j} = v$ egyenlet áll fenn bármely $1 \leq j \leq n$-re. Tehát

$$X^*A_{\cdot j} = v = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} 1/a_k}.$$

Mivel $a_j x_j^* = v$, így

$$x_j^* = \frac{1}{a_j} \cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} 1/a_k}.$$

Látható, hogy a diagonális játéknak egyetlen optimális megoldása van, továbbá $X^* = Y^{*T}$.

13. Feladat. Oldjuk meg a feladatsor **22. feladatát**.