Varietások

Def: K azonos típusú algebrák egy osztálya.

$I(K) = \{\mathbb{B} \mid \exists \mathbb{A} \in K \text{ és } \mathbb{B} \cong \mathbb{A}\}$

$S(K) = \{\mathbb{B} \mid \exists \mathbb{A} \in K \text{ és } \mathbb{B} \leq \mathbb{A}\}$

$H(K) = \{\mathbb{B} \mid \exists \mathbb{A} \in K \text{ és } \varphi : \mathbb{B} \to \mathbb{A} \text{ szürjektív hom}\}$

$P(K) = \{\mathbb{B} \mid \exists \mathbb{A}_i \in K,\ \mathbb{B} = \prod_{i \in I} \mathbb{A}_i\}$

$P_{sd}(K) = \{\mathbb{B} \mid \exists \mathbb{A}_i \in K,\ \mathbb{B} \leq_{sd} \prod_{i \in I} \mathbb{A}_i\}$

szubdirekt szorzat

Áll: $SH \subseteq HS$, $PS \subseteq SP$, $PH \subseteq HP$

Def: K varietás, ha zárt H, S és P-re.

Def: K által generált varietás $V(K)$ a legszűkebb osztály ami varietás.

Tétel: $V(K) = HSP(K)$.

Tétel: Ha K varietás, akkor $K = P_S(K_{SI})$ ahol $K_{SI} = \{ \mathbb{A} \in K \mid \mathbb{A}$ subdirekt irred$\}$.

Köv: Minden varietást meghatároznak a subdirekt irreducibilis elemei.

Def: $\mathcal{F}$ algebra típus, X tetszőleges halmaz esetén legyen $T_{\mathcal{F}}(X)$ <u>X-feletti $\mathcal{F}$-típusú kifejezések halmaza</u>

Áll: $T_{\mathcal{F}}(X)$ $\mathcal{F}$-típusú algebra. (<u>szóalgebra</u>)

Def: Ha $p(x_1, \dots, x_n) \in T_{\mathcal{F}}(X)$ és $\mathbb{A}$ tetszőleges $\mathcal{F}$-típusú algebra, akkor definiálható $p^{\mathbb{A}} : A^n \to A$ <u>kifejezés-függvény</u>, mégpedig egyértelműen.

Def: Legyen K azonos típusú algebrák egy osztálya, $\mathfrak{U}$ hasonló algebra, $X \subseteq U$ úgy hogy $Sg(X) = U$. Azt mondjuk, hogy <u>$\mathfrak{U}$ univerzális az X gen. rendszerrel a K osztályra nézve</u>, ha tetszőleges $\mathfrak{A} \in K$ és $f : X \to A$ leképezés esetén van olyan $\varphi : \mathfrak{U} \to \mathfrak{A}$ homomorfizmus, hogy $\varphi|_X = f$.

Áll: Ha $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2 \in K$ univerzálisak az X_1, X_2 gen. rendszerrel K-ra nézve és $|X_1| = |X_2|$ akkor $\mathfrak{U}_1 \cong \mathfrak{U}_2$.

Áll: Az $\mathbb{T}_{\mathcal{F}}(X)$ szóalgebra univerzális az összes $\mathcal{F}$-típusú algebrára nézve.

Def: Legyen K azonos típusú algebrák osztálya, X tetszőleges.

$$\Phi = \{\vartheta \in \operatorname{Con} \mathbb{T}_{\mathcal{F}}(X) : \mathbb{T}_{\mathcal{F}}(X)/\vartheta \in IS(K)\}$$

$$\vartheta_K = \bigcap \Phi \quad \text{és}$$

$$\mathbb{F}_K(X) = \mathbb{T}_{\mathcal{F}}(X)/\vartheta_K \quad (\underline{\text{szabad algebra}})$$

Megj: Ha K-ban van nem triv algebra, akkor $x, y \in X$, $x \neq y$ esetén $x/\vartheta_K \neq y/\vartheta_K$.

Tétel: $\mathbb{F}_K(X)$ univerzális az X gen. rendszerrel K-ra nézve.

Tétel (Birkhoff). Ha $K \neq \emptyset$ akkor
$\mathbb{F}_K(X) \in I P_{sd} S(K)$. Speciálisan ha K varietás, akkor $\mathbb{F}_K(X) \in K$.

Def: $\mathcal{F}$-típusú azonosság: $p, q \in T_{\mathcal{F}}(X)$
jel: $p \approx q$. ezek halmaza $Id(X)$

Def: $\mathbb{A} \models p \approx q$ ha bármely $f: X \to A$ egyértelműen kiterjesztő $\varphi: \mathbb{T}_{\mathcal{F}}(X) \to \mathbb{A}$ homomorfizmusra $\varphi(p) = \varphi(q)$

Másképpen: $p(x_1, \dots, x_n) \approx q(x_1, \dots, x_n)$ teljesül $\mathbb{A}$-ban ha
$p^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n) = q^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n)$ minden $a_1, \dots, a_n \in A$ elemre.

Def: $Id_K(X) = \{ p \approx q \in Id(X) : K \models p \approx q \}$

Tétel: Tetszőleges K azonos típusú algebrákra K, $H(K)$, $S(K)$, $P(K)$ ugyanazokat az azonosságokat teljesíti.

Köv: Ha Φ $\mathcal{F}$-típusú azonosságok egy halmaza, akkor $Mod(\Phi)$ varietás.

Tétel: K azonos $\mathcal{F}$-típusú algebrák egy osztálya, $p \approx q \in Id_{\mathcal{F}}(X)$. Ekkor a következők ekvivalensek.

1. $p \approx q \in Id_K(X)$
2. $K \models p \approx q$
3. $F_K(X) \models p \approx q$
4. $F_K(X)$-ban $p = q$
5. $(p, q) \in \theta_K$

Köv: K azonos típusú algebrák osztálya, X tetszőleges és Y végtelen halmaz. Ekkor

$$Id_K(X) = Id_{F_K(Y)}(X).$$

Tétel (Birkhoff) K akkor és csak akkor varietás ha azonosságokkal definiálható.

Biz: Egyik irányt már láttuk. Legyen X végtelen és $V = \mathrm{Mod}(\mathrm{Id}_K(X))$.

$$V \supseteq K, \quad \mathrm{Id}_V(X) = \mathrm{Id}_K(X)$$

és $\mathcal{F}_V(X) = \mathcal{F}_K(X)$.

Ha Y tetszőleges végtelen halmaz, akkor

$$\mathrm{Id}_V(Y) = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}_V(X)}(Y) = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}_K(X)}(Y) = \mathrm{Id}_K(Y)$$

azaz $\mathcal{F}_V(Y) = \mathcal{F}_K(Y)$.

De minden $\mathbb{A} \in V$ algebrára $\mathbb{A} \in H\mathcal{F}_V(Y)$ azaz $\mathbb{A} \in K$. ∎

Tétel (Magari) Ha a V varietásban van nemtriviális algebra, akkor tartalmaz egyszerű algebrát.