MTNM113E: Leképezések, permutációk

(előadásvázlat, 2022. október 10.)

Maróti Miklós, Kátai-Urbán Kamilla

1. Leképezések

Jelölje $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát, $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát, és $\mathbb{R}_0^+$ a nem negatív valós számok halmazát.

Jelölje $\emptyset$ az üreshalmazt, azaz azt a halmazt, amelynek nincsen eleme.

1. Definíció. Tetszőleges A, B halmazokra definiáljuk a Descartes-szorzatukat:

$$A \times B = \{\, (a, b) : a \in A \text{ és } b \in B \,\}.$$

2. Példa. Az $A = \{1, 2\}$ kételemű és $B = \{3, 4, 5\}$ háromelemű halmazok Descartes-szorzata az $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$ hatelemű halmaz.

Vegyük észre, hogy $\emptyset \times B = \emptyset$, ugyanis ha (a, b) eleme lenne a Descartes-szorzatnak, akkor $a \in \emptyset$ lenne, ami nem lehet.

3. Definíció. Leképezésnek hívjuk $A \times B$ egy ϱ részhalmazát, ha teljesül, hogy minden $a \in A$ elemre pontosan egy $b \in B$ elem létezik, amelyre $(a, b) \in \varrho$ teljesül. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az a elem ϱ melletti képe b, és azt írjuk, hogy $a\varrho = b$. Ekkor az a elemet a b elem ősének nevezzük. Ezzel a jelöléssel a ϱ leképezés a következőképpen adható meg: $\varrho\colon A \to B$, $a\varrho = b$.

Az A halmazt indulási halmaznak, a B halmazt érkezési halmaznak nevezzük. Ha $A = B$, azaz az indulási és érkezési halmaz megegyzik, akkor a leképezést transzformációnak nevezzük.

4. Jelölés. Az A halmazból B-be menő összes leképezés halmazát B^A-val jelöljük.

5. Példa. Tekintsük a $\varrho = \{(x, y) \in A \times A\colon |x| = y\}$ halmazt, ahol $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Ekkor $\varrho = \{(-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$ leképezés, mert minden A-beli elemnek pontosan egy képe létezik, hiszen a számok abszolútértéke egyértelműen meghatározott. Használhatjuk a $\varrho\colon A \to A$, $x\varrho = |x|$ jelölést is.

6. Példa. Vegyük a $\varrho = \{\, (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = y^2 \,\}$ halmazt, ez nem leképezés, ugyanis például $(4, 2)$, és $(4, -2)$ is eleme ϱ-nak.

7. Definíció. Tetszőleges A halmazon definiáljuk az identikus leképezést:

$$\mathrm{id}_A = \{\, (a, b) \in A \times A : a = b \,\},$$

a másik jelölést használva:

$$\mathrm{id}_A\colon A \to A, \quad a\,\mathrm{id}_A = a$$

8. Definíció. A $\varrho\colon A \to B$ és a $\sigma\colon B \to C$ leképezések szorzatán a $\varrho\sigma\colon A \to C$ $a(\varrho\sigma) = (a\varrho)\sigma$ leképezést értjük.

9. Példa. Tekintsük a $\varrho\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $x\varrho = 5|x| + 1$ és a $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x\sigma = \frac{6}{x}$ leképezéseket. Ekkor a szorzatuk a $\varrho\sigma\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $x(\varrho\sigma) = (x\varrho)\sigma = (5|x| + 1)\sigma = \frac{6}{5|x|+1}$ leképezés.

10. Tétel. Tetszőleges $\varrho\colon A \to B$, $\sigma\colon B \to C$ és $\tau\colon C \to D$ leképezésekre $(\varrho\sigma)\tau = \varrho(\sigma\tau)$, azaz a szorzás asszociatív.

11. Állítás. A leképezések szorzása nem kommutatív.

12. Definíció. A $\varrho\colon A \to B$ leképezés szürjektív, ha az érkezési halmaz minden eleme előfordul képelemként, azaz ha

$$(\forall b \in B)(\exists a \in A)(a\varrho = b).$$

A $\varrho\colon A \to B$ leképezés injektív, ha különböző elemek képe különböző, azaz ha

$$(\forall a_1, a_2 \in A)(a_1\varrho = a_2\varrho \to a_1 = a_2).$$

A ϱ leképezés bijektív, ha szürjektív és injektív is.

13. Példa. Az 5. példában szereplő leképezés nem szürjektív, mert például a -1 nem forul elő képként, és nem is injektív, mert a -2 és a 2 képe megegyezik.

14. Definíció. A $\varrho \subseteq A \times B$ leképezés inverze a következő:

$$\varrho^{-1} = \{(b,a) \in B \times A \colon (a,b) \in \varrho\}.$$

15. Tétel. A ϱ leképezés inverze akkor és csak akkor leképezés, ha ϱ bijektív.

16. Tétel. Tetszőleges $\varrho \colon A \to B$ és $\sigma \colon B \to C$ leképezésekre

(1) ha ϱ és σ szürjektív, akkor $\varrho\sigma$ is szürjektív;
(2) ha ϱ és σ injektív, akkor $\varrho\sigma$ is injektív;
(3) ha ϱ és σ bijektív, akkor $\varrho\sigma$ is bijektív;
(4) ha $\varrho\sigma$ szürjektív, akkor σ szürjektív;
(5) ha $\varrho\sigma$ injektív, akkor ϱ injektív;
(6) ha $\varrho\sigma$ bijektív, akkor ϱ injektív és σ szürjektív;

17. Tétel. Tetszőleges $\varrho \colon A \to B$, $\sigma \colon B \to C$ bijektív leképezésre

(1) ϱ^{-1} is bijektív,
(2) $\varrho\varrho^{-1} = \mathrm{id}_A$,
(3) $\varrho^{-1}\varrho = \mathrm{id}_B$,
(4) $(\varrho\sigma)^{-1} = \sigma^{-1}\varrho^{-1}$.

2. Permutációk

18. Definíció. Az A halmaz permutációin a $\pi : A \to A$ bijektív leképezéseket értjük. Az A halmaz összes permutációinak halmazát $\mathrm{Sym}(A)$-val jelöljük, speciálisan tetszőleges n pozitív egészre az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz összes permutációinak halmazát S_n jelöli.

19. Jelölés. A $\pi \in S_n$ permutációt megadhatjuk elempárok halmazaként: $\pi = \{(1, 1\pi), (2, 2\pi), \ldots, (n, n\pi)\}$, vagy kétsoros írásmóddal:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1\pi & 2\pi & \cdots & n\pi \end{pmatrix}$$

20. Példa. Ha $\alpha \in S_3$ az a permutáció, amelyre $1\alpha = 2$, $2\alpha = 1$ és $3\alpha = 3$, akkor

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \{(1,2), (2,1), (3,3)\}.$$

21. Példa. Számoljuk ki az

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ és } \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

permutációk szorzatát. A 8. tétel alapján az elemek képe a következőképpen számolható:

$$\begin{aligned} 1(\alpha\beta) &= (1\alpha)\beta = 2\beta = 3, \\ 2(\alpha\beta) &= (2\alpha)\beta = 1\beta = 2, \\ 3(\alpha\beta) &= (3\alpha)\beta = 3\beta = 1, \end{aligned}$$

azaz

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ne felejtsük el, hogy a leképezésszorzás, és így speciálisan a permutációszorzás nem kommutatív. Például ebben az esetben is a szorzást fordított sorrendben elvégezve, más permutációt kapunk:

$$\beta\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Most számoljuk ki β inverzét. Mivel

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \{(1,2), (2,3), (3,1)\}$$

ezért

$$\beta^{-1} = \{(2,1),\, (3,2),\, (1,3)\} = \{(1,3),\, (2,1),\, (3,2)\} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

22. Definíció. A $\pi \in S_n$ permutáció az $x \in \{1, \ldots, n\}$ elemet mozgatja, ha $x\pi \neq x$. A $\pi \in S_n$ által mozgatott elemek halmazát M_π-vel jelöljük, azaz

$$M_\pi = \{\, x \in \{1, \ldots, n\} : x\pi \neq x \,\}.$$

23. Példa. Az

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

permutáció által mozgatott elemek halmaza $M_\alpha = \{1, 2\}$.

24. Definíció. A $\pi, \sigma \in S_n$ permutációkat idegennek nevezzük, ha $M_\pi \cap M_\sigma = \emptyset$.

25. Tétel. Ha a $\pi, \sigma \in S_n$ permutációk idegenek, akkor $\pi\sigma = \sigma\pi$.

26. Definíció. Permutációk pozitív egész kitevős hatványát természetes módon értelmezhetjük: $\pi \in S_n$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\pi^k = \pi \cdot \ldots \cdot \pi$ (k darab π szorzata). A nulladik hatvány az identikus permutáció: $\pi^0 = \mathrm{id}$, a negatív kitevős hatványt pedig az inverz segítségével definiáljuk: $\pi^{-k} = (\pi^k)^{-1}$.

27. Tétel. Tetszőleges $\pi, \sigma \in S_n$ permutációk és $m, k \in \mathbb{Z}$ esetén

(1) $\pi^m \pi^k = \pi^{m+k}$,
(2) $(\pi^m)^k = \pi^{mk}$,
(3) ha π és σ idegenek, akkor $(\pi\sigma)^k = \pi^k \sigma^k$.

28. Definíció. Legyen $n \geq k \geq 2$, és az $a_1, \ldots, a_k \in \{1, \ldots, n\}$ elemek páronként különbözőek. Ekkor azt a $\pi \in S_n$ permutációt, amelyre

$$a_1\pi = a_2, \quad a_2\pi = a_3, \quad \ldots \quad a_{k-1}\pi = a_k, \quad a_k\pi = a_1,$$

és $x\pi = x$ minden $x \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$ elemre, ciklusnak nevezzük és röviden így jelöljük:

$$\pi = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_k).$$

A k számot a ciklus hosszának nevezzük. A 2 hosszúságú ciklusokat transzpozícióknak hívjuk.

29. Példa. Az

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

permutáció ciklus, mivel a $k = 2$, $a_1 = 1$ és $a_2 = 2$ választással éppen ezt a permutációt kapjuk, azaz $\alpha = (1\ 2)$. Mivel α hossza éppen 2, ezért α transzpozíció is. A

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

permutáció szintén ciklus, és $\beta = (1\ 2\ 3)$.

30. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy egy permutáció ciklusos alakban való megadása nem egyértelmű! Egyrészt ugyanazt a permutációt többféleképpen is felírhatjuk ciklusként:

$$(1\ 2\ 3) = (2\ 3\ 1) = (3\ 1\ 2).$$

A másik probléma pedig az, hogy az $(1\ 2\ 3)$ permutációról nem tudjuk eldönteni, hogy S_3 vagy esetleg S_4 eleme-e. Természetesen ha S_3-beli permutációkról beszélünk, akkor

$$(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

viszont S_4-ben már

$$(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

és ez a két permutáció nem ugyanaz. Ugyan ez a probléma az identikus permutáció „id” jelölésével is, arról sem lehet eldönteni, hogy melyik S_n halmazban használjuk.

31. Példa. Természetesen nem minden permutáció ciklus, például a következő π permutáció sem ciklus, de előáll ciklusok szorzataként:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)(4\ 5).$$

32. Tétel. Minden S_n-beli permutáció előáll páronként idegen ciklusok szorzataként, és ez az előállítás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelműen meghatározott. (Az identikus permutációt ciklusok üres szorzatának tekintjük.)

33. Példa. Adjuk meg a $\pi = (5\ 2\ 3\ 4)(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7)$ permutációt páronként idegen ciklusok szorzataként. Tekintsük azokat az elemeket, melyeket a szorzat valamely tényezője mozgat: $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$. Vegyünk ki ezek közül egy elemet, mondjuk az 1-et, és számoljuk ki, hogy ezt a π permutáció milyen elembe viszi át:

$$1\pi = 1(5\ 2\ 3\ 4)(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 1(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 3(4\ 3\ 7) = 7,$$

azaz az első ciklus nem mozgatta 1-et, a második ciklus 1-et 3-ba vitte, majd azt a harmadik ciklus 7-be. Így a π permutáció 1-et 7-be vitte. Ezután a kapott elem, a 7 képét keressük meg a π melett, és így tovább, azaz

$$7\pi = 7(5\ 2\ 3\ 4)(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 7(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 7(4\ 3\ 7) = 4,$$
$$4\pi = 4(5\ 2\ 3\ 4)(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 5(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 1(4\ 3\ 7) = 1.$$

Visszaértünk az 1-hez, ahhoz az elemhez, amiből kiindultunk, tehát megvan az első ciklusunk: (1 7 4). A maradék elemekből vegyük a következőt, mondjuk 2-t, és számoljuk ki hogy ezt π milyen elembe viszi át, és így tovább folytatva megkapjuk a π permutációt páronként idegen ciklusok szorzatára bontott alakban:

$$\pi = (1\ 7\ 4)(2\ 5).$$

34. Tétel. Tetszőleges $\pi = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_k) \in S_n$ ciklusra

(1) $\pi^{-1} = (a_k\ a_{k-1}\ \cdots\ a_1)$,
(2) $\pi^k = \mathrm{id}$,
(3) Ha $k \mid i - j$, akkor $\pi^i = \pi^j$.

35. Tétel. Tetszőleges ciklus felírható transzpozíciók szorzataként, mégpedig

$$(a_1\ a_2\ a_3\ \cdots\ a_k) = (a_1\ a_2)(a_1\ a_3)\cdots(a_1\ a_k).$$

Következésképpen, minden permutáció transzpozíciók szorzatára bontható (de ez általában nem egyértelmű).

36. Példa. (1 2 3 4)(5 6) = (1 2)(1 3)(1 4)(5 6), de mivel (1 2 3 4) = (2 3 4 1), ezért (1 2 3 4)(5 6) = (2 3)(2 4)(2 1)(5 6), vagy (1 2 3 4)(5 6) = (2 3)(5 6)(2 4)(2 1), mert idegen transzpozíciók felcserélhetők.

37.* Tétel. Minden permutáció vagy csak páros vagy csak páratlan sok transzpozíció szorzataként írható fel.

38. Definíció. A $\pi \in S_n$ permutációt párosnak nevezzük, ha felbontható páros sok transzpozíció szorzatára. A nem páros permutációkat páratlannak nevezzük. Továbbá definiáljuk a következő függvényt:

$$\mathrm{sgn}(\pi) = \begin{cases} +1, & \text{ha } \pi \text{ páros}, \\ -1, & \text{ha } \pi \text{ páratlan}. \end{cases}$$

39. Tétel. Legyen $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tetszőleges négyzetes mátrix. Ekkor

$$|A| = \sum_{\pi\in S_n} \mathrm{sgn}(\pi) \cdot a_{1,1\pi} \cdot a_{2,2\pi} \cdots a_{n,n\pi}.$$