1. feladatsor (Számelmélet I.)

1.1. feladat.[(1)] Határozzuk meg – euklideszi algoritmussal – az alábbi a, b egész számok legnagyobb közös osztóját, és adjuk meg legkisebb közös többszörösüket is:

(a) $a = 144$, $b = 89$, (b) $a = -1183$, $b = 1573$.

1.2. feladat.[(2)] Teljesül-e, hogy tetszőlegesen megadott nyolc darab háromjegyű szám közül mindig kiválasztható kettő úgy, hogy ezeket egymás mellé írva, a kapott szám osztható 7-tel?

1.3. feladat.[(3)] Igaz-e, hogy bármely 3-mal nem osztható egész szám négyzetéből 1-et levonva 3-mal osztható számot kapunk?

1.4. feladat.[(4)] Adjuk meg azt a 3 legkisebb egymás után következő természetes számot, amelynek összege négyzetszám és egyben köbszám.

1.5. feladat.[(5)] Teljesülnek-e a következő oszthatóságok tetszőleges n természetes számra?

(a) $6 \mid 17^n - 11^n$, (b) $6 \mid n^3 - n$, (c) $3 \mid 2 \cdot 7^n - 2$.

1.6. feladat.[(6)] Teljesül-e, hogy bármely 3-nál nagyobb prímszám négyzete 24-gyel osztva 1-et ad maradékul?

1.7. feladat.[(7)] Legyenek $5 \leqslant p < q$ ikerprímek. Teljesül-e, hogy $p + q$ osztható 12-vel?

1.8. feladat.[(8)] Igaz-e, hogy bármely természetes szám egy számjegyének megváltoztatásával prímszámmá alakítható?

1.9. feladat.[(9)] Az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ számjegyekből állítsunk össze öt különböző prímszámot úgy, hogy minden számjegyet pontosan egyszer használunk fel.

1.10. feladat.[(10)] Bizonyítsuk be, hogy a $10^m + (-1)^m$ egész szám osztható 11-gyel tetszőleges m nemnegatív egész számra, majd ennek segítségével igazoljuk, hogy egy természetes szám pontosan akkor osztható 11-gyel, ha (tízes számrendszerbeli) számjegyeinek váltakozó előjelű összege osztható 11-gyel, azaz

$$11 \mid \overline{a_n \dots a_1 a_0} \quad \Leftrightarrow \quad 11 \mid a_0 - a_1 + \dots + (-1)^n a_n.$$

1.11. feladat.[(11)] Adjuk meg az összes olyan p prímszámot, amelyre $8p^2 + 1$ is prímszám.

1.12. feladat.[(12)] Mutassuk meg, hogy ha a és b egész számok és $2a + 9b$ osztható 17-tel, akkor $33a + 89b$ is osztható 17-tel.

1.13. feladat.[(13)] Adjuk meg az összes olyan a egész számot, amelyre a, $a + 10$ és $a + 14$ is prímszám.

1.14. feladat.[(14)] Bizonyítsuk be, hogy ha $2^n - 1$ prímszám valamely n természetes számra, akkor n is prímszám.

1.15. feladat.[(15)] Igaz-e, hogy ha egy négyjegyű szám számjegyeit fordított sorrendben felírjuk, és az eredeti számmal összeadjuk, akkor az összeg osztható 11-gyel?

1.16. feladat.[(16)] Teljesülnek-e a következő oszthatóságok tetszőleges n természetes számra?

(a) $17 \mid 2^{16n} - 1$, (b) $7 \mid n^7 - n$, (c) $9 \mid 7^n + 3n - 1$.

1.17. feladat.[(17)] Bizonyítsuk be, hogy ha az n egész szám nem osztható 5-tel, akkor az $n^2 - 1$ vagy az $n^2 + 1$ egészek valamelyike 5-tel osztható.

1.18. feladat.[(18)] Bizonyítsuk be, hogy bármely egész szám négyzetét 16-tal osztva, maradékul négyzetszámot kapunk.

1.19. feladat.[19] Határozzuk meg azokat a p prímszámokat, melyekre $2p-1$ és $2p+1$ ikerprímszámok.

1.20. feladat.[20] Határozzuk meg – euklideszi algoritmussal – az alábbi a, b egész számok legnagyobb közös osztóját, és adjuk meg legkisebb közös többszörösüket.

(a) $a = 377$, $b = 233$, (b) $a = -1253$, $b = -3241$.

1.21. feladat.[21] Teljesülnek-e a következő oszthatóságok tetszőleges n természetes számra?

(a) $2 \mid n^2 - n$, (b) $15 \mid 2^{16} - 1$, (c) $30 \mid n^5 - 5$.

1.22. feladat.[22] Adjuk meg az a egész szám értékét úgy, hogy az a, $a+4$ és $a+14$ számok prímszámok legyenek.

1.23. feladat.[23] Palindrom számnak az olyan természetes számokat nevezzük, amelyeknek tízes számrendszerbeli felírása oda-vissza ugyanaz (pl.: 1234321). Mutassuk meg, hogy minden páros hosszúságú palindrom szám osztható tizeneggyel.

1.24. feladat.[24] Igaz-e, hogy minden páratlan szám négyzete 8-cal osztva 1-et ad maradékul?

1.25. feladat.[25] Miért nem lehet egyszerre egész $\dfrac{n+1}{15}$ és $\dfrac{n+8}{21}$, ahol $n \in \mathbb{N}$?

1.26. feladat.[26] Bizonyítsuk be, hogy $1+2+3 \mid 1^n + 2^n + 3^n$ teljesül bármely páratlan n természetes szám esetén.

1.27. feladat.[27] Van-e olyan négyzetszám, amely

(a) 7-tel osztva 3-at ad maradékul, (b) 8-cal osztva 3-at ad maradékul,

(c) 6-tal osztva 3-at ad maradékul, (d) 9-cel osztva 3-at ad maradékul?

1.28. feladat.[28] Határozzuk meg – euklideszi algoritmussal – az alábbi a, b egész számok legnagyobb közös osztóját, és adjuk meg legkisebb közös többszörösüket:

(a) $a = 368$, $b = 161$, (b) $a = 539$, $b = 1001$.

1.29. feladat.[29] Mutassuk meg, hogy a következő egész számok összetett számok:

(a) $10^6 - 5^7$, (b) $10^{100} - 7$, (c) $4^{20} - 1$,

(d) 1000027, (e) $1000...001$ (2020 darab 0), (f) $1! + 2! + 3! + \cdots + 100!$.

1.30. feladat.[30] Milyen n egész számra lesz a $\dfrac{3n^2+6n+10}{n+2}$ tört egész szám?

1.31. feladat.[31] Bizonyítsuk be, hogy $10^k - 1$ osztható 9-cel minden k nemnegatív egész számra, majd ennek segítségével igazoljuk, hogy egy szám pontosan akkor osztható 9-cel, ha (tízes számrendszerbeli) számjegyeinek összege osztható 9-cel, azaz

$$9 \mid \overline{a_n \ldots a_1 a_0} \iff 9 \mid a_0 + a_1 + \cdots + a_n.$$

1.32. feladat.[32] Mutassuk meg, hogy bármely a, b egész számokra teljesül, hogy $7 \mid 10a + b \quad \Leftrightarrow \quad 7 \mid a - 2b$. Döntsük el ennek a szabálynak a segítségével, hogy osztható-e 7-tel a 334989655 egész szám!

1.33. feladat.[33] Euklideszi algoritmussal határozzuk meg az alábbi számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét:

(a) $310, 245$, (b) $678, -294$.

1.34. feladat.[34] Igazoljuk, hogy a $11, 111, 1111, \ldots$ sorozatban nincsenek négyzetszámok.

$\ulcorner \oplus \ominus \otimes \oslash \odot \urcorner$

2. feladatsor (Számelmélet II.)

2.1. feladat.(35) Határozza meg azt a legkisebb háromjegyű természetes számot, amelynek 12-szerese 6-ot ad maradékul 30-cal osztva.

2.2. feladat.(36) Január 6-án négy hajó futott be Balatonfüred kikötőjébe. Az egyik hajó négyhetente tér vissza Balatonfüredre, a másik minden nyolcadik héten, a harmadik és a negyedik pedig 12, illetve 16 hetente. Találkoznak-e még idén ebben a kikötőben?

2.3. feladat.(37) Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat:

(a) $6x \equiv 4 \pmod 8$, (b) $13x \equiv -3 \pmod{34}$, (c) $88x \equiv 42 \pmod{55}$.

2.4. feladat.(38) Oldjuk meg az $x \equiv a \pmod 3$, $x \equiv b \pmod 5$, $x \equiv c \pmod 7$ paraméteres kongruenciarendszert.

2.5. feladat.(39) Ha egy kosár tojást 2, 3, 4, 5 vagy 6-osával ürítünk ki, rendre 1, 2, 3, 4, 5 tojás marad benne. Ha azonban 7-esével vesszük ki a tojásokat, akkor egy sem marad benne. Legalább hány tojás lehet a kosárban?

2.6. feladat.(40) Melyik az a legkisebb pozitív egész, amelynek pontosan 12 darab pozitív osztója van?

2.7. feladat.(41) Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszereket.

(a) $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 2 \\ x \equiv 6 \pmod 5 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 10x \equiv 16 \pmod 9 \\ 6x \equiv 3 \pmod{21} \\ 3x \equiv 2 \pmod 5 \end{cases}$

2.8. feladat.(42) Keressük meg azokat a legkisebb a és b $(b < a)$ természetes számokat, melyekhez tartozó euklideszi algoritmus 6 lépésből áll (azaz az ötödik osztásnál kapjuk az utolsó nemnulla maradékot). Általánosítsuk n lépésre a feladatot.

2.9. feladat.(43) Melyik az a 4-re végződő háromjegyű szám, amely 63-mal osztva 1-et ad maradékul?

2.10. feladat.(44) Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat:

(a) $38x \equiv 24 \pmod{53}$, (b) $9x \equiv 15 \pmod{12}$, (c) $29x \equiv 17 \pmod{73}$.

2.11. feladat.(45) Melyik az a két természetes szám, amelyek legnagyobb közös osztója 6, a legnagyobb közös osztó keresésekor az euklideszi algoritmusban 3 maradékos osztást végeztünk, ahol a hányadosok egymás utáni természetes számok voltak (növekvő sorrendben), és a hányadosok összege 9.

2.12. feladat.(46) Oldjuk meg az alábbi diofantoszi egyenleteket:

(a) $72x + 60y = 33$, (b) $-78x + 30y = 12$, (c) $18x + 21y = 9$.

2.13. feladat.(47) Oldjuk meg a $197x + 418y = 17$ diofantoszi egyenletet.

2.14. feladat.(48) Oldjuk meg az alábbi diofantoszi egyenleteket:

(a) $72x + 60y = 24$, (b) $21x - 15y = 12$, (c) $63x - 28y = 22$.

2.15. feladat.(49) Oldja meg az alábbi kongruenciarendszereket.

(a) $\begin{cases} 5x \equiv 1 \pmod 6 \\ 7x \equiv 9 \pmod{10} \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x \equiv 1 \pmod 5 \\ 5x \equiv -1 \pmod 6 \\ 4x \equiv 11 \pmod 9 \end{cases}$

2.16. feladat.(50) Adjunk meg végtelen sok $b < a$ természetes számot úgy, hogy a rajtuk végrehajtott euklideszi algoritmus 3 lépésből álljon (azaz a második osztásnál kapjuk az utolsó nemnulla maradékot), és $\mathrm{lnko}(a, b) \sim 1$ teljesüljön.

2.17. feladat.(51) Egy út egyik oldalán 12 méterenként fák sorakoznak, a másik oldalon pedig villanyoszlopok, 75 méterenként. Ahol most állok, ott éppen szemben van egymással egy fa és egy villanyoszlop. Mennyit kell sétálnom a következő ilyen helyig?

2.18. feladat.(52) Határozzuk meg a következő halmazok elemszámát.

(a) $\{x \in \mathbb{Z} : (\exists y \in \mathbb{Z})(11x - 8y = 3)$ és $10 \leqslant x \leqslant 30\}$,

(b) $\{y \in \mathbb{Z} : (\exists x \in \mathbb{Z})(7x - 19y = 10)$ és $15 \leqslant y \leqslant 35\}$.

2.19. feladat.(53) Valaki a következőket mondta: „A barátnőm 22-edik születésnapjára 22 szál virágból álló csokrot vettem 2000 Forintért. A csokor fréziából, nárciszból és rózsából állt, amelyekből egy szál 50 forintba, 70 forintba, illetve 130 forintba került." Hány szál virágot tartalmazott az egyes fajtákból a csokor, ha azt is tudjuk, hogy mindegyikből legalább két szál volt, és semelyik kettőből sem volt ugyanannyi?

2.20. feladat.(54) Oldjuk meg a $73x \equiv 1 \pmod{247}$ kongruenciát. (Útmutatás: Vizsgáljuk külön modulo 13 és modulo 19 a kongruenciát, majd ezek megoldásaiból „gyúrjuk össze" az eredeti kongruencia megoldását a kínai maradéktétel segítségével.)

2.21. feladat.(55) Oldja meg az alábbi kongruenciarendszereket.

(a) $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 4 \pmod{7} \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x \equiv 18 \pmod{10} \\ 10x \equiv 40 \pmod{12} \\ 15x \equiv 9 \pmod{21} \end{cases}$

2.22. feladat.(56) Egy 5 m hosszú kerítés szegélyének elkészítéséhez 15 cm, 20 cm és 93 cm hosszúságú lécek állnak rendelkezésünkre. Az egyes lécfajták felszegeléséhez rendre 2, 3 és 9 szög kell. Mennyire van szükségünk a lécekből, ha 50 szegünk van, és ezeket mind fel is akarjuk használni?

2.23. feladat.(57) Egy tizenhéttagú kalózcsapat egy zsák aranypénzt lopott. Amikor megpróbálták egyenlően elosztani, azt tapasztalták, hogy három aranypénz kimaradt. A kimaradt aranyak fölötti vitában egy kalózt megöltek. Ezután újraosztották egyenlő arányban a zsákmányt, s most tíz arany maradt ki. Az e fölötti vitában egy újabb kalózt öltek meg, s ezután már el tudták osztani a lopott aranyat úgy, hogy mindenki ugyanannyit kapott. Legkevesebb hány aranypénzt zsákmányoltak? (Segítség: ez egy ókori kínai probléma.)

2.24. feladat.(58) Határozzuk meg a következő halmazok elemszámát.

(a) $\{x \in \mathbb{Z} : (\exists y \in \mathbb{Z})(7x - 3y = 13)$ és $10 \leqslant x \leqslant 30\}$,

(b) $\{y \in \mathbb{Z} : (\exists x \in \mathbb{Z})(13x - 20y = 7)$ és $20 \leqslant y \leqslant 40\}$.

2.25. feladat.(59) Oldja meg az alábbi kongruenciarendszereket.

(a) $\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{8} \\ x \equiv 6 \pmod{7} \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 1 \pmod{6} \\ x \equiv 7 \pmod{9} \end{cases}$

2.26. feladat.(60) Háromféle bélyeget vásároltunk. Az első alkalommal az egyes fajtákból rendre 3, 5 és 7 darabot, a második alkalommal 11, 13 és 9 darabot. A számla első alkalommal 110 Ft, a második alkalommal 250 Ft volt. Milyen címletű bélyegeket vásároltunk?

2.27. feladat.(61) Egy n-oldalú szabályos sokszög egyik csúcsában állok. A sokszög oldalainak hossza 1 mérföld, rajtam pedig hétmérföldes csizma van, így egy lépéssel a hetedik csúcsba jutok. Elindulok az egyik irányba, és addig meg se állok amíg vissza nem jutottam oda, ahonnan elindultam. Hány lépést fogok tenni? A csúcsok hányadrészét járom be?

2.28. feladat.(62) Bizonyos megfigyelések szerint a varjak mindig azonos létszámú rajokban vándorolnak. Ha 11 varjúraj oly módon száll le egy fára, hogy a fa minden ágára 4 varjú kerül, akkor végül egy varjú egyedül marad. Ha 12 varjúraj száll le egy fa ágaira hetes csoportokban, akkor szintén egy varjú egyedül lesz egy ágon. Míg ha 13 varjúraj kilences csoportokban száll le egy fa ágaira, akkor az utolsó ágon 7 varjú lesz. Hány varjú van egy rajban, ha tudjuk, hogy ez a szám nem több, mint 100?

2.29. feladat.(63) Kukutyinban 20 és 45 petákos érmék vannak forgalomban. Hogyan lehet ezekre felváltani 245 petákot? (Az összes megoldást adjuk meg.)

2.30. feladat.(64) Egy labdarúgó mérkőzésre azonos számú férőhellyel rendelkező buszokkal érkeznek a szurkolók, akiket biztonsági okokból kisebb csoportokban engednek be a stadionba. Ha a szurkolók 4 busszal érkeznek, és 5 fős csoportokban engedik be őket, akkor az utolsó csoportban csak 3 szurkoló marad. Ha 13 busszal érkeznek, és 8-as csoportokban nyernek bebocsátást, akkor szintén 3 szurkoló lesz az utoljára beengedett csoportban. Míg ha 16 busszal érkeznek szurkolók, és egyszerre 9-et léptetnek be, akkor végül 5 szurkoló marad. Hány személyesek a buszok, ha tudjuk, hogy egy buszba legfeljebb 100-an férnek, és a buszok minden esetben tele voltak?

♣♢♡♠

$\ulcorner \oplus \ominus \otimes \oslash \odot \urcorner$

3. feladatsor (Ítéletkalkulus)

3.1. feladat.$^{(65)}$ Formalizáljuk az alábbi ítéleteket, és határozzuk meg a logikai értéküket, ha a bennük szereplő összes változó logikai értéke hamis.

(a) Ha még egy ⋆⋆⋆ mondatot formalizálnom kell, akkor kitépem a hajamat, vagy megőrülök és utána tépem ki a hajamat.

(b) Megőrültem és pontosan akkor engednek haza, ha nem kell többet mondatokat formalizálnom, vagy ha bezárják az intézetet.

3.2. feladat.$^{(66)}$ Adjunk meg olyan formulát, vagy bizonyítsuk be, hogy nincs ilyen, amely csak az $\vee$ és $\wedge$ műveleteket tartalmazza, és melynek igazságtáblája a következő:

(a)

A	B	?
h	h	h
h	i	h
i	h	h
i	i	h

,

(b)

A	B	?
h	h	i
h	i	i
i	h	i
i	i	i

.

3.3. feladat.$^{(67)}$ Ekvivalensek-e az alábbi formulák?

(a) A és $(\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}) \vee (\mathsf{A} \wedge \neg\mathsf{B})$,

(b) $(\mathsf{A} \leftrightarrow (\neg\mathsf{B} \vee \mathsf{C})) \wedge (\mathsf{B} \rightarrow (\neg\mathsf{A} \wedge \mathsf{C}))$ és $(\neg\mathsf{B} \vee \mathsf{A}) \wedge (\neg\mathsf{B} \vee \mathsf{C})$.

3.4. feladat.$^{(68)}$ Az alábbi formulák közül melyek tautológiák?

(a) $\mathsf{A} \rightarrow (\mathsf{A} \wedge \mathsf{B})$, (b) $(\mathsf{A} \vee \mathsf{B}) \rightarrow ((\mathsf{A} \vee \neg\mathsf{B}) \rightarrow \mathsf{A})$, (c) $(\mathsf{A} \vee \mathsf{B}) \vee (\neg\mathsf{A} \vee \neg\mathsf{B})$.

3.5. feladat.$^{(69)}$ Formalizáljuk az alábbi ítéleteket, és határozzuk meg a logikai értéküket, ha a bennük szereplő összes változó logikai értéke hamis.

(a) Ha valami kutya, akkor állat, de ha valami állat, akkor az vagy kutya, vagy nem kutya.

(b) Egy állat pontosan akkor kutya, ha van négy lába, két füle és tud ugatni vagy néma.

3.6. feladat.$^{(70)}$ Formalizáljuk az alábbi ítéleteket, és határozzuk meg a logikai értéküket, ha a bennük szereplő összes változó logikai értéke hamis.

(a) Ha nem sikerül a diszkrét matematika gyakorlatom, akkor nem mehetek vizsgázni, és még szomorú is leszek.

(b) Ha sikerül a diszkrét matematika gyakorlatom, akkor pontosan akkor leszek szomorú, ha nem sikerül a vizsgám.

3.7. feladat.$^{(71)}$ Formalizáljuk az alábbi ítéleteket, és határozzuk meg a logikai értéküket, ha a bennük szereplő összes változó logikai értéke hamis.

(a) Ha valami elromolhat, akkor az el is romlik, vagy már elromlott, vagy én tévedek.

(b) Pontosan akkor tévedek, ha valami elromolhat, de még nem romlott el, és nem is fog elromlani.

3.8. feladat.$^{(72)}$ Adjuk meg az

$$\mathsf{F} = (\mathsf{A} \rightarrow (\neg\mathsf{B} \wedge \mathsf{C})) \vee (\mathsf{B} \leftrightarrow \neg\mathsf{A})$$

formula összes részformuláját és az igazságtáblázatát.

3.9. feladat.$^{(73)}$ Adjuk meg az

$$(\mathsf{A} \vee (\mathsf{B} \leftrightarrow \neg\mathsf{C})) \rightarrow (\mathsf{A} \wedge \neg\mathsf{C})$$

formula összes részformuláját és az igazságtáblázatát is.

3.10. feladat.$^{(74)}$ Formalizáljuk az alábbi ítéleteket, és határozzuk meg a logikai értéküket, ha a bennük szereplő összes változó logikai értéke hamis.

(a) Ha egy szelet kenyér egyik fele lekváros, és leejtjük, akkor a föld, vagy az asztal lekváros lesz.

(b) Pontosan akkor ejtünk le egy szelet kenyeret, ha vagy az egyik fele lekváros, vagy egyik fele sem lekváros, de ügyetlenek vagyunk.

3.11. feladat.(75) Adjunk meg olyan formulát, vagy bizonyítsuk be, hogy nincs ilyen, amely csak az $\wedge$ és $\neg$ műveleteket tartalmazza, és melynek igazságtáblája a következő:

(a)

A	B	?
h	h	i
h	i	i
i	h	i
i	i	i

,

(b)

A	B	?
h	h	i
h	i	h
i	h	h
i	i	i

.

3.12. feladat.(76) Formalizáljuk az alábbi ítéleteket, és határozzuk meg a logikai értéküket, ha a bennük szereplő összes változó logikai értéke hamis.

(a) Ha fáradt vagyok és nem tudok aludni, akkor inkább olvasok.

(b) Pontosan akkor hagyom abba az olvasást, ha időközben elalszok, vagy megunom a könyvet és nem találok jobbat.

3.13. feladat.(77) Adjuk meg a

$$(\mathsf{B} \wedge (\neg \mathsf{A})) \to (\mathsf{C} \leftrightarrow (\mathsf{A} \vee (\neg \mathsf{B})))$$

formula összes részformuláját és az igazságtáblázatát is.

3.14. feladat.(78) Ekvivalensek az alábbi formulák?

(a) $(\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}) \to \mathsf{C}$ és $\mathsf{A} \to (\mathsf{B} \to \mathsf{C})$,

(b) $(\mathsf{A} \to \mathsf{B}) \to ((\mathsf{A} \vee \mathsf{B}) \to (\mathsf{B} \vee \mathsf{C}))$ és $(\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}) \to \mathsf{A}$.

3.15. feladat.(79) Adjuk meg az

$$(\mathsf{A} \vee \mathsf{C}) \to ((\neg \mathsf{B}) \wedge (\mathsf{C} \leftrightarrow \mathsf{A}))$$

formula összes részformuláját és az igazságtáblázatát.

3.16. feladat.(80) Adjunk meg olyan formulát, vagy bizonyítsuk be, hogy nincs ilyen, amely csak az $\to$ és $\neg$ műveleteket tartalmazza, és melynek igazságtáblája a következő:

(a)

A	B	?
h	h	i
h	i	h
i	h	i
i	i	h

,

(b)

A	B	?
h	h	i
h	i	h
i	h	h
i	i	i

.

3.17. feladat.(81) Adjuk meg az

$$(\mathsf{A} \to (\mathsf{B} \vee (\neg \mathsf{C}))) \leftrightarrow ((\neg \mathsf{A}) \wedge \mathsf{B})$$

formula összes részformuláját és az igazságtáblázatát.

3.18. feladat.(82) Adjunk meg olyan formulát, vagy bizonyítsuk be, hogy nincs ilyen, amely csak az $\to$ és $\leftrightarrow$ műveleteket tartalmazza, és melynek igazságtáblája a következő:

(a)

A	B	?
h	h	h
h	i	i
i	h	i
i	i	i

,

(b)

A	B	?
h	h	h
h	i	i
i	h	i
i	i	h

.

3.19. feladat.(83) Ekvivalensek az alábbi formulák?

(a) $(\mathsf{A} \to \mathsf{B}) \leftrightarrow (\neg \mathsf{A})$ és $\mathsf{A} \wedge (\neg \mathsf{B})$,

(b) $(\mathsf{A} \to \mathsf{C}) \to ((\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}) \to (\mathsf{B} \wedge \mathsf{C}))$ és $\mathsf{A} \to (\mathsf{A} \vee \mathsf{C})$.

3.20. feladat.(84) Formalizáljuk az alábbi ítéleteket, és határozzuk meg a logikai értéküket, ha a bennük szereplő összes változó logikai értéke hamis.

(a) Ha esik az eső és nincs nálam esernyő, akkor vagy otthon maradok, vagy megázok.

(b) Csak akkor megyek boltba, ha nem esik az eső, vagy ha esik, de van nálam esernyő.

3.21. feladat.(85) Adjuk meg az

$$(\mathsf{A} \vee \mathsf{C}) \to ((\neg \mathsf{B}) \wedge (\mathsf{C} \leftrightarrow \mathsf{A}))$$

formula összes részformuláját és az igazságtáblázatát.

3.22. feladat.(86) Adjuk meg az

$$((\mathsf{A} \vee (\neg \mathsf{C})) \leftrightarrow \mathsf{B}) \wedge (\mathsf{C} \rightarrow (\neg \mathsf{A}))$$

formula összes részformuláját és az igazságtáblázatát.

3.23. feladat.(87) Adjuk meg az

$$((\mathsf{A} \rightarrow (\neg \mathsf{B}) \vee \mathsf{C})) \leftrightarrow ((\neg \mathsf{A}) \wedge \mathsf{C})$$

formula összes részformuláját és az igazságtáblázatát.

3.24. feladat.(88) Az alábbi formulák közül melyek tautológiák?

(a) $\mathsf{A} \leftrightarrow ((\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}) \vee (\mathsf{A} \wedge (\neg \mathsf{B})))$,

(b) $(\mathsf{A} \wedge (\neg \mathsf{A})) \leftrightarrow ((\neg (\mathsf{A} \rightarrow (\neg \mathsf{A}))) \wedge (\mathsf{B} \rightarrow (\neg \mathsf{C})))$.

3.25. feladat.(89) Adjuk meg az

$$(\mathsf{C} \wedge (\mathsf{A} \rightarrow (\neg \mathsf{B}))) \leftrightarrow ((\neg \mathsf{A}) \vee \mathsf{B})$$

formula összes részformuláját és az igazságtáblázatát.

3.26. feladat.(90) Formalizáljuk az alábbi ítéleteket, és határozzuk meg a logikai értéküket, ha a bennük szereplő összes változó logikai értéke hamis.

(a) Ki kell találnom még formalizálandó mondatokat, vagy kirúgnak az állásomból, és mehetek utcát söpörni.

(b) Szeretek utcát söpörni, de mondatokat formalizálni csak akkor szeretek, ha nincs más választásom.

3.27. feladat.(91) Az alábbi formulák közül melyek tautológiák?

(a) $(\mathsf{A} \rightarrow \mathsf{B}) \leftrightarrow ((\neg \mathsf{A}) \vee \mathsf{B})$,

(b) $(((\neg \mathsf{A}) \rightarrow (\mathsf{A} \wedge \mathsf{B})) \wedge \mathsf{C}) \leftrightarrow ((\mathsf{A} \leftrightarrow \mathsf{C}) \wedge \mathsf{A})$.

3.28. feladat.(92) Formalizáljuk az alábbi ítéleteket, és határozzuk meg a logikai értéküket, ha a bennük szereplő összes változó logikai értéke hamis.

(a) Gyakorlatra járni rosszabb, mint fagyizni, de ha nem járunk gyakorlatra, akkor megbukunk.

(b) Ha megbukunk, akkor nem kapunk diplomát, és ha nincs már most sok pénzünk, akkor nem fogunk tudni miből fagyit venni.

$\ulcorner \oplus \ominus \otimes \oslash \odot \urcorner$

4. feladatsor (Predikátumkalkulus)

4.1. feladat.(93) Állapítsuk meg, logikailag helyes-e az alábbi következtetés, vagyis hogy az (1)-beli állításokból következik-e a (2) állítás.

(1) Ha nem esik az eső, nem húzom fel az esernyőmet. Csak akkor húzom fel az esernyőmet, ha nálam van, és esik. Ha esik az eső, akkor van nálam esernyő.

(2) Tehát, ha esik az eső, akkor felhúzom az esernyőmet.

4.2. feladat.(94) Legyen Q egyváltozós predikátumjel, P kétváltozós predikátumjel, f kétváltozós műveleti jel és a individuumkonstans. Adjuk meg a

$$(\exists x)\Big(P\big(f(y,a),x\big)\wedge\neg Q(a)\Big)\leftrightarrow(\forall y)\Big(P\big(f(x,a),y\big)\Big)$$

formula részkifejezéseit és részformuláit. Melyek a szabad, illetve a kötött változók?

4.3. feladat.(95) Legyen az individuumtartomány az egész számok halmaza, és vezessük be az alábbi műveleteket, predikátumokat, illetve konstansot:

$$f(x,y)=xy,\quad O(x,y)\colon x \text{ osztja } y\text{-t},\quad E(x,y)\colon x=y,\quad c=17.$$

Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak (indoklással együtt):

(a) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)\Big(O(x,y)\leftrightarrow E\big(y,f(x,z)\big)\Big)$,

(b) $(\forall x)(\forall y)\Big(\big(O(x,y)\wedge O(y,x)\big)\to E(x,y)\Big)$,

(c) $(\forall x)(\exists y)E(f(x,y),c)$.

4.4. feladat.(96) Legyen az individuumtartomány az egész számok halmaza és definiáljuk a következő predikátumokat:

$$P(a,b)\colon a\leqslant b,\quad E(a,b)\colon a=b.$$

Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak (indoklással együtt):

(a) $(\forall x)P(x,x)$,

(b) $(\forall x)(\forall y)\big(P(x,y)\to P(y,x)\big)$,

(c) $(\forall x)(\forall y)\Big(\big(P(x,y)\wedge P(y,x)\big)\to E(x,y)\Big)$,

(d) $(\forall x)(\forall y)\big(P(x,y)\vee P(y,x)\big)$.

4.5. feladat.(97) Legyen az individuumtartomány az egész számok halmaza, és vezessük be az alábbi műveleteket, predikátumokat, illetve konstansot:

$$f(x,y)=xy,\quad g(x,y)=x+y,\quad O(x,y)\colon x \text{ osztja } y\text{-t},\quad E(x,y)\colon x=y,\quad c=17.$$

Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak (indoklással együtt):

(a) $(\exists x)(\forall y)(\forall z)\Big(O\big(x,f(y,z)\big)\to\big(O(x,y)\vee O(x,z)\big)\Big)$,

(b) $(\exists x)(\exists y)\Big(\neg E(x,y)\wedge O(x,y)\wedge O(y,x)\wedge O\big(x,g(x,y)\big)\Big)$,

(c) $(\exists x)(\exists y)\Big(\neg O(x,y)\wedge E\big(x,f(y,y)\big)\Big)$.

4.6. feladat.(98) Állapítsuk meg, logikailag helyes-e az alábbi következtetés, vagyis hogy az (1)-beli állításokból következik-e a (2) állítás.

(1) A $\sqrt{2}$ szám valós szám vagy racionális, vagy irracionális. Ha $\sqrt{2}$ racionális, akkor $(\sqrt{2})^2$ is racionális. Vagy $\sqrt{2}$, vagy $(\sqrt{2})^2$ nem racionális.

(2) Tehát $\sqrt{2}$ irracionális.

4.7. feladat.(99) Legyen az individuumtartomány az $A=\{1,2,3,4,5\}$ halmaz, és legyen f az az egyváltozós művelet A-n, melyre

$$f(1)=3,\quad f(2)=2,\quad f(3)=1,\quad f(4)=2,\quad f(5)=3.$$

Továbbá definiáljuk a következő predikátumokat:

$$Q(x)\colon x \text{ páros},\quad E(x,y)\colon x=y.$$

Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak (indoklással együtt):

(a) $(\forall x)(\exists y)E(f(x),y)$, (b) $(\forall x)(\exists y)E(f(y),x)$, (c) $(\exists x)(\forall y)E(f(x),y)$,

(d) $(\exists x)(\forall y)E(f(y),x)$, (e) $(\forall x)\big(Q(x)\leftrightarrow Q(f(x))\big)$.

4.8. feladat.[100] Állapítsuk meg, logikailag helyes-e az alábbi következtetés, vagyis hogy az (1)-beli állításokból következik-e a (2) állítás.

(1) Ha esik az eső és süt a nap, akkor szivárvány lesz. Ha nem süt a nap, akkor vagy esik az eső, vagy köd van. Csak akkor lehet szivárvány, ha süt a nap.

(2) Tehát, ha szivárvány van, akkor nincs köd.

4.9. feladat.[101] Adjuk meg a következő formulák teljes diszjunktív normálformáját.

(a) $A\vee(\neg A\to B)$, (b) $(A\wedge\neg C)\leftrightarrow(\neg B\vee C)$.

4.10. feladat.[102] Adjuk meg a következő formulák teljes diszjunktív normálformáját.

(a) $A\to(\neg A\vee B)$, (b) $(A\wedge\neg B)\leftrightarrow(\neg A\vee C)$.

4.11. feladat.[103] Legyen Q egyváltozós, P kétváltozós predikátumjel, f kétváltozós műveleti jel és a individuumkonstans. Adjuk meg a

$$(\forall x)P(f(x,a),x)\to(\exists y)\big(P(f(y,x),y)\wedge Q(x)\big)$$

formula részkifejezéseit és részformuláit. Melyek a szabad, illetve a kötött változók?

4.12. feladat.[104] Állapítsuk meg, logikailag helyes-e az alábbi következtetés, vagyis hogy az (1)-beli állításokból következik-e a (2) állítás.

(1) Ha 2 prímszám, akkor 2 a legkisebb prímszám. Ha 2 a legkisebb prímszám, akkor az 1 nem prímszám. Az 1 nem prímszám.

(2) Tehát a 2 prímszám.

4.13. feladat.[105] Legyen az individuumtartomány az emberek halmaza, a predikátumok, műveletek és individuumkonstansok a következők:

$S(x)$: x szomorú, e: én, $E(x,y)$: x az y ellensége, $B(x,y)$: x az y barátja.

Formalizáljuk predikátumkalkulusban az alábbi ítéleteket.

(a) Senki sem szomorú.

(b) Nem vagyok szomorú.

(c) Van olyan ember, akinek senki sem ellensége.

(d) Van olyan ember, akinek nincs barátja, mégsem szomorú.

(e) Van olyan ellenségem, akinek nem minden ellensége a barátom.

(f) Mindenkinek van olyan barátja, aki nem az ellenségem.

4.14. feladat.[106] Legyen az individuumtartomány az emberek halmaza, a predikátumok, műveletek és individuumkonstansok a következők:

$H(x)$: „x hallgató”, $V(x)$: „x felkészült a vizsgára”, $C(x,y)$: „x csoporttársa y-nak”, p: „Péter”.

Formalizáljuk predikátumkalkulusban az alábbi ítéleteket.

(a) Néhány hallgató nem készült fel a vizsgára.

(b) Péter hallgató.

(c) Hallgatók csoporttársai is hallgatók.

(d) Péter összes csoporttársa felkészült a vizsgára.

(e) A vizsgára pontosan Péter csoporttársai készültek fel.

(f) Van olyan hallgató, akinek semelyik csoporttársa sem készült fel a vizsgára.

4.15. feladat.[107] Legyen az individuumtartomány az egész számok halmaza, és vezessük be az alábbi műveleteket és predikátumot:

$$f(x,y) = x+y, \quad g(x,y) = xy, \quad P(x)\colon \text{„}x \text{ páros”}.$$

Döntsük el, hogy az

(a) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\big(f(x, g(y,z)) = f(g(x,y), g(x,z))\big)$,

(b) $(\forall x)(\exists y)(\forall z)\big(f(x,y) = z\big)$,

(c) $(\forall x)\Big(\neg P(x) \to (\forall y)\big(P(y) \vee P(f(x,y))\big)\Big)$.

állítások közül melyek igazak (indoklással együtt).

4.16. feladat.[108] Legyen az individuumtartomány az emberek halmaza, a predikátumok, műveletek és individuumkonstansok a következők:

$H(x)$: „x hallgató”, $V(x)$: „x felkészült a vizsgára”, $C(x,y)$: „x csoporttársa y-nak”, p: „Péter”.

Formalizáljuk predikátumkalkulusban az alábbi ítéleteket.

(a) Minden hallgató felkészült a vizsgára.

(b) Péter nem hallgató.

(c) Van olyan hallgató, akinek van nem hallgató csoporttársa.

(d) Péternek van olyan csoporttársa, aki nem készült fel a vizsgára.

(e) A vizsgára pontosan Péter csoporttársai készültek fel.

(f) Minden hallgatónak van olyan csoporttársa, aki felkészült a vizsgára.

4.17. feladat.[109] Legyen az individuumtartomány az emberek halmaza, a predikátumok, műveletek és individuumkonstansok a következők:

$S(x)$: „x szomorú”, e: „én”, $E(x,y)$: „x az y ellensége”, $B(x,y)$: „x az y barátja”.

Formalizáljuk predikátumkalkulusban az alábbi ítéleteket.

(a) Van, aki szomorú.

(b) Szomorú vagyok.

(c) Mindenkinek vannak ellenségei.

(d) Akinek nincs barátja, az szomorú.

(e) Az ellenségem ellensége a barátom.

(f) Van olyan ember, akinek minden barátja az ellenségem.

4.18. feladat.[110] Legyen az individuumtartomány a **pozitív** egész számok halmaza, és definiáljuk a következő predikátumokat:

$$P(a,b)\colon a \mid b, \quad E(a,b)\colon a = b.$$

Döntsük el, hogy az

(a) $(\forall x)P(x,x)$,

(b) $(\forall x)(\forall y)\big(P(x,y) \to P(y,x)\big)$,

(c) $(\forall x)(\forall y)\Big(\big(P(x,y) \wedge P(y,x)\big) \to E(x,y)\Big)$,

(d) $(\forall x)(\forall y)\big(P(x,y) \vee P(y,x)\big)$.

állítások közül melyek igazak (indoklással együtt).

4.19. feladat.[111] Legyen az individuumtartomány az $A = \{1,2,3,4,5\}$ halmaz és legyen f az az egyváltozós művelet A-n, melyre $f(1) = 3$, $f(2) = 2$, $f(3) = 1$, $f(4) = 2$, $f(5) = 3$ teljesül. Továbbá, definiáljuk a következő predikátumokat:

$$P(a,b)\colon a+b=5, \quad Q(x)\colon \text{„}x \text{ páros”}, \quad E(x,y)\colon x=y.$$

Döntsük el, hogy az

(a) $(\forall x)(\forall y)\big(\neg E(x,y) \to \neg E(f(x), f(y))\big)$,

(b) $(\exists x)(\forall y)\big(\neg E(f(y), x)\big)$,

(c) $(\forall x)(\forall y)\Big(P(x,y) \to \big(Q(x) \leftrightarrow \neg Q(y)\big)\Big)$,

(d) $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$.

állítások közül melyek igazak (indoklással együtt)

4.20. feladat.[112] Állapítsuk meg, logikailag helyes-e az alábbi következtetés, vagyis hogy az (1)-beli állításokból következik-e a (2) állítás.

(1) Sári és Béla azonos korú, vagy Sári idősebb Bélánál. Ha Sári és Béla azonos korúak, akkor Nelli és Béla nem azonos korúak. Ha Sári idősebb Bélánál, akkor Béla idősebb Tibornál.

(2) Tehát Nelli és Béla nem azonos korúak, vagy Béla idősebb Tibornál.

$\oplus \ominus \otimes \oslash \odot$

5. feladatsor (Halmazok)

A feladatsorban $\underline{n}$ jelöli az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazt. Tekintsük a $\underline{4} = \{1, 2, 3, 4\}$ halmaz következő kétváltozós predikátumait:

P	1	2	3	4
1	i	i	i	h
2	h	i	i	h
3	h	h	h	i
4	h	i	h	i

,

Q	1	2	3	4
1	i	i	i	h
2	h	i	i	i
3	h	h	i	i
4	i	h	h	i

,

R	1	2	3	4
1	h	h	i	i
2	h	i	h	h
3	i	h	i	i
4	i	h	i	h

.

5.1. feladat.[113] Adjuk meg a következő halmazok elemeit:

(a) $\{a \in \underline{4} : (\exists x \in \underline{4})(Q(a, x) \land Q(x, x))\}$,

(b) $\{a \in \underline{4} : (\forall x \in \underline{4})(\exists y \in \underline{4})(Q(a, x) \to (Q(x, y) \land Q(y, a)))\}$.

5.2. feladat.[114] Adjuk meg a következő halmazok elemeit:

(a) $\{A \in \mathcal{P}(\underline{4}) : (\forall a \in A)P(a, 2)\}$, (b) $\{A \in \mathcal{P}(\underline{4}) : (\forall a \in A)(\exists b \in A)P(a, b)\}$.

5.3. feladat.[115] Adjuk meg a következő halmazok elemeit:

(a) $\{a \in \underline{4} : (\forall x \in \underline{4})(R(x, a) \to R(x, x))\}$,

(b) $\Big\{a \in \underline{4} : (\exists x \in \underline{4})(\forall y \in \underline{4})\Big(R(a, x) \land \big(R(x, y) \lor R(y, x)\big)\Big)\Big\}$.

5.4. feladat.[116] Legyen $A = \{1, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 5, 6\}$, $C = \{1, 3, 6\}$. Adjuk meg a következő halmazokat:

(a) $\overline{A} \cap (B \triangle C)$, (b) $A \setminus (\overline{B} \cup C)$, (c) $(A \setminus \overline{C}) \cup (C \setminus \overline{B})$.

5.5. feladat.[117] Adjuk meg a következő halmazok elemeit:

(a) $\{a \in \underline{4} : (\exists x \in \underline{4})(R(a, x) \land R(x, x))\}$,

(b) $\Big\{a \in \underline{4} : (\forall x \in \underline{4})(\exists y \in \underline{4})\Big(R(a, x) \to \big(R(x, y) \land R(y, a)\big)\Big)\Big\}$.

5.6. feladat.[118] Legyen $A = \{1, 3, 4, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{1, 2, 3, 4\}$. Adjuk meg a következő halmazokat:

(a) $\overline{A} \cap (B \triangle C)$, (b) $A \setminus (\overline{B} \cup C)$, (c) $(A \setminus \overline{C}) \cup (C \setminus \overline{B})$.

5.7. feladat.[119] Legyen $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{1, 4, 5\}$. Adjuk meg a következő halmazokat:

(a) $\overline{A} \cap (B \triangle C)$, (b) $A \setminus (\overline{B} \cup C)$, (c) $(A \setminus \overline{C}) \cup (C \setminus \overline{B})$.

5.8. feladat.[120] Adjuk meg a következő halmazok elemeit:

(a) $\big\{a \in \overline{4} : (\exists x \in \overline{4})(P(a, x) \land P(x, x))\big\}$,

(b) $\Big\{a \in \overline{4} : (\forall x \in \overline{4})(\forall y \in \overline{4})\Big(P(a, x) \to \big(P(x, y) \land P(y, a)\big)\Big)\Big\}$.

5.9. feladat.[121] Adjuk meg a következő halmazok elemeit:

(a) $\big\{a \in \overline{4} : (\forall x \in \overline{4})\big(Q(x, a) \to Q(x, x)\big)\big\}$,

(b) $\Big\{a \in \overline{4} : (\exists x \in \overline{4})(\forall y \in \overline{4})\Big(Q(a, x) \land \big(Q(x, y) \lor Q(y, x)\big)\Big)\Big\}$.

5.10. feladat.[122] Adjuk meg a következő halmazok elemeit:

(a) $\big\{(a, b) \in \overline{4} \times \overline{4} : (\exists x \in \overline{4})\big(Q(a, x) \land Q(x, b)\big)\big\}$,

(b) $\big\{(a, b) \in \overline{4} \times \overline{4} : (\forall x \in \overline{4})\big(Q(a, x) \to Q(b, x)\big)\big\}$.

5.11. feladat.[123] Legyen $A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 6\}$, $C = \{1, 2, 3, 5\}$. Adjuk meg a következő halmazokat:

(a) $\overline{A} \cap (B \triangle C)$, (b) $A \setminus (\overline{B} \cap C)$, (c) $(A \setminus \overline{C}) \cup (C \setminus \overline{B})$.

5.12. feladat.[124] Adjuk meg a következő halmazok elemeit:

(a) $\{A \in \mathcal{P}(\underline{4}) : (\forall a \in A)Q(a, 2)\}$, (b) $\{A \in \mathcal{P}(\underline{4}) : (\forall a \in A)(\exists b \in A)Q(a, b)\}$.

5.13. feladat.[125] Adjuk meg a következő halmazok elemeit:

(a) $\{a \in \underline{4} : (\forall x \in \underline{4})(P(x, a) \to P(x, x))\}$,

(b) $\left\{a \in \underline{4} : (\exists x \in \underline{4})(\forall y \in \underline{4})\Big(P(a,x) \wedge \big(P(x,y) \vee P(y,x)\big)\Big)\right\}$.

5.14. feladat.[126] Adjuk meg a következő halmazok elemeit:

(a) $\{A \in \mathcal{P}(\underline{4}) : (\forall a \in A)P(a,a)\}$, (b) $\{A \in \mathcal{P}(\underline{4}) : (\forall a \in A)(\forall b \in A)P(a,b)\}$.

5.15. feladat.[127] Adjuk meg a következő halmazok elemeit:

(a) $\{A \in \mathcal{P}(\underline{4}) : (\forall a \in A)R(a,a)\}$, (b) $\{A \in \mathcal{P}(\underline{4}) : (\forall a \in A)(\forall b \in A)R(a,b)\}$.

5.16. feladat.[128] Adjuk meg a következő halmazok elemeit:

(a) $\{(a,b) \in \underline{4} \times \underline{4} : (\exists x \in \underline{4})(P(a,x) \wedge P(x,b))\}$, (b) $\{(a,b) \in \underline{4} \times \underline{4} : (\forall x \in \underline{4})(P(a,x) \rightarrow P(b,x)\}$.

5.17. feladat.[129] Adjuk meg a következő halmazok elemeit:

(a) $\{(a,b) \in \underline{4} \times \underline{4} : (\exists x \in \underline{4})(R(a,x) \wedge R(x,b))\}$, (b) $\{(a,b) \in \underline{4} \times \underline{4} : (\forall x \in \underline{4})(R(a,x) \rightarrow R(b,x))\}$.

$\ulcorner \oplus \ominus \otimes \oslash \odot \urcorner$

6. feladatsor (Halmazok, megfeleltetések, leképezések)

A feladatsorban $\mathbb{R}^+$, illetve $\mathbb{R}^-$ jelöli a pozitív, illetve negatív valós számok halmazát. Az $\{1, 2, \dots\}$ halmazt $\mathbb{N}$ jelöli, tetszőleges n természetes számra pedig $\underline{n}$ jelöli az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazt. A feladatsorban $a \pmod m$ az a egász szám nemnegatív maradékát jelöli m-mel osztva ($m \in \mathbb{N}$).

6.1. feladat.(130) Legyen

$$\alpha = \{(2,3),(2,1),(1,5),(4,4),(3,2)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{5},$$
$$\beta = \{(1,4),(5,3),(4,2),(3,2),(1,3),(2,4)\} \subseteq \underline{5} \times \underline{4}.$$

(a) Határozzuk meg az $\alpha\beta$ és α^{-1} megfeleltetéseket.

(b) Határozzuk meg α értelmezési tartományát és értékkészletét.

(c) Döntsük el, hogy α, β, illetve α^{-1} leképezés-e.

6.2. feladat.(131) Döntsük el a következő leképezésekről, hogy injektívek, szürjektívek, illetve bijektívek-e.

(a) $\varphi_1 = \{(1,4),(2,3),(5,3),(6,1),(3,3),(4,4)\} \subseteq \underline{6} \times \underline{4}$,

(b) $\varphi_2 = \{(1,4),(4,2),(3,1),(2,2)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{6}$,

(c) $\varphi_3 = \{(1,5),(2,3),(5,4),(3,1),(4,2)\} \subseteq \underline{5} \times \underline{5}$.

6.3. feladat.(132) Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra fennállnak az alábbi egyenlőségek:

(a) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$,

(b) $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$,

(c) $A \triangle (A \triangle B) = B$.

6.4. feladat.(133) Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra fennállnak az alábbi egyenlőségek:

(a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$,

(b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,

(c) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

6.5. feladat.(134) Határozzuk meg az α és β leképezések $\alpha\beta$ és $\beta\alpha$ szorzatait.

(a) $\alpha\colon \underline{7} \to \underline{3},\ x \mapsto x \pmod 3 + 1$, $\beta\colon \underline{4} \to \underline{7},\ x\beta = x \pmod 7 + 1$,

(b) $\alpha = \{(1,1),(2,3),(3,1),(4,3),(5,2),(6,4)\} \subseteq \underline{6} \times \underline{4}$,

$$\beta\colon \underline{4} \to \underline{6},\ x\beta = \begin{cases} x-1, & \text{ha } x \text{ páros,} \\ x+2, & \text{ha } x \text{ páratlan.} \end{cases}$$

6.6. feladat.(135) Legyen

$$\alpha = \{(1,2),(2,3),(4,1),(2,5),(1,1)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{5},$$
$$\beta = \{(5,2),(4,1),(3,2),(2,1),(1,4)\} \subseteq \underline{5} \times \underline{4}.$$

(a) Határozzuk meg az $\alpha\beta$ és α^{-1} megfeleltetéseket.

(b) Határozzuk meg α értelmezési tartományát és értékkészletét.

(c) Döntsük el, hogy α, β, illetve α^{-1} leképezés-e.

6.7. feladat.(136) Döntsük el, hogy a megadott részhalmazok előállnak-e $A \times B$ alakban alkalmasan megválasztott A és B halmazokkal.

(a) $\{(x, y) : x = 2, y \text{ tetszőleges}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

(b) $\{(x, y) : x - y \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

(c) $\{(1,2),(2,3),(1,3),(2,2)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{4}$.

6.8. feladat.(137) Legyen

$$\alpha = \{(2,3),(2,1),(4,4),(3,2)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{5},$$
$$\beta = \{(1,4),(5,3),(2,1),(4,2),(3,1),(1,3),(2,4)\} \subseteq \underline{5} \times \underline{4}.$$

(a) Határozzuk meg az $\alpha\beta$ és α^{-1} megfeleltetéseket.
(b) Határozzuk meg α értelmezési tartományát és értékkészletét.
(c) Döntsük el, hogy α, β, illetve α^{-1} leképezés-e.

6.9. feladat.(138) Legyen

$$\alpha = \{(2,3),(1,5),(3,4),(4,2)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{5},$$
$$\beta = \{(5,1),(2,3),(1,3),(4,2),(3,1),(2,4)\} \subseteq \underline{5} \times \underline{4}.$$

(a) Határozzuk meg az $\alpha\beta$ és α^{-1} megfeleltetéseket.
(b) Határozzuk meg α értelmezési tartományát és értékkészletét.
(c) Döntsük el, hogy α, β, illetve α^{-1} leképezés-e.

6.10. feladat.(139) Döntsük el, hogy a megadott részhalmazok előállnak-e $A \times B$ alakban alkalmasan megválasztott A és B halmazokkal.

(a) $\{(x,y) : 2 \leqslant x < 3, -1 < y < 2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
(b) $\left\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\right\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
(c) $\{(1,2),(1,3),(2,3)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{4}$.

6.11. feladat.(140) Adjuk meg az összes, $\underline{3}$-ból az $\{a,b,c\}$ halmazba menő bijektív leképezést.

6.12. feladat.(141) Döntsük el a következő leképezésekről, hogy injektívek, szürjektívek, illetve bijektívek-e.

(a) $\varphi_1 = \{(1,2),(2,3),(5,3),(6,1),(3,3),(4,1)\} \subseteq \underline{6} \times \underline{4}$,
(b) $\varphi_2 = \{(1,4),(4,2),(3,1),(2,5)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{6}$,
(c) $\varphi_3 = \{(1,5),(2,3),(5,2),(3,1),(4,2)\} \subseteq \underline{5} \times \underline{5}$.

6.13. feladat.(142) Mutassuk meg, hogy tetszőleges A és B halmazokra

(a) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$,
(b) $\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Adjunk meg olyan A és B halmazokat, amelyekre $\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ teljesül.

6.14. feladat.(143) Adjuk meg az összes, $\underline{3}$-ból $\underline{2}$-be menő injektív, illetve szürjektív leképezést.

6.15. feladat.(144) Határozzuk meg az α és β leképezések $\alpha\beta$ és $\beta\alpha$ szorzatait.

(a) $\alpha\colon \underline{6} \to \underline{4},\ x \mapsto x \pmod 4 + 1$, $\quad\beta\colon \underline{4} \to \underline{6},\ x\beta = x \pmod 6 + 1$,
(b) $\alpha = \{(1,2),(2,4),(3,3),(4,1),(5,2),(6,3)\} \subseteq \underline{6} \times \underline{4}$,

$$\beta\colon \underline{4} \to \underline{6},\ x\beta = \begin{cases} x+2, & \text{ha } x \text{ páros,} \\ x, & \text{ha } x \text{ páratlan.} \end{cases}$$

6.16. feladat.(145) Adjuk meg az összes, $\underline{2}$-ből $\underline{3}$-ba menő injektív, illetve szürjektív leképezést.

⌜ ⊕ ⊖ ⊗ ⊘ ⊙ ⌟

7. feladatsor (Leképezések, relációk)

A feladatsorban $\mathbb{R}^+$, illetve $\mathbb{R}^-$ jelöli a pozitív, illetve negatív valós számok halmazát. Az $\{1, 2, \dots\}$ halmazt $\mathbb{N}$ jelöli, $\underline{n}$ pedig az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazt.

7.1. feladat.(146) Legyen

$$\alpha = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(2,3)\} \subseteq \underline{3} \times \underline{3}.$$

Döntsük el, hogy a következő formulák közül melyek teljesülnek α-ra (az individuumtartomány $\underline{3}$).

(a) $(\exists x)(\forall y)\big((y,x) \in \alpha\big)$,
(b) $(\exists x)(\forall y)\big((x,y) \in \alpha\big)$,
(c) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)\Big(\big((x,y) \in \alpha\big) \to \big((x,z) \in \alpha \wedge (z,y) \in \alpha\big)\Big)$.

7.2. feladat.(147) Határozzuk meg az α és β megfeleltetések $\alpha\beta$ szorzatát.

(a) $\alpha = \left\{(x,y) : x = y^2\right\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\quad\beta = \left\{(x,y) : x^2 = y\right\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
(b) $\alpha = \{(x,y) : x \leqslant y\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, $\quad\beta = \{(x,y) : |x-y| < 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$.

7.3. feladat.(148) Döntsük el, hogy az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmaz alábbi részhalmazai előállnak-e $A \times B$ alakban alkalmasan megválasztott A és B halmazokkal.

(a) $\{(x,y) : 2 \leqslant x < 3, -1 < y < 2\}$,
(b) $\left\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\right\}$,
(c) $\{(x,y) : x = 2 \text{ és } y \text{ tetszőleges}\}$,
(d) $\{(x,y) : x - y \in \mathbb{Z}\}$.

7.4. feladat.(149) Döntsük el a következő leképezésekről, hogy injektívek, szürjektívek, illetve bijektívek-e.

(a) $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto |x+3| - 1$,
(b) $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x^3 - 8}{7}$,
(c) $\gamma\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N},\ \dfrac{p}{q} \mapsto p+q$, ahol $p, q \in \mathbb{N},\ (p,q) = 1$,
(d) $\delta\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N},\ \dfrac{p}{q} \mapsto p$, ahol $p, q \in \mathbb{N},\ (p,q) = 1$.

7.5. feladat.(150) Adjuk meg a következő bijektív leképezések inverzét.

(a) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \dfrac{3x-8}{5}$,
(b) $\beta\colon \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto x^2$,
(c) $\gamma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x\gamma = \begin{cases} x-1, & \text{ha } x \text{ páros,} \\ x+1, & \text{ha } x \text{ páratlan.} \end{cases}$

7.6. feladat.(151) Legyen

$$\alpha = \{(1,1),(2,3),(3,2),(2,2),(3,3)\} \subseteq \underline{3} \times \underline{3}.$$

Döntsük el, hogy a következő formulák közül melyek teljesülnek α-ra (az individuumtartomány $\underline{3}$).

(a) $(\forall x)\big((x,x) \in \alpha\big)$,
(b) $(\forall x)(\forall y)\Big(\big((x,y) \in \alpha\big) \to \big((y,x) \in \alpha\big)\Big)$,
(c) $(\forall x)(\forall y)\bigg(\Big(\big((x,y) \in \alpha\big) \wedge \big((y,x) \in \alpha\big)\Big) \to x = y\bigg)$.

7.7. feladat.(152) Határozzuk meg az α és β megfeleltetések $\alpha\beta$ szorzatát.

(a) $\alpha = \left\{(x,y) : x = y^2\right\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\quad\beta = \{(x,y) : y = 2x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
(b) $\alpha = \{(x,y) : |x-y| < 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, $\quad\beta = \{(x,y) : x \leqslant y\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$.

7.8. feladat.(153) Határozzuk meg az alábbi megfeleltetések értelmezési tartományát és értékkészletét. Melyek leképezések közülük?

(a) $\left\{(x,y) : y^3 = x\right\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, (b) $\left\{(x,y) : y^2 = x\right\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, (c) $\left\{(x,y) : y^2 = x\right\} \subseteq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$.

7.9. feladat.(154) Döntsük el, hogy injektív, szürjektív, illetve bijektív-e a

$$\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n\varphi = \begin{cases} n - 10, & \text{ha } n > 10, \\ 1, & \text{ha } n \leqslant 10 \end{cases}$$

leképezés. Adjuk meg a φ^2 leképezést.

7.10. feladat.[155] Legyen

$$\alpha = \{(1,1),(2,3),(3,3),(1,3)\} \subseteq \underline{3} \times \underline{3}.$$

Döntsük el, hogy a következő formulák közül melyek teljesülnek α-ra (az individuumtartomány $\underline{3}$).

(a) $(\forall x)\big((x,x) \in \alpha\big)$,

(b) $(\forall x)(\forall y)\Big(\big((x,y) \in \alpha\big) \rightarrow \big((y,x) \in \alpha\big)\Big)$,

(c) $(\forall x)(\forall y)\bigg(\Big(\big((x,y) \in \alpha\big) \wedge \big((y,x) \in \alpha\big)\Big) \rightarrow x = y\bigg)$.

7.11. feladat.[156] Határozzuk meg az alábbi megfeleltetések értelmezési tartományát és értékkészletét. Melyek leképezések közülük?

(a) $\big\{(x,y) : y^3 = x\big\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, (b) $\{(x,y) : |y| = x\} \subseteq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, (c) $\{(x,y) : |y| = x\} \subseteq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$.

7.12. feladat.[157] Legyen

$$\alpha = \{(1,2),(2,3),(1,3)\} \subseteq \underline{3} \times \underline{3}.$$

Döntsük el, hogy a következő formulák közül melyek teljesülnek α-ra (az individuumtartomány $\underline{3}$).

(a) $(\forall x)\big((x,x) \in \alpha\big)$,

(b) $(\forall x)(\forall y)\bigg(\Big(\big((x,y) \in \alpha\big) \rightarrow \big((y,x) \in \alpha\big)\Big) \rightarrow x = y\bigg)$,

(c) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\bigg(\Big(\big((x,y) \in \alpha\big) \wedge \big((y,z) \in \alpha\big)\Big) \rightarrow \big((x,z) \in \alpha\big)\bigg)$.

7.13. feladat.[158] Döntsük el a következő leképezésekről, hogy injektívek, szürjektívek, illetve bijektívek-e.

(a) $\alpha\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ x \mapsto |x| + 1$,

(b) $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{3x-8}{7}$,

(c) $\gamma\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N},\ \dfrac{p}{q} \mapsto 2^p 3^q$, ahol $p, q \in \mathbb{N},\ (p,q) = 1$,

(d) $\delta\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N},\ \dfrac{p}{q} \mapsto q$, ahol $p, q \in \mathbb{N},\ (p,q) = 1$.

7.14. feladat.[159] Adjuk meg a következő bijektív leképezések inverzét.

(a) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \dfrac{8x-3}{7}$,

(b) $\beta\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^-,\ x \mapsto -x^2$.

7.15. feladat.[160] Döntsük el, hogy injektív, szürjektív, illetve bijektív-e a

$$\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n\varphi = \begin{cases} 6n+1, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ 6n-1, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

leképezés. Adjuk meg a φ^2 leképezést.

$\oplus \ominus \otimes \oslash \odot$

8. feladatsor (Permutációk)

A feladatsorban $\mathbb{R}^+$, illetve $\mathbb{R}^-$ jelöli a pozitív, illetve negatív valós számok halmazát. Az $\{1, 2, \ldots\}$ halmazt $\mathbb{N}$ jelöli, $[n]$ pedig az $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ halmazt.

8.1. feladat.(161) Oldjuk meg a következő egyenleteket (a megoldást páronként idegen ciklusokra bontott alakban kérjük).

(a) $\pi(1\ 2\ 3\ 4) = (3\ 4\ 1)(2\ 5\ 7)$, (b) $(4\ 5\ 6)\pi(6\ 5\ 4) = (4\ 5\ 7)(1\ 6\ 2\ 3)$.

8.2. feladat.(162) Adjuk meg a következő permutációkat páronként idegen ciklusokra bontott alakban, valamint döntsük el, hogy párosak, illetve páratlanok-e.

(a) $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)^3$, (b) $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)^{6600}$, (c) $\left((1\ 2\ 3)(4\ 2\ 5)^{-1}(6\ 7\ 2\ 1)\right)^{340}$.

8.3. feladat.(163) Adjuk meg a következő permutációkat páronként idegen ciklusokra bontott alakban, valamint döntsük el, hogy párosak, illetve páratlanok-e.

(a) $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)^6$, (b) $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)^{5000}$, (c) $\left((1\ 2\ 3)(4\ 5\ 1)^{-1}(3\ 6\ 7\ 1)\right)^{342}$.

8.4. feladat.(164) Oldjuk meg a következő egyenleteket (a megoldást páronként idegen ciklusokra bontott alakban kérjük).

(a) $\pi(1\ 2\ 3) = (3\ 4\ 1)(2\ 5\ 6)$, (b) $(2\ 6\ 4)\pi(4\ 6\ 2) = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 7)$.

8.5. feladat.(165) Adjuk meg a következő permutációkat páronként idegen ciklusokra bontott alakban, valamint döntsük el, hogy párosak, illetve páratlanok-e.

(a) $\varphi\colon [9] \to [9],\ x \mapsto 5x \pmod 9$, (b) $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 5 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} \in S_8$,

(c) $\delta = (1\ 2\ 3\ 4)(1\ 5\ 7)^{-1}(2\ 4\ 3\ 6) \in S_7$.

8.6. feladat.(166) Oldjuk meg a következő egyenleteket (a megoldást páronként idegen ciklusokra bontott alakban kérjük).

(a) $\pi^2 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, $\pi \in S_5$, (b) $\pi^2 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, $\pi \in S_{10}$, (c) $\pi^2 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$, $\pi \in S_{10}$.

8.7. feladat.(167) Adjuk meg a következő permutációkat páronként idegen ciklusokra bontott alakban, valamint döntsük el, hogy párosak, illetve páratlanok-e.

(a) $\varphi\colon [9] \to [9],\ x \mapsto 4x \pmod 9$, (b) $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 5 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix} \in S_8$,

(c) $\delta = (1\ 2\ 4)(2\ 5\ 6\ 7)^{-1}(2\ 5\ 3\ 6) \in S_7$.

8.8. feladat.(168) Adjuk meg a következő permutációkat páronként idegen ciklusokra bontott alakban, valamint döntsük el, hogy párosak, illetve páratlanok-e.

(a) $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)^4$, (b) $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)^{6000}$, (c) $\left((1\ 2\ 3\ 4)(8\ 2\ 7)^{-1}(7\ 1\ 5\ 6)\right)^{340}$.

8.9. feladat.(169) Adjuk meg a következő permutációkat páronként idegen ciklusokra bontott alakban, valamint döntsük el, hogy párosak, illetve páratlanok-e.

(a) $\varphi\colon [8] \to [8],\ x \mapsto 5x \pmod 8$, (b) $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 2 & 3 & 5 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix} \in S_8$,

(c) $\delta = (1\ 2\ 3\ 4)(2\ 5\ 7)^{-1}(2\ 5\ 3\ 6) \in S_7$.

8.10. feladat.(170) Oldjuk meg a következő egyenleteket (a megoldást páronként idegen ciklusokra bontott alakban kérjük).

(a) $(1\ 2\ 3)\pi = (3\ 4\ 1)(2\ 5\ 6)$, (b) $(1\ 2\ 3)\pi(2\ 6\ 4) = (1\ 2\ 4)(3\ 5\ 7)$.

8.11. feladat.(171) Oldjuk meg a következő egyenleteket (a megoldást páronként idegen ciklusokra bontott alakban kérjük).

(a) $\pi(1\ 2\ 3\ 4) = (3\ 4\ 1)(2\ 5\ 7)$, (b) $(3\ 2\ 1)\pi(1\ 2\ 3) = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 7\ 6)$.

8.12. feladat.(172) Adjuk meg a következő permutációkat páronként idegen ciklusokra bontott alakban, valamint döntsük el, hogy párosak, illetve páratlanok-e.

(a) $\varphi\colon [7] \to [7],\ x \mapsto 3x \pmod 7$,

(b) $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix} \in S_8$,

(c) $\delta = (1\ 2\ 3\ 4)(3\ 5\ 6)^{-1}(7\ 4\ 3\ 6) \in S_7$.

8.13. feladat.(173) Adjuk meg a következő permutációkat páronként idegen ciklusokra bontott alakban, valamint döntsük el, hogy párosak, illetve páratlanok-e.

(a) $\varphi\colon [8] \to [8],\ x \mapsto 3x \pmod 8$,

(b) $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix} \in S_8$,

(c) $\delta = (1\ 2\ 3)(2\ 3\ 7)^{-1}(2\ 5\ 7\ 6) \in S_7$.

8.14. feladat.(174) Oldjuk meg a következő egyenleteket (a megoldást páronként idegen ciklusokra bontott alakban kérjük).

(a) $\pi^3 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5),\ \pi \in S_5$,

(b) $\pi^3 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5),\ \pi \in S_{10}$,

(c) $\pi^4 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6),\ \pi \in S_{10}$.

8.15. feladat.(175) Adjuk meg a következő permutációkat páronként idegen ciklusokra bontott alakban, valamint döntsük el, hogy párosak, illetve páratlanok-e.

(a) $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)^6$,

(b) $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)^{1111}$,

(c) $\big((1\ 2\ 3\ 4)(2\ 3\ 7)^{-1}(3\ 1\ 2\ 5\ 6)\big)^{333}$.

$\ulcorner \oplus \ominus \otimes \oslash \odot \urcorner$

9. feladatsor (Számosságok)

9.1. feladat.[176] Határozzuk meg $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ halmaz számosságát. (Lehetséges válaszok: $0, 1, 2, \dots, \aleph_0, \mathfrak{c}$). A választ természetesen indokolni kell.

9.2. feladat.[177] Adjunk meg bijekciót az $(0, 1)$ és $[0, 1]$ halmazok között.

9.3. feladat.[178] Határozzuk meg a $\mathbb{Q}^2$ halmaz számosságát. (Lehetséges válaszok: $0, 1, 2, \dots, \aleph_0, \mathfrak{c}$). A választ természetesen indokolni kell.

9.4. feladat.[179] Adjunk meg bijekciót

(a) az $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}^+$ halmazok között, és

(b) az $\{a \in \mathbb{N} : a \geqslant 10\}$ és a $\{2z : z \in \mathbb{Z}\}$ halmazok között.

9.5. feladat.[180] Fixpontmentesnek nevezünk egy π permutációt, ha minden elemet mozgat. Határozzuk meg S_6-ban a

(a) fixpontmentes permutációk számát,

(b) fixpontmentes páros permutációk számát.

9.6. feladat.[181] Adjunk meg bijekciót a

(a) $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, valamint a

(b) $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$

halmazok között.

9.7. feladat.[182] Határozzuk meg S_8 azon páros permutációt, melyek pontosan

(a) 1,
(b) 2,
(c) 3,
(d) 4.

elemet mozgatnak.

9.8. feladat.[183] Adjuk meg S_{12} összes olyan páros π permutációját, amelyre $\pi^6 = \mathrm{id}$, és π 6-nál kisebb pozitív hatványai nem identikusak.

9.9. feladat.[184] Adjunk meg $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$

(a) szürjektív leképezést, és

(b) injektív leképezést.

9.10. feladat.[185] Adjunk meg bijekciót az $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ és $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmazok között.

9.11. feladat.[186] Határozzuk meg S_5-ben, S_7-ben, illetve S_9-ben az olyan permutációk számát, melyek páronként idegen ciklusokra bontott alakjában egy 3 és egy 4 hosszú ciklus van.

9.12. feladat.[187] Határozzuk meg S_6 azon elemeit, amelyek pontosan

(a) 1,
(b) 2,
(c) 3,
(d) 4.

elemet mozgatnak.

9.13. feladat.[188] Adjunk meg bijekciót az $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazok között.

9.14. feladat.[189] Határozzuk meg az $\mathbb{N} \times \{1, 2\}$ halmaz számosságát. (Lehetséges válaszok: $0, 1, 2, \dots, \aleph_0, \mathfrak{c}$.) A választ természetesen indokolni kell.

9.15. feladat.[190] Adjunk meg szürjektív leképezést $\mathbb{R}$-ről $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$-re.

9.16. feladat.[191] Határozzuk meg a $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ halmaz számosságát. (Lehetséges válaszok: $0, 1, 2, \dots, \aleph_0, \mathfrak{c}$.) A választ természetesen indokolni kell.

9.17. feladat.[192] Adjuk meg S_6 összes olyan π permutációját, amelyre $\pi^4 = \mathrm{id}$, és π 4-nél kisebb pozitív hatványai nem identikusak.

9.18. feladat.[193] Adjunk meg bijekciót

(a) az $(1, 5)$ és $\mathbb{R}$ halmazok között, és

(b) az $(1, 5)$ és $\mathbb{R}^+$ halmazok között.

9.19. feladat.[194] Képzeljünk el egy szállodát, amelynek megszámlálhatóan végtelen sok szobája van, de már minden szoba foglalt.

(a) Egy újabb vendég szeretne megszállni a szállodában. Hogyan tud a portás helyet biztosítani neki?

(b) Újabb 999999 vendég érkezik. Hogyan lehetne őket elszállásolni.

(c) A szomszéd utcában lévő hasonló végtelen szállodában tűz ütött ki, és onnan mindenki ebbe a szállodába menekül. Hogyan tudja őket elhelyezni a portás?

9.20. feladat.[195] Fixpontmentesnek nevezünk egy π permutációt, ha minden elemet mozgat. Határozzuk meg S_5-ben a

(a) fixpontmentes permutációk számát,

(b) fixpontmentes páratlan permutációk számát.

9.21. feladat.[196] Adjunk meg bijekciót

(a) a hárommal nem osztható pozitív egész számok és a páros számok között,

(b) az $\{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$ halmaz és $\mathbb{R}$ között.

9.22. feladat.[197] Határozzuk meg S_5-ben, hogy melyik ciklus-típusú permutációból hány van (a ciklus-típus a páronként idegen ciklusokra bontott alakban szereplő ciklusok hosszaiból képzett monoton növekvő sorozat).

$\oplus \; \ominus \; \otimes \; \oslash \; \odot$

10. feladatsor (Relációk, osztályozások)

10.1. feladat.[198] Hány olyan ekvivalenciája van a $\underline{8}$ halmaznak, melyhez tartozó osztályozásnak

(a) 3 osztálya van, melyek elemszáma 1,2 és 5, (b) 3 osztálya van.

10.2. feladat.[199] Add meg a φ leképezés magjához tartozó osztályozást.

(a) $\varphi\colon \underline{4}\times\underline{4}\to\mathbb{N},\ (x,y)\mapsto x$, (b) $\varphi = (1\ 3\ 4)(5\ 4)\in S_5$.

10.3. feladat.[200] Döntsük el az alábbi relációkról, hogy reflexívek, szimmetrikusak, antiszimmetrikusak, tranzitívak, illetve dichotómok-e.

(a) $\big\{(a,b) : a^2+b^2=1\big\}$ a valós számok $\mathbb{R}$ halmazán,

(b) $\big\{(a,b) : a^2+b^2=1\big\}$ a $[0,1]$ halmazon,

(c) $\{((a,b),(c,d)) : a+d=b+c\}$ az $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ halmazon.

10.4. feladat.[201] Add meg az A halmazon értelmezett ρ ekvivalenciához tartozó osztályozást.

(a) $A=\underline{4}$, $\rho=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1)\}$, (b) $A=\mathbb{Z}$, $\rho=\{(x,y) : xy>0 \text{ vagy } x=y=0\}$.

10.5. feladat.[202] Add meg a φ leképezés magjához tartozó osztályozást.

(a) $\varphi\colon \mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\})\to\mathbb{N},\ A\mapsto|A|$, (b) $\varphi=(1\ 3\ 5)(2\ 4)\in S_5$.

10.6. feladat.[203] Hány eleme van azon $\rho\subseteq\underline{7}\times\underline{7}$ ekvivalenciának, melynek

(a) 2 osztálya van, melyek elemszáma 3 és 4, (b) 4 osztálya van, melyek elemszáma $1,2,2,2$.

10.7. feladat.[204] Add meg az A halmazon értelmezett ρ ekvivalenciához tartozó osztályozást.

(a) $A=\{1,2,3,4\}$, $\rho=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$,

(b) $A=\mathbb{Z}$, $\rho=\{(x,y) : (\exists a\in\mathbb{Z})(3a\leqslant x,y<3a+3)\}$.

10.8. feladat.[205] Döntsük el az alábbi relációkról, hogy reflexívek, szimmetrikusak, antiszimmetrikusak, tranzitívak, illetve dichotómok-e.

(a) $\{(1,2),(1,5),(1,6),(2,5),(3,2),(3,5),(4,5),(6,5)\}$ az $\mathbb{N}$ halmazon,

(b) $\{(a,b) : |a-b|>1\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon.

10.9. feladat.[206] Adj meg olyan relációt (bármilyen halmazon), mely

(a) reflexív és szimmetrikus, de nem tranzitív, (b) reflexív és tranzitív, de nem szimmetrikus,

(c) szimmetrikus és tranzitív, de nem reflexív.

10.10. feladat.[207] Adjunk meg olyan osztályozást a $\underline{8}$ halmazon, melynek 3 osztálya van, és melyhez tartozó ρ ekvivalenciára teljesülnek a következő feltételek:

(a) $(1,3),(2,6)\in\rho$, (b) $(1,2)\in\rho$, $(1,3),(2,4),(3,5)\notin\rho$.

10.11. feladat.[208] Legyen ρ az $\underline{6}$ halmaz megadott osztályozáshoz tartozó ekvivalencia. Hány eleme van ρ-nak? Add meg ρ legalább 5 olyan (x,y) elemét, melyekre $x\neq y$.

(a) $\{\{1,4\},\{2,5,6\},\{3\}\}$, (b) $\{\{1,4\},\{2,3\},\{5,6\}\}$.

10.12. feladat.[209] Döntsük el az alábbi relációkról, hogy reflexívek, szimmetrikusak, antiszimmetrikusak, tranzitívak, illetve dichotómok-e.

(a) $\{(1,5),(2,5),(3,1),(3,5),(3,2),(4,2),(4,6)\}$ az $\mathbb{N}$ halmazon,

(b) $\{(e,f) : e$ és f-nek van közös pontja$\}$ a sík egyeneseinek halmazán.

10.13. feladat.[210] Hány eleme van azon $\rho\subseteq\underline{7}\times\underline{7}$ ekvivalenciarelációnak, amelynek

(a) 3 osztálya van, melyek elemszáma $1,2,4$, (b) 3 osztálya van, melyek elemszáma $2,2,3$.

10.14. feladat.[211] Hány eleme lehet egy A halmazon megadott $\rho\subseteq A\times A$ ekvivalenciarelációnak, ha

(a) $|A|=1$, (b) $|A|=2$, (c) $|A|=4$.

10.15. feladat.[212] Döntsük el az alábbi relációkról, hogy reflexívek, szimmetrikusak, antiszimmetrikusak, tranzitívak, illetve dichotómok-e.

(a) $\{(a,b) : |a|=|b|\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon, (b) $\{(a,b) : a/b\leqslant b/a\}$ az $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ halmazon.

10.16. feladat.[213] Hány olyan ekvivalenciája van a $\underline{7}$ halmaznak, melyhez tartozó osztályozásnak

(a) 4 osztálya van, melyek elemszáma $2, 2, 5$,

(b) 3 osztálya van.

10.17. feladat.(214) Adjunk meg olyan osztályozást a $\underline{8}$ halmazon, melynek 3 osztálya van, és melyhez tartozó ρ ekvivalenciára teljesülnek a következő feltételek:

(a) $(1, 2), (3, 4) \in \rho$,

(b) $(1, 3) \in \rho$, $(3, 5), (2, 7), (3, 4) \notin \rho$.

$\oplus \ominus \otimes \oslash \odot$