Kooperatív játékok

(előadásjegyzet, 2022. május 4.)

Kátai-Urbán Kamilla

Neumann János és Oscar Morgenstern az n-személyes kooperatív játékok vizsgálatánál a racionális osztozkodás törvényeit tanulmányozták.

1. Definíció. Legyen $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ a játékosok halmaza. Az $S \subseteq N$ halmazt *koalíciónak* nevezzük, azaz $S \in \mathcal{P}(N)$, ahol $\mathcal{P}(N)$ az N hatványhalmazát jelöli (N összes részhalmazának halmaza).

2. Definíció. A $v\colon \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$ leképezést *karakterisztikus függvénynek* nevezzük. Tetszőleges $S \in \mathcal{P}(N)$ esetén a $v(S)$ az a kifizetés, amit az S-ben lévő játékosok összefogva elérnek, a $v(\emptyset) = 0$ egyenlőségnek tetszőleges v karakterisztikus függvény esetén teljesülnie kell. (Az $\emptyset$-ra vonatkozó értéket sok esetben ki se írjuk.)

3. Jelölés. (N, v) azt az n-személyes kooperatív játékot jelöli, ahol $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ a játékosok halmaza, a v pedig a játékhoz tartozó karakterisztikus függvény.

4. Példa. Megoldjuk a feladatsor **38. feladatát**.

A csongrádi fitness egyesületben Judit az edző. Ha egyedül tartja az edzéseket, akkor a heti haszna 6 ezer forint. Elgondolkozik azon, hogy felvehetne maga mellé egy vagy két segédedzőt, és akkor többet járhatnának a gyerekek edzésekre. Ha csak Ancsát veszi fel maga mellé, akkor 16 ezer forint lenne a haszon, ha csak Fannit, akkor 26 ezer forint lenne. Ha mindkettőjüket felveszi, akkor 36 ezer forint lenne a haszon. Ancsa és Fanni külön-külön nem alakítana egyesületet, de ha együtt alakítanak, akkor 6 ezer forint lenne a hasznuk. Határozza meg a feladathoz tartozó 3-személyes kooperatív játék karakterisztikus függvényét.

A játék résztvevőit a következőképpen jelöljük, 1: Judit, 2: Ancsa, 3: Fanni. Tehát a játékosok halmaza $N = \{1, 2, 3\}$, a feladat szövege alapján a karakterisztikus függvény:

$$v(S) = \begin{cases} 6, & \text{ha } S = \{1\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{2\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{3\}; \\ 16, & \text{ha } S = \{1, 2\}; \\ 26, & \text{ha } S = \{1, 3\}; \\ 6, & \text{ha } S = \{2, 3\}; \\ 36, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

5. Feladat. Oldja meg a feladatsor **39. feladatát**.

1. Szavazások

A társadalmi választások elmélete a következő kérdésekkel foglalkozik.

- Hogyan tud emberek egy csoportja közös döntésre jutni?
- Milyen tulajdonságokkal rendelkezzenek a választási rendszerek?
- Mikor lesz egy választási rendszer demokratikus?
- Hogyan lesz az egyéni sorrendekből közös sorrend?

A következőkben néhány szavazási rendszerrel ismerkedünk meg. *Alternatíváknak* nevezzük azokat a dolgokat, amelyekre szavazni lehet.

6. Jelölés. Az alternatívák halmazát jelölje A.

7. Definíció. Legyen $N = \{1, 2, \ldots n\}$. Ha az $S \subseteq N$ koalíció nyer, akkor legyen $v(S) = 1$, különben a karakterisztikus függvény értéke 0. A karakterisztikus függvény *többségi szavazásnál két alternatíva esetén*:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |S| > \frac{n}{2}; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Előfordulhat, hogy egyes szavazóknak több szavazata van, tehát a szavazóknak más a súlya, így jutunk a következő szavazási formához.

8. Definíció. Legyen $N = \{1, 2, \dots n\}$, és w_i jelölje, hogy az i. szavazónak mennyi szavazata van, továbbá q jelöli, hogy hány szavazatot kell elérni. Ha az $S \subseteq N$ koalíció nyer, akkor legyen $v(S) = 1$, különben a karakterisztikus függvény értéke 0. A karakterisztikus függvény *súlyozott többségi szavazás esetén két alternatívánál*:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \sum_{i \in S} w_i \geq q; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Jele: $(q; w_1, w_2 \dots w_n)$.

9. Feladat. Oldja meg a feladatsor **40.** és **41. feladatát**.

Kenneth O. May 1952-ben bizonyította, hogy két alternatíva esetén a többségi szavazás több szempontból is az egyetlen jó szavazási módszer. A következő példa azt mutatja be, hogy három alternatívánál már előfordulhat, hogy többségi szavazás esetén az lenne a győztes, akit a többség a legkevésbé akar. Tehát fontos az alternatívák sorrendje is.

10. Jelölés. Legyen $A = \{x, y\}$, és az $x \succ y$ jelölje azt, hogy a szavazó az x alternatívát jobban szeretné, mint az y-t, azaz az *x-et preferálja y-nal szemben.*

11. Példa. Legyen $A = \{x, y, z\}$, és $n = 16$ a szavazók (játékosok) száma, a preferencia-sorrendek legyenek:

- $x \succ y \succ z$: 7 szavazónál,
- $y \succ z \succ x$: 4 szavazónál,
- $z \succ y \succ x$: 5 szavazónál,

Ekkor a többségi szavazás (mivel akkor csak azt vesszük figyelembe, hogy mi van az 1. helyen), az x alternatívát hozza ki győztesnek, pedig a szavazók többsége azt szeretné legkevésbé.

Ha kettőnél több alternatíva van, az egyik lehetőség, hogy több körös szavazást tartanak. A *többségi szavazás rájátszással* úgy zajlik, hogy minden körben többségi szavazást tartanak, és az az alternatíva esik ki, amelyik a legkevesebb szavazatot kapta.

12. Példa. Tekintsük a 11. példát 1. körnek egy rájátszásos többségi szavazásnál. Ekkor az 1. körben az y alternatíva kapta a legkevesebb szavazatot, így az esik ki. A második körben viszont az x: 7, a z: 9 szavazatot kap, tehát a z nyer.

Sok esetben nem akarnak több körös szavazást rendezni. Jean-Charles de Borda francia matematikus, fizikus, 1770-ben a Francia Tudományos Akadémia tagjainak megválasztására találta ki a következő módszert, amely egy közös sorrendet állít elő a szavazók egyéni preferencia-sorrendjeiből. Ezt a szavazási rendszert most is használják a tudományos életben, pl. a Szegedi Tudományegyetemen is vannak szavazások, amelyek így zajlanak.

13. Definíció. A *Borda-pontozás* menete:

- Minden szavazó az alternatívákat között sorrendet állít fel, azaz megadja a preferencia-sorrendjét.
- Ha az alternatívák száma $|A| = m$, akkor az első helyen lévő alternatíva m pontot kap, a második helyezett $m - 1$ pontot, és így tovább, az utolsó 1-et.
- A pontokat összegzik az egyes alternatívák esetén az összes szavazóra.

A Borda-pontozásban az a győztes, aki a legtöbb pontot éri el, és az elért pontok alapján egy közös sorrend is megadható.

14. Példa. Megoldjuk a feladatsor **42. feladatát**.

Az $A = \{x, y, z, u\}$ az alternatívák halmaza, és 15 szavazó esetén a preferencia-sorrendek legyenek:

- $y \succ x \succ z \succ u$: 1 szavazónál,
- $x \succ z \succ u \succ y$: 6 szavazónál,
- $z \succ x \succ y \succ u$: 8 szavazónál.

Adja meg, hogy a Borda-pontozás alapján ki a győztes, és határozza meg a közös sorrendet is.

Ennél a feladatnál $|A| = m = 4$, így az egyes alternatívákra eső pontokat a következőképpen kapjuk.

- x: $1 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 8 \cdot 3 = 51$,
- y: $1 \cdot 4 + 6 \cdot 1 + 8 \cdot 2 = 26$,
- z: $1 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 8 \cdot 4 = 52$,
- u: $1 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 21$.

Ez alapján a választást z nyeri, a közös sorrend: $z \succ x \succ y \succ u$.

15. Feladat. Oldja meg a feladatsor **43., 44. feladatát**.

Megfigyelhető, hogy a 42. és 43. feladatnál megadott preferencia-sorrendeknél, csak egy szavazónál van különbség. Ha a szavazó tudja, hogy melyik két alternatíva lehet esélyes a győzelemre, akkor a saját preferncia-sorrendjét tudja úgy módosítani, hogy a számára kedvezőbb alternatíva győzzön. Ezért a Borda-pontozás *taktikailag manipulálható* szavazási rendszer. A Borda-pontozás *nem független a lényegtelen alternatíváktól*, hiszen két alternatíva helyzete a végső sorrendben nemcsak azon múlik, hogy egymáshoz képest hogy rendezi a szavazó, hanem attól is függ, hogy a többi alternatívához képest hogyan rendezi.

A francia forradalom idején találta ki Nicolas de Condorcet a következő módszert, ami egy jó szavazási rendszernek tűnik, de a későbbiekben látjuk, hogy vannak vele problémák.

16. Definíció. A *Condorcet-módszer* menete:

- Az alternatívák között az összes párra többségi szavazást hajtunk végre.
- Az az alternatíva a végső győztes (Condorcet-győztes), ami minden páronkénti többségi szavazásban győztes.

17. Példa. Az $A = \{x, y, z\}$ az alternatívák halmaza, 3 szavazó esetén a preferencia-sorrendek legyenek:

- $x \succ y \succ z$,
- $y \succ x \succ z$,
- $z \succ x \succ y$.

A páronkénti többségi szavazásnál: $x \succ y$, $x \succ z$, $y \succ z$.
Az x alternatíva a Condorcet-győztes, a közös sorrend: $x \succ y \succ z$.

18. Példa. Az előző példához képest csak annyit változtassunk, hogy a második preferncia-sorrendben cseréljük fel x és z szerepét.

- $x \succ y \succ z$,
- $y \succ z \succ x$,
- $z \succ x \succ y$.

A páronkénti többségi szavazásnál: $x \succ y$, $y \succ z$, $z \succ x$.
Nincs Condorcet-győztes, ez az úgynevezett *Condorcet-paradoxon*.

Kenneth Arrow 1950-ben egy érdekes tételt bizonyított, amelynek kimondásához néhány fogalomra szükségünk van. Egy szavazót *diktátornak* nevezünk, ha az általa megadott prefencia-sorrend lesz minidig a közös sorrend. Egy szavazási rendszer *diktatúra*, ha van a szavazók között diktátor. A szavazási rendszert *egyhangúnak* nevezzük, ha minden szavazónak ugyanaz a prefencia-sorrendje, akkor ez lesz a közös sorrend is. A szavazási rendszer *független a lényegtelen alternatíváktól*, ha két alternatíva helye a közös sorrendben csak attól függ, hogy egymáshoz képest hogyan rendezik a szavazók, és nem függ attól, hogy a többi alternatívához képest hogyan rendezték. (Korábban láttuk, hogy a Borda-pontozás nem független a lényegtelen alternatíváktól.)

19. Tétel. *(Arrow-tétele) Legalább három alternatíva esetén, ha a szavazási rendszer egyhangú, és független a lényegtelen alternatíváktól, akkor diktatúra.*

2. Stratégiai ekvivalencia

20. Definíció. Az (N, v) n-személyes kooperatív játékot *valódi (lényeges) játéknak* nevezzük, ha $v(N) > \sum_{i=1}^{n} v(\{i\})$ teljesül. Azaz ha az összes játékos összefog, akkor nagyobb kifizetést érnek el, mint külön-külön.

21. Definíció. Az (N, v) és az (N, v') n-személyes kooperatív játékok *stratégiailag ekvivalensek*, ha léteznek olyan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ valós számok, és $c > 0$ valós szám, amelyre

$$v'(S) = cv(S) + \sum_{i \in S} a_i, \quad \text{bármely } S \subseteq N\text{-re.}$$

22. Megjegyzés. A stratégiai ekvivalencia olyan reláció, amely reflexív, szimmetrikus és tranzitív, azaz ekvivalenciareláció, így tartozik hozzá egy osztályozás. A következő definíció és tétel segítségével minden osztályból kijelölhető egy speciális tulajdonságú elem.

23. Definíció. Az (N, v) n-személyes kooperatív játék $(0, 1)$-normalizált, ha teljesülnek a következők:

(1) $v(\{i\}) = 0$, bármely $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén;
(2) $v(N) = 1$.

24. Tétel. *Minden valódi (lényeges) (N, v) n-személyes kooperatív játék stratégiailag ekvivalens egy egyértelműen meghatározott $(0, 1)$-normalizált játékkal.*

Bizonyítás. Keressük az (N, v)-vel stratégiailag ekvivalens (N, v') játékot, amelyre igaz, hogy $v'(\{i\}) = 0$ bármely $i = 1, \ldots, n$-re és $v'(N) = 1$, azaz az (N, v') kooperatív játék $(0, 1)$-normalizált. A stratégiai ekvivalencia definíciójából adódóan a következők teljesülnek:

$$v'(\{i\}) = cv(\{i\}) + a_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n; \tag{1}$$

$$v'(N) = cv(N) + \sum_{i=1}^{n} a_i = 1. \tag{2}$$

Az (1) egyenletből kapjuk:

$$a_i = -cv(\{i\}). \tag{3}$$

Az (1)-ben szereplő n egyenletet összegezve kapjuk: $\sum_{i=1}^{n} a_i = -c \sum_{i=1}^{n} v(\{i\})$. Ezt behelyettesítve a (2) egyenletbe

$$cv(N) - c \sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) = 1. \tag{4}$$

Mivel feltettük, hogy a játék valódi, így a definíció alapján $v(N) - \sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) > 0$. Tehát a (4) egyenletből kifejezhetjük a c-t:

$$c = \frac{1}{v(N) - \sum_{i=1}^{n} v(\{i\})} > 0. \tag{5}$$

A (3)-ba behelyettesítve, amit a c-re az (5)-ben kaptunk:

$$a_i = -cv(\{i\}) = \frac{-v(\{i\})}{v(N) - \sum_{i=1}^{n} v(\{i\})}. \tag{6}$$

Mivel az (1) és (2) egyértelmű megoldása az (5) és a (6), így a v' is egyértelműen meghatározott, tehát egyetlen $(0, 1)$ normalizált játék van minden ekvivalenciaosztályban.

25. Példa. Megoldjuk a feladatsor **45. feladatát**.

Végezzen $(0,1)$-normalizációt az (N, v) 4-személyes kooperatív játékon, ha $N = \{1, 2, 3, 4\}$, és a karakterisztikus függvény tetszőleges $S \subseteq N$ koalícióra a következő:

$$v(S) = \begin{cases} 2, & \text{ha } |S| = 1; \\ 5, & \text{ha } |S| = 2; \\ 7, & \text{ha } |S| = 3; \\ 10, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

Keressük azt a $(0,1)$-normalizált (N, v') 4-személyes kooperatív játékot, amely stratégiailag ekvivalens az eredeti játékkal. A stratégiai ekvivalencia definíciójából: $v'(S) = cv(S) + \sum_{i \in S} a_i$ teljesül bármely $S \subseteq N$-re. A 24. tétel bizonyítása alapján a c és az $a_1, \ldots, a_4$ számok a következőképpen számolhatók:

$$c = \frac{1}{v(N) - \sum_{i=1}^{4} v(\{i\})} = \frac{1}{10 - \sum_{i=1}^{4} 2} = \frac{1}{10 - 8} = \frac{1}{2},$$

$$a_i = -cv(\{i\}) = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1, \qquad i = 1, \ldots, 4.$$

Tehát az eredeti játékkal stratégiailag ekvivalens $(0,1)$-normalizált (N, v') játék karakterisztikus függvénye:

$$v'(S) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot 2 - 1 = 0, & \text{ha } |S| = 1; \\ \frac{1}{2} \cdot 5 - 2 = \frac{1}{2}, & \text{ha } |S| = 2; \\ \frac{1}{2} \cdot 7 - 3 = \frac{1}{2}, & \text{ha } |S| = 3; \\ \frac{1}{2} \cdot 10 - 4 = 1, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

26. Feladat. Oldja meg a feladatsor **46. feladatát**.

3. Elosztások (Shapley-érték, mag)

27. Definíció. Az (N, v) n-személyes kooperatív játék esetén *elosztáson* egy olyan n-komponensű $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vektort értünk (x_i az i. játékos „része”), ami teljesíti a következő feltételeket:

(1) $x_i \geq v(\{i\})$;
(2) $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$.

Az összes elosztás halmazát $E(v)$-vel jelöljük.

28. Megjegyzés. Az (1) azt jelenti, hogy az i. játékos akkor fogad el egy elosztást, ha a kifizetés legalább akkora, mint amit egymaga is elért volna. A (2) alatt azt értjük, hogy a játékosok által szerezhető teljes nyereményt szétosztjuk.

Lloyd S. Shapley 1953-ban definiált egy Φ függvényt, amely minden (N, v) n-személyes kooperatív játékhoz hozzárendel egy $\Phi(v) \in \mathbb{R}^n$ vektort úgy, hogy a $\Phi(v)$ vektor i. koordinátája az i. játékos hatását tükrözze a játékban. A $\Phi(v) \in E(v)$ vektorral megadott elosztást *Shapley-értéknek* nevezzük, és a következő tétel szerint számolható.

29. Tétel. *Az (N, v) n-személyes kooperatív játékhoz tartozó egyértelműen meghatározott $\Phi(v)$ Shapley-érték komponensei a következő módon számolhatók:*

$$\Phi_i(v) = \sum_{i \in S \subseteq N} \gamma(|S|)(v(S) - v(S \setminus \{i\})), \tag{7}$$

ahol $\gamma(|S|) = \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}$.

30. Megjegyzés.

- A formulában a $\gamma(|S|)$ együttható azt mutatja meg, hogy milyen valószínűséggel csatlakozik az $S \setminus \{i\}$ koalícióhoz az i. játékos. A nevezőben a játékosok összes sorrendjének száma szerepel. A számlálóban pedig az, hogy hány olyan sorrend van, amikor az $S \setminus \{i\}$-hez csatlakozik az i. játékos. Ezt úgy kapjuk, hogy azok, akik az i.-en kívül tagjai az S-nek $(|S|-1)!$ sorrendben léphettek be a koalícióba, míg az S-en kívülieknek $(n-|S|)!$-féle sorrendjük lehet.
- A formula $v(S) - v(S \setminus \{i\})$ része azt mutatja, hogy a koalícióra milyen hatással volt az i. játékos, azaz mennyivel nőtt a kifizetés azzal, hogy belépett S-be.

31. Példa. Megoldjuk a feladatsor **47. feladatát**.

Határozza meg a 4. példában megadott 3-személyes kooperatív játékhoz tarozó Shapley-értéket. (Használja a 4. példa megoldásában található jelöléseket.)

A $\Phi(v)$ vektor komponenseit a 29. tétel segítségével határozzuk meg. Mivel a játék 3-személyes, így $n = 3$, és a $\gamma(|S|)$ értékei a 29. tételben szereplő képlet alapján:

$$\gamma(|S|) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{ha } |S| = 1; \\ \frac{1}{6}, & \text{ha } |S| = 2; \\ \frac{1}{3}, & \text{ha } |S| = 3. \end{cases}$$

A (7) formula alapján a következő értékeket kapjuk:

$$\begin{aligned}
\Phi_1(v) &= \sum_{1 \in S \subseteq N} \gamma(|S|)(v(S) - v(S \setminus \{1\})) = \\
&= \frac{1}{3}(v(\{1\}) - v(\emptyset)) + \frac{1}{6}(v(\{1,2\}) - v(\{2\})) + \frac{1}{6}(v(\{1,3\}) - v(\{3\})) + \\
&+ \frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})) = \\
&= \frac{1}{3}(6-0) + \frac{1}{6}(16-0) + \frac{1}{6}(26-0) + \frac{1}{3}(36-6) = \frac{57}{3} = 19, \\
\Phi_2(v) &= \frac{1}{3}(0-0) + \frac{1}{6}(16-6) + \frac{1}{6}(6-0) + \frac{1}{3}(36-26) = \frac{18}{3} = 6, \\
\Phi_3(v) &= \frac{1}{3}(0-0) + \frac{1}{6}(26-6) + \frac{1}{6}(6-0) + \frac{1}{3}(36-16) = \frac{33}{3} = 11.
\end{aligned}$$

A játékhoz tartozó Shapley-érték: $\Phi(v) = (19, 6, 11)$, ami elosztás, hiszen teljesíti a 27. definíció feltételeit. Tehát a hasznon úgy osztoznak a Shapley-érték szerint, hogy Judit 19 ezer forintot kap, Ancsa 6 ezer forintot, Fanni pedig 11 ezret.

32. Feladat. Oldja meg a feladatsor **48. feladatát**.

33. Definíció. Az (N, v) kooperatív játék v karakterisztikus függvényét *szuperadditívnak* nevezzük, ha tetszőleges $S, T \subseteq N$, $S \cap T = \emptyset$ esetén, $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$. Ez azt fejezi ki, hogy összefogás esetén legalább annyit nyernek, mint külön-külön.

34. Feladat. Oldja meg a feladatsor **49. feladatát**.

35. Definíció. Legyen (N, v) n-személyes kooperatív játék, és $x, y \in E(v)$ elosztások. Az x *elosztás dominálja y-t az $S \subseteq N$ koalícióra nézve*, ha teljesülnek a következők:

(1) $x_i > y_i$, bármely $i \in S$ esetén;
(2) $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$.

Jele: $x \succ_S y$

36. Definíció. Legyen (N, v) n-személyes kooperatív játék, és $x, y \in E(v)$ elosztások. Az x *elosztás dominálja y-t*, ha létezik olyan nemüres $S \subseteq N$ koalíció, amelyre nézve x dominálja y-t.

Jele: $x \succ y$

37. Példa. Legyen $N = \{1, 2, 3\}$, és tekintsük azt az (N, v) 3-személyes játékot, amelynek karakterisztikus függvénye:

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |S| = 1; \\ \frac{2}{3}, & \text{ha } |S| = 2; \\ 1, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

Az $x = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{15}, \frac{1}{5}\right)$ és az $y = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$ vektorok elosztások, mert teljesítik a 27. definíció feltételeit. Az x elosztás dominálja az y-t, ugyanis az $S = \{2, 3\}$ koalícióra nézve teljesülnek a 35. definíció feltételeit:

(1) $\frac{7}{15} > \frac{1}{3}$, $\frac{1}{5} > \frac{1}{6}$;

(2) $\frac{7}{15} + \frac{1}{5} = \frac{2}{3} \leq v(\{2, 3\}) = \frac{2}{3}$.

Tehát az x elosztás kedvezőbb, mint az y az $S = \{2, 3\}$ koalíció szempontjából, úgy, hogy az általuk elérhető kifizetés keretein belül marad.

A Shapley-érték segítségével egyetlen elosztást adunk meg, míg a kooperatív játék magja az elosztások egy részhalmaza lesz.

38. Definíció. Egy (N, v) n-személyes *kooperatív játék magja* azon $x \in E(v)$ elosztásokból áll, amelyeket egyetlen elosztás sem dominál. Jele: $C(v)$

39. Tétel. *Ha egy (N, v) n-személyes kooperatív játék v karakterisztikus függvénye szuperadditív, akkor*

$$C(v) = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i = v(N) \ \textit{és} \ \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \ \textit{bármely} \ S \subset N\textit{-re} \right\}.$$

40. Példa. Megoldjuk a feladatsor **50. feladatát**.

Igazolja, hogy a 4. példában megadott karakterisztikus függvény szuperadditív. Határozza meg az elosztások halmazát, és a kooperatív játék magját. (Használja a 4. példa megoldásában található jelöléseket.)

A karakterisztikus függvény:

$$v(S) = \begin{cases} 6, & \text{ha } S = \{1\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{2\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{3\}; \\ 16, & \text{ha } S = \{1, 2\}; \\ 26, & \text{ha } S = \{1, 3\}; \\ 6, & \text{ha } S = \{2, 3\}; \\ 36, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

A karakterisztikus függvény szuperadditív, mert a 2-elemű halmazok kifizetései nagyobbak, mint az 1-elemű halmazoké, ami között kettő 0 kifizetéssel szerepel, továbbá az összes játékos halmazából elhagyva egy tetszőleges elemet a kifizetés nagyobb mértékben csökken, mint az 1-elemű halmazok kifizetése.

Az elosztások halmaza a 27. definíció szerint:

$$E(v) = \{(x_1, x_2, x_3) \colon x_1 \geq 6,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_1 + x_2 + x_3 = 36\}.$$

A 39. tétel alapján a magban szereplő elosztásokra a következő egyenlőtlenségek teljesülnek még: $x_1 + x_2 \geq 16$, $x_1 + x_3 \geq 26$, $x_2 + x_3 \geq 6$. Ezeket a feltételeket az $E(v)$-ben szereplőkkel összevetve kapjuk, hogy $6 \leq x_1 \leq 30$, $0 \leq x_2 \leq 10$, $0 \leq x_3 \leq 20$ teljesül, tehát a mag:

$$C(v) = \{(x_1, x_2, x_3) \colon 6 \leq x_1 \leq 30,\ 0 \leq x_2 \leq 10,\ 0 \leq x_3 \leq 20,\ x_1 + x_2 + x_3 = 36\}.$$

Ezek azok az elosztások, amelyeket egyetlen elosztás sem dominál.

A mag elemei tehát bizonyos szempontból a legjobb elosztásoknak tekinthetők, viszont van olyan kooperatív játék, aminek a magja üres.

41. Feladat. Oldja meg a feladatsor **51., 52.** és **53. feladatát**.